৭

কালীন সারি
(Time Series)

সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে আমাদের দৈনন্দিন জীবন পরিচালনার সাথে সংশ্লিষ্ট বিভিন্ন জিনিসের একটা পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায়। যেমন, সময়ের পরিবর্তনে জমিতে উৎপাদনের পরিবর্তন, দ্রব্যের মূল্যের পরিবর্তন, দেশের শিক্ষার মানের পরিবর্তন ইত্যাদি। সময়ের পরিবর্তনে পরিবর্তিত তথ্য রাশিকে কালীন সারি বলে। এ ইউনিটে সময়ের পরিবর্তনে দ্রব্য মূল্য, উৎপাদন ইত্যাদির কেন পরিবর্তন হয়, কী কী উৎপাদক পরিবর্তনের কারণ হিসেবে কাজ করে এগুলো নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। কালীন সারির এ ইউনিটে মোট দুটি পাঠ রয়েছে। প্রথম পাঠে কালীন সারি এবং এর একটা উপাদান, গতিধারা সম্বন্ধে আপনি জানতে পারবেন। দ্বিতীয় পাঠে জানতে পারবেন, কালীন সারির বাকী উপাদানগুলো সম্বন্ধে, অর্থাৎ ঋতুজভেদ, চক্রক্রমিক উঠানামা এবং অনিয়মিত ভেদ সম্পর্কে। আসুন, তাহলে পর্যায়ক্রমে বিভিন্ন পাঠে যাওয়া যাক।

এই পৃষ্ঠা খালি থাকবে

ইউনিট-৭

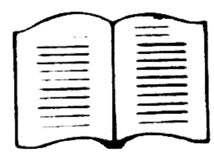
পাঠ-১ : কালীন সারি ও গতিধারার পরিমাপ
(Time Series and Calculation of Movement)

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- ♦ কালীন সারির সংজ্ঞা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- ♦ কালীন সারির বিভিন্ন উপাদানের নাম বলতে পারবেন
- ♦ কালীন সারির বিভিন্ন মডেলগুলোর সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন
- ♦ কালীন সারির গুরুত্ব বা ব্যবহার বর্ণনা করতে পারবেন
- ♦ কালীন সারির উপাদান, গতিধারার পরিমাপসমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- ♦ গতিধারার পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতিতে তথ্যসমূহকে লেখ-এর মাধ্যমে উপস্থাপন করতে পারবেন।

কালীন সারি কী



আপনি জানেন যে সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে কোন তথ্যসারি, যেমন - কোন জিনিসের উৎপাদন বা দাম এগুলোর পরিবর্তন হয়। ধরুন, ১ বিঘা জমিতে ১৯৮০ সালে ২০ মন ধান উৎপাদিত হলো এবং একই জমিতে ১৯৮১ সালে ২৫ মন ধান উৎপাদিত হলো। তাহলে প্রশ্ন জাগে, উৎপাদন বৃদ্ধির কারণ কী? অন্যদিকে উৎপাদন হ্রাসও হতে পারত। এই যে সময়ের সাথে চলকের পরিবর্তন - ব্যবসায় বা অর্থনীতিতে এর বিশ্লেষণ অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কারণ আপনিই বলুন, বাংলাদেশের জনসংখ্যার বৃদ্ধির সাথে সাথে খাদ্য, বস্ত্রের উৎপাদন বৃদ্ধি, কর্মসংস্থান সৃষ্টি না করলে অর্থনীতি বিপর্যয়ের দিকে এগিয়ে যেতে বাধ্য নয় কী? কাজেই সরকারকে সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে ঐ সকল চলকের (জনসংখ্যা, খাদ্য, বস্ত্র, কর্মসংস্থান) পরিবর্তন বিশ্লেষণ করে ভবিষ্যত সিদ্ধান্ত গ্রহণ করতে হবে। এই কালীন সারি হচ্ছে সময়ের পরিবর্তনের সাথে পরিসংখ্যানের সাজানো তথ্যমালা। অর্থাৎ, নির্দিষ্ট সময় অন্তর সংগৃহীত কোন চলকের মানের শ্রেণীকে কালীন সারি বলে।

> সময় পরিবর্তনের সাথে সংশ্লিষ্ট পরিবর্তিত তথ্যরাশিকে কালীন সারি বলা হয়।

Z. Hirsch এর ভাষায়, "A time series is a sequence of values of some variate corresponding to successive points in time".

অর্থাৎ কোন নির্দিষ্ট সময়ের বরাবরে সাজানো চলকের উৎপাদন বা মূল্যকে কালীন সারি বলা হয়।

Ya-lum Chou এর ভাষায় "A time series may be defined as a collection of readings belonging to different time periods, of some economic variable or composite of variables". অর্থাৎ বিভিন্ন সময়ের অর্থনৈতিক চলক বা চলকসমূহের সংগ্রহ হচ্ছে কালীন সারি।

কাজেই আপনি Z. Hirsch এবং Ya-lum Chou এর কালীন সারির সংজ্ঞাতে উল্লেখযোগ্য কোন পার্থক্য দেখতে পাচ্ছেন না। অর্থাৎ কালীন সারি হলো সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে সময়ের বরাবরে অর্থনৈতিক তথ্যসমূহের বিন্যস্ত বা সাজানো অবস্থা। যেমন - প্রতি বৎসরের ভিত্তিতে গত ১০ বৎসরের কৃষি উৎপাদন বা ১২ বছরের দেশের জনসংখ্যা।

> কালীন সারি হলো সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে সময়ের বরাবরে অর্থনৈতিক তথ্যসমূহের বিন্যস্ত বা সাজানো অবস্থা।

গাণিতিকভাবে কালীন সারিকে একটি কার্যকর সম্পর্কের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। যেমন- $U_t = f(t)$. অর্থাৎ, t_1, t_2 ------ t_n সময়ে যদি কোন চলকের মান u_1, u_2 ------ u_n হয়, তবে

$t : t_1, t_2$ ------ t_n

$U_t : u_1, u_2$ ------ u_n

এখানে u হচ্ছে t এর একটি ফাংশন। অর্থাৎ, t পরিবর্তনের সাথে সাথে u এর মান পরিবর্তিত হচ্ছে।

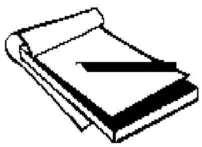
কালীন সারি বিশ্লেষণ হলো- সময়ের সাথে সংগৃহীত যে তথ্য চলক, সেই তথ্য চলকের বিশ্লেষণ।

তাহলে কালীন সারি কাকে বলে নিশ্চয় বুঝতে পেরেছেন। আপনি এখন প্রশ্ন করতে পারেন, কালীন সারির বিশ্লেষণ কী? কালীন সারি বিশ্লেষণ হলো - সময়ের সাথে সংগৃহীত যে তথ্য চলক, সেই তথ্য চলকের বিশ্লেষণ।

কালীন সারির উপাদান

আপনি জানলেন যে, সময়ের পরিবর্তনে তথ্যমানের পরিবর্তন হয়। কেন তথ্যের এই পরিবর্তনগুলো হয়? তথ্যমানের এরূপ ভিন্নতা নানাবিধ কারণের উপর নির্ভরশীল। কালীন সারি বিশ্লেষণে এরূপ কারণসমূহকে প্রধানত চারভাগে ভাগ করা হয়েছে। এর প্রত্যেক ভাগকে কালীন সারির উপাদান বলে। এখন উপাদানগুলোর শুধু নাম জেনে নিন। এরপর ধাপে ধাপে আসছি এদের সংজ্ঞা, পরিমাপ এবং অন্যান্য আলোচনায়। তাহলে কালীন সারির উপাদানগুলো হলো—

- গতিধারা বা দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা (T) (Trend or Secular Trend)
- ঋতুগত ভেদ (S) (Seasonal Variation)
- চক্র ক্রমিক পরিবর্তন (C) (Cyclical Fluctuation)
- অনিশ্চিত বা অনিয়মিত গতি (I) (Random or Irregular Movement)



অনুশীলন
সময়ের বিবর্তনে মানের প্রতিনিয়ত পরিবর্তন হয় এমন পাঁচটি চলকের উদাহরণ দিন এবং প্রতিটি চলকের এরূপ মানের পরিবর্তনের অন্ততঃ তিনটি করে কারণ উল্লেখ করুন।

কালীন সারি বিশ্লেষণের সমস্যা

কালীন সারি বিশ্লেষণের বেশ কিছু সমস্যা আছে। তবে এর প্রধান সমস্যাগুলো হচ্ছে -

- কালীন সারির তথ্য কোন্ উপাদান (গতিধারা বা ঋতুগত ভেদ বা চক্র ক্রমিক পরিবর্তন বা অনিশ্চিত গতি) দ্বারা কতটুকু অথবা দুই বা ততোধিক উপাদান দ্বারা যৌথভাবে কতটুকু প্রভাবিত তা সনাক্ত করা।
- উপাদানগুলো সনাক্ত করার পর ঐগুলোকে পৃথক করা, বিশ্লেষণ এবং স্বাধীনভাবে পরিমাপ করা। মনে করুন, কৃষি উৎপাদনের কথা। প্রথমে সনাক্ত করবেন কী কারণে কৃষির চলকের পরিবর্তন হচ্ছে। সনাক্ত করার পর তা কী পরিমাণে প্রভাবিত তা পরিমাপ করা। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে এইভাবে আলাদা করে সনাক্ত করে পরিমাপ খুবই জটিল এবং মাঝে মধ্যে প্রায় অসম্ভব হয়।

কালীন সারি একই সময়ে এক বা একাধিক উপাদান দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে।

এতক্ষণ কালীন সারির বিশ্লেষণের সমস্যা কী বুঝতে পারলেন। কালীন সারি বিশ্লেষণের সমস্যা আলোচনায় আপনি হয়তো অনুমান করতে পেরেছেন, কালীন সারি একই সময়ে এক বা একাধিক উপাদান দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে। এর জন্য কালীন সারিতে কয়েকটি মডেল রয়েছে বলে ধরা হয়। এই মডেলগুলো দিয়ে সহজভাবে কালীন সারিকে বিশ্লেষণের কৌশল নির্ণয় করা হয়। সেগুলো হচ্ছে,

যোগবোধক অনুমান দ্বারা বিন্যস্তকরণ (Decomposition by Additive Hypothesis)

যোগবোধক মডেল অনুযায়ী কালীন সারিকে নিচের সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$$U_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

যেখানে, U_t = t সময়ে কালীন সারির মান
T_t = t সময়ে সাধারণ গতি ধারার মান (বাৎসরিক বা দীর্ঘমেয়াদী তথ্যে পরিলক্ষিত)
S_t = t সময়ে ঋতুগত পরিবর্তন (বাৎসরিক তথ্যে পরিলক্ষিত হয় না তবে এর চেয়ে কম সময়ে পরিলক্ষিত)
C_t = t সময়ে চক্রক্রমিক ভেদ (নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর পরিলক্ষিত)
R_t = t সময়ে অনিয়মিত ভেদ (অনির্দিষ্ট সময় পরে পরিলক্ষিত)

যোগবোধক অনুমানে ধরা হয় কালীন সারির তথ্যে বিভিন্ন উপাদান যৌগিক আকারে প্রভাবিত করে।

যোগবোধক অনুমানে ধরা হয় কালীন সারির তথ্যে বিভিন্ন উপাদান যৌগিক আকারে প্রভাবিত করে। অর্থাৎ সময়ের পরিবর্তনের ফলে মানের যে পরিবর্তন হয় তা কালীন সারির বিভিন্ন উপাদানের কারণে পরিবর্তনগুলির যোগফলের মাধ্যমে হয়ে থাকে।

গুণবোধক অনুমান দ্বারা বিন্যস্তকরণ
(Decomposition by Multiplicative Hypothesis)

গুণবোধক মডেল অনুযায়ী কালীন সারিকে নিচের সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$$U_t = T_t \times S_t \times C_t \times R_t$$

গুণবোধক অনুমানে ধরা হয় কালীন সারির তথ্যে বিভিন্ন উপাদান পরস্পরের সঙ্গে গুণ আকারে প্রভাবিত করে।

এক্ষেত্রে ধরে নেওয়া হয়, কালীন সারির তথ্যে বিভিন্ন উপাদান পরস্পরের সঙ্গে গুণ আকারে প্রভাবিত করে।

তাহলে আলোচনা থেকে আপনি জানলেন কালীন সারির বিভিন্ন উপাদান এর মানকে যৌগিকভাবে বা গুণবোধক ভাবে - এই দুই প্রকারের যে কোন ভাবে প্রভাবিত করতে পারে।

কালীন সারি বিশ্লেষণের গুরুত্ব বা ব্যবহার

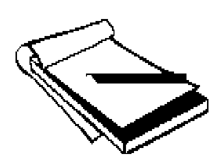
আপনার মনে প্রশ্ন আসাটা স্বাভাবিক যে, কালীন সারি বিশ্লেষণ পরিসংখ্যানে কেন প্রয়োজন। আর কেনই বা আপনার এ বিষয়টি সম্পর্কে ভাল ধারণা থাকা প্রয়োজন। কাজেই আসুন তাহলে কালীন সারি সম্পর্কে ধারণা থাকা কেন প্রয়োজন তা জেনে নেই।

কালীন সারির যথাযথ বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যবসা বাণিজ্যের ক্ষেত্রে ভবিষ্যত রূপরেখা নির্ধারণ সহজ হয়।

অর্থনীতি বা ব্যবসা বাণিজ্যের ক্ষেত্রে ভবিষ্যত রূপরেখা নির্ধারণে কালীন সারি বিশ্লেষণ অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কালীন সারির অন্তর্গত চলকের মান সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে পরিবর্তিত হয়। এই পরিবর্তন বহুবিধ কারণের (যেমন, জনসংখ্যার হ্রাস-বৃদ্ধি, নতুন প্রযুক্তিবিদ্যার প্রয়োগ, আবহাওয়া বা পরিবেশের পরিবর্তন ইত্যাদি) পারস্পরিক ক্রিয়ার ফল। কালীন সারির যথাযথ বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যবসা বাণিজ্যের ক্ষেত্রে ভবিষ্যত রূপরেখা নির্ধারণ সহজ হয়। ব্যবসা বাণিজ্য, অর্থনীতি ছাড়াও সমাজ গবেষণা, বিজ্ঞান বা ভূ-তত্ত্ব গবেষণায় কালীন সারি ব্যবহৃত হয়। কালীন সারির আরও কিছু গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার রয়েছে, সেগুলো নিয়ে আলোচনা করা যাক।

- কালীন সারির বিশ্লেষণের মাধ্যমে তথ্যসমূহের অতীত আচরণ সম্বন্ধে মূল্যায়ন করা যায়। অতীতে কোন তথ্যসারিতে কী পরিবর্তন হয়েছিল, এ পরিবর্তনে কোন কোন উৎপাদক জড়িত (অর্থাৎ পরিবর্তনের কারণ কী?) ছিল - কালীন সারির মাধ্যমে এগুলো বিশ্লেষণ করা যায়। অতীত তথ্যসমূহের এরূপ বিশ্লেষণ ও মূল্যায়নের মাধ্যমে পরবর্তীতে ঐ অবস্থার কী রকম পরিবর্তন হতে পারে সে সম্পর্কে স্বচ্ছ ধারণা পাওয়া যায়।
- কালীন সারি বিশ্লেষণ ভবিষ্যদ্বাণী করতে ও প্রয়োজনীয় পরিকল্পনা গ্রহণে সহায়তা করে। যেমন ধরুন, একজন ব্যবসায়ী বা কোন দ্রব্য উৎপাদনকারী জানতে চান, আগামী এক বৎসরে তাঁর উৎপাদিত পণ্য বাজারে কী পরিমাণ বিক্রয় হবে? এক্ষেত্রে তাঁকে কালীন সারি বিশ্লেষণের মাধ্যমে ঐ পরিমাণ নির্ধারণ করতে হবে। কেননা প্রয়োজনের অতিরিক্ত পণ্য উৎপাদনের অর্থ তাঁর ব্যবসার ক্ষতি। ধরুন, ছোট একটা বাজারে প্রতিদিন ৫/৬ মণ চালের চাহিদা আছে। একজন নতুন ব্যবসায়ী বাজারের চাহিদার উপর কালীন সারি বিশ্লেষণ না করেই সিদ্ধান্ত গ্রহণ করলেন, প্রতিদিন ২০ মণ করে চাল বাজারে তুলবেন। কালীন সারি বিশ্লেষণ ছাড়া যদি সিদ্ধান্ত এরূপ হয়, তবে ক্ষতির সম্ভাবনা থাকবেই। কাজেই ভবিষ্যতের পরিকল্পনায় কালীন সারি বিশ্লেষণ বিশেষ প্রয়োজন। সুতরাং আপনি দেখতে পাচ্ছেন কালীন সারি বিশ্লেষণ অর্থনীতি ও ব্যবসা বাণিজ্যের ক্ষেত্রে, ভবিষ্যত পরিকল্পনায় কার্যকর ভূমিকা পালন করছে।

তাহলে কালীন সারির ব্যবহার বা গুরুত্ব সম্বন্ধে জানলেন। এবার আসব আমরা কালীন সারির উপাদানগুলোতে। কালীন সারির উপাদানের যখন নামগুলি শিখেছিলেন তখন থেকেই জানেন পরবর্তীতে এদের সম্বন্ধে বিশদ আলোচনায় যেতে হবে। এখন আসুন প্রথমে যাওয়া যাক গতিধারা আলোচনায়। এ পাঠে গতিধারা আলোচনা করে শেষ করব। দ্বিতীয় পাঠে অন্যান্য উপাদানগুলোর আলোচনা করা হবে।



অনুশীলন

ব্যবসা বাণিজ্যে কালীন সারি বিশ্লেষণের গুরুত্বের কথা বিবেচনা করে উদাহরণসহ সুস্পষ্ট পাঁচটি কারণ উল্লেখ করুন।

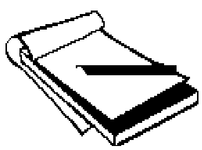
গতিধারা বা দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা (Trend or Long term Movement)

কোন তথ্য সমগ্রকের তথ্যমালার নিম্নমুখী বা উর্ধ্বমুখী প্রবণতাকে গতিধারা বা দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা বলা হয়।

গতিধারা বা দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা বলতে কালীন সারির অন্তর্গত চলকের মানের সাধারণ ঝোঁক কে বোঝায়। অর্থাৎ দীর্ঘমেয়াদে কোন চলকের মানের উচ্চমুখী বা নিম্নমুখী ঝোঁক - গতিধারা বা দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কালীন সারির অন্তর্গত কোন চলকের রেখাচিত্র সূক্ষ্মভাবে পর্যবেক্ষণ করলে রেখা চিত্রের অংশ বিশেষের উর্ধ্বগতি বা অংশ বিশেষের নিম্নগতি থাকা সত্ত্বেও এর উর্ধ্বমূখী বা নিম্নমুখী গতির একটি সাধারণ ঝোঁক পরিলক্ষিত হবে। উদাহরণ স্বরূপ ধরুন, ১ বিঘা জমির ৫ বৎসরের উৎপাদন, পর্যায়ক্রমে ২০, ২২, ২৫, ২৩, ২৬ মেট্রিক টন। তথ্যসারিতে স্পষ্ট বুঝা যাচ্ছে ঐ জমিতে উৎপাদন শুরু ছিল ২০ মেট্রিক টন এবং শেষ ছিল ২৬ মেট্রিক টন। মাঝখানে কিছুটা কমবেশি হলেও দীর্ঘমেয়াদে উর্ধ্বমুখী গতি প্রদর্শন করছে। একইভাবে দীর্ঘমেয়াদী সাধারণ ঝোঁককে গতিধারা বা দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা বলে। Melnik এর ভাষায় "Trend means general direction and shape of time series".

দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা দীর্ঘমেয়াদী সময়ের জন্য সত্য - স্বল্প মেয়াদের জন্য নয়।

দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা দীর্ঘমেয়াদী সময়ের জন্য সত্য - স্বল্প মেয়াদের জন্য নয়। সাধারণত গতিধারা দুইটি বা তিনটি ব্যবসায়িক পূর্ণ চক্রের সমান হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, জনসংখ্যা বৃদ্ধি, প্রযুক্তি বিদ্যায় উন্নতির ফলে কৃষি উৎপাদন, ধুমপান সম্পর্কে সাধারণ মানুষের সচেতনতা, এরূপ তথ্যসমূহে উর্ধ্বমুখী গতি পরিলক্ষিত হয়। আবার প্রচারাভিযানের ফলে জন্মহারে নিম্নমুখী গতি পরিলক্ষিত হচ্ছে। আবার এমনও হতে পারে কালীন সারি তথ্যে বিভিন্ন সময়ে উর্ধ্বগতি ও নিম্নগতি পরিলক্ষিত হলেও দীর্ঘমেয়াদে কোন লক্ষ্যণীয় পরিবর্তন হচ্ছেনা। যেমন, ঋতুভেদে তাপমাত্রার পরিবর্তন হলেও দীর্ঘ মেয়াদে গড় তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন হয় না। (যদিও পরিবেশগত বিভিন্ন কারণে বাংলাদেশে এখন তাপমাত্রার কিঞ্চিত হলেও উর্ধ্বগতি লক্ষ্য করা যাচ্ছে।)



অনুশীলন

"গতিধারা দীর্ঘমেয়াদী সময়ের জন্য সত্য স্বল্প মেয়াদের জন্য নয়" —— ব্যাখ্যা করুন। (অনুর্ধ্ব ২০০ শব্দ)

এতক্ষণে দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা কাকে বলে, কোন ক্ষেত্রে দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা লক্ষ্য করা যায় তা জানলেন। এখন দীর্ঘস্থায়ী প্রবণতা পরিমাপের উদ্দেশ্যগুলো কী তা জানতে হবে। এই উদ্দেশ্যগুলো হলো,

- কালীন সারির অতীত তথ্যসমূহের উর্ধ্ব বা নিম্নগতির প্রবণতা নির্ধারণ করা।
- যদি ধরে নেওয়া হয় যে, অতীত শর্তসমূহ আগামী কয়েক বৎসরে অপরিবর্তিত থাকবে, তবে অতীত প্রবণতার উর্ধ্ব বা নিম্নগতির উপর নির্ভর করে চলকের মান সম্বন্ধে ভবিষ্যদ্বানী করা।
- সারির মান থেকে সাধারণ গতির প্রভাব দূর করে অন্য উপাদানগুলো যেমন - ঋতুগত ভেদ, চক্রক্রমিক উঠানামা, অনিয়মিত ভেদ অনুমান করা।

গতিধারা পরিমাপের উদ্দেশ্যগুলো যখন জেনেছেন। এবার আসুন তাহলে কীভাবে গতিধারা পরিমাপ করতে হবে তা জানা যাক্।

প্রবণতার পরিমাপ (Measurement of Trend)

প্রবণতার পরিমাপ নির্ণয়ে আমরা যে পদ্ধতিগুলো ব্যবহার করতে পারি তাহলো,

- মুক্তহস্ত বা লৈখিক পদ্ধতি (Free-hand or Graphic Method)
- অর্ধগড় পদ্ধতি (Semi-average Method)
- গতিশীল গড় পদ্ধতি (Moving average Method)
- বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতি (Method of Least Squares)

এবার প্রবণতা পরিমাপের এ চারটি পদ্ধতির প্রতিটি সম্বন্ধে পর্যায়ক্রমে আলোচনা করলে-কীভাবে প্রবণতা পরিমাপ করতে হবে এবং কী উপায়ে প্রবণতা দুর করবেন তা বুঝতে পারবেন। আসুন তাহলে প্রথম পদ্ধতি অর্থাৎ মুক্ত হস্ত বা লৈখিক পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনায় যাওয়া যাক।

মুক্তহস্ত বা লৈখিক পদ্ধতি

এ পদ্ধতিতে কালীন সারির প্রবণতা পরিমাপের জন্য কালীন সারির যে তথ্য রয়েছে (মনে করুন, t সময়ে y_t তথ্য রয়েছে), x -অক্ষ রেখায় সময় (t) এবং y-অক্ষ রেখায় সারির অন্তর্গত চলক y_t প্রকাশ করতে হবে। এবার লেখ কাগজের মাধ্যমে কালীন সারির তথ্যগুলি বিন্দুর সাহায্যে প্রকাশ করতে হবে। এরপর অভিজ্ঞতা ও বিচার বুদ্ধির উপর নির্ভর করে বিন্দুগুলির মধ্যদিয়ে একটি মসৃণ সরলরেখা টানতে হয়। সরল রেখাটি এমনভাবে হবে যেন গতির সাধারণ ঝোঁক বা প্রবণতা বিন্দুগুলির সমন্বয়ে অংকিত রেখাটি দ্বারা প্রকাশ পায়। **এরূপ অংকিত রেখাকে প্রবণতা রেখা বলা হয়।** যদি কোন নির্দিষ্ট সময়ের বা পর্যায়ের (Period) প্রবণতা পরিমাপ করতে চান, তবে x-অক্ষ রেখা হতে ঐ সময়ে প্রবণতা রেখার দুরত্ব দ্বারা পরিমাপ করতে পারেন। যখন কালীন সারি তথ্য দিয়ে মুক্তহস্ত রেখা অংকন করবেন, তখন এরূপ একটা উদাহরণ আপনার সামনে তুলে ধরব। এবার এ পদ্ধতির সুবিধা অসুবিধা জেনে নিন, তারপর মুক্ত হস্ত রেখা অংকন করা যাবে।

তথ্যরাশি থেকে মুক্ত হস্তে যে লেখচিত্র অংকন করা হয় সেই রেখাকে প্রবণতা রেখা বলে।

মুক্তহস্ত পদ্ধতিতে প্রবণতা পরিমাপের সুবিধা ও অসুবিধা -

সুবিধা

- এ পদ্ধতি প্রবণতা পরিমাপের সবচেয়ে সহজ পদ্ধতি।
- অন্যান্য পদ্ধতির তুলনায় কম সময় ও শ্রমে প্রবণতা পরিমাপ করা যায়।
- প্রবণতার স্বরূপ ও প্রকৃতি সম্বন্ধে অতি সহজে ধারণা জন্মায় বলে অপেক্ষাকৃত সংশোধিত পদ্ধতির মাধ্যমে প্রবণতার নির্ভরযোগ্য পরিমাপ গণনা করা সম্ভব।

অসুবিধা

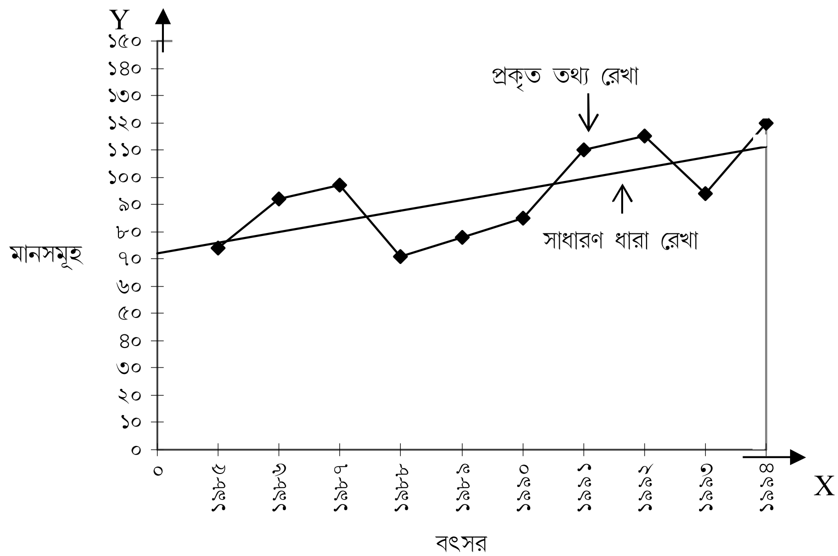
- এ পদ্ধতির প্রধান অসুবিধা হচ্ছে ব্যক্তির বিচারবুদ্ধির উপর নির্ভর করে রেখা টানা হয়। ফলে ব্যক্তিগত ঝোঁক কাজ করে। কাজেই দেখা যাবে দুজনে একই তথ্য দিয়ে দুটি ভিন্ন রেখা টেনেছেন।
- দক্ষ ও অভিজ্ঞ অনুসন্ধানকারী ছাড়া নির্ভরশীল রেখা টানা সম্ভব নয়।
- অতিমাত্রায় ব্যক্তির বিচার বুদ্ধির উপর নির্ভরশীল বলে এ পদ্ধতি প্রয়োগ করে ভবিষ্যদ্বানী - সকল সময় সঠিক হয় না।

এতক্ষণে কালীন সারি পরিমাপে কীভাবে মুক্ত হস্তরেখা পদ্ধতি ব্যবহার করতে পারেন এবং এর সুবিধা অসুবিধা কী তা জানলেন। এবার একটি উদাহরণের সাহায্যে মুক্ত হস্তরেখা পদ্ধতিতে প্রবণতার মানসমূহ পরিমাপ করবেন।

উদাহরণ ঃ লেখ কাগজের সাহায্যে প্রবণতার মানসমূহ নির্ণয় করুন।

বৎসর	১৯৮৫	১৯৮৬	১৯৮৭	১৯৮৮	১৯৮৯	১৯৯০	১৯৯১	১৯৯২	১৯৯৩	১৯৯৪
মানসমূহ	৭৪	৯২	৯৭	৭১	৭৮	৮৫	১১০	১১৫	৯৪	১২০

সমাধান ঃ লেখচিত্র অংকন করতে গেলে আপনি জানেন প্রথমে X-অক্ষরেখা ও Y-অক্ষরেখা কল্পনা করতে হবে। Y-অক্ষে তথ্যমানসমূহ এবং X-অক্ষে বিভিন্ন বৎসরগুলি প্রথমে বসিয়ে পরে নির্দিষ্ট বৎসর অনুসারে বিন্দুগুলো বসিয়ে সরল রেখা দ্বারা যোগ করে প্রকৃত তথ্য রেখা পাওয়া যাবে।



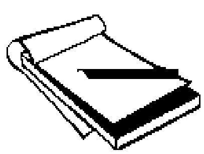
লেখ হতে সহজে বুঝা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত কালীন সারি তথ্যের স্বল্প মেয়াদী সময়ের মধ্যে মানের উঠানামা হলেও দীর্ঘমেয়াদী সময়ে কালীন সারি তথ্য উর্ধ্বগামী ঝোঁক প্রদর্শন করছে।

এবার লেখচিত্র থেকে কালীন সারির তথ্যের প্রবণতা পরিমাপের জন্য যে কাজটি করা দরকার তাহলো, X-অক্ষরেখা হতে Y-অক্ষরেখার সমান্তরাল দিক বরাবর সাধারণ ধারা রেখার দুরত্ব মেপে বিভিন্ন বৎসরের প্রবণতার মানসমূহ নির্ণয় করতে হবে।

লেখচিত্র থেকে প্রবণতার মানসমূহ ঃ

বৎসর	১৯৮৫	১৯৮৬	১৯৮৭	১৯৮৮	১৯৮৯	১৯৯০	১৯৯১	১৯৯২	১৯৯৩	১৯৯৪
মানসমূহ	৭৬	৮০	৮৪	৮৮	৯২	৯৬	১০০	১০৪	১০৮	১১২

তাহলে মুক্ত হস্তরেখা পদ্ধতিতে কালীন সারি প্রবণতা কিভাবে পরিমাপ করবেন তা শিখলেন। এখন আসা যাক আধাগড় পদ্ধতিতে।



অনুশীলন
দীর্ঘমেয়াদী সময়ের ব্যাপ্তিতে চলকের মান বৃদ্ধি পায় এমন তিনটি এবং চলকের মান হ্রাস পায় এমন তিনটি করে উদাহরণ দিন এবং কারণ উল্লেখ করুন।

অর্ধগড় পদ্ধতি (Semi-average Method)

আধাগড় বা অর্ধগড় পদ্ধতিতে কালীন সারি তথ্যকে সমান দুইটি অংশে ভাগ করা হয়।

আধাগড় বা অর্ধগড় পদ্ধতিতে কালীন সারি তথ্যকে সমান দুইটি অংশে (প্রথমার্ধ ও দ্বিতীয়ার্ধ) ভাগ করা হয়। উদাহরণস্বরূপ - ১৯৮১ থেকে ১৯৯২, এই ১২ বৎসরের তথ্য দেওয়া থাকলে তথ্যসমগ্রককে ১৯৮১ - ১৯৮৬ এবং ১৯৮৭ - ১৯৯২ এ দুটি অংশে বিভক্ত করা হয়। যদি বৎসরের সংখ্যা বেজোড় হয় তবে মাঝখানের বৎসরকে বাদ দিয়ে প্রথমার্ধ ও দ্বিতীয়ার্ধে ভাগ করা হয়। যেমন ধরুন, ১৯৮১ - ১৯৯৩ হলে আপনি কী করবেন? এক্ষেত্রে পুরাপুরি মাঝখানের বৎসর বাদ দিতে হলে ১৯৮৭ কে বাদ দিতে হতো। এক্ষেত্রে প্রথমার্ধে হবে ১৯৮১ - ১৯৮৬ এবং দ্বিতীয়ার্ধ হবে ১৯৮৮ - ১৯৯৩।

তথ্যসমূহকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করার পর দু'অংশেরই পৃথকভাবে গাণিতিক গড় নিতে হবে।

তথ্যসমূহকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করার পর দু'অংশেরই পৃথকভাবে গাণিতিক গড় নিতে হবে। প্রথমার্ধের গাণিতিক গড় ঐ অর্ধের সময়সীমার মধ্যবিন্দুতে এবং একইভাবে দ্বিতীয়ার্ধের গাণিতিক গড় ঐ অর্ধের সময় সীমার মধ্যবিন্দুতে লেখ কাগজে স্থাপন করুন। তাহলে স্থাপিত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাই প্রকাশ করবে আপনার আধাগড় পদ্ধতিতে প্রবণতা রেখাকে। দু'টি বিন্দু যদি $(x_1\ y_1)$ এবং $(x_2\ y_2)$ হয় তবে এদের সংযোজক সরল রেখাকে নিচের সমীকরণ দিয়ে প্রকাশ করা যায়।

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

এবার X-অক্ষরেখা থেকে প্রবণতা রেখার যে দুরত্ব আপনি পাবেন, বিভিন্ন পর্যায়কালের জন্য এগুলো হবে প্রবণতার পরিমাপ।

আধাগড় পদ্ধতিতে কীভাবে লেখ অংকন করতে হবে বুঝতে পেরেছেন। এখন উদাহরণের সাহায্যে একটি লেখ অংকন করতে হবে। এর আগে দেখা যাক এই পদ্ধতির সুবিধা ও অসুবিধাগুলি কি কী।

অর্ধগড় পদ্ধতিতে প্রবণতা নির্ণয়ে সুবিধা

- মুক্ত হস্তরেখা পদ্ধতির ন্যায় অনুসন্ধানকারীর নিজস্ব বিচার বুদ্ধির উপর এ পদ্ধতি নির্ভরশীল নয়। প্রত্যেক অনুসন্ধানকারী নির্দিষ্ট তথ্য থেকে সকল সময় একই রেখা অংকন করবে।
- চলমান গড় পদ্ধতি এবং ন্যূনতম গড় পদ্ধতি থেকে এ পদ্ধতি অনেক সহজে বুঝা যায়।
- যদি কালীন সারি তথ্য সরল রৈখিক হয় তবে এ পদ্ধতিতে অংকিত রেখা কালীন সারির সঠিক পরিমাপ প্রকাশ করবে।

অর্ধগড় পদ্ধতিতে প্রবণতা নির্ণয়ে অসুবিধা

- এ পদ্ধতিতে কালীন সারি তথ্যে সরল রৈখিক সম্পর্ক ধরে নেয়া হয়। যদি সম্পর্ক সরল রৈখিক না হয় তবে এ পদ্ধতি প্রয়োগে প্রবণতার সঠিক পরিমাপ পাওয়া যাবে না।
- আধাগড় পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় ব্যবহৃত হয়। কিন্তু গাণিতিক গড় অতি উচ্চ বা অতি নিম্ন মান দ্বারা প্রভাবিত হয় (যেমন - ২, ৩, ৪, ৫, ১১ এর গড় ৫ যেটা সর্বোচ্চ মান দ্বারা অধিক প্রভাবিত)। ফলে প্রবণতার পরিমাপ ত্রুটিপূর্ণ হবে।

উদাহরণ ঃ নিচে প্রদত্ত কালীন সারি তথ্য থেকে আধাগড় পদ্ধতিতে প্রবণতা রেখা স্থির করুন এবং ১৯৮৬ সালের জন্য প্রবণতার পরিমাপ নির্ণয় করুন। প্রকৃত তথ্য থেকে এর পার্থক্যের কারণ ব্যাখ্যা করুন।

