৪

নিবেশনের বিস্তার, প্রকৃতি ও গঠন
(Dispersion, Nature and Form of Distribution)

পূর্ববর্তী ইউনিটে আপনারা কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকসমূহ সম্পর্কে শিখেছেন। এই পরিমাপকগুলির মাধ্যমে তথ্যসারির একটি প্রতিনিধিত্বশীল রাশি পাওয়া যায়। গড় হচ্ছে সেই প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যামান। তথ্যসারির সমস্ত রাশিগুলি সমান না হলে গড় এককভাবে পরিসংখ্যান সারির পর্যবেক্ষণগুলির যথার্থ মান উপস্থাপন করতে পারে না। এ কারণে বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা লক্ষ্য করা যায়।

এই ইউনিটটিতে বিস্তার পরিমাপকের বিভিন্ন পরিমাপক নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে। ইউনিটের প্রথম পাঠে বিস্তার পরিমাপের গুরুত্ব প্রয়োজনীয়তা পরিসর ও গড় ব্যবধান সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। দ্বিতীয় পাঠে আলোচনা করা হয়েছে, পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের পদ্ধতি ও ব্যবহারসমূহ। চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় পদ্ধতি ও আপেক্ষিক পরিমাপসমূহ আলোচিত হয়েছে তৃতীয় পাঠে। চতুর্থ পাঠে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ সম্বন্ধে জানবো। পঞ্চম পাঠে নিবেশনের অন্য দুইটি বৈশিষ্ট্য, বঙ্কিমতা ও সূঁচালতার বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে এবং বিভিন্ন পদ্ধতিতে পরিঘাত ব্যবহার করে তথ্য বিন্যাসের গঠন ও প্রকৃতি সম্পর্কে আলোকপাত করা হয়েছে। আসুন তা হলে আমরা পর্যায়ক্রমে এই ইউনিটের বিভিন্ন পাঠ নিয়ে আলোচনা করি।

এই পৃষ্ঠা খালি থাকবে

ইউনিট-৪

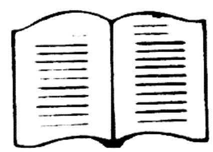
পাঠ-১ : বিস্তার পরিমাপের গুরুত্ব, পরিসর ও গড় ব্যবধান

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি ––

- বিস্তার পরিমাপ কী - তা বর্ণনা করতে পারবেন
- বিস্তার পরিমাপের গুরুত্ব ও প্রয়োজনীয়তা জানতে পারবেন
- একটি যথার্থ বিস্তার পরিমাপকের বাঞ্ছনীয় গুণাবলী চিহ্নিত করতে পারবেন
- পরিসরের সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন
- বিচ্ছিন্ন তথ্য সারি ও গণসংখ্যা নিবেশন থেকে বিস্তার পরিমাপ নির্ণয় করতে পারবেন
- পরিসরের সুবিধা ও সীমাবদ্ধতা চিহ্নিত করতে পারবেন
- গড় ব্যবধানের সংজ্ঞার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন
- পরিসংখ্যান তথ্যের গড় ব্যবধান নির্ণয় করতে পারবেন।

বিস্তার



বিস্তার কী? এ সম্পর্কে শুরু করা যাক্ একটা উদাহরণ দিয়ে। মনে করুন, তিন জন ছাত্রের তিনটি বিষয়ে পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ,

বিষয়	১ম ছাত্র	২য় ছাত্র	৩য় ছাত্র
বাংলা	৫০	৫০	৪৫
ইংরেজী	৫০	৪০	১০
অংক	৫০	৬০	৯৫
মোট নম্বর	১৫০	১৫০	১৫০
গড় নম্বর	৫০	৫০	৫০

উদাহরণটিতে আপনি দেখছেন যে, তিনজন ছাত্রেরই গড় নম্বর ৫০। কিন্তু নম্বরের বিন্যাস তিনটি সমান নয়। ১ম ছাত্রের ক্ষেত্রে সে বাংলা, ইংরেজি এবং অংকে সমান নম্বর পেয়েছে। এক্ষেত্রে প্রথম ছাত্রের গড় সংখ্যা মানটি তার নম্বরের তথ্য নিবেশনের প্রতিটি সংখ্যা মানের যথার্থ প্রতিনিধিত্ব করছে। ২য় ছাত্রের নম্বরের গড় ৫০ হলেও অন্যান্য রাশিগুলি ৪০ থেকে ৬০ পর্যন্ত বিস্তৃত। তৃতীয় ছাত্রের ক্ষেত্রে গড় একই থাকা সত্ত্বেও তার নম্বরের বিস্তৃতির পরিমাণ আরও ব্যাপক ও বিভিন্ন বিষয়ের নম্বর মেধার অসমতা নির্দেশক। তাই তথ্যের বৈশিষ্ট্যসমূহ ফুটিয়ে তোলার জন্য এক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক ছাড়াও অন্যান্য পরিমাপকের সাহায্যে তথ্য বিশ্লেষণের প্রয়োজন হয়। কেননা কোন নিবেশনের তথ্যের সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা পেতে চাইলে ঐ তথ্যগুলোর অবস্থান কেন্দ্রীয় মান থেকে কতটা বিস্তৃত তা জানা দরকার হয়।

