সহ-সম্বন্ধ ও নির্ভরণ
(Correlation and Regression)

৫

পূর্ববর্তী ইউনিটগুলিতে আমরা একটি মাত্র চলক সম্পর্কে আলোচনা করেছি। এই ইউনিটে আপনি একাধিক চলকের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্ক কীভাবে পরিমাপ ও বিশ্লেষণ করতে হয় - তা জানতে পারবেন। আপনার নিশ্চয়ই মনে আছে, যে পরিমাণবাচক বৈশিষ্ট্য দুই বা ততোধিক এককের মধ্যে মাত্রাগতভাবে পরিবর্তিত হয় তাকে চলক বলে। একই এককের দুইটি চলক কোন কোন ক্ষেত্রে ধারণাগতভাবে সম্পর্কযুক্ত (Conceptually related) হয়। যেমন - একই ব্যক্তির আয়ের সঙ্গে, ধারণাগতভাবে ব্যয়-এর একটি সম্পর্ক আছে । তেমনিভাবে একটি কারখানায় পুঁজি বিনিয়োগের সঙ্গে মুনাফা অর্জনের একটি সম্পর্ক থাকতে পারে। আবার একজন ছাত্র কত সময় পড়াশুনা করে (Time devoted to study)-এর উপর নির্ভর করে তার পরীক্ষায় কেমন ফলাফল হবে। কত টাকা পুঁজি খাটালে কোন বিশেষ ব্যবসায় কত টাকা মুনাফা হবে, কত ঘন্টা পড়াশুনা করলে কত নম্বর পাওয়া যাবে - এগুলো নির্ভর করে সংশ্লিষ্ট চলকগুলির মধ্যে কী সম্পর্ক আছে তা সঠিকভাবে নিরূপণের উপর বা সম্বন্ধ নির্ণয়ের যথার্থ পদ্ধতি প্রয়োগের উপর। তাই এই ইউনিটে ধারণাগতভাবে সম্পর্কযুক্ত চলকসমূহের মধ্যে সম্বন্ধ নিরূপণ ও বিশ্লেষণ বিষয়ে আলোচনা করা হয়েছে। ইউনিটের প্রথম পাঠে রয়েছে সহ-সম্বন্ধ এর সংজ্ঞা, প্রকারভেদ ও বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধ নিরূপণ। দ্বিতীয় পাঠে রয়েছে সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণ এবং তৃতীয় পাঠে আলোচনা করা হয়েছে নির্ভরণ সম্পর্কে। চলুন তাহলে পরপর বিভিন্ন পাঠের আলোচনায় যাওয়া যাক।

এই পৃষ্ঠা খালি থাকবে

ইউনিট-৫

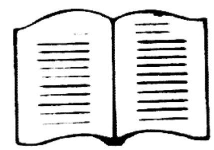
পাঠ- ১ : সহ-সম্বন্ধ: সংজ্ঞা, প্রকারভেদ ও বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধ নিরূপণ

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- সহ-সম্বন্ধ কী তার বর্ণনা দিতে পারবেন
- সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণের প্রক্রিয়া চিহ্নিত করতে পারবেন
- সহ-সম্বন্ধের মাত্রা সম্পর্কে জানতে পারবেন
- বিভিন্ন প্রকার সহ-সম্বন্ধ নিরূপণ করতে পারবেন
- সহ-সম্বন্ধ ও কার্যকরণ সম্পর্ক ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- বিক্ষেপ চিত্র -এর মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধ নিরূপণ করতে পারবেন।

সহ-সম্বন্ধ কী



আগের ইউনিটগুলোতে আপনি পরিসংখ্যান তথ্য নিবেশনের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য যেমন - বিস্তার, কেন্দ্রীয় প্রবণতা, বঙ্কিমতা ও সূঁচালতা সম্পর্কে ধারণা লাভ করেছেন। বিভিন্ন তথ্যসারি বা তথ্যনিবেশনকে তাদের বৈশিষ্ট্যগুলির আলোকে তুলনা করতেও শিখেছেন। এই সকল প্রক্রিয়া তথ্যসারির একটি মাত্র চলক সম্পর্কেই আলোচনা করে। কিন্তু বাস্তবে পরিসংখ্যান কাজের কোন কোন ক্ষেত্রে এককের বৈশিষ্ট্যগুলিকে দুই বা ততোধিক সম্পর্কযুক্ত চলক দ্বারা পরিমাপ করা হয়। দুইটি চলকের মধ্যে কোন সম্পর্ক আছে কি-না তা তাদের পরিবর্তনের প্রকৃতি বিবেচনা করে বিচার বা পরিমাপ করা হয়। দুইটি চলকের কোন একটির মান পরিবর্তিত হলে অন্যটির মান পরিবর্তিত হয় কি-না তা লক্ষ্য করে তাদের পারস্পরিক কোন সম্বন্ধ আছে কি-নাই ঠিক করতে হয়। কোন একটি চলকের মানের পরিবর্তনের জন্য অন্য একটি চলকের মান পরিবর্তিত হলে বলা চলে যে, তাদের পারস্পরিক পরিবর্তনের মধ্যে একটি যোগসূত্র বা সম্বন্ধ রয়েছে। দুইটি তথ্যসারির মধ্যে এই গতিশীলতা একইমুখী বা বিপরীতমুখী হতে পারে। অর্থাৎ একটি চলক অপর চলকের বৃদ্ধির সাথে সাথে বাড়তে পারে আবার কমতেও পারে। দুই বা ততোধিক চলকের একই সঙ্গে পরিবর্তিত হওয়ার প্রবণতা বা পরস্পর নির্ভরশীলতাকে সহ-সম্বন্ধ বা সহ-সংস্রব (Correlation) বলে। অন্য কথায় দুই বা ততোধিক সম্পর্কযুক্ত চলকের মধ্যে সম্পর্ক নিরূপণ ও তা ব্যাখ্যা করার পরিসংখ্যান যাচাই প্রক্রিয়ার নামই হচ্ছে সহ-সম্বন্ধ।

> একটি চলকের পরিবর্তন বা হ্রাস-বৃদ্ধি দ্বারা অপর চলক যখন অনুরূপ বা বিপরীতভাবে প্রভাবিত হয় বা হ্রাস-বৃদ্ধি পায় তখন তাদের ভিতর সহ-সম্বন্ধ আছে বলা যায়।

সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণ (Correlation Analysis)

তথ্যসারির সম্পর্ক বিশ্লেষণ সর্বক্ষেত্রেই তুলনামূলক। কোন তথ্য সমগ্রকের দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে পারস্পরিক সম্বন্ধ বিদ্যমান থাকে, সহ-সম্বন্ধ বলতে সেই সম্পর্ককেই বোঝানো হয়। ভিন্ন ভিন্ন সমগ্রক থেকে সংগৃহীত তথ্যের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ নির্ণয় করা সম্ভব নয়। সংশ্লিষ্ট চলকদ্বয় যেমন একই সমগ্রকের বৈশিষ্ট্যপূর্ণ, তেমনিভাবে তাদের ধারণাগতভাবেও পরস্পর সম্পর্কযুক্ত হতে হবে। যেমন, কোন বিপণন কেন্দ্রে বিশেষ একটি দ্রব্যের সরবরাহ বেড়ে গেলে দ্রব্যের দাম কমে যায় আবার কোন দ্রব্যের চাহিদা বেড়ে গেলে দাম বেড়ে যায়। সুতরাং সরবরাহ ও দাম এবং চাহিদা ও দাম উভয় জোড়া চলকই পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। আমাদের স্বাভাবিক চিন্তার ফসল যেমন, অধিক পুঁজি খাটালে অধিক মুনাফা পাওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এই সমস্ত ক্ষেত্রগুলিতে একটি চলকের পরিবর্তন ঘটলে অন্যটির পরিবর্তন অবশ্যম্ভাবী। এই পরিবর্তনের দিক (Direction) সব সময় একমুখী হবে এমন কথা নয়। তা বিপরীতমুখীও হতে পারে যেমন, সরবরাহ বাড়লে দাম কমে। কোন কোন ক্ষেত্রে কোন চলকের মান বাড়তে থাকলে অন্য চলকের মানও বাড়তে থাকে। এই পরিবর্তনের দিক এক অর্থাৎ একমুখী পরিবর্তন। যেমন চাহিদা বাড়লে দাম বাড়ে। তেমনিভাবে পুঁজি বাড়ালে মুনাফা বাড়ে। সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণ এ ধরনের সম্পর্কযুক্ত চলকগুলির মধ্যে বিদ্যমান সম্বন্ধের মাত্রা নিরূপণ করে এবং দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে সহগমনের প্রবণতা বিশ্লেষণ করে (analysis of co-variation)। সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণের প্রক্রিয়াকে নিম্নলিখিত তিনটি ধাপে বর্ণনা করা যায় —

> ভিন্ন ভিন্ন সমগ্রক থেকে সংগৃহীত তথ্যরাশির দ্বারা সহ-সম্বন্ধ নির্ণয় করা সম্ভব নয়। চলকদ্বয় পরস্পর একই সমগ্রকের হতে হয় এবং তাদের মধ্যে সম্পর্কের যোগসূত্র অবশ্যই থাকতে হয়।

১. চলকসমূহের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান আছে কি না তা নিরূপণ করা। এরপর সম্পর্ক থাকলে তা পরিমাপ করা।

২. চলকসমূহের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ বর্তমান থাকলে তার মাত্রা ও যথার্থতা নিরূপণ করা।
৩. একটি চলকের পরিবর্তনের সাথে অন্য আর একটি চলকের একদিকে বা বিপরীত দিকে পরিবর্তন সূচিত হলে - একটির সঙ্গে আর একটি চলকের কার্যকরণগত (Correlation and Causation) সম্পর্ক আছে কি না তা অনুসন্ধান করা।

সহ-সম্বন্ধের প্রকারভেদ (Types of Correlation)

বিভিন্নভাবে সহ-সম্বন্ধের শ্রেণীকরণ এবং তার বর্ণনা দেয়া যেতে পারে। আসুন তাহলে, সহ-সম্বন্ধের গুরুত্বপূর্ণ কয়েকটি প্রকারভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা যাক —

১. *সহগামী সহ-সম্বন্ধ এবং অসহগামী সহ-সম্বন্ধ* ***(Positive and Negative Correlation)***

সম্পর্কযুক্ত চলকগুলির পরিবর্তনের দিকের (Direction of relationship) উপর ভিত্তি করে সহ-সম্বন্ধকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। যেমন,

- ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বা সহগামী সহ-সম্বন্ধ (Positive Correlation)
- ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বা অসহগামী সহ-সম্বন্ধ (Negative Correlation)

> যখন চলকদ্বয় পরস্পর একই দিকে পরিবর্তিত হয় তখন তাদের মধ্যে ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে বলা যায়।

যখন একটি চলকের বৃদ্ধি বা হ্রাসের সাথে সাথে অপর চলকটি বৃদ্ধি বা হ্রাস পায় তখন এই দুই চলকের মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধকে বলা হয় ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ। অর্থাৎ, ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ হলো চলক দু'টির গতি একই দিকে। একটির বৃদ্ধিতে অপরটির বৃদ্ধি বা একটির হ্রাসে অপরটির হ্রাস। যেমন, যথাসময়ে বৃষ্টিপাতের সঙ্গে শস্যের ফলন বৃদ্ধি বা অধিক পড়ার সঙ্গে পরীক্ষার নম্বর বৃদ্ধি বা পুষ্টিকর খাদ্য গ্রহণে স্বাস্থ্য ভালো হওয়া- ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধের উদাহরণ।

> একটি চলকের সাথে অন্য চলকের যখন বিপরীতমূখী পরিবর্তন হয় তখন তা ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ।

আবার যে ক্ষেত্রে কোন চলকের হ্রাস বৃদ্ধির সাথে সাথে অপর চলকটিতে বিপরীতমুখী পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায় সেক্ষেত্রে চলকদ্বয়ের মধ্যে বর্তমান সহ-সম্বন্ধকে ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বলা হয়। যেমন খরচ (Expenditure) বাড়ার সাথে সাথে মুনাফা (Profit) কমতে থাকা বা সরবরাহের পরিমাণ (Supply) বাড়ার সাথে সাথে পণ্যের দাম (Price) কমতে থাকা। এগুলো হচ্ছে ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধের দৃষ্টান্ত। দু'টি চলকের দিক একই হলে তাকে ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ এবং দিক বিপরীতমূখী হলে ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ হবে। যদি একটি পরিবর্তনে অপরটির কোন পরিবর্তন না হয় তাহলে কী হবে? উত্তরে বলতে হবে, দুইটি চলকের মধ্যে সহগমনের (একই দিকে পরিবর্তন) অভাব পরিলক্ষিত হচ্ছে এবং তবে চলক দুইটির মধ্যে সহ-সম্বন্ধ নেই।

অনুশীলন
দুটি চলকের মধ্যে ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে এমন তিনটি উদাহরণ ব্যাখ্যা করুন। আবার, দুটি চলকের মধ্যে ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ আছে এমন তিনটি উদাহরণ ব্যাখ্যা করুন। (অনুর্ধ্ব ২০০ শব্দ)

সহ-সম্বন্ধের মাত্রা (Degree of Correlation)

বিভিন্ন চলকের মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধ যেমন ধনাত্মক বা ঋনাত্মক হয়, তেমনিভাবে তা সম্বন্ধের মাত্রার দিক দিয়েও ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। আসুন এ বিষয়ে কিছুটা ধারণা নেয়া যাক। কোন একটি চলকের মান শতকরা ২০ ভাগ বাড়লে বা কমলে সম্পর্কযুক্ত অন্য চলকটির মান যদি শতকরা ২০ ভাগ বাড়ে বা কমে তাহলে চলক দুইটির মধ্যে বর্তমান সহ-সম্বন্ধকে **পূর্ণ সহ-সম্বন্ধ** (Perfect Correlation) বলে।

বিভিন্ন চলকের মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধ যেমন ধনাত্মক বা ঋনাত্মক হয়, তেমনিভাবে তা সম্বন্ধের মাত্রার দিক দিয়েও ভিন্ন ভিন্ন

যখন কোন চলকের মান কোন বিশেষ পরিমাণ বৃদ্ধির সাথে অন্য চলকটির মান আনুপাতিক হারে বৃদ্ধি পায়, অর্থাৎ ধরুন জমিতে সারের পরিমাণ ১ কেজি হারে বাড়ালে ফসল ১০ একক হারে বৃদ্ধি পায়, ২ কেজি হারে বাড়ালে ফসল ২০ একক হারে বৃদ্ধি পায়, তখন চলক দুইটির সহ-সম্বন্ধকে **পূর্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ** বা পূর্ণ সহগামী সহ-সম্বন্ধ (Perfect Positive Correlation) বলা হয়।

আবার কোন চলকের মান বিশেষ পরিমাণ বৃদ্ধি পেলে অপর চলকটির মান যদি আনুপাতিক হারে কমে, তবে চলক দুইটির সহ-সম্বন্ধকে **পূর্ণ ঋনাত্মক** বা পূর্ণ অসহগামী সহ-সম্বন্ধ বলা হয় (Perfect Negative Correlation)। যেমন, যদি কোন দ্রব্যের দাম ৫ টাকা হারে বৃদ্ধি পেলে চাহিদা ১ একক হারে কমে, ১০ টাকা হারে বৃদ্ধি পেলে ২ একক হারে চাহিদা কমে এরূপ সম্পর্ক পূর্ণ অসহগামী সহ-সম্বন্ধের উদাহরণ। আর যদি কোন চলকের মানের পরিবর্তনে অন্য চলকের মান একই হারে বা একই অনুপাতে পরিবর্তিত না হয় তবে চলক দুইটির সহ-সম্বন্ধকে **সীমিত সহ-সম্বন্ধ** (Limited Correlation) বলা হয়।