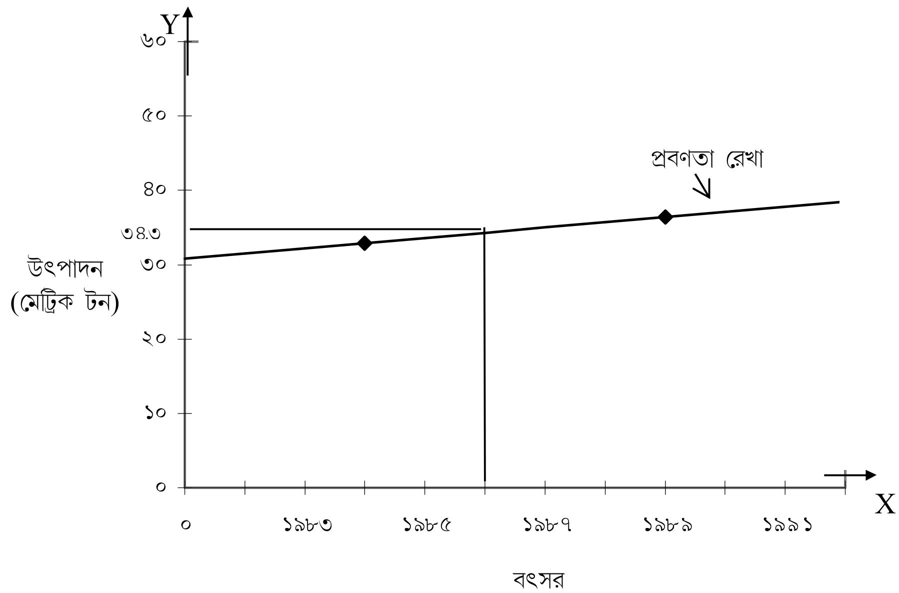
বৎসর	১৯৮২	১৯৮৩	১৯৮৪	১৯৮৫	১৯৮৬	১৯৮৭	১৯৮৮	১৯৮৯	১৯৯০	১৯৯১	১৯৯২
উৎপাদন (মে.ট.)	৩০	৩২.৫	৩৪	৩১	৩৭	২৯	৩৬	৩৩	৩৫	৩৮	৪০

সমাধান ঃ উপরের কালীন সারি তথ্যে আপনি দেখতে পাচ্ছেন ১১ বৎসরের শস্য উৎপাদন দেখানো হয়েছে। আপনি এতক্ষণ আধাগড় পদ্ধতি সম্বন্ধে যা শিখেছেন তার সাথে মিলিয়ে দেখলে অবশ্যই আপনাকে ১৯৮৭ সালের তথ্যকে বাদ দিয়ে ১৯৮২ - ৮৬ কে প্রথম অর্ধ এবং ১৯৮৮ - ১৯৯২ কে দ্বিতীয় অর্ধ হিসেবে ব্যবহার করতে হবে। প্রথম অর্ধের যৌগিক গড় ও দ্বিতীয় অর্ধের যৌগিক গড় যথাক্রমে $\bar{X}_1$ ও $\bar{X}_2$ ধরলে,

$$\bar{X}_1 = \frac{৩০ + ৩২.৫ + ৩৪ + ৩১ + ৩৭}{৫} = ৩২.৯$$

$$\bar{X}_2 = \frac{৩৬ + ৩৩ + ৩৫ + ৩৮ + ৪০}{৫} = ৩৬.৪$$

তাহলে প্রথম অর্ধের সময় সীমার মধ্যবিন্দুতে অর্থাৎ ১৯৮৪ সালের উৎপাদন ৩২.৯ মে.টন এবং দ্বিতীয় অর্ধের সময় সীমায় মধ্য বিন্দুতে অর্থাৎ ১৯৯০ সালের উৎপাদন ৩৬.৪ মে.টন। এ দুটি উৎপাদনের মানকে লেখ কাগজে স্থাপন করলেই প্রবণতা রেখা পাওয়া যাবে। নিচের লেখচিত্রে প্রবণতা রেখা অঙ্কন করে ১৯৮৬ সালের প্রবণতা পরিমাপ করা হলো।



উপরের লেখ হতে সহজেই বুঝা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত কালীন সারি তথ্যের মানগুলো স্বল্প মেয়াদী সময়ের মধ্যে উঠানামা করলেও দীর্ঘমেয়াদী সময়ে কালীন সারি তথ্য উর্ধ্বগামী ঝোঁক প্রদর্শন করছে। লেখের মাধ্যমে x অক্ষ হতে ১৯৮৬ সাল বরাবর প্রবণতা রেখার দূরত্ব অনুযায়ী ১৯৮৬ সালের প্রবণতা ৩৪.৩ মেট্রিক টন। অথচ প্রকৃত তথ্য অনুযায়ী ১৯৮৬ সালের মান ৩৭ মেট্রিক টন। এক্ষেত্রে পার্থক্যের কারণ হচ্ছে কালীন সারির অন্যান্য উপাদান যেমন — ঋতুগত ভেদ, চক্রক্রমিক পরিবর্তন ও অনিয়মিত গতির প্রভাব, এ সম্বন্ধে আমরা পরবর্তী পাঠে আলোচনা করবো।

অনুশীলন

নিচে প্রদত্ত কাল্পনিক তথ্য সারি থেকে আধাগড় পদ্ধতিতে প্রবণতা রেখা অঙ্কন করুন এবং ১৯৯৩ সালের জন্য প্রবণতার পরিমাণ নির্ণয় করুন। প্রকৃত তথ্য থেকে এর পার্থক্যের কারণ ব্যাখ্যা করুন।

বৎসর	১৯৮৬	১৯৮৭	১৯৮৮	১৯৮৯	১৯৯০	১৯৯১	১৯৯২	১৯৯৩	১৯৯৪
শিক্ষার হার	১৪	১৫	১৭	১৮	২০	২০	২২	২৪	২৭

গতিশীল গড় পদ্ধতি (Method of Moving Average)

গতিশীল গড় পদ্ধতিতে বিভিন্ন বৎসরগুলিতে চলকের যে মান দেওয়া থাকে তার একাধিক বর্ষীয় গতিশীল গড় বের করতে হবে।

গতিশীল গড় পদ্ধতিতে বিভিন্ন বৎসরগুলিতে চলকের যে মান দেওয়া থাকে তার ৩ বর্ষীয় গতিশীল গড়, ৪ বর্ষীয় গতিশীল গড় বের করতে হবে। (৩ বর্ষীয় গতিশীল গড় হলো - প্রথম তিন বৎসরের চলকের গড় মান নিয়ে, ঐ তিন বৎসরের মাঝখানের বৎসরের বরাবর রাখা। একইভাবে ৪ বর্ষীয়, ৫ বর্ষীয় গড় বের করা হয়)। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায়, ১৯৮০, ১৯৮১, ১৯৮২, ১৯৮৩, ১৯৯৪ .... বৎসরগুলোতে কোন চলক x এর মান যথাক্রমে x_1, x_2, x_3 , x_4, x_5 .... দেওয়া আছে। তাহলে ৩ বর্ষীয় গড় হবে প্রথম বৎসর থেকে শুরু করে প্রতি তিন বৎসরের (যেমন - 1, 2, 3, 4, 5 এর ক্ষেত্রে $\frac{1+2+3}{3}, \frac{2+3+4}{3}, \frac{3+4+5}{3}$) গড়। সুতরাং যৌগিক

গড় $$\overline{X}_১ = \frac{x_১ + x_২ + x_৩}{৩}, \overline{X}_২ = \frac{x_২ + x_৩ + x_৪}{৩}, \overline{X}_৩ = \frac{x_৩ + x_৪ + x_৫}{৩}$$

.... বের করে প্রথম তিন বৎসরের মাঝখান অর্থাৎ ১৯৮১, দ্বিতীয় তিন বৎসরের মাঝখান অর্থাৎ ১৯৮২ ইত্যাদি বরাবর বসানো হয়। এভাবে ১৯৮১, ১৯৮২ --- বরাবর মানগুলিকে বলা

হবে ৩ বর্ষীয় গতিশীল গড় বা প্রবণতার মান। এক্ষেত্রে তিন (৩) কে গতিশীল গড়সমূহের পর্যায়কাল বলা হবে।

৩ বর্ষীয় গতিশীল গড় নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ৩ কে গতিশীল গড়সমূহের পর্যায়কাল বলা হবে।

এতক্ষণে আপনি ৩ বর্ষীয় গতিশীল গড় নির্ণয় পরিষ্কারভাবে বুঝেছেন নিশ্চয়। কাজেই ৫ বর্ষীয় গতিশীল গড় কী হবে? এ ধরনের গড় হবে -

$$\overline{X}_১ = \frac{x_১ + x_২ + x_৩ + x_৪ + x_৫}{৫}, \overline{X}_২ = \frac{x_২ + x_৩ + x_৪ + x_৫ + x_৬}{৫}$$

এবং X_1 মান বসাতে হবে প্রথম পাঁচ বৎসরের মাঝামাঝিতে অর্থাৎ ১৯৮২তে। একইভাবে X_2, ১৯৮৩তে। এক্ষেত্রে লক্ষ্যণীয়, ৩ বর্ষীয় গতিশীল গড়ের ক্ষেত্রে প্রথম ও শেষ বৎসরের কোন মান পাওয়া যাবে না, ৫ বর্ষীয় গতিশীল গড়ের ক্ষেত্রে প্রথম দুই বৎসরের এবং শেষের দুই বৎসরের মান পাওয়া যাবে না।

৫ বর্ষীয় গতিশীল গড়ের ক্ষেত্রে প্রথম দুই বৎসরের এবং শেষের দুই বৎসরের মান পাওয়া যাবে না।

জোড় বৎসর (2, 4, 6 ইত্যাদি পর্যায়কাল বিশিষ্ট) গতিশীল গড়ের ক্ষেত্রে যথাযথ কেন্দ্রীকরণের প্রয়োজন হয়। অর্থাৎ গতিশীল গড়সমূহকে প্রদত্ত সময় বা বৎসরসমূহের বিপরীতে স্থাপন করতে হয়। একারণে প্রথমে অবিকল উপরের নিয়মে নির্ণীত যৌগিক গড়ের মানগুলি প্রতিটি সময় সীমার মধ্যখানে রাখা হয়। অতঃপর প্রাপ্ত যৌগিক গড়সমূহের প্রতি জোড়ায় যৌগিক গড় দ্বারা গতিশীল গড়সমূহের কেন্দ্রীকরণ করা হয়। উদাহরণস্বরূপ উপরের দেওয়া মানসমূহে পরপর চারি বৎসরের মানের যৌগিক গড়ের মান যথাক্রমে $\overline{X}_১, \overline{X}_২, \overline{X}_৩$ .... হলে -

জোড় বৎসর গতিশীল গড়ের ক্ষেত্রে যথাযথ কেন্দ্রীকরণের প্রয়োজন হয়।

$$\overline{X}_১ = \frac{x_১ + x_২ + x_৩ + x_৪}{৪}, \overline{X}_২ = \frac{x_২ + x_৩ + x_৪ + x_৫}{৪}$$

$$\overline{X}_৩ = \frac{x_৩ + x_৪ + x_৫ + x_৬}{৪}$$

.... হবে। $\overline{X}_১, \overline{X}_২, \overline{X}_৩$ ---- ইত্যাদি যৌগিক গড়ের মানগুলি যথাক্রমে ১৯৮১-১৯৮২, ১৯৮২-১৯৮৩ ও ১৯৮৩-১৯৮৪ এর মাঝখানে রাখা হয় (যেমন প্রথম পর্যায়ে ১৯৮০, ১৯৮১, ১৯৮২, ১৯৮৩ মানগুলির গড় করা হয় এবং এই মধ্যমান উক্ত চার বৎসরের মধ্যবর্তী অংশে বসবে, অর্থাৎ ১৯৮১-১৯৮২ এর মধ্যখান)

এবার $\overline{X}_১$, $\overline{X}_২$, $\overline{X}_৩$ .... ইত্যাদি মানগুলির যৌগিক গড় অর্থাৎ $\frac{\overline{X}_১ + \overline{X}_২}{২}$ মানটি ১৯৮১-১৯৮২ এর মাঝখান এবং ১৯৮২ - ১৯৮৩ এর মাঝখান, এদুয়ের মধ্যখান ১৯৮২ বরাবর বসানো হয়। একইভাবে $\frac{\overline{X}_২ + \overline{X}_৩}{২}$, ১৯৮৩ বরাবর ইত্যাদি রূপে বসিয়ে ৪ বর্ষীয় গতিশীল গড় মানকে প্রকাশ করা হয়।

৪ বর্ষীয় গতিশীল গড়ের ক্ষেত্রেও আপনি লক্ষ্য করেছেন প্রথম দুই এবং শেষ দুই বৎসরের প্রবণতার মান নির্ণয় করা যায় না। কাজেই সাধারণভাবে সিদ্ধান্ত এই যে গতিশীল গড়ের পর্যায়কাল বৃদ্ধি পেলে প্রথম ও শেষ দিকের অধিক সংখ্যক বর্ষের প্রবণতার মান অজানা থাকে।

গতিশীল গড় পদ্ধতির সাহায্যে কালীন সারিতে চলকের মানের পরিবর্তনশীলতা দূরীকরণ এবং প্রবণতা পৃথকীকরণ, মুক্ত হস্তরেখা পদ্ধতি এবং আধাগড় পদ্ধতির থেকে অধিক সুবিধাজনক। তবে এ পদ্ধতিতে পর্যায়কাল নির্ধারণ অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। এক্ষেত্রে লক্ষ্যণীয় ব্যাপার, যদি এ পদ্ধতির পর্যায়কাল ব্যবসায়িক চক্রের সমান বা এর গুণিতক হয়, তবে চক্রক্রমিক পরিবর্তনশীলতা দূরীভূত হয়। যদি পর্যায়কাল ব্যবসায়িক চক্রের পর্যায়কাল অপেক্ষা কম বা বেশী হয় তবে চক্রক্রমিক পরিবর্তনশীলতা হ্রাস পায়। আবার একটি সীমার মধ্যে পদ্ধতির পর্যায়কাল ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকলে অনিয়মিত গতি হ্রাস পায়। তবে পর্যায়কাল যথেচ্ছভাবে বৃদ্ধি করলে প্রবণতার মান এবং চলকের মানের পার্থক্য বেড়ে যায়। এ কারণে পর্যায়কাল এরূপভাবে নির্দিষ্ট করতে হবে যেন চক্রক্রমিক ও অনিয়মিত ভেদ বহুলাংশে হ্রাস পায় এবং নির্ণীত প্রবণতা মানসমূহ ও মূল কালীন সারির মানসমূহের মধ্যে খুব বেশী তারতম্য না ঘটে।

পর্যায়কাল নির্ণয় গতিশীলগড় পদ্ধতির একটি গুরুত্বপূর্ণ পদক্ষেপ। এটি এমনভাবে নির্ণয় করা উচিত যেন নির্ণীত প্রবণতা মানসমূহ ও মূল কালীন সারির মানসমূহের মধ্যে খুব বেশী তারতম্য না থাকে।

তাহলে এতক্ষণ গতিশীল গড় পদ্ধতিতে কীভাবে প্রবণতার পরিমাপ করবেন তা শিখলেন। এবার এ পদ্ধতির সুবিধা, অসুবিধাগুলো জানা দরকার।

গতিশীল গড় পদ্ধতিতে প্রবণতা পরিমাপের সুবিধা

- নিয়মিত চক্রক্রমিক পরিবর্তনশীলতা (fluctution) সম্পূর্ণ দুরীভূত হয় যদি এ পদ্ধতিতে ব্যবহৃত পর্যায়কাল ব্যবসায়িক চক্রের পর্যায়কালের সমান বা গুণিতক হয়। যেমন মনে করুন, কালীন সারির একটি চক্র তিন বৎসর। এক্ষেত্রে পর্যায়কাল যদি তিন বৎসর হয়, তবে চক্রক্রমিক পরিবর্তনশীলতা সম্পূর্ণ দূরীভূত হয়।
- গতিশীল গড় পদ্ধতিতে যথোপযুক্ত পর্যায়কাল স্থির করতে পারলে অনিয়মিত ভেদ অনেকাংশে হ্রাস পায়।
- গতিশীল গড় পদ্ধতি যেমন প্রবণতার পরিমাপে ব্যবহৃত হয়, সেই সাথে ঋতুগত পরিবর্তন, চক্রক্রমিক ভেদ এবং অনিয়মিত গতির ভেদ পরিমাপেও ব্যবহৃত হয়।

গতিশীল গড় পদ্ধতিতে প্রবণতা পরিমাপে অসুবিধা

- গতিশীল গড় পদ্ধতিতে কালীন সারির প্রত্যেক পর্যায়ের প্রবণতার মান নির্ণয় করা যায় না। যেমন - ৩ বর্ষীয় গতিশীল গড়ে প্রথম ও শেষ পর্যায়ের, ৪ বা ৫ বর্ষীয় গতিশীল গড়ে প্রথম দুই ও শেষ দুই পর্যায়ের প্রবণতার মান নির্ণয় করা যায় না। এভাবে পদ্ধতির পর্যায়কাল বৃদ্ধি পেলে প্রথম ও শেষ দিকের অধিক সংখ্যক প্রবণতা অনির্ণেয় অবস্থায় থাকে।
- গতিশীল গড়সমূহ পরিবর্তনশীলতার কোন সূত্র মেনে চলে না, কাজেই পদ্ধতির প্রয়োগে ভবিষ্যদ্বানী করা যায় না - যেটা কালীন সারির সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বিষয়।
- গতিশীল গড়সমূহ প্রান্তীয় মান দ্বারা প্রভাবিত হয়।
- প্রবণতা শুধু সরলরৈখিক বা প্রায় সরলরৈখিক হলে গতিশীল গড় ব্যবহার করা যায়। অন্যথায় এ পদ্ধতি ব্যবহার করা যায় না।

এতক্ষণ আপনি গতিশীল গড় পদ্ধতিতে প্রবণতা পরিমাপের নিয়ম, এ পদ্ধতির সুবিধা, অসুবিধা শিখলেন। এবার উদাহরণের সাহায্যে পদ্ধতিটি আরো পরিষ্কার ভাবে জেনে নিন।