> গড় মানটি তথ্য সারির রাশিগুলিকে কতটুকু প্রতিনিধিত্ব করে তা জানার জন্য বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজন হয়।

গড় হচ্ছে তথ্য নিবেশনের কেন্দ্রবিন্দু। নিবেশনের অধিকাংশ রাশিই যদি কেন্দ্রীয় মূল্যমানের আশে পাশে অল্প পরিমাণে বিস্তৃত থাকে তা হলে গড় নিবেশনের যথার্থ প্রতিনিধিত্বশীল হওয়ার যোগ্যতা অর্জন করে। উদাহরণস্বরূপ, ১ম ছাত্রের নম্বরের গড়, তথ্য সারির প্রতিটি সংখ্যামানের যথার্থ প্রতিনিধিত্বশীল। আবার নিবেশনের রাশিগুলির অধিকাংশই যদি বিক্ষিপ্তভাবে কেন্দ্রীয়মান থেকে অনেক ব্যবধানে অবস্থান করে তবে গড় নিবেশনটির সকল সংখ্যামানের প্রতিনিধিত্বশীল হতে পারে না। এক্ষেত্রে ৩য় ছাত্রের গড় নম্বর ৫০। ঐ ছাত্রের ইংরেজিতে প্রাপ্ত ১০ নম্বর এবং অংকের ৯৫ নম্বর এর কোনটিই তার গড় মানের প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা নহে। এই জন্য গড় মানটি তথ্য সারির রাশিগুলিকে কতটুকু প্রতিনিধিত্ব করে তা জানার জন্য বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজন হয়। অর্থাৎ বলা যায় বিস্তার পরিমাপ হলো, নিবেশনের রাশিগুলির কেন্দ্রীয় মান থেকে পার্থক্যের পরিমাপ। তথ্য সারির রাশি গুলির বিন্যাস যত ঘনীভূত থাকে বিস্তার পরিমাপকের মান তত কম হয়, আবার রাশি গুলি যত বিস্তৃত পরিমাপে ছড়ানো থাকে বিস্তার পরিমাপকের মান তত বেশী হয়।

বিস্তার পরিমাপ কী

> বিস্তার পরিমাপ, তথ্যমালার মানসমূহের সাথে পরিসংখ্যান গড়ের মানের পার্থক্য প্রকাশের মাধ্যমে গড়টি তথ্যসারির কতটুকু প্রতিনিধিত্ব করছে তা প্রকাশ করে।

পরিসংখ্যান নিবেশনের গড় থেকে তথ্য রাশি মালার মানসমূহের পার্থক্য বা ভেদ পরিমাপক সংখ্যাকে পরিসংখ্যান ভাষায় বিস্তার বলা হয়। তথ্য বিশ্লেষণের জন্য শুধুমাত্র গড়ের সাহায্যে কোন নিবেশনের পরিপূর্ণ প্রকাশ সম্ভব হয় না। গড়ের সঙ্গে সঙ্গে তথ্যের বিস্তার পরিমাপক জানা থাকলে তথ্য নিবেশনের বৈশিষ্ট্য, সম্পর্কে যথাযথ ভাবে ধারণা পাওয়া যায়। যেমন, কোন মজুরী নিবেশন যদি একশত কর্মচারীর মাসিক আয় দ্বারা গঠিত হয় এবং তাদের আয়ের গড় যদি ২,৫০০ টাকা হয় ও গড় বিস্তার শূন্য হয়, তবে বুঝতে হবে - ঐ নিবেশনের সকলের আয় সমান এবং তা হচ্ছে প্রত্যেকেরই মাসিক আড়াই হাজার টাকা। বিস্তার যত কম হবে তথ্য সারি তত সুসম (Uniform) হবে। আবার বিস্তার অধিক হলে তথ্য সারির প্রতিটি সংখ্যামানের পার্থক্য অধিক হবে এবং তথ্য নিবেশনটি হবে অসম (Heterogeneous)। তাই বলা যায়, যে সংখ্যাগত পরিমাপের সাহায্যে কোন পরিসংখ্যান নিবেশনের রাশিসমূহ তাদের গড়ের চতুর্দিকে কীভাবে বিস্তৃত বা রাশিসমূহের সাথে গড়ের মানের পার্থক্য কত তা প্রকাশ করা হয় তাকে বিস্তার পরিমাপ বলে। এই বিস্তার পরিমাপ পরিসংখ্যানের একটি অন্যতম পরিমাপক প্রক্রিয়া।

> বিস্তার পরিমাপসমূহ হলো তথ্যের কেন্দ্রীয় মান থেকে প্রতিটি সংখ্যার বিস্তৃতি বা ভেদের গড় পরিমাণ।