তাহলে এতক্ষণ সম্পর্কযুক্ত যে দু'টি চলকের কথা শুনলেন তাদের একটিকে **নির্ভরশীল চলক** (Dependent variable) এবং অন্যটিকে **অনির্ভরশীল চলক** (Independent variable) বলা হয়। মনে করুন বিনিয়োগ দশ হাজার টাকা থেকে বাড়িয়ে বিশ হাজার টাকা করাতে মুনাফা বিশেষ অনুপাতে বৃদ্ধি পেল। এখানে বিনিয়োগের কারণে মুনাফা প্রভাবিত হল। তাই বিনিয়োগ (Investment) হলো অনির্ভরশীল চলক এবং মুনাফা (Profit) নির্ভরশীল চলক। দুইটি চলকের মধ্যে কোন কার্যকর যোগসূত্র প্রতিষ্ঠিত না হলে, তাদের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান নাই বলে ধরা হয়। এ ধরণের সম্বন্ধকে শূন্য সহ-সম্বন্ধ বলে। সহ-সম্বন্ধহীনতা ও পূর্ণ ধনাত্মক সহসম্বন্ধের মধ্যবর্তী অবস্থাকে সীমিত ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ এবং সহ-সম্বন্ধহীনতা ও পূর্ণ ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধের মধ্যবর্তী অবস্থাকে সীমিত ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বলা হয়ে থাকে।

শূন্য সহ-সম্বন্ধ ও পূর্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধের মধ্যবর্তী অবস্থাকে সীমিত ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বলে এবং শূন্য সহ-সম্বন্ধ ও পূর্ণ ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধের মধ্যবর্তী অবস্থাকে সীমিত ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বলে।

অনুশীলন
দুটি চলকের মধ্যে পূর্ণ ধনাত্মক সম্পর্ক এবং পূর্ণ ঋনাত্ম সম্পর্ক আছে এমন তিনটি করে উদাহরণ দিন এবং ব্যাখ্যা করুন। (অনুর্ধ্ব ২০০ শব্দ)

২. *সাধারণ, আংশিক ও বহুবিধ সহ-সম্বন্ধ*
(Simple, Partial and Multiple Correlation)

সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণে চলকের অন্তর্ভুক্তির প্রেক্ষিতে সহ-সম্বন্ধ তিন প্রকার। যেমন,

- সাধারণ সহ-সম্বন্ধ (Simple Correlation)
- বহুবিধ সহ-সম্বন্ধ (Multiple Correlation)
- আংশিক সহ-সম্বন্ধ (Partial Correlation)

সাধারণ সহ-সম্বন্ধ

সম্পর্কযুক্ত দুইটি চলকের মধ্যে বিদ্যমান সম্বন্ধকে সাধারণ সহ-সম্বন্ধ বলা হয়। যেমন- পুঁজি বিনিয়োগের সঙ্গে মুনাফা অর্জনের সম্পর্ক বা ছাত্রের পড়াশুনায় অতিরিক্ত সময় দেয়ার সঙ্গে তার পরীক্ষায় নম্বর প্রাপ্তির সম্বন্ধ। এ সবই সাধারণ সহ-সম্বন্ধের অন্তর্গত।

বহুবিধ সহ-সম্বন্ধ

দুইয়ের অধিক চলকের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্ককে বহুবিধ সহ-সম্বন্ধ বলা হয়।

এতক্ষণ আপনি দু'টি চলকের মধ্যে সম্পর্কের কথা জেনেছেন। দু'য়ের অধিক চলকের মধ্যেও সম্পর্ক থাকা সম্ভব। যেমন - জমির ফসলের উৎপাদন, সার, ভাল বীজ, পানি ইত্যাদির উপর নির্ভরশীল। এরূপ দুইয়ের অধিক চলকের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্ককে বহুবিধ সহ-সম্বন্ধ (Multiple Correlation) বলা হয়। বহুবিধ সম্পর্কযুক্ত চলকের (Multivariable situations) একটি দৃষ্টান্ত দেয়া যাক। মনে করুন, আপনাদের ব্যবস্থাপনা কোর্সে একজন ছাত্রের মান (Performance) তার বর্তমান কোর্সের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দিয়ে পরিমাপ করা হয়। তার বর্তমানে পরীক্ষার গড় নম্বর আরও দুইটি চলকের উপর নির্ভর করতে পারে। সেই চলক দুইটি মনে করুন, তার এই কোর্সে ভর্তির পূর্বের মেধা (যা পূর্বের পরীক্ষাগুলিতে প্রাপ্ত শতকরা নম্বর দিয়ে পরিমাপ করা হয়) এবং তার প্রতিদিনের পড়ার সময়। এই তিনটি চলক বিশিষ্ট বিশ্লেষণ ব্যবস্থায় (Three Variables Analysis) বর্তমানে প্রাপ্ত নম্বর নির্ভর করে ছাত্রের পূর্বের মেধা ও প্রতিদিনের পড়ার সময়ের উপর। আসুন বিষয়টি আরও সহজ করে দেয়া যাক।

মনে করুন, একটি প্রোগ্রামের পাঁচজন ছাত্রের নিকট থেকে নিম্নবর্ণিত তথ্য পাওয়া গেল —

ছাত্রের ক্রমিক	বর্তমান নম্বর (১০০ এর মধ্যে) X_1	পূর্বের মেধাগড়-পূর্বের পরীক্ষার গড় নম্বর (১০০ এর মধ্যে) X_2	পাঠে নিয়োজিত সময়/ঘন্টা X_3
১	৬০	৫৮	৬
২	৫০	৬০	৫
৩	৬৫	৭০	৭
৪	৫৫	৬৫	৮
৫	৭৫	৮০	৭

তালিকা-১ : পাঁচজন ছাত্রের তিনটি চলক সম্পর্কে পর্যবেক্ষণ

তিনটি চলকের মধ্যে যে কোন দুইটি করে চলক ধরে তাদের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ পরিমাপ করা যেতে পারে।

চলক তিনটিকে X_1 ,X_2 , ও X_3 এই তিনটি প্রতিকের মাধ্যমে চিহ্নিত করা হলো। এখানে X_1 নির্ভরশীল (dependent) ও X_2 , ও X_3 অনির্ভরশীল (Independent) চলক। এই অবস্থায় বর্তমান নম্বর (X_1), পূর্বের মেধা গড় (X_2) ও পাঠে নিয়োজিত সময়ের (X_3) মধ্যে মোটের উপর (overal relationship) বিদ্যমান সম্পর্ককে বলা হয় বহুবিধ সহ-সম্বন্ধ (Multiple Correlation)। আবার এদের তিনটির যে কোন দুইটির মধ্যেও সাধারণ সহ-সম্বন্ধ (Simple Correlation) রয়েছে। যেমন বর্তমান নম্বর পূর্বের মেধাগড়ের উপর নির্ভরশীল, আবার বর্তমান নম্বর মনোযোগের সাথে পাঠে নিয়োজিত সময়ের উপর নির্ভর করে। সুতরাং এগুলোকে দুইটি করে চলক ধরে তাদের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ পরিমাপ করা যেতে পারে।

আংশিক সহ-সম্বন্ধ

বহুবিধ চলক অবস্থায় একটি চলককে সমান রেখে অন্য দুটির মধ্যে বর্তমান সহ-সম্বন্ধকে আংশিক সহ-সম্বন্ধ বলে।

বহুবিধ চলক ব্যবস্থায় (multiple variables situation) একটি চলককে সমান রেখে অন্য দুইটির মধ্যে বর্তমান সহ-সম্বন্ধ নিরূপণ করার চেষ্টাকে পরিসংখ্যান ভাষায় বলা হয় আংশিক সহ-সম্বন্ধ। মনে করুন, আমরা এমন পাঁচজন ছাত্র নিলাম যারা সকলেই প্রতিদিন পাঠে ছয় ঘন্টা নিয়োজিত থাকে। তাহলে তালিকা-১ এ দেয়া তথ্যটি নিম্নরূপে প্রতিফলিত হবে।

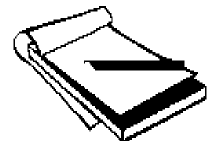
ছাত্রের ক্রমিক	বর্তমান নম্বর X_1	পূর্বের মেধা স্কোর X_2	পাঠে নিয়োজিত সময় X_3
১	৬০	৫৮	৬
২	৫০	৬০	৬
৩	৬৫	৭০	৬
৪	৫৫	৬৫	৬
৫	৭৫	৮০	৬

তালিকা-২ : একটি চলক স্থির রেখে পাঁচজন ছাত্রের দুইটি চলক সম্পর্কে পর্যবেক্ষণ

এই অবস্থায় পাঠে নিয়োজিত সকলের সময় সমান। এখন বর্তমান নম্বর (X_1) ও পূর্বের মেধা স্কোর (X_2) এর মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধকে এই বিশ্লেষণ ব্যবস্থায় বলা হবে আংশিক সহ-সম্বন্ধ (Partial Correlation) । এমনিভাবে পূর্বের মেধাস্কোর সমান এমন পাঁচজন ছাত্র বাছাই করে

পাঠে নিয়োজিত সময় (X_3) ও বর্তমান নম্বরের মধ্যেও আংশিক সহ-সম্বন্ধ নির্ণয় করা যেতে পারে।

অনুশীলন
সাধারণ সহ-সম্বন্ধ, আংশিক সহ-সম্বন্ধ এবং বহুবিধ সহ-সম্বন্ধের দুটি করে উদাহরণ দিন ও ব্যাখ্যা করুন। (অনুর্ধ্ব ২০০ শব্দ)



৩. রৈখিক এবং অরৈখিক সহ-সম্বন্ধ (Linear and Non-linear Correlation)

তাহলে এতক্ষণ আপনি সহগামী সহ-সম্বন্ধ এবং অসহগামী সহ-সম্বন্ধ, সাধারণ, আংশিক এবং বহুবিধ সহ-সম্বন্ধ সম্বন্ধে জানলেন। এগুলো ছাড়া আরো রয়েছে রৈখিক এবং অরৈখিক সহ-সম্বন্ধ। সাধারণত সম্পর্কযুক্ত চলকগুলির অনুপাতের স্থিরতার (Constancy of ratio) উপর ভিত্তি করে সহ-সম্বন্ধকে দুইভাগে ভাগ করা যেতে পারে। ভাগগুলো হচ্ছে,

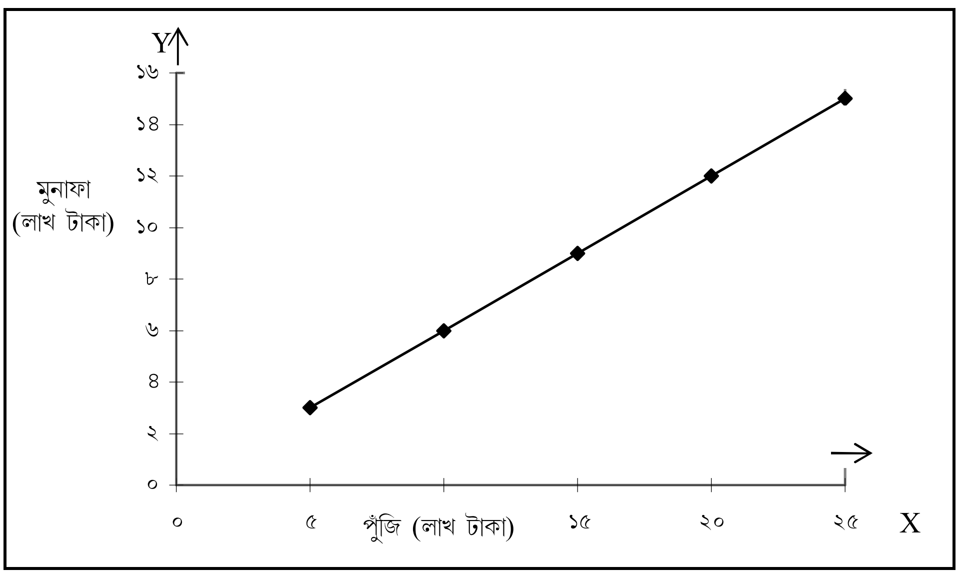
১. রৈখিক সহ-সম্বন্ধ (Linear Correlation)
২. অরৈখিক সহ-সম্বন্ধ (Non-linear Correlation)

যদি একটি চলকের পরিবর্তন অন্য একটি চলকের সঙ্গে ঠিক আনুপাতিক হারে পরিবর্তন হয় তবে তাদের মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধকে রৈখিক সহ-সম্বন্ধ বলে। নিচে একজন ব্যবসায়ীর পাঁচটি দোকানে নিয়োজিত পুঁজি (Capital) ও মুনাফা দেয়া হলো,

একটি চলকের পরিবর্তন অন্য একটি চলকের সঙ্গে যদি আনুপাতিক হারে পরিবর্তন হয় তবে তাদের মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধকে রৈখিক সহ-সম্বন্ধ বলে।

পুঁজি (X) লাখ টাকা	৫	১০	১৫	২০	২৫
মুনাফা (Y) লাখ টাকা	৩	৬	৯	১২	১৫

এই চলক দুইটি লেখ চিত্রে প্রদর্শন করলে এদের পরিবর্তনের গতি একটি সরল রেখার সৃষ্টি করবে। লেখ চিত্রে প্রদর্শন করে নিচে তা দেখানো হলো,



চিত্র - ১ ঃ রৈখিক সহ-সম্বন্ধ

যদি সম্পর্কযুক্ত চলকগুলির একটির পরিবর্তনের সঙ্গে অন্যটির পরিবর্তন সমান অনুপাতে না হয় তবে উহাদের মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধকে অরৈখিক সহ-সম্বন্ধ (Non-linear) বলা হয়। বৃষ্টিপাতের পরিমাণ দ্বিগুণ হলে শস্যের উৎপাদন দ্বিগুন বা সমানুপাতিক নাও হতে পারে। এসব ক্ষেত্রে বিদ্যমান সম্পর্ক হবে অরৈখিক (Non-linear)।

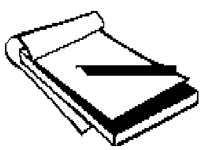
সম-অনুপাতে চলকদ্বয়ের পরিবর্তন না হলে তা হবে অরৈখিক সহ-সম্বন্ধ।

সহ-সম্বন্ধ এবং কার্যকরণ সম্পর্ক (Correlation and Cousation)

একই সময়ে দুটি চলকের শুধুমাত্র পরিবর্তন হলেই তাকে সহ-সম্বন্ধ বলা যাবে না। ঐ চলকদ্বয়ের মধ্যে অবশ্যই ধারণাগত যোগসূত্র থাকতে হবে।

সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণ সম্পর্কযুক্ত চলকগুলির মধ্যে সম্পর্কের মাত্রা নিরূপণে সাহায্য করে। কিন্তু এটি সম্পর্কের যুক্তিগত ভিত্তির কোন যথার্থ দিক নির্দেশ করেনা। তাই সহ-সম্বন্ধ দিয়ে চলকগুলির মধ্যে কোন কারণগত (Causation) সম্পর্ক প্রতিষ্ঠিত হয়না। সহ-সম্বন্ধের মাধ্যমে একটি চলকের পরিবর্তনই যে অন্য চলকের পরিবর্তনের কারণ - তা কোনভাবেই প্রমাণিত হয় না। এমন কি উচ্চমাত্রায় বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধ ও একটি চলক যে অন্যটির কারণে প্রভাবিত তাও সঠিক করে বলতে পারে না। চলকগুলির সব কয়টির পরিবর্তনই হয়তো যে কোন অভিন্ন কারণে ঘটতে পারে।