উদাহরণ ঃ কোন নির্দিষ্ট জেলায় এগার বৎসরের চালের উৎপাদন (টনে) দেওয়া আছে। মনে করা হলো এ তথ্যে ৪ বৎসর মেয়াদী ব্যবসায়িক চক্র আছে। গতিশীল গড় পদ্ধতির সাহায্যে প্রবণতার মানসমূহ নির্ণয় করুন।

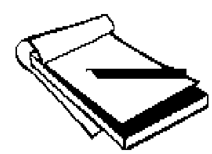
বৎসর	১৯৮১	১৯৮২	১৯৮৩	১৯৮৪	১৯৮৫	১৯৮৬	১৯৮৭	১৯৮৭	১৯৮৮	১৯৮৯	১৯৯০
উৎপাদন (টনে)	৩২০	৩২৫	৫০৬	৪২০	৪২৫	৪১৫	৫২৫	৩২০	৩৫০	৪১০	৫৪০

সমাধান ঃ কালীন সারিতে ৪ বৎসর পর্যায়কাল বিশিষ্ট ব্যবসায়িক চক্র রয়েছে। কাজেই আপনি এতক্ষণ যা শিখেছেন, সে অনুযায়ী আপনাকে ৪ বর্ষীয় গতিশীল গড় নির্ণয় করতে হবে। নিচে ৪ বর্ষীয় গতিশীল গড়সমূহের গণনাকার্য সারণীর মাধ্যমে দেখানো হলো,

চার (৪) বর্ষীয় গতিশীল গড়সমূহের গণনা কার্য ––

বৎসর (1)	উৎপাদন (টনে) (2)	চার বর্ষীয় গতিশীল সমষ্টি (কেন্দ্রীভূত নয়) (3)	চার বর্ষীয় গতিশীল সমষ্টির গড় (4)	চার বর্ষীয় গতিশীল গড়সমূহ (কেন্দ্রীভূত) (5)
১৯৮০	৩২০			
১৯৮১	৩২৫			
		১৫৭১	৩৯২.৭৫	
১৯৮২	৫০৬			৪০৫.৮৮
		১৬৭৬	৪১৯.০০	
১৯৮৩	৪২০			৪৩০.২৫
		১৭৬৬	৪৪১.৫০	
১৯৮৪	৪২৫			৪৪৩.৮৮
		১৭৮৫	৪৪৬.২৫	
১৯৮৫	৪১৫			৪৩৩.৭৫
		১৬৮৫	৪২১.২৫	
১৯৮৬	৫২৫			৪১১.৮৮
		১৬১০	৪০২.৫০	
১৯৮৭	৩২০			৪০১.৮৮
		১৬০৫	৪০১.২৫	
১৯৮৮	৩৫০			৪০৩.১৩
		১৬২০	৪০৫.০০	
১৯৮৯	৪১০			
১৯৯০	৫৪০			

অনুশীলন
উপরের উদাহরণে দেওয়া চালের উৎপাদন তথ্য থেকে তিন (৩) বর্ষীয় ও পাঁচ (৫) বর্ষীয় গতিশীল গড় পদ্ধতিতে কালীন সারির প্রবণতা পরিমাপসমূহ নির্ণয় করুন।



বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতি (Method of Least Squares)

কালীন সারির প্রবণতা পরিমাপে এতক্ষণ যে তিনটি পদ্ধতির উল্লেখ করা হয়েছে, সেক্ষেত্রে চলকের মানের পরিবর্তনশীলতার সাথে সময়ের কোন গাণিতিক সম্পর্ক আছে - এরূপ ধরে নেওয়া হয়নি। কিন্তু বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে চলকের মানের পরিবর্তনশীলতার সাথে সময়ের গাণিতিক সম্পর্ক আছে বলে ধরে নেওয়া হয়। সম্পর্ক হতে পারে সরলরৈখিক বা Linear, Exponential, Parabolic curve বা অন্য কোন রকম। বিভিন্ন ধরনের Curve এর জন্য সূত্রগুলো হবে,

বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে চলকের মানের পরিবর্তনশীলতার সাথে সময়ের গাণিতিক সম্পর্ক আছে বলে ধরে নেওয়া হয়।

$Y = a + bx$ (linear)
$Y = ab^x$ (exponential)
$Y = a+bx+cx^2$ (parabolic)
$Y = a+bx+cx^2+dx^3$ (cubic curve)

চলকের সাথে সময়ের কী ধরনের সম্পর্ক রয়েছে তা নির্ধারণ করার পর সমীকরণের অন্তর্গত ধ্রুবক a, b (অথবা a, b এবং c) এর মান নির্ণয় করতে হবে। a, b এর মান নির্ণয়ের জন্য বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। তাহলে আপনাকে এখন জানতে হবে বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতি কী? বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতি হলো, এই পদ্ধতিতে অঙ্কিত লেখ হতে কালীন সারি তথ্যের বিন্দুসমূহ থেকে Y-অক্ষের সমান্তরাল দিক বরাবর দূরত্বসমূহের বর্গের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম।

চলকের সাথে সময়ের কী ধরনের সম্পর্ক রয়েছে তা নির্ধারণ করার পর সমীকরণের অন্তর্গত ধ্রুবক এর মান নির্ণয় করতে হবে।

এখন যদি ধ্রুবকসমূহ a, b ইত্যাদির মান বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে বের করতে হয়, তবে এই পদ্ধতির শর্ত - প্রদত্ত সমীকরণ এবং নিরূপিত সমীকরণের মধ্যকার দূরত্বের বর্গসমূহের যোগফল ক্ষুদ্রতম হবে। যদি সমীকরণটি $Y = a + bx$ হয় তবে $Z = \sum(y-a-bx)^2$ ক্ষুদ্রতম

হবে। এ দূরত্ব ক্ষুদ্রতম তখনই নিশ্চিত হবে যখন এর প্রথম অন্তরীকরণ (First Derivative) শূন্য হবে। তাহলে নির্ণয় করা যাক প্রথম অন্তরীকরণ, এর পর সমাধান করে a, b এর মান নির্ণয় করা যাবে।

$$\frac{dz}{da} = -2\sum(y - a - bx) = 0 - - - - - (1)$$

$$\frac{dz}{db} = -2\sum(y - a - bx)x = 0 - - - - - (2)$$

(1) থেকে পাই

$-\ 2\sum(y - a - bx) = 0$

বা, $\sum(y - a - bx) = 0$

বা, $\sum y - na - b\sum x = 0\ (\sum = n)$

বা, $\sum y = na + b\sum x$ ------ (3)

বা, $\frac{\sum y}{n} = \frac{na}{n} + b\frac{\sum x}{n}$ (উভয়পক্ষকে দ্বারা n ভাগ করে)

বা, $\bar{y} = a + b\bar{x}$

একইভাবে, (2) থেকে পাই

$\sum xy - a\sum x - b\sum x^2 = 0$

বা, $\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$ ---- (4)

(৩) ও (৪) নং সমীকরণ থেকে চলক এবং সময়ের মানের উপর নির্ভর করে a, b এর মান নির্ণয় করা যায়। a, b এর মান বসানোর পর যে সরলরেখা $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ হবে প্রবণতা পরিমাপের জন্য নিরূপিত সরলরেখা।

একইভাবে অধিবৃত্তের $y = a+bx+cx^2$ সমীকরণে a, b, c এর মান নির্ণয়ের সমীকরণসমূহ

$\sum y = a + b\sum x + c\sum x^2$ ----- (1)

$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$ ----- (2)

এবং $\sum x^2y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$ ----- (3)

চলকদ্বয়ের সম্পর্ক সরল রৈখিক হলে কালীন সারি তথ্যে ভবিষ্যত কোন তথ্য সম্বন্ধে ধারণা করা সহজ হয়।

এরূপ নিরূপিত সরলরেখা থেকে বিভিন্ন সময় (x মান) এর জন্য চলকের y মান পাওয়া যাবে। ফলে কালীন সারি তথ্যে ভবিষ্যত কোন তথ্য সম্বন্ধে ধারণা করা সহজ হয়।

প্রবণতা মানসমূহ নির্ণয়ে বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতির সুবিধা

- এই পদ্ধতিতে কালীন সারি তথ্যসমূহের সাথে সময়ের একটি গাণিতিক সম্পর্ক আছে ধরা যায়। গাণিতিক সম্পর্কের উপর ভিত্তি করে প্রবণতা মানসমূহ নির্ণয় করা হয় বলে পদ্ধতিটি অনুমানের উপর নির্ভরশীল নয়।
- পদ্ধতিটি প্রয়োগে ভবিষ্যত প্রবণতা মান গণনা করা যায়।
- নির্ণয়ের সাথে সঙ্গতি রেখে রৈখিক বা অরৈখিক সম্পর্কের ভিত্তিতে প্রবণতার মান নির্ণয় করা যায়।

প্রবণতা মানসমূহ নির্ণয়ে বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতির অসুবিধা

- প্রবণতা পরিমাপের অন্যান্য তিন পদ্ধতি থেকে বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতি বেশ জটিল। গণিতে দুর্বল লোকের জন্য এই পদ্ধতি আরো কঠিন।
- একটা মাত্র তথ্যের উপস্থিতিতেও গণনা কার্য পুনরায় শুরু থেকে করা হয়।
- এ পদ্ধতির সবচেয়ে বড় অসুবিধা কী ধরনের প্রবণতা রেখা হবে তা নির্দিষ্ট করা, অর্থাৎ এটা কি Linear হবে না Parabolic না exponential ইত্যাদি।

এতক্ষণ বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে কীভাবে প্রবণতা রেখা অঙ্কন করতে হবে তার নিয়ম এবং ফরমূলা শিখেছেন। এবার উদাহরণের মাধ্যমে প্রবণতা রেখা অঙ্কন করব এবং ভবিষ্যতের কোন অজানা মান গণনা করব।

উদাহরণ ঃ নিম্নলিখিত তথ্য হতে বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে সরলরৈখিক প্রবণতা সমীকরণ স্থির করুন এবং ১৯৯৬ সালের প্রবণতা মান গণনা করুন।

বৎসর (x)	১৯৮৬	১৯৮৭	১৯৮৮	১৯৮৯	১৯৯০	১৯৯১	১৯৯২	১৯৯৩	১৯৯৪	১৯৯৫
মান (y)	৬০	৭০	৭৫	৬৫	৭২	৯০	৬৫	৭৫	৮০	৮২

সমাধান ঃ মনে করা যাক উপরে দেওয়া তথ্যের উপযোগী সরলরৈখিক প্রবণতা সমীকরণ
অর্থাৎ, $Y = a + bx$ ----- (1)

যেখানে Y = তথ্যের মান এবং x দ্বারা সময় প্রকাশিত হয়। x এর মান নির্ণয় করার জন্য প্রদত্ত সময় কালের একেবারে মাঝামাঝি স্থানে x এর মূলবিন্দু ‘o’ ধরতে হবে। যেমন, যদি প্রদত্ত সময়কাল ৭০ সাল থেকে ৮০ সাল হয় তাহলে ১১টি সময়কালের মধ্যখান ৬তম টি, অর্থাৎ ৭৬ তমটা ‘o’ হবে। এখানে সময়কাল রয়েছে ৮৬ থেকে ৯৫ অর্থাৎ ১০টি। এর মূলবিন্দু হবে ৯০ এবং ৯১ এর মাঝখানে। অর্থাৎ ৬ মাসে হবে প্রতি একক। ৯০ - ৯১ এর মাঝখানে o হলে ৯০ এ হবে –১ এবং ৯১ এ +১, ৮৯ এ – ৩, ৯২ এ + ৩ ইত্যাদি।

x এর মান নির্ণয় করার জন্য প্রদত্ত সময় কালের একেবারে মাঝামাঝি স্থানে x এর মূলবিন্দু ‘o’ ধরতে হবে।

আপনার মনে আছে বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে a, b এর মান নির্ণয়ের সূত্র

$\sum y = na + b\sum x$ ----- (2)

$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$ ----- (3)

এখন $\sum y, \sum x, \sum xy, \sum x^2$ নির্ণয়ের জন্য গণনাকার্য সম্পাদন করা প্রয়োজন।

সরলরৈখিক প্রবণতা সমীকরণের গণনাকার্য —

বৎসর	x	মান y	xy	x^2
১৯৮৬	– ৯	৬০	– ৫৪০	৮১
১৯৮৭	– ৭	৭০	– ৪৯০	৪৯
১৯৮৮	– ৫	৭৫	– ৩৭৫	২৫
১৯৮৯	– ৩	৬৫	– ১৯৫	৯
১৯৯০	– ১	৭২	– ৭২	১
→	০			
১৯৯১	১	৯০	৯০	১
১৯৯২	৩	৬৫	১৯৫	৯
১৯৯৩	৫	৭৫	৩৭৫	২৫
১৯৯৪	৭	৮০	৫৬০	৪৯
১৯৯৫	৯	৮২	৭৩৮	৮১
	$\sum x$ = ০	$\sum y$ = ৭৩৪	$\sum xy$ = ২৮৬	$\sum x^2$ = ৩৩০

(২) ও (৩) নং সমীকরণে উপরের প্রয়োজনীয় মানগুলি বসিয়ে a, b, এর মান নির্ণয় করতে হবে। আসুন তাহলে -

$\sum y = na + b\sum x$

বা, ৭৩৪ = ১০ × a + b × 0

বা, ১০a = ৭৩৪

বা, $a = \frac{৭৩৪}{১০} = ৭৩.৪$

৩ নং সমীকরণ থেকে

$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$

বা, $২৮৬ = a \times ০ + b \times ৩৩০$

বা, $৩৩০\, b = ২৮৬$

বা, $b = \frac{২৮৬}{৩৩০} = ০\cdot ৮৭$

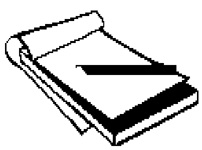
অতএব, প্রবণতা পরিমাপক নির্ণয়ে সরলরেখার সমীকরণ $y = ৭৩.৪ + ০\cdot৮৭x$ ---- (৪)

এরপর আমাদের আরও প্রশ্ন রয়েছে ১৯৯৬ সালে y এর মান কত হবে? এটা অতি সহজ যে ১৯৯৬ সালে x এর মান হবে ৯ এর পরবর্তী মান ১১ (এক্ষেত্রে প্রতি বৎসরে ২ একক)। অতএব (৪) নং সমীকরণে x এর মান বসালে পাওয়া যাবে,

$$y = ৭৩.৪ + ০.৮৭ \times ১১$$
$$= ৭৩.৪ + ৯.৫৭ = ৮২.৯৭$$

কাজেই দেখা যাচ্ছে ১৯৯৬ সালে নির্ণেয় প্রবণতা মান ৮২.৯৭।

এরূপে অন্য যে কোন বৎসরের প্রবণতা মান নির্ণয় করতে হলে ঐ বৎসরের জন্য x এর মান নির্ণয় করে প্রবণতার রেখার সমীকরণে বসালেই প্রবণতা মান পাওয়া যাবে।



অনুশীলন

প্রবণতার পরিমাপ নির্ণয়ের চারটি পদ্ধতির মধ্যে তুলনামূলক আলোচনা করুন। কোন পদ্ধতিটি সহজ এবং কোন পদ্ধতিটি অধিক গ্রহণযোগ্য মান প্রদান করে সে সম্বন্ধে আপনার দৃষ্টিকোণ থেকে মন্তব্য করুন। (অনুর্দ্ধ ৪০০ শব্দ)

সারাংশ

আপনি এতক্ষণ কালীন সারি ও গতিধারার পরিমাপ সম্বন্ধে শিখলেন। আপনার মনে আছে নিশ্চয়ই কালীন সারি হচ্ছে সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে পরিসংখ্যানের সাজানো তথ্যরাশি। এ পাঠে আপনি আরো শিখেছেন কালীন সারির বিভিন্ন উপাদানের নাম, যেমন - সাধারণ গতিধারা, ঋতুগত ভেদ, চক্রক্রমিক উঠানামা এবং অনিয়মিত ভেদ। সাধারণ গতিধারা পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতি সম্বন্ধে বিশদভাবে শিখেছেন। যেহেতু গতিধারা পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতি শিখেছেন এবং কীভাবে কোন তথ্য থেকে প্রবণতার সাধারণ ধারা দূরীভূত করতে পারবেন সেটা বুঝেছেন, কাজেই এর পরবর্তীতে শিখতে হবে অন্য উপাদানগুলোর পরিমাপ সম্বন্ধে। তাহলে চলুন যাই আমরা ঋতুগত ভেদ, চক্রক্রমিক পরিবর্তন এবং অনিয়মিত ভেদ সম্পর্কিত পরবর্তী পাঠে।

• পাঠোত্তর মূল্যায়ন

১. কালীন সারি ও কালীন সারি বিশ্লেষণ বলতে কী বুঝায় ব্যাখ্যা করুন।

২. কালীন সারি বিশ্লেষণের সমস্যাগুলো কী? এর গুরুত্ব ও ব্যবহার বর্ণনা করুন।

৩. প্রবণতা পরিমাপে আধাগড় পদ্ধতির প্রধান অসুবিধাগুলি কী? গতিশীল গড় পদ্ধতি ব্যবহার করলে এ ধরনের অসুবিধা কতটুকু দূর হয়? গতিশীল গড় পদ্ধতি কোন সময় সবচেয়ে সুবিধাজনক?