একটি নিবেশনের তথ্যের বর্ণনা এবং দুই বা ততোধিক নিবেশনের তুলনার জন্য কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকের সঙ্গে সঙ্গে বিস্তার পরিমাপ করাও একান্ত প্রয়োজন। মনে করুন, কোন দোকানের বিক্রয়ের গড় পাঁচ হাজার টাকা। যদি বিক্রেতার এই বিক্রয় তথ্য সারির বিস্তার না জানা থাকে তবে প্রতি দিনের বিক্রয়ের পার্থক্য কত তা বলা কঠিন। বিস্তার পরিমাপ দ্বারা তথ্য সারির প্রতিটি রাশির ভূমিকা যাচাই করা যায়। কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপকসমূহ হলো তথ্যের কেন্দ্রীভূত মানসমূহ এবং বিস্তার পরিমাপসমূহ হলো তথ্যের কেন্দ্রীয় মান থেকে প্রতিটি সংখ্যার বিস্তৃতি বা ভেদের গড় পরিমাণ। কোন তথ্যমালার গড় ঐ রাশিগুলির যথাযথ প্রতিনিধি কি-না- তা নির্ণয়ের যথার্থ সহায়ক হলো বিস্তার পরিমাপ।

একটি যথাযথ বিস্তার পরিমাপকের নিম্নবর্ণিত গুণাবলী থাকা উচিত,

- বিস্তার পরিমাপকটি সহজে বোধগম্য হবে।
- এটির মান নির্ণয়ে তথ্য সারির প্রতিটি মান ব্যবহৃত হবে।
- সহজ গাণিতিক প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যাবে।
- অতিরিক্ত গাণিতিক গণনাকার্যে এর ব্যবহার খুব সুবিধাজনক হবে। যেমন, কোন তথ্য সারির দুইটি উপ-তথ্য সারি থাকলে এবং সেগুলির বিস্তার পরিমাপক জানা থাকলে সম্মিলিত পরিমাপক জানা সম্ভব হবে।
- তথ্যমালার প্রান্তিক মানগুলি দিয়ে বিস্তার পরিমাপক খুব বেশী প্রভাবিত হবে না।

বিস্তার পরিমাপের গুরুত্ব

> বিস্তার পরিমাপক পরিসংখ্যানের একটি অপরিহার্য পরিমাপক।

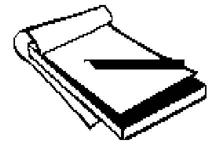
বিস্তার পরিমাপক পরিসংখ্যানের একটি অপরিহার্য পরিমাপক। তথ্যসারির তথ্যগুলোর সঠিক ও দক্ষ বিশ্লেষণের জন্য এর ব্যবহার বহুল জনপ্রিয়। আসুন দেখা যাক্ কোন্ মৌলিক কারণের জন্য বিস্তার পরিমাপক নির্ণয় করা হয়,

- গড় কোন একটি নিবেশনের সংখ্যামান গুলির কতটুকু প্রতিনিধিত্বশীল তা জানার জন্য বিস্তার পরিমাপ করা একান্ত প্রয়োজন। বিস্তার সম্পর্কে তথ্য জানা না থাকলে গড়ের প্রতিনিধিত্ব যাচাই সম্ভব হয় না।
- বিস্তার পরিমাপ উপাত্তের রাশিগুলির ভেদ নিয়ন্ত্রণে সহায়ক। মনে করুন, কোন কারখানার মাসিক উৎপাদন সম্পর্কে পর্যবেক্ষণ করে একটি নিবেশন দেয়া হল। নিবেশনের ভেদ বা পার্থক্য কম হলে বুঝতে হবে মাসিক উৎপাদনের তারতম্য কম। আবার ভেদ বেশী হলে বুঝতে হবে মাসে মাসে উৎপাদনের তারতম্য বেশী। বিস্তার পরিমাপ করার ফলে মালিক উৎপাদনের তারতম্যের কারণ বের করে তা নিয়ন্ত্রণে দ্রুত পদক্ষেপ নিতে পারে।
- মনে করুন, একই কর্পোরেশনের দুইটি বিক্রয় কেন্দ্র দুটি বড় শহরে কাজ করছে। প্রতিটি বিক্রয় কেন্দ্র থেকে পর্যবেক্ষণ নিয়ে দুইটি তথ্যরাশি পাওয়া যেতে পারে। যে তথ্য নিবেশনের বিস্তার বেশী সেখানে বিক্রয় বিচ্যুতির পরিমাণ (Sales fluctuation) বেশী হবে। এই যে দুইটি বিক্রয় কেন্দ্রের তুলনা করা সম্ভব হলো তা বিস্তার পরিমাপের

জন্যই। অর্থাৎ বলা যায়, বিস্তার পরিমাপের সাহায্যে বিভিন্ন তথ্যমালার তুলনামুলক চিত্র পাওয়া সম্ভব হয়।

- ব্যবস্থাপনার বিভিন্ন সিদ্ধান্তে যেমন, ব্যবসায় নেতৃত্বের জনপ্রিয়তা ইত্যাদি বিষয়ে তুলনা করার জন্যও বিস্তার পরিমাপক একটি অনন্য হাতিয়ার।