সাধারণ সহ-সম্বন্ধ দিয়ে দুটি চলকের মধ্যে পরিবর্তনের কোন যোগসূত্র বা সম্বন্ধ থাকলে তাই প্রমাণিত হয়, তার কারণ নির্ণীত হয় না। সম্পূর্ণ স্বতন্ত্র দুটি চলকের মধ্যে পরিবর্তনের সংযোগ থাকলে তাকে সহ-সম্বন্ধ বলা চলে না। সহ-সম্বন্ধ প্রমাণ করতে হলে দুটি চলকের মধ্যে পরিবর্তনের যোগসূত্র এবং চলক দুটির মধ্যে ধারণাগত সম্পর্ক থাকা বাঞ্ছনীয় (should be conceptually related)। যেমন, বাংলাদেশের লোকসংখ্যা পরিবর্তনের সঙ্গে থাইল্যান্ডের পাখীর সংখ্যার পরিবর্তন হতে পারে, কিন্তু তার মধ্যে কোন ধারণাগত সংযোগ (conceptual relation) স্থাপন সম্ভব নয়। বাস্তব **সংযোগহীন সম্পর্ককে পরিসংখ্যানের ভাষায় জাল-সহ-সম্বন্ধ (Spurious Correlation) বলা হয়।** সহ-সম্বন্ধ নিরূপণের অনেক পদ্ধতি আছে। বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধ নিরূপণ একটি সহজ পদ্ধতি। দু'টি সম্পর্কযুক্ত চলকের মধ্যে সাধারণ সহ-সম্বন্ধই (Simple Correlation) শুধু চিত্রের মাধ্যমে নিরূপণ কর া যায়।



অনুশীলন
বিভিন্ন চলকের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ ও কার্যকরণগত সম্পর্কের মধ্যে উদাহরণসহ তুলনামূলক আলোচনা করুন। (অনুর্দ্ধ ২৫০ শব্দ)

বিক্ষেপ চিত্র

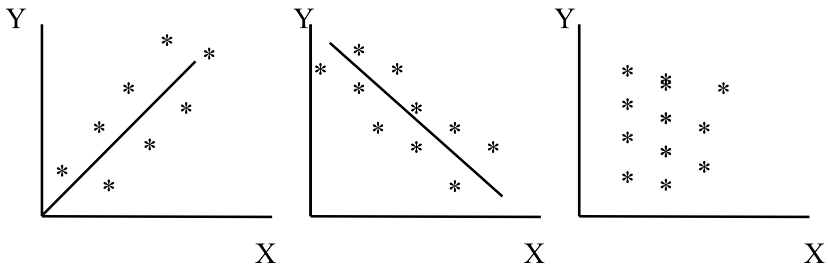
দুইটি চলক বিশিষ্ট তথ্যসারিকে যে লেখের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয় তাকে বিক্ষেপ চিত্র বলে।

দ্বি-চলক বিশিষ্ট তথ্যের লেখ উপস্থাপন কে বিক্ষেপ চিত্র বলে। এর মাধ্যমে দুইটি চলকের পারস্পরিক সম্পর্ক প্রদর্শন করা যায়। এই পদ্ধতিতে সহজে সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে সহজে ধারণা করা যায়। বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে কেবলমাত্র মোটামুটি ধারণা করাই সম্ভব হয়। বিক্ষেপ চিত্র প্রণয়নকে অনেক সময় সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণের প্রাথমিক পদক্ষেপ হিসাবেও ধরা হয়।

এখন বিক্ষেপ চিত্র অঙ্কন প্রক্রিয়া আলোচনা করতে গিয়ে বলা যায়, বিক্ষেপ চিত্রের অঙ্কন প্রক্রিয়া খুব সহজ। বিক্ষেপ চিত্রের দুইটি অক্ষ থাকে। একটি হচ্ছে X-অক্ষ ও অপরটি হচ্ছে Y-অক্ষ। চলক দুটিকে অক্ষে প্রদর্শন করা হয়। X-অক্ষ অনির্ভরশীল বা স্বাধীন চলক এবং Y-অক্ষ নির্ভরশীল চলক প্রদর্শন করে। চলক দুটির জোড়াকৃত রাশিগুলির অবস্থান লেখ চিত্রে উপস্থাপন করা হয় এবং ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বিন্দুর মাধ্যমে চিহ্নিত করা হয়। বিন্দুগুলি কি প্রকারে বিক্ষেপ চিত্রে অবস্থান করে তা যাচাই করে চলকদ্বয়ের মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে ধারণা করা হয়। বিক্ষেপ চিত্রে চিহ্নিত বিন্দুগুলির অবস্থান বিবেচনা করে মাঝামাঝি একটি সরলরেখা টানতে হয়। রেখাটির ঢাল লক্ষ্য করে সহ-সম্বন্ধ ধনাত্মক না ঋনাত্মক তা বুঝে নিতে হয়। ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধের ক্ষেত্রে রেখাটি মোটামুটি কম বাম থেকে ক্রমশ ডানে উপরের দিকে দিক নির্দেশ করে। অর্থাৎ চলকদ্বয়ের তথ্য ডানদিকে ক্রমশ উর্ধগামী (চিত্র -I) থাকে। ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধের ক্ষেত্রে রেখাটি ডান থেকে বামে উপরের দিকে উঠতে থাকে। অর্থাৎ বিক্ষেপ চিত্রের বিন্দুগুলি ডানদিকে নিম্নগামী (চিত্র -II) থাকে। চিত্রে বিন্দুগুলি সম্পূর্ণ বিক্ষিপ্ত থাকলে চলকদ্বয়ের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান নাই বলে ধরে নিতে হবে (চিত্র -III)। **বিক্ষেপ চিত্র কোন সময়ই চলকদ্বয়ের মধ্যে সহ-সম্বন্ধের সঠিক মাত্রা নিরূপণ করে না।** এটির দ্বারা সহগমনের দিক নির্দেশিত হয় এবং সহ-সম্বন্ধ আছে কি নাই তা মোটামুটিভাবে জানা যায়। তাই বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে নিরূপিত সহ-

বিক্ষেপ চিত্রে চিহ্নিত বিন্দুগুলির অবস্থান বিবেচনা করে মাঝামাঝি একটি সরলরেখা টানতে হয়।

সম্বন্ধের যথার্থতা বিচার করা যায় না। নিচের চিত্রের মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধ চিহ্নিতকরণে বিক্ষেপ চিত্রের ব্যবহার প্রদর্শিত হলো,



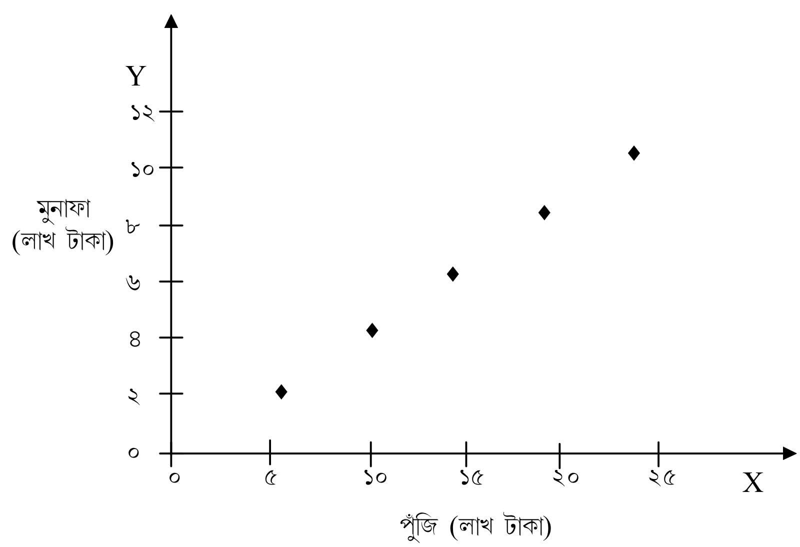
ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ (I) ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ (II) সহ-সম্বন্ধ নাই (III)

উদাহরণ -১ ঃ নিচে পাঁচটি দোকানের পুঁজি ও মোট মুনাফা দেয়া হল,

পুঁজি (X) লাখ টাকা	৫	১০	১৫	২০	২৫
মোট মুনাফা (Y) লাখ টাকা	৩	৫	৭	৯	১২

বিক্ষেপ চিত্র অঙ্কন করে সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে আপনার মন্তব্য প্রদান করুন।

সমাধানঃ



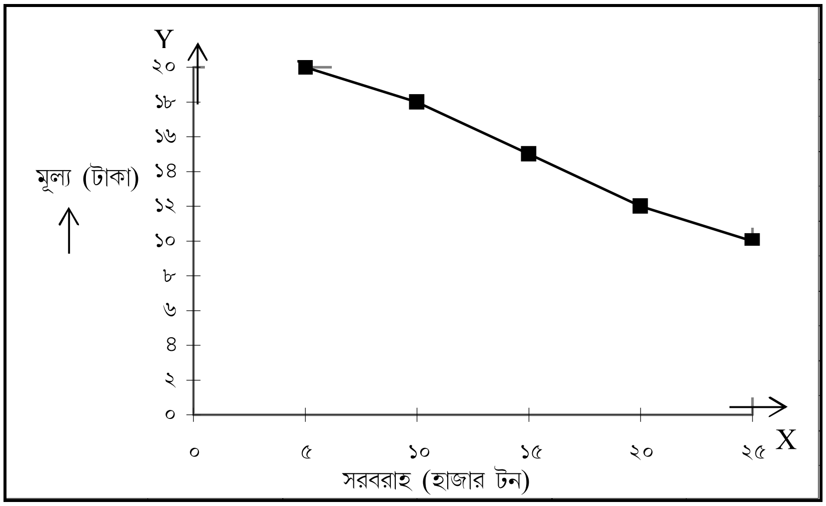
আপনি সাধারণভাবেই দেখতে পাচ্ছেন যে, চলকদ্বয়ের জোড়কৃত বিন্দুগুলি মোটামুটি একটি রেখার মধ্যে উপস্থাপিত রয়েছে। রেখাটি বাম থেকে ক্রমশ ডানে উপরে উঠেছে। সুতরাং পুঁজি এবং মোট মুনাফার মধ্যে ধনাত্মক বা সহযোগী সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান আছে। যা চিত্রের মাধ্যমে সহজেই ধারণা করা যায়।

উদাহরণ-২ ঃ নিচের তালিকায় কোন দ্রব্যের সরবরাহ এবং দ্রব্যটির কেজি প্রতি মূল্য দেয়া হলো —

সরবরাহ (হাজার টন) X	৫	১০	১৫	২০	২৫
মূল্য (টাকা) Y	২০	১৮	১৫	১২	১০

তথ্যটির বিক্ষেপ চিত্র অঙ্কন করে সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে রেখাপাত করুন।

সমাধান ঃ



চলকদ্বয়ের জোড়কৃত রাশির মাধ্যমে অঙ্কিত বিন্দুগুলি বিক্ষেপ চিত্রে মোটামুটি একটি রেখায় অবস্থান করছে। রেখাটি ডান থেকে বেড়ে উঠার প্রবণতা পরিলক্ষিত হচ্ছে। সুতরাং সরবরাহ ও মূল্যের মধ্যে ঋণাত্মক ও অসহযোগী সহ-সম্বন্ধ বর্তমান রয়েছে। অর্থাৎ একটি চলকের বৃদ্ধির ফলে অন্য চলকটির হ্রাস বা লোকসান ঘটবে।

সারাংশ

পরিসংখ্যানে সহ-সম্বন্ধ একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এই ইউনিটটিতে আপনি ধারণা পেলেন, কি করে দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে সম্পর্ক আছে কি-না তা যাচাই করতে হয়। কিভাবে দুটি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্কের মাত্রা নির্ণয় করতে হয়। সহ-সম্বন্ধ এবং কার্যকরণ কি? এবং আপনি আরও জানলেন যে সহ-সম্বন্ধ কত প্রকার হতে পারে। এছাড়াও আপনি বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে কীভাবে সহ-সম্বন্ধ চলকদ্বয়ের মান উপস্থাপন করে তা থেকে সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায় সেটিও জানতে পারলেন।

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. সহ-সম্বন্ধ কী? সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণ বলতে কী বুঝায়? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা দিন।

নিচে দেয়া তথ্যের সাহায্যে বিক্ষেপ চিত্র অংকন করে চলকদ্বয়ের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ আছে কী না মন্তব্য করুন —

বয়স (বৎসর) X	৭	১৪	২০	১০	৩০	২২
ওজন (পাউন্ড) Y	৪৮	৮০	১৩০	৭০	১৩৫	১২৫

২. ধনাত্মক এবং ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বলতে কী বুঝায়? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা দিন।

নিচে দেয়া তথ্যের বিক্ষেপ চিত্র অংকন করে কী রকম সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান রয়েছে ব্যাখ্যা করুন —

বয়স (বৎসর) X	৩০	৩৫	৪০	৪৫	৫০
আয় (টাকা) Y	৪০০০	৫০০০	৩৯০০	৬০০০	৯০০০

৩. সরল বা সাধারণ সহ-সম্বন্ধ, বহুবিধ সহ-সম্বন্ধ এবং আংশিক সহ-সম্বন্ধ কী? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা দিন।

নিচের তথ্য বিক্ষেপ চিত্রে উপস্থাপন করে সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে আলোকপাত করুন।

বিজ্ঞাপন খরচ (হাজার টাকা) X	১০	১৫	২৫	৩০	৪৫	৫০
বিক্রয় (লাখ টাকা) Y	২৪	২৮	৩০	২৯	৪০	৪২

৪. সহ-সম্বন্ধের সঙ্গে কার্যকরণ (Causation) এর কী সম্পর্ক রয়েছে? পূর্ণ ধনাত্মক ও পূর্ণ ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ কাকে বলে উদাহরণসহ বুঝিয়ে দিন।

৫. বিক্ষেপ চিত্র কী? এটি কী কাজে লাগে? এর বিশদ ব্যাখ্যা করুন।

নিচের তথ্য বিক্ষেপ চিত্রে উপস্থাপন করুন ও সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে ব্যাখ্যা দিন —

পরিবারের সদস্য সংখ্যা X	পরিবারের আয় (টাকা) Y
৪	১,২০০
৫	২,০০০
৭	৫,০০০
৮	৪,০০০
১০	৬,০০০

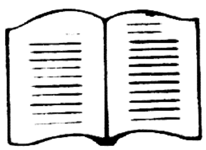
পাঠ-২: সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক ঃ কার্ল পিয়ারসন এবং স্পিয়ারম্যানের র‍্যাংক সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- সহ-সম্বন্ধ অঙ্কের সংজ্ঞা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে কার্ল পিয়ারসনের সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণ করতে পারবেন
- বিন্যস্ত তথ্য থেকে সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণ করতে পারবেন
- নির্ণয়াঙ্ক (Co-efficient of Determination) এর ব্যাখ্যা দিতে পারবেন
- নির্ণয়াঙ্ক নিরূপণ করতে পারবেন
- গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক বা স্পিয়ারম্যানের র‍্যাংক সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণ করতে পারবেন।

সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক



দুই বা ততোধিক চলকের সহ-সম্বন্ধের সংখ্যাত্মক পরিমাপকে সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক বলা হয়।

পূর্ববর্তী পাঠে আপনি সহ-সম্বন্ধের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে বিশদভাবে জেনেছেন। এই পাঠে তার পরিমাপ সম্পর্কে জানবেন। বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে দুইটি চলকের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান আছে কি-না তা অনুমান করা যায় এবং থাকলে সে সম্বন্ধ সহগামী না অসহগামী তা নিরূপণ করা যায়। কিন্তু বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধের সঠিক মাত্রা নিরূপণ করা সম্ভব হয় না। সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয়ের মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধ পরিমাপ করা হয়। দুই বা ততোধিক চলকের সহ-সম্বন্ধের সংখ্যাত্মক পরিমাপকে সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক বলা হয়। এটি সম্পর্কযুক্ত চলকগুলির মধ্যে সহ-সম্বন্ধের পরিমাণ সংক্ষিপ্ত গাণিতিক পরিমাপের মাধ্যমে প্রকাশ করে। কার্ল পিয়ারসনের সহ-সম্বন্ধ পরিমাপের (Karl Pearson's Coefficient of Correlation) পদ্ধতিতে সহ-সম্বন্ধ অঙ্কের প্রত্যক্ষ সূত্রটি নিম্নরূপ,

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}}$$

যেখানে, r = সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক

x = স্বাধীন চলকের মানসমূহ

y = নির্ভরশীল চলকের মানসমূহ

$\bar{x}$ = x চলকের গড়

$\bar{y}$ = y চলকের গড়

সহ-সম্বন্ধের মান পূর্ণ ধনাত্মক (+১) থেকে পূর্ণ ঋনাত্মক (-১) এর মাঝামাঝি হতে পারে।

দুইটি চলকের সহ-সম্বন্ধ অঙ্কের মান বিচার করে সহ-সম্বন্ধের প্রকৃতি ও পরিমাণ সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা পাওয়া যায়। সহ-সম্বন্ধ অঙ্কের মাধ্যমে প্রকাশিত পরিমাপ, তথ্যে ব্যবহৃত একক থেকে নিরপেক্ষ। কার্ল পিয়ারসনের পদ্ধতিতে নিরূপিত সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক ইংরেজি বর্ণমালার অক্ষক "r" (আর) প্রতীকের মাধ্যমে সাধারণত প্রকাশ করা হয়।

যখন কোন সহ-সম্বন্ধের মান '০' হয় তখন চলকদের মধ্যে কোন সম্বন্ধ নাই ধরে নেয়া যায়।

সম্বন্ধ অঙ্কের মান সর্বনিম্ন −১ থেকে সর্বোচ্চ +১ পর্যন্ত সীমিত থাকে। সম্বন্ধ অঙ্কের মান কখনই −১ এর চেয়ে কম এবং +১ অপেক্ষা বেশী হতে পারে না। যদি তা হয় তবে সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় প্রক্রিয়ায় ভুল রয়েছে বলে মনে করতে হবে। সম্বন্ধ অঙ্কের ধনাত্মক মান সহগামী (একই দিকে) সহ-সম্বন্ধ এবং ঋনাত্মক মান অসহগামী (বিপরীত দিকে) সহ-সম্বন্ধ এর নির্দেশ করে। **সম্বন্ধ অঙ্কের মান +১ হলে পূর্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ এবং এর মান −১ হলে পূর্ণ ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ জ্ঞাপন করে।** দুইটি চলকের মধ্যে সমানুপাতিক **গতিশীলতা একই দিকে** হলে পূর্ণ ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ পাওয়া যায় এবং সেই ক্ষেত্রে সম্বন্ধ অঙ্কের মান হয় +১। আবার দুইটি চলকের **সমানুপাতিক পরিবর্তন যদি বিপরীতমূখী** হয় তবে, তথ্যসারিতে পূর্ণ ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ পাওয়া যায় এবং সেক্ষেত্রে সম্বন্ধ অঙ্কের মান হয় −১। **সম্বন্ধ অঙ্ক r-এর মান শূণ্য হলে বুঝা যাবে যে চলকদ্বয়ের মধ্যে কোন সহ-সম্বন্ধ বর্তমান নাই।** যখন দুইটি চলকের মধ্যে পরিবর্তন পুরাপুরি সমানুপাতিক নয়, তখন আমরা পাব আংশিক সহ-সম্বন্ধ। আংশিক সহ-সম্বন্ধ আবার ধনাত্মক বা ঋনাত্মক হতে পারে। সুতরাং সম্বন্ধ অঙ্ক r মোটামুটি তিনটি বিষয় পরিমাপ করে। যেমন,

আংশিক সহ-সম্বন্ধ আবার ধনাত্মক বা ঋনাত্মক হতে পারে।

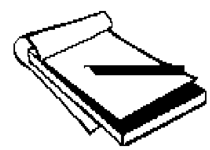
১. চলকদ্বয়ের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান আছে কি-না (Existence of Correlation)
২. সহ-সম্বন্ধ থাকলে তা সহগামী না অসহগামী (Direction of Relationship)
৩. চলকদ্বয়ের মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধের মাত্রা (Extent of Relationship)।

নিচের ছকে সম্বন্ধ অঙ্কের পরিমাপ দেখানো হলো,
মনে করুন —

r = + ১	পূর্ণ সহগামী সহ-সম্বন্ধ
r = ০.৯ r = ০.৬ r = ০.৩	আংশিক সহগামী সহ-সম্বন্ধ
r = '০'	সহ-সম্বন্ধ নাই
r = -০.২ r = -০.৬ r = -০.৯	আংশিক অসহগামী সহ-সম্বন্ধ
r = - ১	পূর্ণ অসহগামী সহ-সম্বন্ধ

চিত্র - ১ ঃ r এর বিভিন্ন মানের জন্য সহ-সম্বন্ধ পরিমাপ

অনুশীলন
সম্বন্ধ অঙ্কের মান কেন +১ এর থেকে বড় বা −১ এর থেকে ছোট হতে পারে না। সুস্পষ্ট ব্যাখ্যা দিন। (অনুর্ধ্ব ১৫০ শব্দ)



তাহলে আপনি এতক্ষণ ধারণা পেলেন সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক কি এবং এর মাত্রা কতটুকু (±১)। আসুন তাহলে কিছু উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি সম্পর্কে ধারণা আরও পরিষ্কার করে নেই।

উদাহরণ-১ ঃ পাঁচটি দোকানের পুঁজি ও মুনাফা সম্পর্কে নিচে তথ্য দেয়া হলো,

পুঁজি X (লাখ টাকা)	৫	১০	১৫	২০	২৫
মুনাফা Y (লাখ টাকা)	৩	৪	৮	১২	১৮

এদের সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় করুন এবং নিয়োজিত পুঁজি ও মুনাফার মধ্যে বিদ্যমান সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে মন্তব্য করুন।

সমাধান ঃ সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় —

X	Y	$X - \overline{X}$	$Y - \overline{Y}$	$(X - \overline{X})^2$	$(Y - \overline{Y})^2$	$(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})$
৫	৩	- ১০	- ৬	১০০	৩৬	৬০
১০	৪	- ৫	- ৫	২৫	২৫	২৫
১৫	৮	০	- ১	০	১	০
২০	১২	৫	৩	২৫	৯	১৫
২৫	১৮	১০	৯	১০০	৮১	৯০
৭৫	৪৫			২৫০	১৫২	১৯০

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{৭৫}{৫} = ১৫$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{৪৫}{৫} = ৯$$

$$r = \frac{\sum(x - \overline{x})(y - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x - \overline{x})^২ \sum(y - \overline{y})^২}}$$

$$= \frac{১৯০}{\sqrt{২৫০ \times ১৫২}} = \frac{১৯০}{\sqrt{৩৮,০০০}} = \frac{১৯০}{১৯৪.৯৩৫৮৮} = ০.৯৭৪৬$$

$\therefore\ r = ০.৯৭৪৭$

মন্তব্য ঃ পূঁজি এবং মুনাফার মধ্যে পূর্ণসহগামী সহ-সম্বন্ধ না হলেও অতিমাত্রায় সহগামী সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান রয়েছে।

সম্বন্ধ অঙ্কের বিকল্প সূত্রসমূহ

আপনি সহ-সম্বন্ধ নির্ণয়ের একটি মাত্র সূত্র সম্পর্কে এতক্ষণ জানলেন। আসুন এবার এর বিকল্প কিছু সূত্র নিয়ে আলোচনা করা যাক্। প্রথমেই দেখি কার্ল পিয়ার্সনের সহ-সম্বন্ধ নির্ণয়ের সূত্রটি।

অবিন্যস্ত তথ্য থেকে কার্ল পিয়ার্সনের পদ্ধতিতে সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণের বিকল্প সূত্রটি নিম্নরূপ,

$$r = \frac{\sum d_x d_y - \frac{\sum d_x \sum d_y}{n}}{\sqrt{\left(\sum d_x^2 - \frac{(\sum d_x)^2}{n}\right)\left(\sum d_y^2 - \frac{(\sum d_y)^2}{n}\right)}}$$

যেখানে $d_x = x - A_x =$ X চলকের আনুমানিক গড় থেকে x চলকের রাশিগুলির বিচ্যুতি
$d_y = Y - A_y =$ Y চলকের আনুমানিক গড় থেকে Y চলকের রাশিগুলির বিচ্যুতি
$A_x =$ X চলক সারির আনুমানিক গড়
$A_y =$ Y চলক সারির আনুমানিক গড়

দ্বি-চলক বিন্যস্ত গণসংখ্যা নিবেশন থেকে (Bivariate Frequency Distribution) সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণের সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়াসমূহ নিম্নরূপ,

সরাসরি প্রক্রিয়া —

$$r = \frac{\sum f(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}$$

যেখানে, $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n}} =$ x চলকের পরিমিত ব্যবধান

$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum f(y-\bar{y})^{২}}{n}} =$ y চলকের পরিমিত ব্যবধান

সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া —

$$r = \frac{\sum fd_x d_y - \frac{\sum fd_x \sum fd_y}{n}}{\sqrt{\left\{\sum fd_x^{২} - \frac{(\sum fd_x)^{২}}{n}\right\}\left\{\sum fd_y^{২} - \frac{(\sum fd_y)^{২}}{n}\right\}}}$$

যেখানে $d_x = \frac{x - A_x}{C_x}$

$$d_y = \frac{y - A_y}{C_y}$$

x = x চলকের শ্রেণী মধ্যবিন্দু
Y = Y চলকের শ্রেণী মধ্যবিন্দু
A_x = x চলকের অনুমিত গড়
A_y = Y চলকের অনুমিত গড়
C_x = x চলকের শ্রেণী ব্যাপ্তি
C_y = Y চলকের শ্রেণী ব্যাপ্তি

আসুন উদাহরণ দুটি থেকে বিষয়টি আরও পরিষ্কার করি।

উদাহরণ-২ ঃ আটজন শ্রমিকের নৈপুন্য স্কোর এবং কর্ম অভিজ্ঞতা সম্পর্কে তথ্য নিম্নের তালিকায় লিপিবদ্ধ করা হালা,

শ্রমিকের ক্রমিক নং	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮
অভিজ্ঞতা (বৎসর) X	১৬	১২	১৮	৪	৩	১০	৫	১২
নৈপুণ্য স্কোর (২৫ এর মধ্যে) Y	২৩	২২	২৪	১৭	১৯	২০	১৮	২১

অভিজ্ঞতা ও নৈপুন্য স্কোরের মধ্যে বিদ্যমান সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণ করুন ও ফলাফল ব্যাখ্যা করুন।

সমাধান ঃ সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণ

x	Y	$d_x = x - A_x$	$d_y = Y - A_y$	d_x^2	d_y^2	$d_x d_y$
১৬	২৩	৬	৩	৩৬	৯	১৮
১২	২২	২	২	৪	৪	৪
১৮	২৪	৮	৪	৬৪	১৬	৩২
৪	১৭	- ৬	- ৩	৩৬	৯	১৮
৩	১৯	- ৭	- ১	৪৯	১	৭
১০	২০	০	০	০	০	০
৫	১৮	- ৫	- ২	২৫	৪	১০
১২	২১	২	১	৪	১	২
		$\sum d_x$ = ০	$\sum d_y$ = ৪	$\sum d_x^2$ = ২১৮	$\sum d_y^2$ = ৪৪	$\sum d_x d_y$ = ৯১

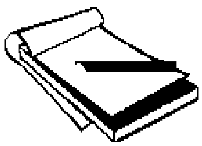
মনে করি, x চলকের অনুমিত গড় A_x = ১০, এবং Y চলকের অনুমিত গড় A_y = ২০

$$r = \frac{\sum d_x d_y - \frac{\sum d_x \sum d_y}{n}}{\sqrt{\left\{\sum d_x^{২} - \frac{(\sum d_x)^{২}}{n}\right\}\left\{\sum d_y^{২} - \frac{(\sum d_y)^{২}}{n}\right\}}}$$

$$= \frac{৯১ - \frac{০ \times ৪}{৮}}{\sqrt{\left\{২১৮ - \frac{(০)^২}{৮}\right\}\left\{৪৪ - \frac{(৪)^২}{৮}\right\}}}$$

$$= \frac{৯১}{\sqrt{২১৮ \times ৪২}} = \frac{৯১}{৯৫.৬৯} = ০.৯৫$$

সুতরাং, কাল পিয়ার্সনের সম্বন্ধ অঙ্ক r এর মান ০.৯৫। যেহেতু r এর সংখ্যা মান ধনাত্মক এবং + ১ এর প্রায় কাছাকাছি, তাই শ্রমিকদের অভিজ্ঞতার সঙ্গে নৈপুণ্য স্কোরের সম্বন্ধ প্রায় পূর্ণ সহগামী।



অনুশীলন

নিচের পাঁচজন ছাত্রের বয়স ও উচ্চতা সম্পর্কিত তথ্যের সাহায্যে কার্ল পিয়ারসনের প্রদত্ত প্রত্যক্ষ ও বিকল্প সূত্র অনুসারে সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় করুন এবং ফলাফলের উপর মন্তব্য করুন —

বয়স (বৎসর)	১২	১৫	১৪	১৮	১৬
উচ্চতা (ফুট)	৪.৫	৫.১	৫.০	৫.৪	৫.৫

উদাহরণ-৩ ঃ ২৪টি ট্রেডিং ফার্মের বিনিয়োগকৃত পুঁজি এবং বার্ষিক মুনাফা (লাখ টাকা) নিচের দ্বি-চলক বিশিষ্ট গণসংখ্যা সারণীতে (Bivariate Frequency Table) দেয়া হলো,

পুঁজি / মুনাফা	০ - ৫	৫ - ১০	১০ - ১৫	১৫ - ২০	২০ - ২৫	*f*
০ - ৫	২	১	১	০	০	৪
৫ - ১০	১	১	২	১	০	৫
১০ - ১৫	১	১	১	২	১	৬
১৫ - ২০	০	০	২	১	২	৫
২০ - ২৫	০	১	০	১	২	৪
f	৪	৪	৬	৫	৫	২৪

সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় করুন এবং ফলাফল সম্পর্কে আলোকপাত করুন।

সমাধান ঃ দ্বি-চলক বিশিষ্ট গণসংখ্যা সারণী থেকে সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয়