৪. বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে কীভাবে ধ্রুবকের মান নির্ণয় করবেন ব্যাখ্যা করুন। এ পদ্ধতিতে প্রবণতা পরিমাপের জন্য কয়েকটি উদাহরণ নিজে তৈরি করে অভ্যাস করুন।

৫. "ব্যবসায়িক চক্রের পর্যায়কাল ও বিস্তৃতি নিয়মিত হলে গতিশীল গড়ের দ্বারা চক্রক্রমিক পরিবর্তনশীলতা সম্পূর্ণরূপে দূর হয়, যদি এর পর্যায়কাল ব্যবসায়িক চক্রের পর্যায়কালের সমান হয়।" (**নোট ঃ** ৩ বৎসর বা ৫ বৎসর পর্যায়কালের জন্য আপনি একটি কালীন সারি তৈরি করুন। যেমন, তিন বৎসর পর্যায়ের ক্ষেত্রে ৫ ৩ ১ ৫ ৩ ১ ৫ ৩ ১। এবার গতিশীল গড় ব্যবহার করে প্রমাণ করুন।)

৬. অর্ধগড় পদ্ধতিতে প্রবণতা নির্ণয় করুন।

বৎসর	১৯৭১	১৯৭২	১৯৭৩	১৯৭৪	১৯৭৫	১৯৭৬	১৯৭৭	১৯৭৮	১৯৭৯	১৯৮০
বাৎসরিক উৎপাদন	৬০	৬২	৫৮	৬৪	৬০	৬৬	৫৬	৫৮	৬৪	৬০

৭. নিম্নলিখিত কালীন সারি তথ্যের পাঁচ (৫) বর্ষীয় গতিশীল গড় নির্ণয় করুন।

বৎসর	১৯৮১	১৯৮২	১৯৮৩	১৯৮৪	১৯৮৫	১৯৮৬	১৯৮৭	১৯৮৮	১৯৮৯	১৯৯০	১৯৯১	১৯৯২
লাভ (হাজার টাকায়)	৯০	১০০	৯২	৯৪	৯৬	১০২	১০৮	১০৯	১০১	৯৮	৯১	৯৪

৮. কোন জেলার সাত বৎসরের চাল উৎপাদন (টনে) দেখান হলো। বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে সরলরৈখিক প্রবণতার মানসমূহ ছকবদ্ধ করুন।

বৎসর	১৯৮৬	১৯৮৭	১৯৮৮	১৯৮৯	১৯৯০	১৯৯১	১৯৯২
উৎপাদন	৮৭	৯৮	১০৪	৯৫	১০১	১০৮	১০০

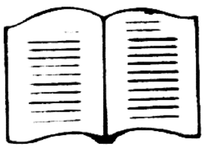
পাঠ-২ : কালীন সারির উপাদান পরিমাপ

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- ঋতুজভেদ কাকে বলে তা বর্ণনা করতে পারবেন
- ঋতুজভেদের পরিমাপগুলোর বর্ণনা করতে পারবেন
- রাশিতথ্য থেকে কীভাবে ঋতুজভেদ দূর করা যায় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- চক্রক্রমিক উঠানামা কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- অনিয়মিত ভেদ সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন।

ঋতুজভেদ (Seasonal Variation)



ঋতুজভেদ বলতেই আপনি বুঝতে পারছেন স্বল্প সময়ের পরিবর্তনশীলতা। কারণ ঋতুতো হয় বৎসরে ছয়টি। এর অর্থ এই দাঁড়ায় ঋতুজভেদ হলো এক বৎসরের কম সময়ের ভিতর, সেটা হতে পারে দৈনিক, সাপ্তাহিক, মাসিক বা ত্রৈমাসিক, কালীন সারি তথ্যের নিয়মিত এবং পর্যায়ক্রমিক পরিবর্তন। এ ধরনের পরিবর্তন বৎসরের পর বৎসর নির্দিষ্ট বৎসরের ভিতর একইভাবে পরিবর্তিত হয়। এক বৎসর বা তার অধিক সময়ের তথ্যে ঋতুজভেদ থাকে না। অধিকাংশ অর্থনৈতিক তথ্য ঋতুজ পরিবর্তন দ্বারা প্রভাবিত হয়। যেমন - কোন জিনিষের মূল্য, উৎপাদন বা কোন দ্রব্যের চাহিদা, বিক্রয় ইত্যাদি। বর্ষাকালে ছাতার চাহিদা, শীতকালে গরম কাপড়ের চাহিদা, গরমকালে ঠান্ডা পানীয়ের চাহিদা ঋতুজভেদের কারণেই বৃদ্ধি পায়।

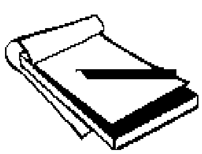
ঋতুজভেদের কারণ

ঋতুজভেদ হয় এক বৎসরের মধ্যে। এর অধিক সময়ের জন্য ঋতুজভেদ হয় না।

একই বৎসরের ভিতর সাপ্তাহিক, মাসিক বা ত্রৈমাসিকভাবে যে তথ্যের পর্যায়ক্রমিক পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায়, এর পিছনে দুটি কারণ আছে। কারণগুলো,

- **প্রাকৃতিক শক্তির প্রভাবে -** প্রকৃতিতে আবহাওয়া এবং জলবায়ুর পরিবর্তনের কারণে এ ধরনের পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায়। আপনি নিশ্চয় লক্ষ্য করেছেন শীতকাল আসলেই গরম কাপড়ের চাহিদা কী পরিমাণে বেড়ে যায়। এর কারণও আপনি জানেন। ঋতু পরিবর্তনের সাথে শীতকাল এলে শীতের হাত থেকে রক্ষা পেতে সকলে গরম কাপড় ক্রয় করে। এ ধরনের চাহিদা বৃদ্ধি বা কালীন সারি তথ্যে পরিবর্তন প্রাকৃতিক কারণে ঘটেছে। একইভাবে গরমকালে ঠান্ডা পানীয়ের চাহিদা, বিভিন্ন ঋতুতে চাল ডাল ইত্যাদির ভিন্ন রকম উৎপাদন ইত্যাদি।

- **মানুষের রুচি বা অভ্যাস পরিবর্তনের প্রভাবে -** এ ধরনের পরিবর্তন, এক বৎসরের কম সময় কালের ভিতর মানুষের অভ্যাস, ফ্যাশন বা প্রথার কারণে লক্ষ্য করা যায়। যেমন - বিয়ের সময় জুয়েলারীতে গহনার চাহিদা (অভ্যাস), ঈদের সময় নুতন কাপড়ের চাহিদা (প্রথা)।



অনুশীলন
ব্যবসা-বাণিজ্যে সিদ্ধান্ত গ্রহণ, আর্থিক ও উৎপাদন সংক্রান্ত পরিকল্পনা প্রণয়নে ঋতুজভেদ কীভাবে প্রভাব বিস্তার করে তা ব্যাখ্যা করুন। (অনুর্দ্ধ ৩০০ শব্দ)

ঋতুজভেদের পরিমাপ

ঋতুজ ভেদের পরিমাপের প্রধান উদ্দেশ্য হলো - প্রবণতা থেকে ঋতুজ ভেদকে পৃথক করা এবং এর কারণ ব্যাখ্যা করা।

ঋতুজ ভেদের পরিমাপের প্রধান উদ্দেশ্য হলো - প্রবণতা থেকে ঋতুজ ভেদকে পৃথক করা এবং এর কারণ ব্যাখ্যা করা। ব্যবসা বাণিজ্যের ক্ষেত্রে ঋতুজ ভেদ সম্পর্কে জানা অত্যন্ত জরুরী। শুধু তাই নয় ঋতুজ ভেদ সম্পর্কে জ্ঞান না থাকলে ব্যবসা বাণিজ্য অসম্ভব ব্যাপার। কেননা মনে করুন, ঋতুগত ভেদের দিকে কোন প্রকার লক্ষ্য না রেখে দেখা গেল একজন ব্যবসায়ী গরমকালে প্রচুর শীতের কাপড় আমদানী করে বাজারে তুললেন। তাহলে অবস্থাটা কেমন হবে? যাইহোক্ ঋতুজ ভেদের পরিমাপগুলোতে আসা যাক। ঋতুজ ভেদ পরিমাপের পদ্ধতি চারটি,

ক) ত্রৈমাসিক বা মাসিক গড়সমূহের পদ্ধতি (Method of Quarterly or Monthly Averages)
খ) প্রবণতা-অনুপাত পদ্ধতি (Ratio to Trend Method)
গ) গতিশীল গড় অনুপাত পদ্ধতি (Ratio to Moving Average Method)

ঘ) যোজনকারী অপেক্ষিক পদ্ধতি (Link Relative Method)

তাহলে ঋতুজ ভেদ পরিমাপের পদ্ধতিগুলোর নাম জানলেন। নিচে প্রতিটি পদ্ধতি সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হলো —

ক) ত্রৈমাসিক বা মাসিক গড়সমূহের পদ্ধতি (Method of Quarterly or Monthly Averages)

ঋতুজ ভেদ পরিমাপের জন্য ত্রৈমাসিক বা মাসিক গড়সমূহের পদ্ধতি সবচেয়ে সহজ। এ পদ্ধতিতে ঋতুগত ভেদ পরিমাপের ধাপগুলো নিম্নরূপ —

ধাপ - ১ ঃ প্রথমে সংগৃহীত তথ্যগুলোকে মাসিক বা ত্রৈমাসিক যেভাবে দেওয়া আছে সেভাবে সাজাতে হবে।

ধাপ - ২ ঃ সাজানোর পর i তম মাস বা ত্রৈমাসের (i = জানুয়ারি, ফ্রেবু --- ডিসেম্বর, কিংবা; প্রথম ত্রৈমাস, দ্বিতীয় ত্রৈমাস --- ইত্যাদি) জন্য $\overline{X}_i$ (গড়) নির্ণয় করতে হবে।

ধাপ - ৩ ঃ i তম মাস বা ত্রৈমাসের গড় নির্ণয় করার পর প্রাপ্ত গড়গুলির $\overline{(X)}$ গড় নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ $\overline{X} = \frac{১}{১২}\sum_{i=১}^{১২} x_i$ (i = জানু, ফেব্রু --- ডিসেম্বর মাস)

অথবা $\overline{X} = \frac{১}{৪}\sum_{i=১}^{৪} x_i$ (i = প্রথম ত্রৈমাসিক, দ্বিতীয় ত্রৈমাসিক ------)

ধাপ - ৪ ঃ বিভিন্ন মাস বা ত্রৈমাসের জন্য ঋতুগত সূচক হবে ঐমাস বা ত্রৈমাসের গড় এবং মোটের গড়ের শতকরা অর্থাৎ ঋতুগত সূচক i তম মাস বা ত্রৈমাসের জন্য = $\frac{\overline{Xi}}{\overline{X}} \times 100 \quad (i = 1,2,3---)$

এ পদ্ধতিতে মাসিক বা ত্রৈমাসিক গড় থেকে চূড়ান্ত গড় বিয়োগ করে মাসিক বা ত্রৈমাসিক এর জন্য ঋতুজ ভেদ নির্ণয় করা যায়। যেমন - জানুয়ারি মাসের গড় $\overline{x}_1$ এবং মোট গড় যদি $\overline{X}$ হয়, তবে জানুয়ারি মাসের ঋতুজ ভেদের পরিমাণ হবে $\overline{x}_1 - \overline{X}$।

ঋতুজ ভেদ পরিমাপের ত্রৈমাসিক বা মাসিক গড়সমূহ পদ্ধতির সুবিধা ও অসুবিধা

এ পদ্ধতিতে সহজে বিভিন্ন বৎসরের জন্য একই মাস বা ত্রৈমাসের তথ্য ব্যবহার করে গড় নির্ণয় করা যায়। এ গড় থেকে মোট গড় বিয়োগ করে ঋতুজ ভেদ এবং শতকরায় প্রকাশ করে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করা যায়।

> ঋতুজ ভেদ পরিমাপের ত্রৈমাসিক বা মাসিক গড়সমূহের পদ্ধতিতে প্রথমে ধরে নেয়া হয় তথ্যে কোন দীর্ঘমেয়াদী প্রবণতা বা চক্রক্রমিক ভেদ নেই।

অপরদিকে এ পদ্ধতিতে প্রথমে ধরে নেয়া হয় তথ্যে কোন দীর্ঘমেয়াদী প্রবণতা বা চক্রক্রমিক ভেদ নেই। কিন্তু অধিকাংশ অর্থনৈতিক তথ্যের ক্ষেত্রে এটা সত্য নয়। প্রত্যেক অর্থনৈতিক তথ্যে দীর্ঘমেয়াদী প্রবণতা বিদ্যমান, কাজেই পদ্ধতিটি সহজ হলেও ব্যবহার উপযোগী কম।

এতক্ষণ আপনি মাসিক বা ত্রৈমাসিক গড়সমূহের পদ্ধতিতে কীভাবে ঋতুজ ভেদ বা ঋতুজ সূচক নির্ণয় করতে হবে তা শিখেছেন। এবার একটা উদাহরণের সাহায্যে দেখা যাক্ এ পদ্ধতির প্রয়োগ।

উদাহরণ ঃ নিম্নলিখিত কালীন সারি তথ্যের ক্ষেত্রে ত্রৈমাসিক গড় পদ্ধতির প্রয়োগে ঋতুজ ভেদ এবং ঋতুজ সূচক নির্ণয় করুন।

ধানের ত্রৈমাসিক উৎপাদন ('০০০ টনে)

বৎসর	I	II	III	IV
১৯৯০	১৫০	৪০০	৩৫০	৩০০
১৯৯১	২০০	৪২০	৩০০	২৮০
১৯৯২	১৫০	৪৮০	৩২০	৩২০
১৯৯৩	১০০	৩৮০	২৮০	২৭০

১৯৯৪	২১০	৩২০	৩৫০	২৭০

সমাধান ঃ ত্রৈমাসিক গড় পদ্ধতিতে গড় ঋতুজ ভেদ এবং ঋতুজ সূচক নির্ণয়ের গণনা কার্য—

বৎসর	ত্রৈমাসিক উৎপাদন			
	I	II	III	IV
১৯৯০	১৫০	৪০০	৩৫০	৩০০
১৯৯১	২০০	৪২০	৩০০	২৮০
১৯৯২	১৫০	৪৮০	৩২০	৩২০
১৯৯৩	১০০	৩৮০	২৮০	২৭০
১৯৯৪	২১০	৩২০	৩৫০	২৭০
মোট	৮১০	২,০০০	১,৬০০	১,৪৪০
গড়সমূহ = (সমষ্টি ÷ ৫)	১৬২ = $\overline{x}_1$	৪০০ = $\overline{x}_2$	৩২০ = $\overline{x}_3$	২৮৮ = $\overline{x}_4$

(বিঃদ্রঃ এখানে ৫ বৎসর আছে বলে ৫টি ত্রৈমাসিক যোগ করে ৫ দিয়ে ভাগ দেওয়া হয়েছে)

$$\overline{X} = \frac{\overline{x}_১ + \overline{x}_২ + \overline{x}_৩ + \overline{x}_৪}{৪}$$

সুতরাং চূড়ান্ত গড় $(\overline{X}) = \frac{১৬২ + ৪০০ + ৩২০ + ২৮৮}{৪}$

$$= \frac{১,১৭০}{৪} = ২৯২.৫$$

তাহলে বিভিন্ন ত্রৈমাসিকসমূহের গড় এবং এ সকল গড়ের গড় অর্থাৎ চূড়ান্ত গড় পাওয়া গেল।

আপনি জানেন ঋতুজ ভেদ = $\overline{X}_i - \overline{X}$ (i তম ত্রৈমাসিক বা মাসিক এর ক্ষেত্রে)

তাহলে, ফরমুলাতে প্রাপ্ত বিভিন্ন ত্রৈমাসিক মান বসিয়ে ঋতুজ ভেদগুলি নির্ণয় করা যাক।

প্রথম ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে ঋতুজ ভেদ = $\overline{X}_১ - \overline{X}$ = ১৬২ - ২৯২.৫ = -১৩০.৫

দ্বিতীয় ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে ঋতুজ ভেদ = $\overline{X}_২ - \overline{X}$ = ৪০০ - ২৯২.৫ = ১০৭.৫

তৃতীয় ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে ঋতুজ ভেদ = ৩২০ - ২৯২.৫ = ২৭.৫

শেষ ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে ঋতুজ ভেদ = ২৮৮ - ২৯২.৫ = - ৪.৫

চারটি ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে ঋতুজ ভেদগুলি পেলেন। এবার এই ঋতুজ ভেদগুলি যোগ করলে কেমন হয় দেখা যাক।

এদের যোগফল = −১৩০.৫+১০৭.৫+২৭.৫−৪.৫ = ০

তাহলে বিশেষ সমস্যায় ঋতুজ ভেদগুলোর যোগফল সর্বদা শূন্য হবে। কখনও কখনও যদি দশমিকের পর বেশী অংক ব্যবহার করলে যোগফল শূন্য না হয় তবে ঋতুজ ভেদের মানগুলি সমন্বয় করে যোগফল শূন্য করতে হবে।

ঋতুজ সূচক বের করার জন্য গুণমূলক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়।

আপনি জানেন ঋতুজ সূচক বের করার জন্য গুণমূলক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয় এবং ক্ষেত্রে i তম মাসিক বা ত্রৈমাসিকের ঋতুজ সূচক = $\frac{\overline{x}_i}{\overline{\overline{x}}} \times ১০০$

অতএব প্রথম ত্রৈমাসিকের সূচক = $\frac{\overline{x}_১}{\overline{\overline{x}}} \times ১০০ = \frac{১৬২}{২৯২.৫} \times ১০০ = ৫৫.৩৮$

দ্বিতীয় ত্রৈমাসিকের সূচক = $\frac{\overline{x}_২}{\overline{\overline{x}}} \times ১০০ = \frac{৪০০}{২৯২.৫} \times ১০০ = ১৩৬.৭৫$

তৃতীয় ত্রৈমাসিকের সূচক = $\frac{৩২০}{২৯২.৫} \times ১০০ = ১০৯.৪০$

শেষ ত্রৈমাসিকের সূচক = $\frac{২৮৮}{২৯২.৫} \times ১০০ = ৯৮.৪৬$

এক্ষেত্রে ঋতুজ সূচকসমূহের যোগফল = ৫৫.৩৮+১৩৬.৭৫+১০৯.৪০+৯৮.৪৬
= ৩৯৯.৯৯ বা ৪০০

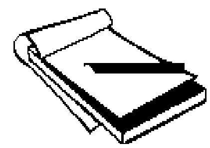
অর্থাৎ, ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে ঋতুজ সূচকেরসমূহের যোগফল সর্বদা ৪০০ এর সমান হবে এবং একইভাবে মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে ঋতুজ সূচকের যোগফল সর্বদা ১,২০০ হবে।

সূচকের যথার্থ অর্থ ঃ প্রান্ত সূচকের অর্থ যে দ্রব্যের স্বাভাবিক মূল্য ১ টাকা তা প্রথম ত্রৈমাসিকে হ্রাস পেয়ে হয়েছে এর ৫৫.৩৮%। অর্থাৎ ১ টাকার জিনিসের মূল্য হয়েছে ০.৫৫ টাকা। একইভাবে দ্বিতীয় ত্রৈমাসিকে ১ টাকার জিনিসের মূল্য হয়েছে ১.৩৬ টাকা। অর্থাৎ ২য় ত্রৈমাসিকে দ্রব্যের মূল্য যথেষ্ট বৃদ্ধি পেয়েছে। তৃতীয় এবং চতুর্থ ত্রৈমাসিকে খুব বেশী উঠানামা করে নাই। তৃতীয় ত্রৈমাসিকে ঐ জিনিসের মূল্য ১.০৯ টাকা এবং চতুর্থ ত্রৈমাসিকে ০.৯৮ টাকা হয়েছে।