অনুশীলন
তিনটি কারখানার ৫ জন করে শ্রমিকের আয়ের বিন্যাস প্রস্তুত করুন যাঁদের গড় দৈনিক আয় ১০০ টাকা করে হলেও বিস্তার ভিন্ন।



বিস্তারের অনপেক্ষ এবং আপেক্ষিক পরিমাপ

বিস্তারের পরিমাপ সমূহকে প্রধানত দুইভাবে ভাগ করা হয়,

(ক) অনপেক্ষ পরিমাপ (Absolute Measures)

(খ) আপেক্ষিক পরিমাপ (Relative Measures)

আসুন এই দুই প্রকার পরিমাপক নিয়ে আলোচনা করা যাক।

অনপেক্ষ পরিমাপ

তথ্য সারিতে মূল তথ্য সারির সংখ্যাগুলি যে এককে প্রকাশ করা হবে অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকগুলিও সেই একই এককে চিহ্নিত হবে। যেমন মনে করুন, কোন একটি প্রতিষ্ঠানের বিক্রয় সংক্রান্ত উপাত্ত টাকার পরিমাপে সংগ্রহ করা হলো। এখন তথ্যের সংখ্যামানগুলি যদি টাকায় হয় তবে অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপগুলোর এককও হবে টাকায়। অনপেক্ষ পরিমাপক চার রকমের হতে পারে। যেমন,

তথ্য সারিতে মূল তথ্য সারির সংখ্যাগুলি যে এককে প্রকাশ করা হবে অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকগুলিও সেই একই এককে চিহ্নিত হবে।

- পরিসর (Range)
- গড় ব্যবধান (Mean Deviation)
- পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation)
- চতুর্থক ব্যবধান (Quartile Deviation)

আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপক

আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপক হচ্ছে অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকের সঙ্গে গড়ের অনুপাত। এটি কোন এককে প্রকাশিত হয় না। এটি শুধুমাত্র সংখ্যার মাধ্যমে প্রকাশিত হয়। এটি যেহেতু একটি সংখ্যা মাত্র, সে জন্য এর মাধ্যমে বিভিন্ন এককে সংগৃহীত একাধিক তথ্য সারির বিস্তার তুলনা করা সম্ভব। মনে করুন, একটি বহুজাতিক কোম্পানির দুইটি বিক্রয় কেন্দ্র আছে। একটি ঢাকা শহরে অন্যটি আমেরিকায় নিউ ইয়র্কে। প্রথমটির বিক্রয় সম্পর্কীয় তথ্য টাকার এককে সংগৃহীত এবং অপরটির তথ্য ডলারের এককে গৃহীত। এই দুই বিক্রয় তথ্যের বিস্তার তুলনার জন্য প্রয়োজন হবে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপক যা শুধুমাত্র সংখ্যায় (শতকরা) প্রকাশিত, টাকায়ও নয়, ডলারেও নয়। তাই আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপকসমূহ বিভিন্ন এককে প্রকাশিত দুই বা ততোধিক তথ্য নিবেশনের বিস্তার তুলনার ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়। এর বিস্তার পরিমাপকগুলো —

আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকের সঙ্গে গড়ের অনুপাত।

- ব্যবধানাঙ্ক
- গড় ব্যবধানাঙ্ক
- চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক

আসুন তাহলে, বিস্তার পরিমাপকের বিভিন্ন পদ্ধতি অলোচনায় যাওয়া যাক। প্রথমেই অনপেক্ষ পরিমাপের বিস্তার পরিমাপক সম্পর্কে জানবো।

পরিসর

বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে সহজ ও সরল পদ্ধতি হচ্ছে পরিসর। এটি কোন পরিসংখ্যান নিবেশনের ভেদ বা বিস্তার পরিমাপের একটি অতি সাধারণ এবং প্রাথমিক পরিমাপ। এর দ্বারা কেবলমাত্র তথ্য সারির প্রান্তিক রাশি দুইটির পার্থক্য বা দূরত্ব জানা যায়। ফলে পরিসংখ্যান সারির ভিতরকার রাশির ব্যবধান সম্পর্কে এর থেকে কোন ধারণা পাওয়া যায় না। সুতরাং এ থেকে নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান থেকে প্রতিটি রাশির বিচ্যুতি নিরূপণ করা যায় না। পরিসর প্রান্তিক রাশি দুইটির মানের উপর সম্পূর্ণভাবে নির্ভরশীল। অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিসর নির্ণয়ের সূত্র হলো,

পরিসর হলো তথ্য রাশিমালার সবচাইতে বড় রাশিটি এবং সবচাইতে ছোট রাশিটির পার্থক্য বা ব্যবধান।

পরিসর = বৃহত্তম রাশির মান – ক্ষুদ্রতম রাশির মান
সংকেতের সাহায্যে সূত্রটি লেখা যায়,