মুনাফা	পুঁজি		০ - ৫	৫ - ১০	১০ - ১৫	১৫ - ২০	২০ - ২৫	*f*	*f* d_y	*f* d_y^2	*f* $d_x d_y$
		x	২.৫	৭.৫	১২.৫	১৭.৫	২২.৫				
	y	dy \ dx	- ২	- ১	০	১	২				
০ - ৫	২.৫	- ২	২ [৮]	১ [২]	১ [০]	০ [০]	০ [০]	৪	- ৮	১৬	১০
৫ - ১০	৭.৫	- ১	১ [২]	১ [১]	২ [০]	১ [-১]	০ [০]	৫	- ৫	৫	২
১০ - ১৫	১২.৫	০	১ [০]	১ [০]	১ [০]	২ [০]	১ [০]	৬	০	০	০
১৫ - ২০	১৭.৫	১	০ [০]	০ [০]	২ [০]	১ [১]	২ [৪]	৫	৫	৫	৫
২০ - ২৫	২২.৫	২	০ [০]	১ [২]	০ [০]	১ [২]	২ [৮]	৪	৮	১৬	৮
f			৪	৪	৬	৫	৫	২৪	০	৪২	২৫
f d_x			- ৮	- ৪	০	৫	১০	৩			
f d_x^2			১৬	৪	০	৫	২০	৪৫			
f $d_x d_y$			১০	১	০	২	১২	২৫			

$$d_x = \frac{x - ১২.৫}{৫}$$

$$d_y = \frac{y - ১২.৫}{৫}$$

উপরের তালিকাটি লক্ষ্য করুন, তালিকাটিতে বামদিকে y চলক অর্থাৎ মুনাফার শ্রেণীব্যাপ্তি, শ্রেণীর মধ্যবিন্দু (y) এবং গড় হতে বিচ্যুতি (d_y) দেখানো হয়েছে। একইভাবে তালিকার উপরের দিকে x

চলক, অর্থাৎ পুঁজির শ্রেণীব্যাপ্তি, শ্রেণীর মধ্যবিন্দু (x) এবং গড় হতে বিচ্যুতি (d_x) দেখানো হয়েছে। তালিকার মধ্যবর্তী (body) অংশে প্রদত্ত গণসংখ্যা বসানো হয়েছে। এক্ষেত্রে ডানদিকে ছোট ছোট ঘরে যে মানগুলি বসানো হয়েছে তা নির্ণয় করা হয়েছে, নির্দিষ্ট ঘরের গণসংখ্যা এবং সেই ঘর বরাবর বামদিকে d_y এর মান ও উপরের দিকে d_x এর মান — এই তিনটি গুণ করে। যেমন প্রথম ঘরটির ৮ মানটি পাওয়া গেছে ২, -২ ও -২ গুণ করে। প্রতিটি সারির এরূপ ছোট ঘরগুলির মানগুলি যোগ করে সেই সারির $f\ d_x d_y$ এর মান নির্ণীত হয়েছে। এবার আসুন সম্বন্ধ অঙ্ক (r) নির্ণয় করি।

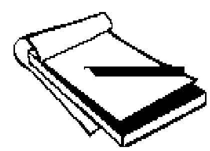
$$r = \frac{\sum fd_x d_y - \frac{\sum fd_x \sum fd_y}{n}}{\sqrt{\left\{\sum fd_x^{২} - \frac{(\sum fd_x)^{২}}{n}\right\}\left\{\sum fd_y^{২} - \frac{(\sum fd_y)^{২}}{n}\right\}}}$$

$$= \frac{২৫ - \frac{৩\times০}{২৪}}{\sqrt{\left\{৪৫ - \frac{(৩)^{২}}{২৪}\right\}\left\{৪২ - \frac{(০)^{২}}{২৪}\right\}}}$$

$$= \frac{২৫}{\sqrt{৪৪.৬২৫ \times ৪২}} = \frac{২৫}{৪৩.২৯} = ০.৫৭৮$$

$$\therefore r = ০.৫৭৮$$

সুতরাং, বিনিয়োগকৃত পুঁজি এবং মুনাফার মধ্যে ধনাত্মক সম্বন্ধ বিদ্যমান রয়েছে বলা যায়।



অনুশীলন

১০ জন ছাত্রের পড়ালেখার জন্য ব্যয়িত সময় (ঘন্টা) ও পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর নিচের দ্বি-চলক বিশিষ্ট গণসংখ্যা সারণীতে দেয়া হলো।

পড়ার সময় / প্রাপ্ত নম্বর	২ - ৬	৬ - ১০	১০ - ১৪	f
২০ - ৪০	১	১	০	২
৪০ - ৬০	২	৩	১	৬
৬০ - ৮০	০	১	১	২
f	৩	৫	২	১০

সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় করে ফলাফলের উপর মন্তব্য করুন।

নির্ণায়ঙ্ক নিরূপণ (Co-efficient of Determination)

সম্বন্ধ অঙ্কের বর্গকে নির্ণায়ঙ্ক বলা হয়। স্বাধীন চলক, নির্ভরশীল চলকের শতকরা কতভাগ তা যথার্থভাবে ব্যাখ্যা করা যায় নির্ণায়ঙ্ক দিয়ে। মনে করা যাক, পুঁজি এবং মুনাফা দুইটি সম্পর্কযুক্ত চলক। অর্থাৎ ধারণাগত ভাবে, ব্যবসায়ে মুনাফা পুঁজি বিনিয়োগের উপর নির্ভরশীল। সাধারণভাবে, যত বেশী পুঁজি বিনিয়োগ করা হয় তত বেশী ব্যবসায় মুনাফা লাভ করা যায়। কিন্তু মুনাফা শুধুমাত্র পুঁজির উপর নির্ভরশীল নয়। পুঁজি ছাড়াও আরও অনেক বিষয় যেমন, ব্যবসায়ীর দক্ষতা, কী রকম ব্যবসা উৎপাদনশীল (Manufacturing) না কেনা বেচা (Trading), কোথায় ব্যবসা-গ্রামে না শহরে ইত্যাদি মুনাফা অর্জনের ক্ষেত্রে প্রভাব বিস্তার করে থাকে। তাই নির্ণায়ঙ্ক দ্বারা নির্ভরশীল চলকের শতকরা হার কতটুকু তা জানা যায় সম্বন্ধ অঙ্কের দ্বারা।

সম্বন্ধ অঙ্কের বর্গের শতকরা হারকেই নির্ণায়ঙ্ক বলা যায়।

উদাহরণ - ১ এ পুঁজি এবং মুনাফার মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কের সম্বন্ধ অঙ্ক, r = ০.৯৭ (প্রায়)। সুতরাং নির্ণয়াঙ্ক, r^2 = $(০.৯৭)^{২}$ = ০.৯৪০৯ বা ৯৪.০৯%। নির্ণয়াঙ্কের এই মান থেকে বুঝা গেল যে, মুনাফা ৯৪.০৯% পুঁজি বিনিয়োগের উপর নির্ভরশীল এবং (১ - r^2) কে অনির্ণায়ঙ্ক (Coefficient of Non-determination) বলা হয়। এক্ষেত্রে অনির্ণায়ঙ্ক হচ্ছে ৫.৯১%। অর্থাৎ ব্যবসায়ের যে ক্ষেত্র থেকে তথ্য নেয়া হয়েছে সেক্ষেত্রে মুনাফার শতকরা ৫.৯১ ভাগ পুঁজি ছাড়া অন্যান্য বিষয়ের উপর নির্ভর করে। এটি নির্ণয়াঙ্ক সম্পর্কে একটি সাধারণ ধারণা।

স্বাধীন চলকটি নির্ভরশীল চলকের উপর কতটা নির্ভরশীল বা নির্ভরশীল চলক দিয়ে স্বাধীন চলকটিকে কতটুকু প্ররোচিত করা যায় তা নির্ণায়ঙ্ক দিয়ে জানা যায়।

গুণানুক্রমিক বা স্পিয়ারম্যানের র‍্যাংক সম্বন্ধ অঙ্ক (Spearman's Rank Correlation Co-efficient)

সাধারণ সহ-সম্বন্ধ নিরূপণের ক্ষেত্রে আমরা পিয়ারসন প্রদত্ত সম্বন্ধ অঙ্ক ব্যবহার করে থাকি। এই পদ্ধতিতে সম্পর্কযুক্ত চলকদ্বয়ের মানসমূহ ব্যবহৃত হয়। তবে মাঝে মধ্যে এমন বাস্তব পরিস্থিতির সম্মুখীন হতে হয়, যেখানে চলকদ্বয়ের মানসমূহ সরাসরি দেয়া থাকেনা। কোন কোন ক্ষেত্রে আবার সংখ্যাগত প্রকাশ আদৌ সম্ভব নয়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় - সততা, সৌন্দর্য, নৈপুণ্য প্রভৃতি বৈশিষ্ট্যসমূহের সংখ্যাগত প্রকাশ সম্ভব নয়। সেইসব চলকের ক্ষেত্রে গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ (Rank Correlation) ব্যবহার খুবই সুবিধাজনক। এই গুণানুক্রমিক প্রক্রিয়ার মাধ্যমে বৈশিষ্ট্যসমূহের মধ্যে সহ-সম্বন্ধের মোটামুটি পরিমাপ করা যেতে পারে। এইক্ষেত্রে গুণের ক্রম অনুসারে তথ্যসমূহকে সারিবদ্ধ করা যায়। যে সংখ্যা দ্বারা কোন পদের ক্রম স্থির করা হয় তা ঐ পদের সারিতে অবস্থান (Rank) চিহ্নিত করে। দুইটি চলকের প্রতিটি রাশির নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের সাপেক্ষে ক্রম অনুসারে দুইটি অবস্থান নির্ণীত হয়। এইভাবে গুণানুক্রমিক দুইটি ক্রমানুযায়ী অবস্থান সারি তৈরি হয়। ক্রম অনুসারে প্রাপ্ত সারি দুইটির সম্বন্ধকে গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ বলে।

> সাধারণ ভাষায় বলা যায়, সম্বন্ধ দিয়ে কোন বস্তু বা বিষয়ের গুণ তুলনা করা তাকে গুণানুক্রমিক সহ-স বলে।

গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ গণনা সহজ এবং গুণবাচক সম্পর্কযুক্ত বৈশিষ্ট্যের সহ-সম্বন্ধ নিরূপণে এই পদ্ধতির ব্যবহার বেশ উপযোগী। মনে করা যাক, দুইজন বিচারকের দৃষ্টিতে পাঁচজন গায়িকার শিল্প নৈপুণ্যের মেধাক্রম নিম্নরূপ,

> গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ গণনা সহজ এবং গুণবাচক সম্পর্কযুক্ত বৈশিষ্ট্যের সহ-সম্বন্ধ নিরূপণে এই পদ্ধতির ব্যবহার বেশ উপযোগী।

গায়িকার ক্রমিক নম্বর	প্রথম বিচারকের মেধাক্রম (Rank) R_1	দ্বিতীয় বিচারকের মেধাক্রম (Rank) R_2
১	৩	৪
২	২	১
৩	১	২
৪	৫	৫
৫	৪	৩

উপরের উদাহরণে দুই বিচারকের নৈপুণ্য বিচারের সম্বন্ধ নিরূপণে গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ (Rank Correlation) ব্যবহার করা যেতে পারে। এমনিভাবে বিভিন্ন ব্যক্তির বিচক্ষণতা, কর্মক্ষমতা (Performance) বিচারের ক্ষেত্রে বিভিন্নজনের বিচারের (Judgement) সহ-সম্বন্ধ জানতে গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ ব্যবহৃত হয়ে থাকে। স্পিয়ারম্যান কর্তৃক প্রদত্ত গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধের প্রতীক হল গ্রীক বর্ণমালার অক্ষর ρ (রো)। গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ অঙ্কের সূত্র নিম্নরূপ,

$$\rho = ১ - \frac{৬\sum D^{২}}{n(n^{২} - ১)}$$

যেখানে, ρ = গুণানুক্রমিক সম্বন্ধ অঙ্ক

n = গণসংখ্যা

D = প্রতিজোড়া নম্বরক্রমে (rank) পার্থক্য $(R_1 - R_2)$

এবার তাহলে অঙ্কের উদাহরণে যাওয়া যাক্।

উদাহরণ-৪ ঃ পোষাক শিল্পে কর্ম পরিবেশ থেকে প্রত্যাশা সম্পর্কে কয়েকটি বিষয়ে র‍্যাংক করতে বলায় শ্রমিক এবং তাদের সুপারভাইজারদের র‍্যাংক পাওয়া গেল নিম্নরূপ,

কর্ম পরিবেশ থেকে প্রত্যাশিত বিষয়	শ্রমিকের র‍্যাংক	সুপারভাইজারের র‍্যাংক
ভাল বেতন (Good Wages)	১	১
কাজের নিরাপত্তা (Job Security)	২	৩
পদোন্নতি (Promotion)	৫	৪
সহানুভূতি (Sympathy)	৪	৫
ভাল কর্ম পরিবেশ (Good Working Environment)	৩	২

কর্ম পরিবেশ থেকে প্রত্যাশিত বিষয় সম্পর্কে শ্রমিক ও তাদের সুপারভাইজারদের ধারণার গুণানুক্রমিক সম্বন্ধ অঙ্ক বের করুন এবং ফলাফল ব্যাখ্যা করুন।

সমাধান ঃ গুণানুক্রমিক সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয়

প্রত্যাশিত বিষয়	শ্রমিকের দেয়া র‍্যাংক R_1	সুপারভাইজারের দেয়া র‍্যাংক R_2	$D = R_1 - R_2$	D^2
ভাল বেতন	১	১	০	০
কাজের নিরাপত্তা	২	৩	- ১	১
পদোন্নতি	৫	৪	১	১
সহানুভূতি	৪	৫	- ১	১
ভাল কর্ম পরিবেশ	৩	২	১	১
				$\sum D^2 = ৪$

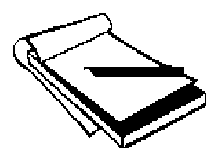
এখানে $n = ৫$

সুতরাং,
$$\rho = ১ - \frac{৬\sum D^২}{n(n^২ - ১)}$$
$$= ১ - \frac{৬ \times ৪}{৫ \times (৫^২ - ১)}$$
$$= ১ - \frac{৬ \times ৪}{৫ \times ২৪}$$
$$= ১ - \frac{১}{৫} \quad = \frac{৪}{৫} \quad = ০.৮$$
$$\therefore \rho = ০.৮$$

সুতরাং বলা যায়, শ্রমিক এবং তাদের সুপারভাইজারদের কর্ম পরিবেশ থেকে প্রত্যাশা সম্পর্কে সহগামী বা ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান রয়েছে।

অনুশীলন

এমন পাঁচটি উদাহরণ দিন যেক্ষেত্রে চলকের মানের সংখ্যাত্মক প্রকাশ সম্ভব না হলেও বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের ভিত্তিতে ক্রমানুসারে সাজানো যায়।



র‍্যাংক দেয়া না থাকলে সংখ্যাত্মক পরিমাপে গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধের ব্যবহার