ঋতুজ ভেদগুলোর যোগফল সর্বদা শূন্য, ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে ঋতুজ সূচকের যোগফল ৪০০ এবং মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে ঋতুজ সূচকের যোগফল ১,২০০।

অনুশীলন

১৯৮৫, ১৯৮৬ এবং ১৯৮৭ সালের কোন দ্রব্যের উৎপাদনের পরিমাণ নিচে দেওয়া হলো। মাসিক গড়সমূহের পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ এবং ঋতুজ সূচক নির্ণয় করুন।



বৎসর/মাস	জানু.	ফেব্রু.	মার্চ	এপ্রি.	মে	জুন	জুলাই	আগ.	সেপ্টে.	অক্টো.	নভে.	ডিসে.
১৯৮৫	২৪	২২	২০	২৮	৩০	৩০	৩২	২৬	২২	২০	২৪	৩০
১৯৮৬	৩০	২৮	২৬	৩২	৩২	৩০	২৬	২৮	৩২	৩০	২৬	২৪
১৯৮৭	৩৩	২৯	৩০	৩৫	৩৪	২৯	৩১	৩২	৩৮	৩৫	২৯	৩২

মাসিক বা ত্রৈমাসিক গড়সমূহের পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ এবং ঋতুজ সূচক নির্ণয় শিখলেন। এবার দেখা যাক প্রবণতা অনুপাত পদ্ধতিতে কীভাবে ঋতুগত ভেদ পরিমাপ করা যায়।

খ) প্রবণতা অনুপাত পদ্ধতি (Ratio to Trend Method)

এ পদ্ধতিতে ঋতুগত ভেদ নির্ণয় করার সময় প্রথমে ধরে নেওয়া হয় মাসিক বা ত্রৈমাসিক তথ্যে গাণিতিক সম্পর্ক রয়েছে। এ পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ নির্ণয়ের জন্য যে পদক্ষেপগুলো নিতে হবে তা হলো —

প্রবনতা অনুপাত পদ্ধতিতে ঋতুগত ভেদ নির্ণয় করার সময় প্রথমে ধরে নেওয়া হয় মাসিক বা ত্রৈমাসিক তথ্যে গাণিতিক সম্পর্ক রয়েছে।

পদক্ষেপ - ১ ঃ প্রথমে বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে গাণিতিক রেখা (যেমন- সরলরেখা জন্য $y=a+bx$, প্যারাবোলার জন্য $y=a+bx+cx^2$) অঙ্কন করে প্রবণতা মানসমূহ (Trend Value) নির্ণয় করতে হবে।

পদক্ষেপ - ২ ঃ মূল মাসিক বা ত্রৈমাসিক তথ্যকে প্রবণতা মানসমূহের শতকরায় প্রকাশ করতে হবে। যে শতকরা মান পাওয়া যাবে, এতে ঋতুজ, চক্রক্রমিক এবং অনিয়মিত উপাদান থাকবে। কারণ এতে ধরে নেয়া হয় যে, শতকরায় প্রকাশ করলে প্রবণতা দূরীভূত হয়।

পদক্ষেপ - ৩ ঃ এবার মাসিক বা ত্রৈমাসিকে প্রাপ্ত শতকরা গড় ব্যবহার করলে চক্রক্রমিক এবং অনিয়মিত ভেদ দূরীভুত হয়ে যাবে এবং শুধু ঋতুজ ভেদ রয়ে যাবে। **এক্ষেত্রে গাণিতিক গড়ের তুলনায় মধ্যমা ব্যবহার করা ভাল।** কারণ গাণিতিক গড় কোন বিশেষ বড় রকমের তথ্যসংখ্যা দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে যে মান ঋতুগত তথ্যে থাকার কথা নয়।

পদক্ষেপ - ৪ বা শেষ পদক্ষেপ ঃ পদক্ষেপ - ৩ এ বিভিন্ন মাস বা ত্রৈমাসের জন্য যে সূচক পাওয়া গেল এটাকে মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে ১২০০ এবং ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে ৪০০ করার জন্য নিম্নলিখিত ধ্রুবক (K) দ্বারা গুণ করতে হবে।

$$K = \frac{\text{১,২০০}}{\text{সূচকসমূহের যোগফল}}$$ (মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে)

$$K = \frac{\text{৪০০}}{\text{সূচকসমূহের যোগফল}}$$ (ত্রৈমাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে)

প্রবণতা অনুপাত পদ্ধতিতে মাসিক বা ত্রৈমাসিক সকল তথ্যের ক্ষেত্রে গতিধারার পরিমাপ বা ঋতুগত ভেদের পরিমাপ পাওয়া যায়।

এ পদ্ধতিতে মাসিক বা ত্রৈমাসিক সকল তথ্যের ক্ষেত্রে গতিধারার পরিমাপ বা ঋতুগত ভেদের পরিমাপ পাওয়া যায়। কিন্তু চলমান গড় পদ্ধতিতে প্রথম ও শেষ কিছু সময়ের পরিমাপ পাওয়া যায়

না। অপরদিকে তথ্যে যদি চক্রক্রমিক ভেদ অধিক পরিমাণে থাকে তবে গতিশীল গড় পদ্ধতির তুলনায় এক্ষেত্রে ঝোকপূর্ণ পরিমাপ পাওয়া যায়।

উদাহরণ ঃ নিম্নলিখিত উৎপাদন তথ্য ('০০০ টনে) থেকে ঋতুজ ভেদ প্রবণতার অনুপাত পদ্ধতিতে নির্ণয় করুন।

বৎসর	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
১৯৮৫	২০	৩০	২৪	২৮
১৯৮৬	২৪	৩২	২৮	৩২
১৯৮৭	৩০	৩৫	৩০	৩৬
১৯৮৮	৩২	৩৬	৩৬	৪০
১৯৮৯	৩৮	৪৪	৪৮	৫০

(বিঃ দ্রঃ Q_1 = প্রথম ত্রৈমাসিক, Q_2 = দ্বিতীয় ত্রৈমাসিক ইত্যাদি)

সমাধান ঃ এ সমস্যার সমাধান করার জন্য প্রবণতার অনুপাত পদ্ধতির যে ধাপগুলি শিখেছেন সেদিকে খেয়াল করে ধাপে ধাপে এগুতে হবে। প্রথম বাৎসরিক যোগফল তথা গড় মাস বের করে বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে প্রবণতার মানগুলো নির্ণয় করতে হবে। ১৯৮৭ সালকে মূল বিন্দু ধরে প্রবণতা পরিমাপের গণনা নিম্নরূপ —

বৎসর X	বাৎসরিক যোগফল $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$	বাৎসরিক গড় Y	U= X-১৯৮৭	UY	U^2	প্রবণতার মান $\hat{Y}$=a+bu
১৯৮৫	১০২	২৫.৫০	- ২	- ৫১	৪	২৪.৪৫
১৯৮৬	১১৬	২৯.০০	- ১	- ২৯	১	২৯.০৫
১৯৮৭	১৩১	৩২.৭৫	০	০	০	৩৩.৬৫
১৯৮৮	১৪৪	৩৬.০০	১	৩৬	১	৩৮.২৫
১৯৮৯	১৮০	৪৫.০০	২	৯০	৪	৪২.৮৫
		১৬৮.২৫	০	৪৬	১০	

আপনি জানেন প্রবণতা রেখা অঙ্কনের জন্য নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ Y=a+bu এবং a,b নির্ণয়ের সূত্র

$\sum y = na + b\sum u$ ----- (1)

$\sum uy = a\sum u + b\sum u^2$ ----- (2)

(1) নং সমীকরণ থেকে ১৬৮.২৫ = ৫a + b × 0

$$\text{বা, } a = \frac{১৬৮.২৫}{৫} = ৩৩.৬৫$$

(2) নং সমীকরণ থেকে ৪৬ = a × 0 + b× ১০

$$\text{বা, } b = \frac{৪৬}{১০} = ৪.৬$$

অতএব নির্ণেয় প্রবণতা রেখার সমীকরণ, Y = ৩৩.৬৫ + ৪.৬ u

u এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রবণতার মান উপরের টেবিলে শেষ কলামে দেখুন।

কারণ, u = - ২, তখন $\hat{Y}$= ৩৩.৬৫ + (- ২)× ৪.৬ = ২৪.৪৫

u = - ১, তখন $\hat{Y}$= ৩৩.৬৫ + (- ১)× ৪.৬ = ২৯.০৫

u = ০, তখন $\hat{Y}$= ৩৩.৬৫ + ০ = ৩৩.৬৫

u = ১, তখন $\hat{Y}$= ৩৩.৬৫ + ১× ৪.৬ = ৩৮.২৫

u = ২, তখন $\hat{Y}$ = ৩৩.৬৫ + ২× ৪.৬ = ৪২.৮৫

এখানে $\hat{Y}$ এর অর্থ y চলকের নিরূপিত মান

আপনি স্পষ্ট লক্ষ্য করছেন বাৎসরিক বৃদ্ধির পরিমাণ b = ৪.৬, অতএব আমাদের ত্রৈমাসিক তথ্যে বৃদ্ধির পরিমাণ হবে, ৪.৬ ÷ ৪ = ১.১৫

এবার ত্রৈমাসিক তথ্যের জন্য প্রবণতা মানের সারণী বের করব। উপরের তালিকার গণনা থেকে নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে, ১৯৮৫ সালের প্রবণতার পরিমাণ ২৪.৪৫। এই মানটি ঐ বৎসরের মাঝামাঝি সময়ের জন্য প্রযোজ্য। গণনা অনুযায়ী ত্রৈমাসিক তথ্যে বৃদ্ধির পরিমাণ হবে ১.১৫। অর্থাৎ ১৯৮৫ সালের দ্বিতীয় ত্রৈমাসিক তৃতীয় ত্রৈমাসিকের প্রবণতার পরিমাপের পার্থক্য হবে ১.১৫। যেহেতু মাঝামাঝি মানটি ২৪.৪৫, এজন্য দ্বিতীয় ত্রৈমাসিকের মানটি হবে ২৪.৪৫ থেকে ১.১৫ এর অর্ধেক কম। আবার তৃতীয় ত্রৈমাসিকের মানটি হবে ২৪.৪৫ থেকে ১.১৫ এর অর্ধেক বেশী। এক্ষেত্রে যে কোন একটি ত্রৈমাসিকের মান পেলেই তার সাথে ১.১৫ যোগ করে পরবর্তী ত্রৈমাসিকের মান পাওয়া যাবে এবং ১.১৫ বিয়োগ করে পূর্ববর্তী ত্রৈমাসিকের মান পাওয়া যাবে।

অতএব দ্বিতীয় ত্রৈমাসিকের মান ২৪.৪৫ - $\frac{১.১৫}{২}$ = ২৩.৮৭৫ এবং তৃতীয় ত্রৈমাসিকের মান ২৪.৪৫ + $\frac{১.১৫}{২}$ = ২৫.০২৫ (২৩.৮৭৫ এবং ২৫.০২৫ এর গড় নিলে ২৪.৪৫ পাওয়া যাবে)
প্রথম ত্রৈমাসিকের মান = ২৩.৮৭৫ - ১.১৫ = ২২.৭২৫ । ১৯৮৫ সালের শেষ ত্রৈমাসিকের মান = ২৫.০২৫ + ১.১৫ = ২৬.১৭৫।

একইভাবে বিভিন্ন ত্রৈমাসিকের জন্য প্রবণতার মান এবং প্রবণতার মান দুর করার জন্য মূল তথ্যসমূহকে (প্রশ্নে প্রদত্ত মান) প্রবণতার মানের শতকরায় প্রকাশ করে নতুন সারণী হবে।

বৎসর	প্রবণতার মান				প্রবণতা দূরীভূত মান			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
১৯৮৫	২২.৭২৫	২৩.৮৭৫	২৫.০২৫	২৬.১৭৫	৮৮.০১	১২৫.৬৫	৯৫.৯০	১০৬.৯৭
১৯৮৬	২৭.৩২৫	২৮.৪৭৫	২৯.৬২৫	৩০.৭৭৫	৮৭.৮৩	১১২.৩৮	৯৪.৫১	১০৩.৯৮
১৯৮৭	৩১.৯২৫	৩৩.০৭৫	৩৪.২২৫	৩৫.৩৭৫	৯৩.৯৭	১০৫.৮২	৮৭.৬৬	১০১.৭৭
১৯৮৮	৩৬.৫২৫	৩৭.৬৭৫	৩৮.৮২৫	৩৯.৯৭৫	৮৭.১১	৯৫.৫৫	৯২.৭২	১০০.০৬
১৯৮৯	৪১.১২৫	৪২.২৭৫	৪৩.৪২৫	৪৪.৫৭৫	৯২.৪০	১০৪.০৮	১১০.৫৩	১১২.১৭
	প্রবণতা	দুরীভূত	মানের	যোগফল	৪৪৯.৮২	৫৪৩.৪৮	৪৮১.৩২	৫২৪.৯৫
	প্রবণতা	দুরীভূত	মানের	গড় (ঋতুজ সূচক)	৮৯.৯৬	১০৮.৭০	৯৬.২৬	১০৪.৯৯

(সূত্র ঃ ১৯৮৫ সালের প্রথম ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে শতকরা পাব $\frac{২০}{২২.৭২৫} \times ১০০ = ৮৮.০১$।

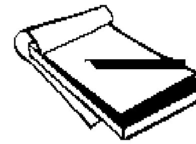
দ্বিতীয় ত্রৈমাসিকের ক্ষেত্রে $\frac{৩০}{২৩.৮৭৫} \times ১০০ = ১২৫.৬৫$। এক্ষেত্রে ২০, ৩০ সংখ্যাগুলো প্রশ্নে প্রদত্ত মূল তথ্য। এভাবে তালিকার অন্যান্য মানগুলো নির্ণয় করতে হবে।

তাহলে প্রবণতা দুরীভূত ঋতুজ সূচক পাওয়া গেল। এ সূচকের যোগফল = ৮৯.৯৬ + ১০৮.৭০ + ৯৬.২৬ + ১০৪.৯৯ = ৩৯৯.৯১ বা ৪০০

ত্রৈমাসিক সূচকের যোগফল ৪০০ হলে সমন্বয় করার দরকার নেই।

সূচকের যোগফল ৪০০ বলে সমন্বয় করার দরকার নেই। কিন্তু ৪০০ এর চেয়ে কম বা বেশী হলে

K = $\frac{৪০০}{\text{মোট সূচক}}$ দিয়ে প্রত্যেক সূচককে গুণ করতে হবে।



অনুশীলন
ত্রৈমাসিক ঋতুজ সূচকের সমষ্টি ৪০০ বা মাসিক ঋতুজ সূচকের সমষ্টি ১,২০০ হওয়ার কারণ কী? আপনার নিজস্ব দৃষ্টিকোণ থেকে মন্তব্য করুন। (অনুর্ধ্ব ২০০ শব্দ)

গ) গতিশীল গড়ের অনুপাত পদ্ধতি (Ratio to Moving Average Method)

গতিশীল গড়ের অনুপাত পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ পরিমাপ অপেক্ষাকৃত সহজ।

গতিশীল গড়ের অনুপাত পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ পরিমাপ অপেক্ষাকৃত সহজ। এ পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ পরিমাপের জন্য বেশ কয়েকটি পদক্ষেপ রয়েছে। আসুন তাহলে পদক্ষেপগুলো সম্পর্কে পরপর জেনে নেয়া যাক। পদক্ষেপগুলো সব বুঝতে পারলে ঋতুজ ভেদ বা ঋতুজ সূচক নির্ণয় করতে পারবেন।

পদক্ষেপ - ১ ঃ মাসিক বা ত্রৈমাসিক তথ্যের জন্য প্রথমে ১২ মাস বা চতুর্থাংশ সমূহের (এক বৎসরের গড় মান পেতে হবে) চলমান গড়সমূহ নির্ণয় করে কেন্দ্র বরাবর স্থাপন করতে হবে। চলমান গড়সমূহ, প্রবণতা এবং চক্রক্রমিক উঠানামার সম্মিলিত প্রভাব নিরূপণ করে। অর্থাৎ প্রদত্ত তথ্যে যে প্রবণতা এবং চক্রক্রমিক উঠানামার কিছু প্রভাব রয়ে যায়, চলমান গড়সমূহ সেটা নিরূপণ করে।

পদক্ষেপ - ২ ঃ প্রথম ৬ মাস এবং শেষ ৬ মাস (মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে) অথবা প্রথম দুই চতুর্থাংশক এবং শেষ দুই চতুর্থাংশক (ত্রৈমসিক তথ্যের ক্ষেত্রে) মান বাদ দিয়ে কেন্দ্রীয় চলমান গড়কে মূল তথ্যের শতকরায় প্রকাশ করতে হবে। এই শতকরা মান ঋতুজ এবং অনিয়মিত উপাদানকে প্রকাশ করে।

পদক্ষেপ - ৩ ঃ শতকরা মান সমূহের গড় নির্ণয় করলে অনিয়মিত ভেদ দুরীভূত হবে এবং ঋতুজ সূচক পাওয়া যাবে।

পদক্ষেপ - ৪ বা শেষ পদক্ষেপ ঃ এই সূচকসমূহের যোগফল মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে ১,২০০ এবং ত্রৈমাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে ৪০০ হওয়া আবশ্যক। যদি না হয় তবে,

$$\text{ধ্রুবক } (K) = \frac{১,২০০}{\text{সূচকের যোগফল}} \quad \text{বা} \quad \frac{৪০০}{\text{সূচকের যোগফল}}$$

দ্বারা প্রাথমিকভাবে প্রাপ্ত ঋতুজ সূচকসমূহকে গুণ করে সমন্বয় করতে হবে। এই সমন্বিত সূচকই হবে ঋতুজ সূচক।

তাহলে চলমান গড়ের অনুপাত পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ণয় শিখলেন। এবার জানতে হবে এর সুবিধা-অসুবিধা, এরপর উদাহরণের মাধ্যমে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করতে হবে।

চলমান গড়ের অনুপাত পদ্ধতির সুবিধা ও অসুবিধা

চলমান গড়ের অনুপাত পদ্ধতি ঋতুজ ভেদ পরিমাপের জন্য সবচেয়ে সন্তোষজনক এবং বহুল ব্যবহৃত।