$R = L - S$

যেখানে, R = পরিসর
L = বৃহত্তম রাশির মান
S = ক্ষুদ্রতম রাশির মান

আসুন উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি আরও সহজ করা যাক।

উদাহরণ -১ ঃ নিচের উপাত্তে ১০ জন শ্রমিকের দৈনিক মজুরী (টাকায়) দেয়া আছে। তাদের মজুরীর পরিসর কত? ১৩৫, ৯৫, ১২০, ১৭০, ১৫০, ১৮০, ১৩২, ১৯৫, ১১০, ১২৫।

সমাধান ঃ এখানে তথ্য সারিটিকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজালে নিম্নরূপ দাঁড়ায় - ৯৫, ১১০, ১২০, ১২৫, ১৩২, ১৩৫, ১৫০, ১৭০, ১৮০, ১৯৫। এখানে সর্বাপেক্ষা বেশী মজুরী বা সবচাইতে বড় রাশিটি ১৯৫ টাকা এবং ক্ষুদ্রতম মজুরী বা রাশিটি ৯৫ টাকা।

আমরা জানি —

R = $L - S$
যেখানে, L = ১৯৫ টাকা, S = ৯৫ টাকা
R = পরিসর
সুতরাং, R = ১৯৫ - ৯৫ = ১০০

অতএব পরিসর = ১০০ টাকা।

গণসংখ্যা নিবেশন থেকে পরিসর নির্ণয়

> গণসংখ্যায় যদি শ্রেণী ব্যাপ্তির উর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমা না থাকে তবে পরিসর নির্ণয় করতে বহুলাংশে অনুমানের উপর নির্ভর করতে হয়।

একটি গণসংখ্যা নিবেশনে মূল তথ্য যথাযথভাবে উপস্থাপিত থাকে না বলে সঠিকভাবে পরিসর নির্ণয় করা যায় না। তবে গণসংখ্যা নিবেশন থেকে পরিসরের মান অনুমান করা যায়। গণসংখ্যা নিবেশন যদি মানের উচ্চক্রম অনুসারে সাজানো হয় তাহলে, সর্বশেষ শ্রেণী ব্যাপ্তির উর্ধ্বসীমা এবং সর্ব প্রথম শ্রেণী ব্যাপ্তির নিম্ন সীমার পার্থক্যই হল পরিসর। পরিসরটি অনুমিত হয় এই জন্য যে, সর্ব প্রথম শ্রেণী ব্যাপ্তির নিম্ন সীমার মানের কোন রাশি বা শেষ শ্রেণীর উর্ধ্বসীমার মানের কোন রাশি নিবেশনে হয়তো না ও থাকতে পারে। তবে এই আনুমানিক মানটি প্রকৃত মান থেকে খুব বেশী তারতম্যের হয় না। **তবে বিকল্প পদ্ধতিতে সর্বশেষ শ্রেণী সীমার মধ্যমান এবং সর্ব প্রথম শ্রেণী সীমার মধ্যমানের পার্থক্যই হচ্ছে অনুমিত পরিসর।** গণসংখ্যা থেকে পরিসর নির্ণয় একটি উদাহরণের সাহায্যে আলোচনা করা যাক।

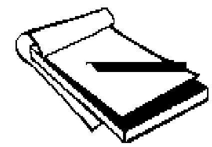
উদারহণ-২ ঃ নিচে গণসংখ্যা নিবেশনে দোকানের মাসিক মুনাফা (হাজার টাকায়) প্রদর্শিত হল। মুনাফার পরিসর কত?

মুনাফা (হাজার টাকা)	দোকানের সংখ্যা
১০ - ২০	৮
২০ - ৩০	১০
৩০ - ৪০	১২
৪০ - ৫০	৯
৫০ - ৬০	৯
৬০ - ৭০	৪

সমাধান ঃ এখানে আনুমানিক সর্বাপেক্ষা বেশী মুনাফা = ৭০ হাজার টাকা

ক্ষুদ্রতম মুনাফা = ১০ হাজার টাকা
অতএব, পরিসর = ৭০ - ১০ = ৬০

∴ পরিসর = ৬০ হাজার টাকা



অনুশীলন

নিচে ১০ জন ছাত্রের অঙ্কে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া আছে। এই অবিন্যস্ত তথ্যের পরিসর নির্ণয় করুন। আবার এই অবিন্যস্ত তথ্য বিন্যস্ত তথ্যে রূপান্তর করে পরিসর নির্ণয় করুন।

২৬, ৫৩, ৬১, ৪৮, ৭৫, ৩৯, ৫৪, ৬৭, ৭৬, ৩৫,

দুই ক্ষেত্রেই পরিসর কি সমান? সমান না হলে কারণ ব্যাখ্যা করুন।

পরিসরের মাধ্যমে বিস্তার পরিমাপকের সুবিধা ও অসুবিধা

পরিসর নির্ণয় খুবই সহজ। এটি যেমন পরিসরের একটি সুবিধা, অন্যদিকে পরিসর অন্যান্য রাশি সম্পর্কে সুস্পষ্ট কোন ধারণা দেয় না - এটি একটি অসুবিধা। যাহোক, পরিসরের অন্যান্য সুবিধা, অসুবিধার দিকে লক্ষ্য করা যাক।