যে সব চলকের ক্ষেত্রে সংখ্যাত্মক পরিমাপ সম্ভবপর হয় সেগুলির ক্ষেত্রেও গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ অঙ্কের মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধ পরিমাপ করা হয়। এই পদ্ধতিতে চলকের রাশিগুলিকে তাদের মান অনুসারে র‍্যাংক বা মানের মাত্রা প্রদান করা হয়। চলকের সবচেয়ে বড় রাশিকে ১, দ্বিতীয় বড় রাশিকে ২, এর অপেক্ষা ক্ষুদ্র রাশিকে ৩, এই ভাবে রাশিগুলিকে পরিমাপের ভিত্তিতে তাদের মানের মাত্রা বা rank প্রদান করা হয়। উভয় চলকের রাশিগুলিকে পৃথক পৃথকভাবে র‍্যাংক প্রদান করে পূর্বে বর্ণিত গুণানুক্রমিক সম্বন্ধ অঙ্কের মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধ নির্ণয় করা হয়। নিচে দেয়া উদাহরণে বিষয়টি ব্যাখ্যা করা হলো।

যে সব চলকের ক্ষেত্রে সংখ্যাত্মক পরিমাপ সম্ভবপর হয় সেগুলির ক্ষেত্রেও গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ অঙ্কের মাধ্যমে সহ-সম্বন্ধ পরিমাপ করা যায়।

উদাহরণ-৫ ঃ পাঁচজন ছাত্রের পরিসংখ্যান ও ব্যবস্থাপনায় প্রাপ্ত নম্বর নিচের তালিকায় লিপিবদ্ধ করা হলো,

ছাত্রের ক্রমিক নং	১	২	৩	৪	৫
পরিসংখ্যানে প্রাপ্ত নম্বর	৯০	৬০	৫০	৭০	৬৫
ব্যবস্থাপনায় প্রাপ্ত নম্বর	৬৫	৭০	৫৫	৬০	৭৫

গুণানুক্রমিক সম্বন্ধ অঙ্কের সাহায্যে ছাত্রদের উভয় বিষয়ে মেধার সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে ব্যাখ্যা দিন।

সমাধান ঃ প্রথমে ছাত্র পাঁচজনকে নম্বরের ভিত্তিতে উভয় বিষয়ে র‍্যাংক করতে হবে।

ছাত্রের ক্রমিক নং	পরিসংখ্যানে প্রাপ্ত নম্বর	ব্যবস্থাপনায় প্রাপ্ত নম্বর	R_1	R_2	$D = R_1 - R_2$	D^2
১	৯০	৬৫	১	৩	- ২	৪
২	৬০	৭০	৪	২	২	৪
৩	৫০	৫৫	৫	৫	০	০
৪	৭০	৬০	২	৪	- ২	৪
৫	৬৫	৭৫	৩	১	২	৪

	$\sum D^2 = ১৬$

এখানে $n = ৫$

$$\rho = ১ - \frac{৬\sum D^২}{n(n^২ - ১)}$$

$$= ১ - \frac{৬ \times ১৬}{৫ \times (৫^২ - ১)}$$

$$= ১ - \frac{৬ \times ১৬}{৫ \times ২৪}$$

$$= ১ - \frac{৪}{৫} \quad = \frac{১}{৫} \quad = ০.২$$

$$\therefore \rho = ০.২$$

সুতরাং বলা যায়, ছাত্রদের পরিসংখ্যান ও ব্যবস্থাপনা বিষয়ে মেধার মধ্যে সীমিত সহগামী সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান রয়েছে।

সারাংশ

তাহলে এই পাঠে আপনি কী কী সম্পর্কে ধারণা পেলেন? প্রথমেই আপনি জেনেছেন সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক কী এবং কয়েকটি উদাহরণ দিয়ে এই বিষয়ে একটি ধারণা দেয়া হয়েছে। পরবর্তীতে আপনি জেনেছেন, নির্ণায়ঙ্ক কী এবং কেন এর ব্যবহার পরিসংখ্যানে প্রয়োজন হয়। সবশেষে আপনাকে গুণবাচক সহ-সম্বন্ধ বা র‌্যাঙ্ক পদ্ধতি সম্পর্কে একটি সাধারণ ধারণা দেয়ার চেষ্টা করা হয়েছে। এবার তবে আসুন আমরা এই ইউনিটের সবশেষ পাঠ, পাঠ-৩ এ যাই। তার আগে পাঠোত্তর মুল্যায়নটি অবশ্যই দেখে নিন এবং অনুশীলন করুন।

• পাঠোত্তর মূল্যায়ন

১. সহ-সম্বন্ধ কাকে বলে? সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক কী? এটি কী কী বিষয় পরিমাপ করে?

ABC কোম্পানীর কর্মচারীদের কর্মক্ষমতা (Performance) (X) এবং টেস্ট স্কোর (Y) নিচে দেওয়া হলো,

কর্মচারীর ক্রমিক নং	দ্রব্য তৈরির ক্ষমতা (X)	টেস্ট স্কোর (Y)
১	৪	৯
২	৬	১৪
৩	৭	৪
৪	৮	২৫
৫	১২	৩০
৬	১৬	১৯

দ্রব্য তৈরির কর্মক্ষমতা ও টেস্ট স্কোর এর মধ্যে সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণ করুন এবং ফলাফল ব্যাখ্যা করুন।

২. স্পিয়ারম্যানের গুণানুক্রমিক সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক কী? কার্ল পিয়ারসনের সম্বন্ধ অঙ্ক থেকে এটি কীভাবে ভিন্নতর?

নিচে কয়েকজন কর্মচারীর বয়স ও সাপ্তাহিক আয় দেয়া হলো,

বয়স (বৎসর) X	২৫	৩০	৩৫	৪০	৪৫	৫০
আয় (টাকা) Y	২৫০	২৪০	৩৫০	৩৪০	৪৫০	৫৮০

বয়স ও আয়ের মধ্যে বিদ্যমান সম্বন্ধ অঙ্ক বের করুন এবং তা ব্যাখ্যা করুন।

৩. ধনাত্মক এবং ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বলতে কী বুঝায়? পূর্ণ ধনাত্মক এবং পূর্ণ ঋনাত্মক সহ-সম্বন্ধের মধ্যে পার্থক্য নিরূপণ করুন।

নিচের তথ্য থেকে কার্ল পিয়ারসনের সম্বন্ধ অঙ্ক বের করুন।

বৎসর	১৯৮৭	১৯৮৮	১৯৮৯	১৯৯০	১৯৯১	১৯৯২	১৯৯৩
রপ্তানি (কোটি টাকা)	১১৫	১১৮	১২২	১২০	১২৬	১২৮	১২৪
আমদানি (কোটি টাকা)	১৪০	১৩৮	১৪৫	১৪৮	১৫০	১৬০	১৫৮

৪. বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে কীভাবে সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণ করতে হয় তা' ব্যাখ্যা করুন।
নিচের তথ্য থেকে সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক নিরূপণ করুন এবং নির্ণয়াঙ্ক বের করে তা' ব্যাখ্যা করুন।

বিজ্ঞাপন খরচ (হাজার টাকা) X	৩	৪	৫	৬.২	৭.৫
বিক্রয় (হাজার টাকা) Y	২২১	২৩২	২৫৭	২৪২	২৯০

৫. নির্ণয়াঙ্ক কী? তা কীভাবে নিরূপণ ও ব্যাখ্যা করতে হয় তা দৃষ্টান্ত সহকারে আলোচনা করুন।
নিচের দ্বি-চলক বিশিষ্ট গণসংখ্যা সারণী থেকে সম্বন্ধ অঙ্ক বের করুন।

উচ্চতা (ইঞ্চি)	ওজন (পাউন্ড)				
	৮০ - ৯০	৯০ - ১০০	১০০ -১১০	১১০ -১২০	১২০ -১৩০
৫০ - ৫৫	১	৩	৭	৫	২
৫৫ - ৬০	২	৪	১০	৭	৪
৬০ - ৬৫	১	৫	১২	১০	৭
৬৫ - ৭০	০	৩	৪	৬	৩

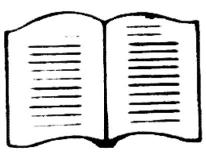
পাঠ-৩ : নির্ভরণ (Regression)

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- নির্ভরণ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- নির্ভরণ রেখা ও সমীকরণের ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- নির্ভরাঙ্ক কী তা বর্ণনা করতে পারবেন
- সম্বন্ধ অঙ্ক ও নির্ভরাঙ্ক এর সম্পর্ক নিরূপণ করতে পারবেন
- নির্ভরাঙ্ক এর মাধ্যমে সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন
- সহ-সম্বন্ধ এবং নির্ভরণের মধ্যে পার্থক্য চিহ্নিত করতে পারবেন
- কোন দ্বি-চলক বিশিষ্ট তথ্যের ভিত্তিতে নির্ভরণ রেখা নির্ণয় করতে পারবেন।

নির্ভরণ



একাধিক চলক বিশিষ্ট তথ্য সমগ্রকের একটি চলকের মানের পরিবর্তে অন্য চলকের মানের পরিবর্তনের মাত্রা নির্ধারণের একটি কৌশল হলো নির্ভরণ।

সম্বন্ধ অঙ্কের মাধ্যমে আপনি দুইটি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক আছে কি না তা যাচাই করতে পারেন। সহ-সম্বন্ধ থাকলে সমমুখী না বিপরীতমুখী তা নির্ধারণ করে সহ-সম্বন্ধের মাত্রা নির্ধারণ করতেও শিখেছেন। আবার সম্বন্ধ অঙ্কের বর্গ করে নির্ণয়াঙ্কও বের করে নির্ভরশীল চলকের শতকরা কতভাগ স্বাধীন চলকের প্রেক্ষিতে ব্যাখ্যা করা যায় তা-ও বর্ণনা করতে পারেন। কিন্তু সহ-সম্বন্ধ থেকে যা পারেন না তা হলো, সম্পর্কযুক্ত চলক দুইটির একটি চলকের কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য অপর চলকের মান গণনা (estimate) বা নির্ধারণ (predict) করা। যেমন, যদি পুঁজি এবং মুনাফা সম্পর্কযুক্ত হয় তবে, এক লাখ টাকা পুঁজি বাড়ালে, কত টাকা মুনাফা বাড়বে বা এক হাজার টন পণ্য সরবরাহ কমালে কে.জি. প্রতি কত টাকা দাম বাড়বে তা নির্ধারণ করতে পারেন না। পরিসংখ্যানের যে বিশেষ পদ্ধতির প্রয়োগে সম্বন্ধযুক্ত দুইটি চলকের একটির প্রদত্ত কোন মানের জন্য অপর চলকের, গড় মান নির্ধারণ করা যায় তাকে নির্ভরণ বলা হয়। অন্য কথায় নির্ভরণ হলো, দুইটি চলকের গড় সম্বন্ধ যা প্রয়োগের মাধ্যমে একটি চলকের কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য অপর চলকের গড় মান নির্ধারণ করা হয়। এর মাধ্যমে একটি চলকের পরিবর্তন অন্য চলকটিকে কোন মাত্রায় প্রভাবিত করে তা অনুমান করা যায়।

নির্ভরণ সমীকরণ ও নির্ভরণ রেখা

চলকের পারস্পরিক সম্পর্ক যে সমীকরণে প্রকাশ করা হয় তাকে নির্ভরণ সমীকরণ বলে।
আর এই সমীকরণ রেখায় প্রকাশ করলে ঐ রেখাকে নির্ভর রেখা বলে।

দ্বি-চলক তথ্যের (Bivariate data) উপর ভিত্তি করে চলকদ্বয়ের পারস্পরিক সম্পর্ক সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। এই সমীকরণের সাহায্যে একটি চলকের কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য অপর চলকের মান নির্ধারণ করা হয়। যে সমীকরণের মাধ্যমে এই কাজ করা হয় তাকে নির্ভরণ সমীকরণ বলা হয়। এই সমীকরণের জ্যামিতিক প্রমাণের দ্বারা যে লেখ পাওয়া যায় তাকে নির্ভরণ রেখা (Regression Curve) বলে। চলকদ্বয়ের সম্পর্কের প্রকৃতি অনুসারে নির্ভরণ রেখা সরল অথবা বক্র হতে পারে। চলকদ্বয়ের পরিবর্তন সমানুপাতিক হলে তাদের সম্পর্ককে সরল রৈখিক নির্ভরণ (Linear regression) বলে এবং ঐ সরলরেখাকে নির্ভরণ রেখা (Regression line) বলে। এটি একটি সরল রেখার সমীকরণ দ্বারা সূচিত হয় এবং বর্গসমূহের ক্ষুদ্রতমকরণ পদ্ধতিতে (Method of least Squares) তা নির্ণীত হয়। চলকদ্বয়ের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্ক সমানুপাতিক না থাকলে নির্ভরণ রেখা বক্র হয় এবং তখন এই সম্পর্ককে বক্র রৈখিক (Non-linear regression) নির্ভরণ বলে।

X-এর উপর Y-এর নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয়
(To find the regression equation of y on x)

নির্ভরণ রেখা দ্বারা দুইটি চলকের পারস্পরিক সম্পর্কের রূপ প্রতিফলিত হয়। এই রেখা একটি চলকের গড় মানগুলির বিপরীতে অন্য একটি চলকের গড় মানগুলিকে প্রদর্শন করে। সম্পর্কযুক্ত চলক দুইটিকে x এবং y দ্বারা সূচিত করা হলে x কে স্বাধীন (independent) ধরে y এর সম্ভাব্য পরিবর্তন লক্ষ্য করতে যে নির্ভর রেখা প্রস্তুত করা হয় তাকে "x এর উপর y এর নির্ভরণ রেখা" (Regression of y on x) বলা হয়। x এর উপর y এর নির্ভরণ রেখা নিম্ন লিখিত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়ে থাকে,

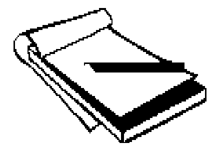
$$Y = a_1 + b_1 x$$

এখানে, Y = নির্ভরশীল চলক (dependent variable)

X = স্বাধীন চলক (independent variable)

b_1 = x এর উপর y এর নির্ভরাঙ্ক (Regression Co-efficient of Y on X)

a_1 = x এর মান শূন্য হলে y এর মান (ধ্রুবক)



অনুশীলন
নিচের চলকদ্বয়গুলির মধ্যে সাধারণভাবে কোনটি অপরটির নির্ভরশীল তা কারণসহ ব্যাখ্যা করুন
(ক) আয় ও ব্যয় (খ) দাম ও চাহিদা (গ) জমির উর্বরতা ও উৎপাদন
(ঘ) দাম ও যোগান (ঙ) অনুশীলন ও সাফল্য (চ) অধ্যয়ন ও ফলাফল

এখানে ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি (Least square Method) ব্যবহার করে a_1 এবং b_1 এর মান বের করতে হয়। এই পদ্ধতিতে b_1 এবং a_1 এর সূত্র নিম্নরূপ,

$$b_1 = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}}{\sum X^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}$$

এবং $a_1 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}$

যেখানে, X = x চলকের মানসমূহ

Y = Y চলকের মানসমূহ

$\overline{X}$ = x চলকের গড়

$\overline{Y}$ = Y চলকের গড়

n = মোট পর্যবেক্ষণ সংখ্যা

x এর উপর Y এর নির্ভরাঙ্ক (b_1) বলতে x এর এক একক পরিবর্তনের জন্য Y চলকের যে পরিবর্তন সূচিত হয় তাকে বুঝায়। চলক দুইটি যদি পুঁজি (x) এবং মুনাফা (Y) হয় তবে b_1 দ্বারা এক টাকা পুঁজি বিনিয়োগের জন্য কত মুনাফা পরিবর্তন হয় তাই নির্দেশ করে।

x এর উপর Y এর নির্ভরাঙ্ক (b_1) বলতে x এর এক একক পরিবর্তনের জন্য Y চলকের যে পরিবর্তন সূচিত হয় তাকে বুঝায়।