ঋতুজ ভেদ পরিমাপের জন্য এ পদ্ধতি সবচেয়ে সন্তোষজনক এবং বহুল ব্যবহৃত। তবে এ পদ্ধতির সবচেয়ে অসুবিধা মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে প্রথম ৬ মাস এবং শেষ ৬ মাস এবং ত্রৈমাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে প্রথম দুই চতুর্থাংশক এবং শেষ দুই চতুর্থাংশকের সূচক আমরা পাইনা।

উদাহরণ ঃ নিম্নলিখিত কালীন সারির তথ্য থেকে গতিশীল গড়সমূহের সহিত অনুপাতসমূহ পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করুন এবং স্বল্পমেয়াদী ঋতুজ ভেদ নির্ণয় করুন।

বৎসর	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4

১৯৯১	১৮	২১	৩০	১৭
১৯৯২	২২	২৮	৩৯	২৮
১৯৯৩	৩৩	৩৭	৪৫	৩১
১৯৯৪	৮৯	৪৯	৪৭	৪৪

সমাধান ঃ প্রথমে চার (৪) চতুর্থাংশীয় গতিশীল গড় বের করতে হবে। গতিশীল গড় বের করার পর মূল তথ্যের শতকরায় প্রকাশ করতে হবে। অতঃপর, ঋতুজ সূচক নির্ণয়ের গণনাকার্যে যেতে হবে। আর ঋতুজ ভেদ নির্ণয়ের জন্য চার (৪) চতুর্থাংশীয় গড় থেকে মূল তথ্য বিয়োগ করে স্বল্পমেয়াদী পরিবর্তন বের করে ঋতুজ সুচক নির্ণয়ের গণনা কার্যে যেতে হবে।

আসুন তাহলে দুধরনের গণনা কার্য একই সারণীর মাধ্যমে করে নেই।

বৎসর	চতুর্থাংশক	চলকের মান y	চার চতুর্থাংশীয় গতিশীল সমষ্টি	চার চতুর্থাংশীয় গতিশীল সমষ্টির গড়	চার চতুর্থাংশীয় গতিশীল গড় (T) (কেন্দ্রীভূত)	স্বল্পমেয়াদী পরিবর্তন সমূহ =Y−T	গতিশীল গড়ের সাথে অনুপাত $\frac{y}{T}\times ১০০$
১৯৯১	Q_1	১৮					
	Q_2	২১					
			৮৬	২১.৫০			
	Q_3	৩০			২২	৩০ - ২২=৮	১৩৬.৩৬
			৯০	২২.৫০			
	Q_4	১৭			২৩.৩৭৫	১৭ - ২৩.৩৭৫= -৬.৩৭৫	৭২.৭৩
			৯৭	২৪.২৫			
১৯৯২	Q_1	২২			২৫.৩৭৫	-৩.৩৭৫	৮৬.৭০
			১০৬	২৬.৫০			
	Q_2	২৮			২৭.৮৭৫	০.১২৫	১০০.৪৫
			১১৭	২৯.২৫			
	Q_3	৩৯			৩০.৬২৫	৮.৩৭৫	১২৭.৩৫
			১২৮	৩২.০০			
	Q_4	২৮			৩৩.১২৫	- ৫.১২৫	৮৪.৫৩
			১৩৭	৩৪.২৫			
১৯৯৩	Q_1	৩৩			৩৫	-২	৯৪.২৯
			১৪৩	৩৫.৭৫			
	Q_2	৩৭			৩৬.১২৫	০.৮৭৫	১০২.৪২
			১৪৬	৩৬.৫০			
	Q_3	৪৫			৩৮.৫	৬.৫	১১৬.৮৮
			১৬২	৪০.৫০			
	Q_4	৩১			৪১.৩৭৫	-১০.৩৭৫	৭৪.৯২
			১৬৯	৪২.২৫			
১৯৯৪	Q_1	৪৯			৪২.৫	৬.৫	১১৫.২৯
			১৭১	৪২.৭৫			
	Q_2	৪৪			৪৪.৩৭৫	-০.৩৭৫	৯৯.১৫
			১৮৪	৪৬.০০			
	Q_3	৪৭					
	Q_4	৪৪					

ঋতুজ ভেদ নির্ণয়ের জন্য গণনাসমূহ

চতুর্থাংশ / বৎসর	স্বল্পমেয়াদী পরিবর্তনসমূহ			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
১৯৯১	-	-	৮.০০০	-৬.৩৭৫

১৯৯২ ১৯৯৩ ১৯৯৪	-৩.৩৭৫ -২.০০০ ৬.৫০০	০.১২৫ ০.৮৭৫ -০.৩৭৫	৮.৩৭৫ ৬.৫০০ -	৫.১২৫ -১০৩৭৫ -
সমষ্টি	১.১২৫	০.৬২৫	২২.৮৭৫	-১১.৬২৫
গড়সমূহ = সমষ্টি ÷ ৩	$\bar{X}_1$= ০·৩৭৫	$\bar{X}_2$= ০.২০৮	$\bar{X}_3$= ৭.৬২৫	$\bar{X}_4$= -৭.২৯২

চতুর্থাংশসমূহের গড় থেকে চূড়ান্ত গড় বের করে ঐ সকল গড় থেকে চূড়ান্ত গড় বিয়োগ করলে যে ফল পাওয়া যায় তাকে বলে ঋতুজ ভেদ।

চতুর্থাংশসমূহের গড় থেকে চূড়ান্ত গড় বের করে ঐ সকল গড় থেকে চূড়ান্ত গড় বিয়োগ করলে যে ফল পাওয়া যায় তাকে বলে ঋতুজ ভেদ।

তাহলে আসুন ঋতুজ ভেদ নির্ণয়ের জন্য চূড়ান্ত গড় নির্ণয় করা যাক।

চূড়ান্ত গড় $\bar{X} = \dfrac{\bar{x}_১ + \bar{x}_২ + \bar{x}_৩ + \bar{x}_৪}{৪}$

$$= \frac{০.৩৭৫ + ০.২০৮ + ৭.৬২৫ - ৭.২৯২}{৪}$$

$$= \frac{০.৯১৬}{৪} = ০.২২৯$$

অতএব বৎসরের প্রথম চতুর্থাংশের ঋতুজ ভেদ $= \bar{X}_১ - \bar{X}$

$= ০.৩৭৫ - ০.২২৯ = ০.১৪৬$

দ্বিতীয় চতুর্থাংশের ঋতুজ ভেদ $= \bar{X}_২ - \bar{X}$

$= ০.২০৮ - ০.২২৯ = - ০.০২১$

তৃতীয় চতুর্থাংশের ঋতুজ ভেদ $= \bar{X}_৩ - \bar{X}$

$= ৭.৬২৫ - ০.২২৯ = ৭.৩৯৬$

চতুর্থ চতুর্থাংশের ঋতুজ ভেদ $= \bar{X}_৪ - \bar{X}$

$= -৭.২৯২ - ০.২২৯ = -৭.৫২১$

অতএব ১৯৯১ - ১৯৯৪ পর্যন্ত চতুর্থাংশকসমূহের জন্য গতিশীল গড়সমূহের অনুপাত পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ যথাক্রমে ০.১৪৬, − ০.০২১, ৭.৩৯৬ এবং −৭.৫২১।

ঋতুজ সূচক নির্ণয়ের গণনাকার্য

বৎসর/চতুর্থাংশ	গতিশীল গড়সমূহের সাথে অনুপাতসমূহ			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
১৯৯১ ১৯৯২ ১৯৯৩ ১৯৯৪	- ৮৬.৭০ ৯৪.২৯ ১১৫.২৯	- ১০০.৪৫ ১০২.৪২ ৯৯.১৫	১৩৬.৩৬ ১২৭.৩৫ ১১৬.৮৮ -	৭২.৭৩ ৮৪.৫৩ ৭৪.৯২ -
সমষ্টি	২৯৬.২৮	৩০২.০২	৩৮০.৫৯	২৩২.১৮
গড়সমূহ = সমষ্টি ÷ ৩	$\bar{X}_1$= ৯৮.৭৬	$\bar{X}_2$= ১০০.৬৭	$\bar{X}_3$= ১২৬.৮৬	$\bar{X}_4$= ৭৭.৩৯

ঋতুজ ভেদের ক্ষেত্রের ন্যায়,

চূড়ান্ত গড় $\bar{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x}_১ + \bar{x}_২ + \bar{x}_৩ + \bar{x}_৪}{৪}$

$$= \frac{৯৮.৭৬ + ১০০.৬৭ + ১২৬.৮৬ + ৭৭.৩৯}{৪}$$

$$= \frac{৪০৩.৬৮}{৪} = ১০০.৯২$$

লক আকার ব্যবহার
আপনি ঋতুজসূচক
করতে পারেন।

অতএব গুণমূলক আকার ব্যবহার করে আপনি ঋতুজসূচক নির্ণয় করতে পারেন। ঋতুজ সূচকসমূহ হলো,

বৎসরের প্রথম চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক, $\frac{\overline{X}_{\text{১}}}{\overline{\overline{X}}} \times \text{১০০}$

$$= \frac{\text{৯৮.৭৬}}{\text{১০০.৯২}} \times \text{১০০} = \text{৯৭.৮৬}$$

দ্বিতীয় চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক, $\frac{\overline{X}_{\text{২}}}{\overline{\overline{X}}} \times \text{১০০}$

$$= \frac{\text{১০০.৬৭}}{\text{১০০.৯২}} \times \text{১০০} = \text{৯৯.৭৫}$$

তৃতীয় চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক, $\frac{\overline{X}_{\text{৩}}}{\overline{\overline{X}}} \times \text{১০০}$

$$= \frac{\text{১২৬.৮৬}}{\text{১০০.৯২}} \times \text{১০০} = \text{১২৫.৭০}$$

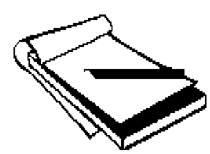
চতুর্থ চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক, $\frac{\overline{X}_{\text{৪}}}{\overline{\overline{X}}} \times \text{১০০}$

$$= \frac{\text{৭৭.৩৯}}{\text{১০০.৯২}} \times \text{১০০} = \text{৭৬.৬৮}$$

লক্ষ্যণীয় যে ঋতুজ সূচকসমূহের যোগফল = ৯৭.৮৬+৯৯.৭৫+১২৫.৭০+৭৬.৬৮ =৩৯৯.৯৯ বা ৪০০।

অনুশীলন

১৯৮২ - ১৯৮৫ বৎসরসমূহের কোন জিনিসের উৎপাদন দেওয়া আছে। গতিশীল গড়সমূহের পদ্ধতিতে সম্পর্কমূলক আকার ব্যবহার করে ঋতুজ ভেদ এবং গুণমূলক পদ্ধতি ব্যবহার করে ঋতুজ সূচক বের করুন।



দ্রব্যের উৎপাদন (০০ টনে)

বৎসর	প্রথম ত্রৈমাসিক Q_1	দ্বিতীয় ত্রৈমাসিক Q_2	তৃতীয় ত্রৈমাসিক Q_3	চতুর্থ ত্রৈমাসিক Q_4
১৯৮২	১৫.০০	১২.৫০	১৩.৭০	১৬.০০
১৯৮৩	১৪.৯০	১১.২০	১৪.৬০	১৭.০০
১৯৮৪	১৫.৩০	১০.৯০	১৫.৯০	১৮.২০
১৯৮৫	১৬.১০	১২.২০	১৪,০০	১৮.৭০

ঘ) যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতি (Link Relative Method)

ঋতুজ ভেদ বা ঋতুজ সূচক নির্ণয়ের এটা হচ্ছে সর্বশেষ পদ্ধতি। পদ্ধতিটি কিছুটা জটিল। এ পদ্ধতিতেও অন্যান্য পদ্ধতির ন্যায় কয়েকটি পদক্ষেপের সাহায্যে ঋতুজ ভেদ নির্ণয় করা হয়। আসুন তাহলে পদক্ষেপসমূহ কী দেখা যাক।

যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতিতেও অন্যান্য পদ্ধতির ন্যায় কয়েকটি পদক্ষেপের সাহায্যে ঋতুজ ভেদ নির্ণয় করা হয়।

পদক্ষেপ - ১ ঃ প্রথমে কালীন সারির অন্তর্গত প্রত্যেক চতুর্থাংশ বা মাসিক তথ্যকে পূর্ববর্তী চতুর্থাংশ বা মাসিক তথ্যের শতকরায় প্রকাশ করা হয়। প্রাপ্ত ফলাফলকে যোজনকারী অপেক্ষিক বলা হয়।

পদক্ষেপ - ২ ঃ প্রত্যেক মাস বা চতুর্থাংশের জন্য যোজনকারী অপেক্ষিকসমূহের গড় (গাণিতিক গড় বা মধ্যমা) নির্ণয় করতে হয়।

পদক্ষেপ - ৩ ঃ গড় যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহকে প্রথম মাস বা চতুর্থাংশের ভিত্তিতে পূর্বাপর যোজনকারী অপেক্ষিকসমূহ নির্ণয় করতে হবে। পুর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহ হবে, কোন নির্দিষ্ট ঋতুর (মাসিক তথ্য বা চতুর্থাংশ) পূর্বের ঋতুর পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক × (গুণ) ঐ ঋতুর যোজনকারী আপেক্ষিক ÷ (ভাগ) ১০০।

মনে করুন, ফেব্রুয়ারি মাসের পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক নির্ণয় করতে হবে, তাহলে ফেব্রুয়ারি মাসের পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক

$$= \frac{\text{জানুয়ারির পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক} \times \text{ফেব্রুয়ারি যোজনকারী আপেক্ষিক}}{১০০}$$

একই ভাবে মার্চ, এপ্রিল --------- ডিসেম্বর মাসের পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহ নির্ণয় করতে হবে। এ পদক্ষেপের শেষ পর্যায়ে ডিসেম্বর বা শেষ চতুর্থাংশের পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক মানকে ভিত্তি ধরে জানুয়ারি মাসের বা প্রথম চতুর্থাংশের নতুন পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক নির্ণয় করতে হবে। এ পদ্ধতিতে জানুয়ারি পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক

$$= \frac{\text{জানুয়ারির যোজনকারী আপেক্ষিক} \times \text{ডিসেম্বর পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক}}{১০০}$$

পদক্ষেপ - ৪ ঃ এই পদক্ষেপের প্রথমেই Correction factor বের করতে হয়।

Correction factor, $d = \frac{১}{১২}$ [জানুয়ারির দ্বিতীয় পূর্বাপর যোজনকারী মান - ১০০] (মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে)

$d = \frac{১}{৪}$ [প্রথম চতুর্থাংশের দ্বিতীয় পূর্বাপর যোজনকারী মান - ১০০] (ত্রৈমাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে)

Correction factor বের করে ফেব্রুয়ারি, মার্চ --------- ডিসেম্বর মাসের জন্য যথাক্রমে d, ২d ------- ১১d বিয়োগ করতে হবে (মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে) এবং দ্বিতীয় ত্রৈমাসিক, তৃতীয় ত্রৈমাসিক ও চতুর্থ ত্রৈমাসিক থেকে যথাক্রমে d, ২d এবং ৩d বিয়োগ করতে হবে।

পদক্ষেপ - ৫ ঃ সবশেষে Q_1, Q_2, Q_3 ও Q_4 বা জানুয়ারি, ফেব্রুয়ারি, মার্চ ------ ডিসেম্বরের সংশোধিত পূর্বাপর যোজনকারী মানগুলিকে এদের যৌগিক গড়ের শতকরায় প্রকাশ করলে ঋতুজ সূচকসমূহ পাওয়া যাবে। চতুর্থাংশ চারিটির সূচকগুলির সমষ্টি ৪০০ এবং মাসিক সূচকগুলির যোগফল ১,২০০ এর সমান হবে।

যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতির সুবিধা ও অসুবিধা

যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ নির্ণয়ে প্রবণতার মান ক্রমানুয়ে কমে আসে যদি কিনা প্রবণতার মান ধ্রুবক হয় বা ধ্রুবক হারে বৃদ্ধি পায়।

যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ নির্ণয়ে প্রবণতার মান ক্রমানুয়ে কমে আসে যদি কিনা প্রবণতার মান ধ্রুবক হয় বা ধ্রুবক হারে বৃদ্ধি পায়। চলমান গড় পদ্ধতির তুলনায় অধিক সংখ্যক মাস বা সময়ের জন্যও ঋতুজ সূচক নির্ণয় করা যায়। যেমন - মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে চলমান গড় পদ্ধতিতে প্রথম এবং শেষ ৬ মাসের ঋতুজ সূচক পাওয়া যায় না। কিন্তু এক্ষেত্রে মাত্র এক মাসের সূচক পাওয়া যায় না। তবে এ পদ্ধতিটি বেশ জটিল।

এতক্ষণ যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ণয়ের প্রক্রিয়া শিখলেন। এখন একটি উদাহরণের সাহায্যে প্রক্রিয়াটি সম্বন্ধে পরিস্কার ধারণা নেওয়া যাক।

উদাহরণ ঃ নিচে কোন একটি নির্দিষ্ট দ্রব্যের পাঁচ বৎসরের ত্রৈমাসিক মূল্য দেওয়া আছে। যোজনকারী পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ সূচক নির্ণয় করুন।

বৎসর	ত্রৈমাসিক তথ্যসমূহ			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
১৯৮৭	২৫	২১	১৭	২৬

১৯৮৮	৩০	২৩	১৭	৩১
১৯৮৯	২৬	২৪	২৩	২৭
১৯৯০	২৬	২৬	২০	৩০
১৯৯১	২৯	৩১	২১	২৮

নকারী আপেক্ষিক
তেতে প্রথমেই চতুর্থাংশ
হের মানকে এদের ঠিক
তী মানের শতকরায়
শ করে যোজনকারী
ক্ষিকসমূহ নির্ণয়
ত হবে।

সমাধান ঃ সূত্রমতে প্রথমেই চতুর্থাংশসমূহের মানকে এদের ঠিক পূর্ববর্তী মানের শতকরায় প্রকাশ করে যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহ নির্ণয় করতে হবে। এরপর প্রত্যেক চতুর্থাংশের আপেক্ষিকসমূহ নির্ণয় করতে হবে। এরপর প্রত্যেক চতুর্থাংশের অন্তর্গত যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহের যৌগিক গড় গণনা করতে হবে। যৌগিক গড় গণনা করার পর Q_1 এর প্রথম পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক (CR) = ১০০ মনে করে, অন্যান্য চতুর্থাংশের পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক (CR) নির্ণয় করতে হবে। এরপর Q_1 এর দ্বিতীয় পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক বের করে Correction factor এবং সংশোধিত পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক নির্ণয় করতে হবে। সবশেষে পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহের গড় নির্ণয় করে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করতে হবে।

পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহের গড় নির্ণয় করে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করতে হবে।

তাহলে আসুন উপরে দেওয়া নিয়ম অনুযায়ী একটি সারণীতে পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহ নির্ণয় করি।

চতুর্থাংশ / বৎসর	যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহ			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
১৯৮৭	-	৮৪	৮০.৯৫	১৫২.৯৪
১৯৮৮	১১৫.৩৮	৭৬.৬৭	৭৩.৯১	১৮২.৩৫
১৯৮৯	৮৩.৮৭	৯২.৩১	৯৫.৮৩	১১৭.৩৯
১৯৯০	৯৬.৩০	১০০	৭৬.৯২	১৫০.০০
১৯৯১	৯৬.৬৭	১০৬.৯০	৬৭.৭৪	১৩৩.৩৩
সমষ্টি	৩৯২.২২	৪৫৯.৮৮	৩৯৫.৩৫	৭৩৬.০১
যৌগিক গড়	৯৮.০৬	৯১.৯৮	৭৯.০৭	১৪৭.২০
পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক	১০০	৯১.৯৮	৭২.৭৩	১০৭.০৬

১৯৮৭ সালের Q_2 এর যোজনকারী আপেক্ষিক $= \frac{২১}{২৫} \times ১০০ = ৮৪$

Q_3 এর যোজনকারী আপেক্ষিক $= \frac{১৭}{২১} \times ১০০ = ৮০.৯৫$

Q_4 এর যোজনকারী আপেক্ষিক $= \frac{২৬}{১৭} \times ১০০ = ১৫২.৯৪$

১৯৮৮ সালের Q_1 এর যোজনকারী আপেক্ষিক = $= \frac{৩০}{২৬} \times ১০০ = ১১৫.৩৮$

একই ভাবে অন্যান্য বৎসরের যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহ নির্ণয় করে উপরে সারণীতে বসানো হলো। পরবর্তীতে প্রতি চতুর্থাংশের যোজনকারী আপেক্ষিকসমূহের সমষ্টি নির্ণয় করে গড় নির্ণয় করা হয়েছে।

এখন Q_1 এর প্রথম পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক ১০০ ধরে নিলে, Q_2 এর পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক CR হবে,

$$CR = \frac{Q_2 \text{ এর গড় যোজনকারী আপেক্ষিক (ALR)} \times Q_1 \text{ এর পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক CR}}{১০০}$$

$$= \frac{৯১.৯৮}{১০০} \times ১০০ = ৯১.৯৮$$

অনুরূপভাবে Q_3 এর CR = $\frac{Q_৩ \text{ এর ALR} \times Q_২ \text{ এর CR}}{১০০}$

$$= \frac{৭৯.০৭}{১০০} \times ৯১.৯৮ = ৭২.৭৩$$

$$Q_4 \text{ এর } CR = \frac{Q_৪ \text{ এর } ALR \times Q_৩ \text{ এর } CR}{১০০}$$

$$= \frac{১৪৭.২০}{১০০} \times ৭২.৭৩ = ১০৭.০৬$$

Q_1 এর দ্বিতীয় পূর্বাপর যোজনকারী আপেক্ষিক CR

$$= \frac{Q_4 \text{ এর } CR \times Q_1 \text{ এর } ALR}{১০০}$$

$$= \frac{১০৭.০৬}{১০০} \times ৯৮.০৬ = ১০৪.৯৮$$

Correction factor $d = \frac{১}{৪}$ (দ্বিতীয় Q_1 এর CR - ১০০)

$$= \frac{১}{৪} (১০৪.৯৮ - ১০০) = - ১.২৪৫$$

সুতরাং, Q_1 এর সংশোধিত CR = Q_1 এর দ্বিতীয় CR - ৪ d

= ১০৪.৯৮ − ৪ (১.২৪৫) = ১০৪.৯৮ − ৪.৯৮ = ১০০

Q_2 এর সংশোধিত CR = ৯১.৯৮ - d

= ৯১.৯৮ − ১.২৪৫ = ৯০.৭৩৫

Q_3 এর সংশোধিত CR = ৭২.৭৩ - ২d

= ৭২.৭৩ − ২ (১.২৪৫) = ৭২.৭৩ − ২.৪৯ = ৭০.২৪

Q_4 এর সংশোধিত CR = ৮৭.৮৬ - ৩d

= ১০৭.০৬ − ৩ (১.২৪৫) = ১০৭.০৬ − ৩.৭৩৫ = ১০৩.৩২৫

এখন চতুর্থাংশগুলির সংশোধিত CR এর যৌগিক গড়

$$= \frac{১}{৪} (১০০ + ৯০.৭৩৫ + ৭০.২৪ + ১০৩.৩২৫)$$

$$= \frac{৩৬৪.৩০}{৪} = ৯১.০৮$$

$$\text{এবার, } Q_1 \text{ এর ঋতুজ সূচক} = \frac{Q_1 \text{ এর সংশোধিত } CR}{CR \text{ গুলির যৌগিক গড়}} \times ১০০$$

$$= \frac{১০০}{৯১.০৮} \times ১০০ = ১০৯.৭৯$$

$$Q_2 \text{ এর ঋতুজ সূচক} = \frac{Q_2 \text{ এর সংশোধিত } CR}{CR \text{ গুলির যৌগিক গড়}} \times ১০০$$

$$= \frac{৯০.৭৩৫}{৯১.০৮} \times ১০০ = ৯৯.৬২$$

Q_3 এর সংশোধিত CR

Q_3 এর ঋতুজ সূচক = ------------------------ × ১০০
CR গুলির যৌগিক গড়

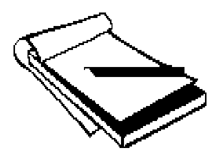
$$= \frac{৭০.২৪}{৯১.০৮} \times ১০০ = ৭৭.১২$$

Q_4 এর সংশোধিত CR
Q_4 এর ঋতুজ সূচক = ------------------------ × ১০০
CR গুলির যৌগিক গড়

$$= \frac{১০৩.৩২৫}{৯১.০৮} \times ১০০ = ১১৩.৪৪$$

অতএব আপনি প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্থাংশগুলির ঋতুজ সূচকসমূহ পেলেন যা যথাক্রমে, ১০৯.৭৯, ৯৯.৬২, ৭৭.১২ এবং ১১৩.৪৪।

এখন সূচকগুলির যোগফল, ১০৯.৭৯ + ৯৯.৬২ + ৭৭.১২ + ১১৩.৪৪ = ৪০০



অনুশীলন
যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত কালীন সারি তথ্য থেকে ঋতুজ সূচকসমূহ নির্ণয় করুন।

চতুর্থাংশ/বৎসর	১৯৮০	১৯৮১	১৯৮২	১৯৮৩
Q_1	১৪৮	১৪০	১৫২	১৬০
Q_2	১৫৬	১৬৩	১৬৫	১৭০
Q_3	১৬৩	১৭০	১৭৫	১৮৪
Q_4	১৫৭	১৬৫	১৭২	১৭৭

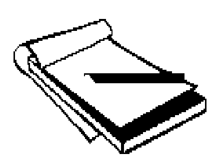
এতক্ষণ ঋতুজ ভেদ বা ঋতুজ সূচক নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতিগুলি সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছেন। এবার কোন রাশি তথ্য থেকে কীভাবে ঋতুজ ভেদ দূর করা যায় সে সম্পর্কে জানা যাক।

তথ্য সারি থেকে ঋতুজ ভেদ দূরীকরণ প্রক্রিয়া

কালীন সারির মূল তথ্য থেকে ঋতুজ ভেদ দূর করাকেই ঋতুজ ভেদ দূরীকরণ বুঝায়।

ঋতুজ ভেদ দূরীকরণ বলতে বুঝায়, কালীন সারির মূল তথ্য থেকে ঋতুজ ভেদ দূর করা। আপনি ইতোমধ্যে জেনেছেন, ত্রৈমাসিক বা মাসিক গড়সমূহের পদ্ধতি, গতিশীল গড়সমূহের পদ্ধতি বা অন্য আরও পদ্ধতিতে চতুর্থাংশ বা মাসসমূহের ঋতুজ ভেদ নির্ণয় করা যায়। যদি কালীন সারি তথ্যে উপাদানসমূহের যোগবোধক প্রভাব থাকে, অর্থাৎ কালীন সারির মান $Y = T+S+C+I$ হয়, তবে ঋতজু প্রভাবমুক্ত তথ্য $Y - S = T+C+I$ হবে। আপনার নিশ্চয়ই মনে আছে, T= প্রবণতা, S = ঋতুজভেদ, C = চক্রক্রমিক পরিবর্তন এবং I = অনিশ্চিত বা অনিয়মিত গতি।

আবার যদি গুণমূলক আকার (Multiplicative model) থাকে, অর্থাৎ যদি $Y = T\times S \times C \times I$ হয়, তবে সেক্ষেত্রে গতিশীল গড়ের অনুপাত পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করা হয়। অতঃপর ঋতুজ সূচকসমূহকে ১০০ দ্বারা ভাগ করে ঋতুজ ফল (seasonal effects) নির্ণয় করা হয়। এরপর মূল তথ্যকে ঋতুজ ফল দ্বারা ভাগ করে তথ্যসমূহকে ঋতুজ প্রভাবমুক্ত করা হয়। এক্ষেত্রে ঋতুজ প্রভাবমুক্ত তথ্য হবে $\frac{y}{s} = T \times C \times I$। এরূপ তথ্যে চক্রক্রমিক ও অনিয়মিত গতির পরিমাপ করতে সহজ হয়।



অনুশীলন
চক্রক্রমিক উঠানামার প্রভাবে সময়ের আবর্তে মানের পরিবর্তন হয় এমন পাঁচটি চলকের নাম উপযুক্ত ব্যাখ্যা সহ উল্লেখ করুন।

চক্রক্রমিক উঠানামা (Cyclical Fluctuation)

কোন উৎপাদন বা পণ্যমূল্য সর্বোচ্চ অবস্থান থেকে পুনরায় সর্বনিম্ন অবস্থানে নেমে আসাটাকে এক চক্র বলা হয়। আর এরকম বাড়া-কমাকেই চক্রক্রমিক পরিবর্তন বলে।

কালীন সারি তথ্যে দীর্ঘমেয়াদী উত্থান বা পতন লক্ষ্য করা যায়। এ ধরনের উত্থান বা পতন এক বৎসরের ভিতর না হয়ে, এর চেয়ে বেশী সময়ের জন্য হয়ে থাকে। আপনি হয়ত লক্ষ্য করে

থাকবেন, কোন জিনিসের উৎপাদন বা মূল্য বেড়ে কোন এক সময় সর্বোচ্চ উৎপাদন বা মূল্য হচ্ছে। আবার হ্রাস পেতে পেতে সর্বনিম্ন অবস্থানে আসছে। সর্বনিম্ন অবস্থান থেকে সর্বোচ্চ অবস্থানে গিয়ে পুনরায় সর্বনিম্ন অবস্থানে আসাকে এক চক্র বলে। আর এরূপ পরিবর্তনকে চক্রক্রমিক পরিবর্তন বলা হয়। সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে ব্যবসায়িক চক্রের (Business Cycle) পর্যায়সমূহ যেমন, উন্নতি (Prosperities), পশ্চাদগতি (Recession), মন্দা (Depression) এবং পুনরুদ্ধার (Recovery) এর পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায়। সাধারণত এই পর্যায়কাল তিন বৎসর থেকে নয়-দশ বৎসরের মধ্যে পরিবর্তিত হয়।

কোন বৎসরের গতি প্রকৃতি সঠিকভাবে জানার জন্য ও বুঝার জন্য চক্রক্রমিক পরিবর্তনশীলতার ধারণা অবশ্যই প্রয়োজন।

অনিয়মিত গতি (Irregular Movement)

ভেদ প্রবণতা, ঋতুগত বা চক্রক্রমিক পরিবর্তন ছাড়া অন্য যে কোন কারণে কালীন সারির পরিবর্তন হতে পারে। আর এই পরিবর্তনই হলো অনিয়মিত গতি।

কালীন সারির এই উপাদানের প্রভাব কালীন সারি তথ্যে নির্দিষ্টভাবে বা নিয়মিতভাবে লক্ষ্য করা যায় না। সাধারণত কালীন সরির পরিবর্তন যখন ভেদ প্রবণতা, ঋতুগত এবং চক্রক্রমিক ভেদের কারণে ঘটেনা তা-ই অনিয়মিত ভেদ। এ ধরনের ভেদের কথা পূর্বে বুঝা যায় না। অর্থাৎ পরিবর্তন ঘটার কারণ অনিশ্চিত ও অনিয়মিত। যেমন - বন্যা, ভূমিকম্প, ধর্মঘট ইত্যাদি। কোন একটা মাঠের ফসলের স্বাভাবিক উৎপাদন বৎসরে ধরা যাক ১০০ টন। কোন এক বৎসরে বন্যার ফলে এর উৎপাদন ২৫ টনে এমনকি শুণ্যতেও নেমে আসতে পারে। এই যে অস্বাভাবিক পরিবর্তন বা নোটিস ছাড়া পরিবর্তন, এটাই হলো অনিয়মিত পরিবর্তন।

সারাংশ

এ পাঠে আপনি জানলেন ঋতুজ ভেদ কাকে বলে। ঋতুজ ভেদের পরিমাপগুলো যেমন - মাসিক বা ত্রৈমাসিক গড়সমূহের পদ্ধতি, গতিশীল গড়সমূহের পদ্ধতি, প্রবণতা অনুপাত পদ্ধতি এবং যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতি। এ সকল পদ্ধতি থেকে কীভাবে ঋতুজ ভেদ এবং ঋতুজ সূচক নির্ণয় করা যায় সে সম্পর্কেও ধারণা পেলেন। ঋতুজ ভেদ নির্ণয়ের পর মূল তথ্য থেকে বিয়োগ করলে ঋতুজ প্রভাবমুক্ত তথ্য পাওয়া যায় এবং ঋতুজ সূচক ১০০ দ্বারা ভাগ করে ঋতুজ ফল নির্ণয়ের পর মূল তথ্যকে ভাগ করে ঋতুজ প্রভাবমুক্ত করা যায়। এছাড়া এ পাঠে চক্রক্রমিক ও অনিয়মিত উঠানামা সম্পর্কে জানলেন। এর পরবর্তী ইউনিট হলো নমুনায়ন ও নমুনা জরিপ।

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. ঋতুগত ভেদ কাকে বলে?

২. ঋতুজ ভেদ এবং ঋতুজ সূচক কীভাবে নির্ণয় করবেন?

৩. গতিশীল গড়সমূহের পদ্ধতি অপেক্ষা প্রবণতার অনুপাত পদ্ধতি কোন দিক দিয়ে সুবিধাজনক?

৪. যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ণয়ের ধাপগুলো ব্যাখ্যা করুন।

৫. ঋতুজ, চক্রক্রমিক ও অনিয়মিত পরিবর্তনশীলতার মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করুন। ঋতুজ ভেদ নির্ণয় করার নিয়মগুলো ব্যাখ্যা করুন।

৬. ঋতুজ সূচক নির্ণয়ে কোন পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়?

৭. গড় পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত তথ্য থেকে ঋতুজ সূচক ও ঋতুজ ভেদ নির্ণয় করুন। ঋতুজ ভেদ কীভাবে দূর করবেন?

বৎসর	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
১৯৮৪	৬২	৫৮	৭০	৬০
১৯৮৫	৬৬	৬০	৭২	৬৪
১৯৮৬	৬৪	৫৬	৭৪	৭০
১৯৮৭	৬৬	৬৪	৭৪	৬৮

(সূত্র ঃ গতিশীল গড় পদ্ধতি বা অন্য পদ্ধতিতে ঋতুজ ভেদ নির্ণয় করে প্রত্যেক চুতর্থকের জন্য একই মান ধরে মূল তথ্য থেকে বাদ দিলে ঋতুজ ভেদ মুক্ত তথ্য পাওয়া যাবে।)

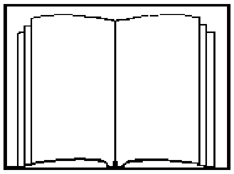
৮. ১৯৮৯, ১৯৯০, ১৯৯১ বৎসরের কোন দ্রব্যের উৎপাদন দেওয়া আছে। মাসিক গড়সমূহের পদ্ধতিতে মাসিক সূচক ও মাসিক ভেদসমূহ নির্ণয় করুন।

মাস / বৎসর	জানু.	ফেব্রু.	মার্চ	এপ্রি.	মে	জুন	জুলাই	আগ.	সেপ্টে.	অক্টো.	নভে.	ডিসে.
১৯৮৯	১৪	১৩	১২	১৬	১৭	১৭	১৮	১৫	১৩	১২	১৪	১৭
১৯৯০	১৭	১৬	১৫	১৮	১৮	১৭	১৯	১৪	১৫	১৪	১৪	১৫
১৯৯১	১৮	১৭	১৬	১৮	১৭	১৯	১৮	১৫	১২	১২	১৩	১৭

৯. যোজনকারী আপেক্ষিক পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত কালীন সারি তথ্য হতে ঋতুজ সূচকসমূহ নির্ণয় করুন।

বৎসরের চতুর্থাংশ	১৯৯০	১৯৯১	১৯৯২	১৯৯৩
Q_1	২৪	২০	২৬	৩০
Q_2	২৮	৩১	৩২	৩৫
Q_3	৩১	৩৫	৩৭	৪২
Q_4	২৮	৩২	৩৬	৩৮

Reference :



1. Richard L. Mills : Statistics for Applied Economics and Business, Mc GRAW HILL BOOK COMPANY, New York, 1977.
2. S.P. Gupta : Advanced Practical Statistics, S. Chand and Company Ltd., Ram Nagor, New Delhi, 1991.
3. সৌরেন্দ্র নাথ দে : ব্যবসায় পরিসংখ্যান, রবীন্দ্র লাইব্রেরী, কলিকাতা, ১৯৮৪।
4. মুহাম্মদ আলী মিঞা এবং মোঃ আলিম উল্ল্যা মিয়ান : পরিসংখ্যান পরিচিতি, আইডিয়াল লাইব্রেরী, ঢাকা, ১৯৮৫।