পরিসর নির্ণয় খুব সহজ হলে তথ্যসারির অন্যান্য রাশি সম্পর্কে পরিসর কোন ধারণা দেয় না।

সুবিধা

- পরিসর সহজবোধ্য। কঠিন কোন গাণিতিক প্রক্রিয়ার আশ্রয় না নিয়েই তা নির্ণয় করা যায়।
- কেবল মাত্র প্রান্তিক রাশি দুইটির মান জানা থাকলেই পরিসর পরিমাপ করা সম্ভব।
- পরিসর নির্ণয়ে তথ্য সারির সমস্ত রাশির বিশদ বর্ণনার প্রয়োজন হয় না।
- অল্প সময় ও কম শ্রমে উপাত্তের বিস্তার সম্পর্কে মোটামুটি ধারণা করা যায়।

অসুবিধা

- পরিসর শুধু মাত্র তথ্য সারির দুইটি প্রান্তিক রাশির পার্থক্য। তথ্যসারির অন্য সকল রাশির উপর ভিত্তি করে তা নির্ণয় করা হয় না।
- সীমাবিহীন শ্রেণীব্যাপ্তি সম্পন্ন গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে পরিসর নির্ণয় করা যায় না।
- বিন্যাসের দুইটি প্রান্তিক বিন্দুর মধ্যস্থিত রাশিগুলির বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে পরিসর কোন ধারণা প্রদান করে না। নিচের তিনটি তথ্য সারির দিকে লক্ষ্য করুন,

  (ক) ৫০, ৪০, ৭০, ৮০, ৯০
  (খ) ৭০, ৭০, ৪০, ৭৫, ৯০
  (গ) ৪০, ৮০, ৯০, ৯০, ৯০

  উপরের তিনটি তথ্য সারিরই পরিসর সমান এবং তা হচ্ছে (৯০-৪০) ৫০। কিন্তু তথ্য সারি তিনটি এক রকম নয়। কিন্তু পরিসর এর কোন ব্যাখ্যা প্রদান করতে পারে না।

- তথ্য সারিতে অস্বাভাবিক বড় বা ছোট রাশি থাকলে পরিসর প্রভাবিত হয়।

পরিসরের ব্যবহার

বিস্তার নির্ণয়ে পরিসরের সীমাবদ্ধতা থাকা সত্ত্বেও পরিসর নিচে বর্ণিত বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়ে থাকে,

- শেয়ার বাজারের উন্নতি বা অবনতি পরিমাপে এর ব্যবহার রয়েছে। শেয়ার বাজার ছাড়া অন্যান্য পণ্যেরও হ্রাস বৃদ্ধির সর্বাধিক পার্থক্যের গতি প্রকৃতি নির্ণয় এবং বাণিজ্যিক সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে পরিসর প্রয়োজনীয়।
- পণ্যের উৎপাদনের ক্ষেত্রে পণ্যের মান নিয়ন্ত্রণ অত্যাবশ্যক। সেজন্য নির্ধারিত মানের হ্রাস-বৃদ্ধি জানার জন্য পরিসর ব্যবহৃত হয়।
- আবহাওয়ার পূর্বাভাস দেয়ার সময় তাপমাত্রা ও বাতাসে জলবায়ুর শতকরা হার নির্ণয়ে পরিসর ব্যবহৃত হয়।
- দৈনিক পণ্য দ্রব্যের মূল্যের হ্রাস বৃদ্ধির রিপোর্টিং এ পরিসরের ব্যবহার রয়েছে।

গড় ব্যবধান

তথ্যসারির কেন্দ্রীয় মা
থেকে রাশিগুলোর অন
পার্থক্য বা বিচ্যুতির গ
গড় ব্যবধান বলে।

বিস্তারের অন্য একটি পরিমাপক হচ্ছে গড় ব্যবধান। এটি একটি অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপক। গড় ব্যবধান হলো তথ্য সারির কেন্দ্রীয় মান থেকে রাশিগুলির অনপেক্ষ বিচ্যুতির গড়। কেন্দ্রীয়মান, যোজিত গড়, মধ্যমা বা মোডের যে কোন একটি হতে পারে। অধিকাংশ ক্ষেত্রে যোজিত গড় থেকেই গড় ব্যবধান নির্ণয় করা হয়। যোজিত গড়ের ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করতে হলে, প্রথমে যোজিত গড় থেকে তথ্য সারির প্রতিটি রাশির চিহ্নমুক্ত (যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন বিহীন) পার্থক্য (Absolute Difference) নির্ণয় করতে হয় এবং মোট পার্থক্য বা ব্যবধানকে রাশিগুলির সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে গড় ব্যবধান বের করা হয়। অবিন্যস্ত তথ্য হতে যোজিত গড়ের ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র হচ্ছে,