এখন আসুন উদাহরণ দিয়ে বিষয়টি পরিষ্কার করে নেয়া যাক্।

উদাহরণ-১ ঃ একটি দোকানের পাঁচ বৎসরের পুঁজি ও মুনাফা সম্পর্কে পর্যবেক্ষণগুলি নিম্নরূপ,

বৎসর	পুঁজি (লাখ টাকা) x	মুনাফা (লাখ টাকা) Y
১৯৯০	৫	৩
১৯৯১	১০	৫
১৯৯২	১৫	৭
১৯৯৩	২০	১২
১৯৯৪	২৫	১৮

পুঁজির (x) উপর মুনাফার (Y) নির্ভরণ সমীকরণ নিরূপণ করুন এবং ৩২ লাখ টাকা পুঁজি বিনিয়োগ করলে কত টাকা মুনাফা হবে তা নিরূপণ করুন।

সমাধান ঃ x উপর Y এর নির্ভর রেখা নির্ণয় করার জন্য কিছু প্রয়োজনীয় মান বের করা প্রয়োজন। আপনি জানেন, প্রয়োজনীয় মানগুলো বা গণনাগুলো হলো $\sum X$, $\sum Y$, $\sum X^2$ এবং $\sum XY$। এসকল গণনার জন্য আপনি নিচের সারণীটি ব্যবহার করুন।

বৎসর	পুঁজি X	মুনাফা Y	XY	X^2
১৯৯০	৫	৩	১৫	২৫
১৯৯১	১০	৫	৫০	১০০
১৯৯২	১৫	৭	১১৫	২২৫
১৯৯৩	২০	১২	২৪০	৪০০
১৯৯৪	২৫	১৮	৪৫০	৬২৫
	$\sum X$ =৭৫	$\sum Y$ =৪৫	$\sum XY$ =৮৬০	$\sum X^2$ =১,৩৭৫

নির্ভরণ সমীকরণ হচ্ছে $Y = a_1 + b_1 x$

এখানে $$b_1 = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}}{\sum X^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}$$

$$\frac{৮৬০ - \frac{৭৫ \times ৪৫}{৫}}{১,৩৭৫ - \frac{(৭৫)^২}{৫}}$$

$$= \frac{৮৬০ - ৬৭৫}{১,৩৭৫ - ১,১২৫}$$

$$= \frac{১৮৫}{২৫০}$$

$= ০.৭৪$

$a_1 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{৭৫}{৫} = ১৫$$

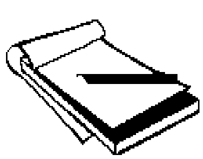
$$\overline{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{৪৫}{৫} = ৯$$

$\therefore \quad a_1$ = ৯ - ০.৭৪ (১৫)
= ৯ - ১১.১০
= - ২.১০

সুতরাং নির্ভরণ সমীকরণটি নিম্নরূপ,
Y = - ২.১০ + ০.৭৪ X

অতএব, ৩২ লাখ টাকা পুঁজি খাটালে অনুমিত মুনাফা হবে —
Y = – ২.১০ + ০.৭৪ (৩২)
= – ২.১০ + ২৩.৬৮
= ২১.৫৮ লাখ টাকা

অর্থাৎ, ৩২ লাখ টাকা পুঁজি খাটালে নির্ণেয় মুনাফা হবে ২১.৫৮ লাখ টাকা।



অনুশীলন

নিচের তথ্যের সাহায্যে X (মূল্য) এর উপর Y (চাহিদা) এর নির্ভর সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং ২০ টাকা মূল্যে চাহিদার পরিমাণ নির্ণয় করুন —

মূল্য (টাকা)	১৪	১৮	২২	২৬	৩০
চাহিদা (একক)	৮০	৭২	৬০	৫৫	৫০

নির্ভরাঙ্কের বিকল্প সূত্র

x এর উপর Y এর নির্ভরাঙ্কের (b_1) এর পূর্বের সূত্রটি ছাড়াও বিকল্প সূত্র রয়েছে। সূত্রটি সরাসরি নিম্নরূপ,

$$b_1 = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}$$

সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায়ও b_1 এর মান নির্ণয় করা যায়। যখন তথ্যসারির রাশিগুলির মান বড় হয় তখন আনুমানিক গড় বিয়োগ করে নির্ণয়ের কাজ সহজ করা হয়। সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ার মাধ্যমে ব্যবহৃত সূত্রটি নিম্নরূপ,

যখন তথ্য সারির রাশিগুলির মান বড় হয় তখন আনুমানিক গড় বিয়োগ করে b_1 নির্ণয়ের কাজ সহজ করা হয়।

$$b_1 = \frac{\sum d_x d_y - \frac{\sum d_x \sum d_y}{n}}{\sum d_x^2 - \frac{(\sum d_x)^2}{n}}$$

যেখানে $d_x = x - A_x$

$d_y = Y - A_y$

X = স্বাধীন চলকের মান

Y = নির্ভরশীল চলকের মান

A_x = x তথ্যসারির আনুমানিক গড়

A_y = Y তথ্যসারির আনুমানিক গড়

আসুন এবার উদাহরণে।

উদাহরণ-২ ঃ নিচের তথ্য থেকে বয়সের (x) উপর আয়ের নির্ভরণ সমীকরণ বের করুন এবং যার বয়স ৫৫ বৎসর তার আয় কত নিরূপণ করুন।

বয়স (বৎসর) X	৩০	৩২	৩৭	৪৫	৫২
সাপ্তাহিক আয় (টাকা) Y	৪৫০	৬২৫	৯০০	৮২০	১১৫০

সমাধান ঃ X এর উপর Y এর নির্ভরণ নিরূপণ

বয়স (X)	আয় (Y)	$d_x = x - A_x$	$d_y = Y - A_y$	d_x^2	$d_x d_y$
৩০	৪৫০	- ১০	- ৩৫০	১০০	৩,৫০০
৩২	৬২৫	- ৮	- ১৭৫	৬৪	১,৪০০
৩৭	৯০০	- ৩	১০০	৯	- ৩০০
৪৫	৮৫০	৫	৫০	২৫	২৫০
৫২	১,১৫০	১২	৩৫০	১৪৪	৪,২০০
		$\sum d_x$ = − ৪	$\sum d_y$ =− ২৫	$\sum d_x^2$=৩৪২	$\sum d_x d_y$ =৯,০৫০

মনে করুন, X সারির অনুমিত গড় A_x = ৪০, এবং Y সারির অনুমিত গড় A_y = ৮০০। X এর উপর Y এর সমীকরণ হচ্ছে —

$$Y = a_1 + b_1 x$$

যেখানে $b_১ = \dfrac{\sum d_X d_Y - \dfrac{\sum d_X \sum d_Y}{n}}{\sum d_X{}^২ - \dfrac{(\sum d_X)^২}{n}}$

$$\therefore b_১ = \frac{৯,০৫০ - \frac{(-৪)(-২৫)}{৫}}{৩৪২ - \frac{(-৪)^২}{৫}}$$

$$= \frac{৯,০৫০ - \frac{১০০}{৫}}{৩৪২ - \frac{১৬}{৫}}$$

$$= \frac{৯,০৫০ - ২০}{৩৪২ - ৩.২}$$

$$= \frac{৯০৩০}{৩৩৮.৮}$$

= ২৬.৬৫ (প্রায়)

$a_1 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}$

$\overline{X} = A_x + \dfrac{\sum d_x}{n}$;

$= ৪০ + \dfrac{-৪}{৫}$

= ৪০ - ০.৮

= ৩৯.২

$\overline{Y} = A_y + \dfrac{\sum d_y}{n}$

$= ৮০০ + \dfrac{-২৫}{৫}$

= ৮০০ − ৫

= ৭৯৫

সুতরাং, $a_1 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}$

= ৭৯৫ - ২৬.৬৫ × ৩৯.২

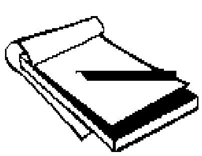
a_1 = ৭৯৫ − ১০৪৪.৬৮ = − ২৪৯.৬৮

এখন নির্ণীত সমীকরণ হচ্ছে, Y = − ২৪৯.৬৮ + ২৬.৬৫ X

অতএব যার বয়স ৫৫ বৎসর তার সাপ্তা হিক আয় হবে, (X = ৫৫)

$Y_{৫৫}$ = − ২৪৯.৬৮ + ২৬.৬৫ × ৫৫

= − ২৪৯.৬৮ + ১,৪৬৫.৭৫ = ১,২১৬.০৭ টাকা



অনুশীলন

নিচের তথ্য হতে আয়ের (X) উপর ব্যয়ের (Y) এর নির্ভরণ সমীকরণ সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করুন এবং আয় যখন ১০,০০০ টাকা তখন ব্যয়ের পরিমাণ কত হবে তা নির্ণয় করুন ––

আয় (হাজার টাকা)	৬	৯	১২	১৫	১৮
ব্যয় (হাজার টাকা)	৫	৭.৫	১১	১৩	১৫

Y-এর উপর X-এর নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয়

(To find the regression equation of x on y)

X- কে নির্ভরশীল ধরে Y- কে স্বাধীন ধরুন। এর ফলে যে সমীকরণটি দাঁড়াবে তা-ই হলো Y- এর উপর X-এর নির্ভরণ সমীকরণ।

y এর উপর x এর নির্ভরণ রেখা নিম্নলিখিত সমীকরণের মাধ্যমে ব্যক্ত করা হয়ে থাকে,

$$x = a_2 + b_2 y$$

এখানে x অধীন বা নির্ভরশীল চলক এবং y স্বাধীন চলক। y এর প্রদত্তমানের জন্য x এর মান নির্ণয় করতে হবে। **ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি ব্যবহার করে a_2 এবং b_2 এর মান নির্ণয় করতে হয়।** এই পদ্ধতিতে a_2 এবং b_2 এর সূত্র নিম্নরূপ,

$$b_২ = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(y-\bar{y})^2}$$

বা, $$b_২ = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}}{\sum y^২ - \frac{(\sum y)^২}{n}}$$

বিকল্প প্রক্রিয়ায় সংক্ষিপ্তভাবে এই সূত্রটিই নিম্নলিখিতভাবে ব্যবহার করা হয়।

$$b_২ = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{\Sigma d_x \Sigma d_y}{n}}{\Sigma d_y^{২} - \frac{(\Sigma d_y)^{২}}{n}}$$

যেখানে $d_x = X - A_x$

$d_y = Y - A_y$

A_x = X তথ্যসারির আনুমানিক গড়

A_y = Y তথ্যসারির আনুমানিক গড়

b_2 = Y এর উপর X এর নির্ভরণাঙ্ক

এবং, $a_2 = \bar{X} - b_2 \bar{Y}$

উদাহরণ-৩ ঃ উদাহরণ-১ এ দেয়া তথ্য থেকে মুনাফার (Y) উপর পুঁজির (X) নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং ২৫ লাখ টাকা মুনাফা করার জন্য কত টাকা পুঁজি খাটাতে হবে নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মুনাফার উপর পুঁজির নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয়।

বৎসর	পুঁজি X	মুনাফা Y	XY	Y^2
১৯৯০	৫	৩	১৫	৯
১৯৯১	১০	৫	৫০	২৫
১৯৯২	১৫	৭	১১৫	৪৯
১৯৯৩	২০	১২	২৪০	১৪৪
১৯৯৪	২৫	১৮	৪৫০	৩২৪
	$\sum X$ =৭৫	$\sum Y$ =৪৫	$\sum XY$ =৮৬০	$\sum Y^2$=৫৫১

সমীকরণটি হচ্ছে $X = a_2 + b_2 Y$

যেখানে, $$b_2 = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}}{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}}$$

$$= \frac{৮৬০ - \frac{(৭৫ \times ৪৫)}{৫}}{৫৫১ - \frac{(৪৫)^{২}}{৫}}$$

$$= \frac{৮৬০ - ৬৭৫}{৫৫১ - ৪০৫}$$

$$= \frac{১৮৫}{১৪৬}$$

= ১.২৭ (প্রায়)

$a_2 = \overline{X} - b_2 \overline{Y}$

$\therefore$ a_2 = ১৫ - ১.২৭ (৯)
= ১৫ - ১১.৪৩
= ৩.৫৭

সুতরাং সমীকরণটি হবে,

X = ৩.৫৭ + ১.২৭ Y

অতএব, ২৫ লাখ টাকা মুনাফা করতে পুঁজি লাগবে —

$X_{২৫}$ = ৩.৫৭ + ১.২৭ (২৫)
= ৩.৫৭ + ৩১.৭৫
= ৩৫.৩২ লাখ টাকা

উদাহরণ-৪ ঃ উদাহরণ-২ এ দেয়া তথ্য থেকে আয়ের (Y) উপর বয়সের (X) নির্ভরণ সমীকরণ সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে বের করুন এবং ১,৫০০ টাকা সাপ্তাহিক আয় হলে তাঁর বয়স অনুমান করুন।

সমাধান ঃ আয়ের (Y) উপর বয়সের (X) নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয়ের গণনা —

বয়স X	আয় Y	$d_x = x - A_x$	$d_y = Y - A_y$	d_y^2	$d_x d_y$
৩০	৪৫০	- ১০	- ৩৫০	১,২২,৫০০	৩৫০০
৩২	৬২৫	- ৮	- ১৭৫	৩০,৬২৫	১৪০০
৩৭	৯০০	- ৩	১০০	১০,০০০	- ৩০০
৪৫	৮৫০	৫	৫০	২,৫০০	২৫০
৫২	১১৫০	১২	৩৫০	১,২২,৫০০	৪২০০
$\sum X$ = ১৯৬	$\sum Y$ = ৩৯৭৫	$\sum d_x$ = - ৪	$\sum d_y$ = - ২৫	$\sum d_y^2$ =২,৮৮,১২৫	$\sum d_x d_y$ =৯০৫০

মনে করুন, X সারির অনুমিত গড়, A_x = ৪০, এবং Y সারির অনুমিত গড়, A_y = ৮০০

এখন Y এর উপর X এর সমীকরণটি হচ্ছে —

$$X = a_2 + b_2 Y$$

যেখানে $$b_২ = \frac{\sum d_x d_y - \frac{\sum d_x \sum d_y}{n}}{\sum d_y^২ - \frac{\left(\sum d_y\right)^২}{n}}$$

$$= \frac{৯,০৫০ - \frac{(-৪)(-২৫)}{৫}}{২,৮৮,১২৫ - \frac{(-২৫)^২}{৫}}$$

$$= \frac{৯০৫০ - ২০}{২,৮৮,১২৫ - ১২৫}$$

$$= \frac{৯০৩০}{২,৮৮,০০০}$$

= ০.০৩১৪ (প্রায়)

= .০৩১৪ (প্রায়)

আবার, $a_2 = \overline{X} - b_2 \overline{Y}$

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{১৯৬}{৫} \quad এবং \quad \overline{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{৩,৯৭৫}{৫}$$

$\therefore \overline{X}$ = ৩৯.২ $\qquad \therefore \overline{Y}$ = ৭৯৫

$\therefore a_2$ = ৩৯.২ - ০.০৩১৪ (৭৯৫)

= ৩৯.২ - ২৪.৯৬ = ১৪.২৪

অতএব নির্ণীত সমীকরণ হচ্ছে, X = ১৪.২৪০ + ০.০৩১৪ Y

সুতরাং, যাঁর ১,৫০০ টাকা সাপ্তাহিক আয়, তাঁর অনুমিত বয়স হবে —

$Y_{১৫০০}$ = ১৪.২৪০ + ০.০৩১৪ (১৫০০)

= ৬১.৩৪ বৎসর (প্রায়)।

নির্ভরাঙ্কের সাহায্যে সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় (Calculation of Coefficient of Correlation by Regression Co-efficient)

আপনি সহ-সম্বন্ধ অঙ্ক এবং নির্ভরাঙ্ক নির্ণয় শিখেছেন। আকর্ষণীয় বিষয়, নির্ভারাঙ্কগুলির সাহায্যেও সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় করা যেতে পারে। নির্ভরাঙ্ক দুইটির গুণিতক গড় (Geometric Mean) নির্ণয় করলে সম্বন্ধ অঙ্ক পাওয়া যায়। অর্থাৎ, নির্ভরণ সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত নির্ভরাঙ্ক দুইটির মান ব্যবহার করে সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় করা যায়। নির্ভরাঙ্ক ও সম্বন্ধ অঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশিত হলো, $r = \sqrt{b_1 b_2}$

> নির্ভরাঙ্ক দুইটির গুণিতক গড় নির্ণয় করলে সম্বন্ধ অঙ্ক পাওয়া যায়।

সম্বন্ধ অঙ্ক ও সম্পর্কযুক্ত চলকদ্বয়ের পরিমিত ব্যবধান পরিমাপ দ্বারা নির্ভরাঙ্ক নির্ণয়

সম্বন্ধ অঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান পরিমাপগুলি ব্যবহার করে নির্ভরাঙ্ক দুইটি নির্ণয় করা যেতে পারে। X চলকের উপর Y চলকের নির্ভরাঙ্ক b_1 নিচের সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়,

> সম্বন্ধ অঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান পরিমাপগুলি ব্যবহার করে নির্ভরাঙ্ক দুইটি নির্ণয় করা যেতে পারে।

$$b_১ = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

b_1 = X চলকের উপর Y চলকের নির্ভরাঙ্ক

যেখানে r = দুইটি চলকের সম্বন্ধ অঙ্ক

σ_x = X চলকের পরিমিত ব্যবধান

σ_y = Y চলকের পরিমিত ব্যবধান

X চলকের উপর Y চলকের নির্ভরাঙ্কের সূত্রটি নিম্নরূপ,

$$b_২ = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

যেখানে b_2 = Y চলকের উপর X চলকের নির্ভরাঙ্ক

σ_x = X চলকের পরিমিত ব্যবধান

σ_y = Y চলকের পরিমিত ব্যবধান

r = দুইটি চলকের সম্বন্ধ অঙ্ক

উদাহরণ-৫ ঃ কোন শিল্প কারখানার বিক্রয় এবং বিজ্ঞাপন খরচ সম্পর্কে নিম্নলিখিত তথ্য দেয়া হলো,

পরিমাপক	বিজ্ঞাপন (লাখ টাকা) (X)	বিক্রয় (লাখ টাকা) (Y)
গড়	৫	৪০
পরিমিত ব্যবধান	১.৬	৯

সহ-সম্বন্ধ, r = ০.৮৫

I. ৮ লাখ টাকা বিজ্ঞাপন খরচ হলে বিক্রয় কত হবে মন্তব্য করুন,

II. ৬০ লাখ টাকা বিক্রয় টার্গেট অর্জন করতে হলে কত টাকা বিজ্ঞাপনে খরচ করতে হবে নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে বিজ্ঞাপন খরচ X চলক, Y বিক্রয় চলক

$\overline{X}$ = ৫, $\overline{Y}$ = ৪০

σ_x = ১.৬, σ_y = ৯ r = ০.৮৫

(i) X চলকের উপর Y চলকের নির্ভরণ সমীকরণ

$$Y = a_1 + b_1 X$$

$$b_১ = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= ০.৮৫ \times \frac{৯}{১.৬} = ০.৮৫\ (৫.৬২৫) = ৪.৭৮১২৫$$

$$a_1 = \overline{Y} - b_1\overline{X}$$

$$= ৪০ - ৪.৭৮১২৫\ (৫) = ৪০ - ২৩.৯০৬২৫ = ১৬.০৯৩৭৫$$

সুতরাং Y = ১৬.০৯ + ৪.৭৮ X

অতএব, আট লাখ টাকা বিজ্ঞাপন খরচ হলে অনুমিত বিক্রয় হবে —

$$Y_৮ = ১৬.০৯ + ৪.৭৮\ (৮)$$

= ১৬.০৯ + ৩৮.২৪ = ৫৪.৩৩ লাখ টাকা

(ii) Y চলকের উপর X চলকের নির্ভরণ সমীকরণ

$$X = a_2 + b_2 Y$$

$$b_২ = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$= ০.৮৫ \times \frac{১.৬}{৯} = ০.৮৫\ (০.১৮) = ০.১৫৩$$

$$a_2 = \overline{X} - b_2\overline{Y}$$

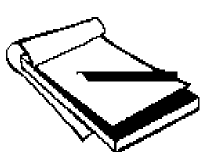
$$= ৫ - ০.১৫৩\ (৪০) = ৫ - ৬.১২ = -১.১২$$

সুতরাং X = − ১.১২ + ০.১৫৩ Y

অতএব, ৬০ লাখ টাকা বিক্রয় টার্গেট অর্জন করতে হলে বিজ্ঞাপন খরচ হবে —

$$X_{৬০} = -১.১২ + ০.১৫৩\ (৬০)$$

= − ১.১২ + ৯.১৮ = ৮.০৬ লাখ টাকা



অনুশীলন

একটি প্রতিষ্ঠানে গত ৫ বৎসরের বিক্রয় ও মুনাফা সম্পর্কে নিচের তথ্য দেওয়া হলো —

পরিমাপক	বিক্রয় (হাজার টাকা) X	মুনাফা (হাজার টাকা) Y

গড় পরিমিত ব্যবধান	৪০ ৬	১৪ ৩

চলক দুটির মধ্যে সম্বন্ধ অঙ্ক (r) = ০.৬২ হলে,

(ক) ৩৫ হাজার টাকা বিক্রয়ে মুনাফা কত হবে?

(খ) ১৫ হাজার টাকা মুনাফা অর্জন করতে চাইলে কত টাকার বিক্রয় প্রয়োজন হবে?

সহ-সম্বন্ধ ও নির্ভরণের ব্যবহার

ব্যবসা বাণিজ্যের ক্ষেত্রে সহ-সম্বন্ধ ও নির্ভরণের গুরুত্ব অপরিসীম। বাণিজ্যে সাফল্য অর্জনের জন্য তথ্যভিত্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ একান্ত প্রয়োজন। সেজন্য দরকার ভোক্তা ও সরবরাহকারীর আর্থ সামাজিক অবস্থাকে যে সব বিষয় প্রভাবিত করে তার যথার্থ বিশ্লেষণ। যেমন, ক্রয় ক্ষমতার সঙ্গে আয়ের সম্পর্ক, বিজ্ঞাপনের খরচের সঙ্গে বিক্রয়ের সম্পর্ক, পুঁজি বিনিয়োগের সঙ্গে মুনাফা অর্জনের সম্পর্ক, জীবন যাত্রার মানের সঙ্গে উৎকৃষ্ট দ্রব্য ক্রয়ের সম্পর্ক ইত্যাদি পর্যালোচনার ক্ষেত্রে সহ-সম্বন্ধ ও নির্ভরণ বিশ্লেষণ বিশেষ ভূমিকা রাখতে পারে।

বিভিন্ন পরিস্থিতির ও পরিবেশের পরিবর্তনে অন্য একটি বিষয় কতটুকু প্ররোচিত হয় তা সহ-সম্বন্ধ ও নির্ভরণ দ্বারা পরিমা করা যায়।

সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণের মাধ্যমে সম্পর্কযুক্ত চলকের একটির পরিবর্তনের সঙ্গে অন্য চলকের পরিবর্তনের যোগসূত্র আছে কি না, থাকলে তার মাত্রা ও পরিবর্তনের দিক সম্পর্কে জ্ঞাত হওয়া যায়। সহ-সম্বন্ধ বিশ্লেষণ থেকে একটি চলকের পরিবর্তনের জন্য অন্য চলকের পরিবর্তনের পরিমাণ জানা যায় না। দুইটি চলকের সহ-সম্বন্ধ দ্বারা চলকগুলির পরিবর্তনের কোন কারণগত সম্পর্ক প্রতিষ্ঠিত হয় না। কার্যকরণ বর্তমান নাই এমন চলকদ্বয়ের মধ্যেও পরিমাণ পরিবর্তনগত সম্বন্ধ থাকতে পারে।

নির্ভরণের মাধ্যমে সম্পর্কযুক্ত চলকগুলির একটির উপর অন্যটি কতখানি নির্ভর করে তা জানা যায়। একটি চলকের একক পরিবর্তন হেতু অন্য চলক কতটুকু পরিবর্তিত হয় - নির্ভরাঙ্ক তাই পরিমাপ করে। নির্ভরণ রেখা দ্বারা সম্পর্কযুক্ত চলক দুইটির একটির ভিত্তিতে অপরটির গড় পরিবর্তন পরিমাপ করা যায়। তবে কার্যকরণ নিরূপণের ক্ষেত্রে শুধু পরিসংখ্যানের পরিমাণগত বিশ্লেষণাত্মক জ্ঞানই যথেষ্ট নয়।

সারাংশ

সহ-সম্বন্ধের মত নির্ভরণও পরিসংখ্যান এবং ব্যবসা-বাণিজ্যে একটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় প্রক্রিয়া। আপনি সহ-সম্বন্ধ থেকে যা বের করতে পারবেন না, তাই-ই নির্ভরণ আপনাকে পেতে সাহায্য করবে। আর তাহলো, একটি চলকের পরিবর্তনের ফলে অন্য চলকটি কতটুকু পরিবর্তন হতে পারে তা নির্ণয়। এছাড়া এই পাঠে আপনি ধারণা পেলেন কীভাবে নির্ভরণ বের করতে হয় এবং এর ব্যবহার কী।

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. সহ-সম্বন্ধ ও নির্ভরণ এর ধারণাসমূহ দৃষ্টান্ত সহকারে ব্যাখ্যা করুন। এদের মধ্যে যথার্থ পার্থক্য কী?

একটি দোকানের বিক্রয় এবং বিজ্ঞাপন খরচ দেয়া হলো,

বিজ্ঞাপন খরচ (লক্ষ টাকা) X	৬০	৬২	৬৫	৭০	৭৫	৭২
বিক্রয় (কোটি টাকা) Y	১০	১২	১৩	১৫	১৭	১৯

বিক্রয়ের উপর বিজ্ঞাপন খরচের নির্ভরণ রেখা নিরূপণ করুন এবং বিজ্ঞাপন খরচ ৮০ লক্ষ টাকা হলে বিক্রয় কত হবে বের করুন।

২. নির্ভরণ রেখা কাকে বলে? নির্ভরণ রেখা কয়টি? নির্ভরাঙ্কের বর্ণনা ও দৃষ্টান্ত সহকারে ব্যাখ্যা করুন।

নিচের তালিকায় অপারেটরদের অভিজ্ঞতা এবং তাদের কর্মক্ষমতার রেট দেয়া হলো,

অপারেটর	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮
অভিজ্ঞতা (বৎসর) X	১৬	১২	১৭	৬	৫	৭	৮	৯
কর্মক্ষমতার রেট Y	৮৭	৮৬	৮৯	৬৮	৭৬	৭৯	৭৭	৮৩

অভিজ্ঞতার উপর কর্মক্ষমতার নির্ভরণ রেখা নির্ণয় করুন। যে অপারেটরের অভিজ্ঞতা সাত (৭) বৎসর তার কর্মক্ষমতার রেট কত?

৩. নির্ভরাঙ্ক এবং সহ-সম্বন্ধ অঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক কী? ধারণা দুইটি দৃষ্টান্ত সহকারে ব্যাখ্যা করুন। দশজন মহিলার বয়স ও রক্তচাপের পরিমাপ দেয়া হলো,

বয়স (বৎসর) X	৫৫	৪৩	৩৭	৪৬	৪৯	৪২	৬০	৭২	৬৪	৫৬
রক্তচাপ Y	১৪৫	১২৫	১২০	১২৮	১৪৭	১৪০	১৫৪	১৬০	১৪৮	১৫১

বয়সের উপর রক্ত চাপের নির্ভরণ রেখা নিরূপণ করুন এবং যে মহিলার বয়স ৫০ তাঁর রক্তচাপ কত মন্তব্য করুন।

৪. নির্ভরণ রেখাগুলি কী? নির্ভরণ রেখা থেকে কিভাবে সম্বন্ধ নিরূপণ করতে হয় ব্যাখ্যা করুন। নিচে কোন কর্পোরেশনে সাতজন কর্মচারীর চাকুরীর সময়কাল এবং আয়ের পরিমাণ তালিকাভুক্ত করা হল

চাকুরীর সময় (বৎসর) X	১২	৮	১০	৬	৯	৭	১১
আয় (হাজার টাকা) Y	৯	৬	৪	৫	৬	৪	১০

চাকুরীর সময়কালের উপর আয়ের নির্ভরণ রেখা বের করুন। যার চাকুরীর সময়কাল ১৫ তার আয় কত হবে?

৫. সহ-সম্বন্ধ ও নির্ভরাঙ্ক বিশ্লেষণের তুলনামূলক ব্যাখ্যা দিন। ব্যবসায় বাণিজ্যে এদের ব্যবহার আলোচনা করুন।

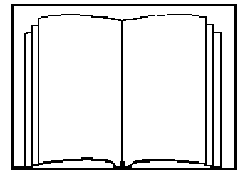
একর প্রতি গমের উৎপাদন এবং বৃষ্টিপাতের পরিমাণ সম্পর্কে তথ্য নিচে তালিকাবদ্ধ করা হলো,

পরিমাপক	উৎপাদন (কেজি)	বৃষ্টিপাত (ইঞ্চি)
গড়	৯৫০	১২
পরিমিত ব্যবধান	৮১	২

সম্বন্ধ অঙ্ক, $r = + 0.51$ (+ ০.৫১)

বৃষ্টিপাতের পরিমাণের উপর উৎপাদনের নির্ভরণ রেখা অঙ্কন করুন এবং বৃষ্টিপাত যখন ১৪ ইঞ্চি তখন গমের উৎপাদন কত হতে পারে তা নিরূপণ করুন।

Reference :



1. Anderson, Sweeney and William : Introduction to Statistics - An Application Approach, West Publishing Company, New York, 1981.
2. Croxton Frederick E, Dudley J. Cowden and Sidney Klein : Applied General Statistics, Prentice-Hall Inc. Euglewood Cliff N. J., 1967.
3. Harnett, Donald L, and James L. Murphy : Introductory Statistical Analysis, Addison-Werley Publishing Company Inc, Reading Mass, 1975.
4. মুহাম্মদ আলী মিঞা এবং মোঃ আলিম উল্ল্যা মিয়ান : পরিসংখ্যান পরিচিতি, আইডিয়াল লাইব্রেরী, ঢাকা, ১৯৮৫।
5. এস. এ. হাসীব : বাণিজ্যিক পরিসংখ্যান, আলী পাবলিকেশন্স, পাটুয়াটুলী, ঢাকা, ১৯৬৯।
6. J.C.S. Das : Lesson Note on Statistics, ICMA, Bangladesh, Nilkhet, Dhaka, 1988.