গড় ব্যবধান (Mean Deviation) $MD = \frac{\sum|x-\bar{x}|}{n}$

যেখানে, $\bar{x}$ = যোজিত গড়

x = প্রতি সংখ্যার মান

n = তথ্যের সংখ্যা

$|x-\bar{x}|$ = যোজিত গড় থেকে প্রতিটি রাশির চিহ্নমুক্ত অনপেক্ষ ব্যবধান

উদাহরণ - ৩ ঃ নিচে ৫ জন ছাত্রের নম্বর দেয়া হলো,
৬০, ৬২, ৬১, ৫৯, ৫৮ এদের গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ নম্বর সারিটি ক্রম অনুসারে সাজালে বিষয়টি দাঁড়ায় ৫৮, ৫৯, ৬০, ৬১, ৬২। এদের

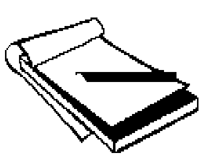
গড় $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ $\quad \therefore \bar{x} = \frac{৩০০}{৫} = ৬০$

এখন আপনাকে যোজিত গড়ের ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয়ের একটি সারণী প্রস্তুত করতে হবে। সারণীটি হবে নিম্নরূপ,

নম্বর x	$x - \bar{x}$	চিহ্ন অনপেক্ষ ব্যবধান $\lvert x-\bar{x}\rvert$
৫৮	-২	২
৫৯	-১	১
৬০	০	০
৬১	১	১
৬২	২	২
		৬

$\sum|x-\bar{x}| = ৬$

সূতরাং গড় ব্যবধান (Mean Deviation) = $MD = \frac{\sum|x-\bar{x}|}{n} = \frac{৬}{৫} = ১.২০$



অনুশীলন
প্রথম ১০টি ক্রমিক সংখ্যার গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয়

গণসংখ্যা নিবেশনটির গড় থেকে প্রতিটি শ্রেণীর মধ্যবিন্দুগুলির চিহ্নমুক্ত বিচ্যুতিকে সেই শ্রেণীর গণসংখ্যা দিয়ে গুণ করে গুণফল গুলির সমষ্টিকে মোট গণসংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে গড় ব্যবধান বের হয়।

গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করতে হলে প্রথমে নিবেশনটির গড় প্রচলিত পদ্ধতিতে বের করতে হয়। তারপর গড় থেকে প্রতিটি শ্রেণীর মধ্যবিন্দুগুলির চিহ্নমুক্ত বিচ্যুতি নির্ণয় করতে হয়। মোট বিচ্যুতি পাওয়ার জন্য প্রতি শ্রেণীর বিচ্যুতিকে সেই শ্রেনীর গণসংখ্যা দিয়ে গুণ করে গুণফলগুলি যোগ করতে হয়। গুণফল গুলির সমষ্টিকে মোট গণসংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে গড় ব্যবধান বের হয়। গণসংখ্যা নিবেশন থেকে যোজিত গড়ের ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্রটি হচ্ছে,

গড় ব্যবধান (Mean Deviation) MD = $\frac{\sum f|x-\bar{x}|}{n}$

যেখানে, x = শ্রেণীর মধ্যমান
f = শ্রেণীর গণসংখ্যা
$\bar{x}$ = যোজিত গড়
n = $\sum f$ = মোট গণসংখ্যা
$|x-\bar{x}|$ = যোজিত গড় থেকে মধ্যমানগুলির চিহ্নমুক্ত বিচ্যুতি

আসুন উদাহরণের মাধ্যমে জেনে নেই কীভাবে গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ-৪ ঃ নিচের গণসংখ্যা নিবেশনে কিছু সংখ্যক শ্রমিকের নৈপুণ্য স্কোর (Efficiency Score) দেয়া হলো। যোজিত গড়ের ভিত্তিতে এদের গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

নৈপুন্য স্কোর (Efficiency Score)	শ্রমিকের সংখ্যা f
৪০ - ৫০	১০
৫০ - ৬০	২০
৬০ - ৭০	৪০
৭০ - ৮০	২০
৮০ - ৯০	১০

সমাধান ঃ যোজিতগড়ের ভিত্তিতে শ্রমিকদের নৈপুণ্য স্কোরের গড় ব্যবধান নির্ণয় —

নৈপুন্য স্কোর	f	মধ্যবিন্দু x	fx	x - $\bar{x}$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
৪০ - ৫০	১০	৪৫	৪৫০	-২০	২০	২০০
৫০ - ৬০	২০	৫৫	১,১০০	-১০	১০	২০০
৬০ - ৭০	৪০	৬৫	২,৬০০	০	০	০
৭০ - ৮০	২০	৭৫	১,৫০০	১০	১০	২০০
৮০ - ৯০	১০	৮৫	৮৫০	২০	২০	২০০
মোট =	১০০		৬,৫০০			৮০০

$\sum f x =$ ৬,৫০০

$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{৬,৫০০}{১০০} =$ ৬৫

$\sum f|x - \bar{x}| =$ ৮০০

$\therefore$ গড় ব্যবধান = $\frac{\sum f|x-\bar{x}|}{n} = \frac{৮০০}{১০০} =$ ৮

মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয়

কোন কোন ক্ষেত্রে মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করা হয়ে থাকে। গড় ব্যবধানের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম (Important Property of Mean Deviation) হচ্ছে এই যে, মধ্যমার মানের

ভিত্তিতে যখন গড় ব্যবধান নির্ণয় করা হয়, তখন তা অন্য যে কোন সংখ্যামানের ভিত্তিতে নির্ণীত গড় ব্যবধান থেকে কম বা সমান হয়। অবিন্যস্ত তথ্য থেকে মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র হলো,

$$\text{গড় ব্যবধান} = \frac{\sum|x - \text{মধ্যমা}|}{n}$$

যেখানে, x = প্রতিটি রাশি
n = রাশির সংখ্যা

$|x - \text{মধ্যমা}|$ = মধ্যমা থেকে প্রতিটি রাশির চিহ্নমুক্ত বিচ্যুতি বা পার্থক্য।

এটি হলো অবিন্যস্ত সংখ্যারাশি থেকে মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র। তাহলে আপনি নিশ্চয়ই জানতে চান, গণসংখ্যার বিন্যাস থেকে মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র কী? গণসংখ্যা বিন্যাস থেকে মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র হলো,

$$\text{গড় ব্যবধান} = \frac{\sum f|x - \text{মধ্যমা}|}{n}$$

যেখানে, f = শ্রেণীর গণসংখ্যা
x = শ্রেণীর মধ্যবিন্দু
n = মোট গণসংখ্যা
$|x\text{-মধ্যমা}|$ = মধ্যমা থেকে প্রত্যেক শ্রেণীর মধ্যবিন্দুর অনপেক্ষ পার্থক্য বা বিচ্যুতি।

উদাহরণ-৫: ঃ নিচের গণসংখ্যা নিবেশনে কিছু সংখ্যক শ্রমিকের নৈপুণ্য স্কোর (Efficiency Score) দেয়া হলো।

নৈপুন্য স্কোর (Efficiency Score)	f
৪০ - ৫০	১০
৫০ - ৬০	২০
৬০ - ৭০	৪০
৭০ - ৮০	২০
৮০ - ৯০	১০

গণসংখ্যা নিবেশন থেকে মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নিরূপণ করুণ।

সমাধান ঃ প্রথমে নিবেশনটির মধ্যমা নির্ণয় করতে হবে। এর মধ্যমা হলো,

নৈপুন্য স্কোর	গণসংখ্যা	সংযোজিত গণসংখ্যা
৪০ - ৫০	১০	১০
৫০ - ৬০	২০	১০+২০ = ৩০
৬০ - ৭০	**৪০**	**৩০+৪০ = ৭০**
৭০ - ৮০	২০	৭০+২০ = ৯০
৮০ - ৯০	১০	৯০+১০ = ১০০

অর্থাৎ, এখানে মোট গণসংখ্যা = ১০০। সুতরাং মধ্যমা শ্রেণীর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য যা করতে হবে তা হলো,

$\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$; সুতরাং মধ্যমা শ্রেণীটি হচ্ছে সেই শ্রেণী যার সংযোজিত গণসংখ্যা ৫০ বা এর চেয়ে বেশী। সুতরাং এই নিবেশনের মধ্যমা শ্রেণীটি হচ্ছে (৬০-৭০)।

$$\text{সুতরাং, মধ্যমা} = L_{১} + \frac{\frac{n}{২} - f_c}{f_m} \times C$$

f_c = মধ্যমা শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা

f_m = মধ্যমা শ্রেণীর গণসংখ্যা

$$= ৬০ + \frac{৫০ - ৩০}{৪০} \times ১০$$

$$= ৬০ + ৫ = ৬৫$$

এখন আপনাকে এই মধ্যমার ভিত্তিতে গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করতে হবে।

গণসংখ্যা নিবেশনের মধ্যমার ভিত্তির গড় ব্যবধান নির্ণয় —

নৈপুন্য স্কোর	গণসংখ্যা f	মধ্যমান x	x- মধ্যমা	|x- মধ্যমা|	f |x -মধ্যমা|
৪০ - ৫০	১০	৪৫	-২০	২০	২০০
৫০ - ৬০	২০	৫৫	-১০	১০	২০০
৬০ - ৭০	৪০	৬৫	০	০	০
৭০ - ৮০	২০	৭৫	১০	১০	২০০
৮০ - ৯০	১০	৮৫	২০	২০	২০০
	১০০				৮০০

$\therefore \sum f \left| x \text{ -মধ্যমা} \right| = ৮০০$

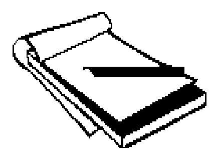
$$\text{মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধান} = \frac{\sum f \left| x - \text{মধ্যমা} \right|}{n}$$

$$= \frac{৮০০}{১০০} = ৮$$

অনুশীলন

নিচের গণসংখ্যা নিবেশন হতে যোজিত গড়ের সাহায্যে এবং মধ্যমার সাহায্যে গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন এবং ফলাফলের উপর মন্তব্য করুন।

উচ্চতা (ইঞ্চি)	৪৮ - ৫২	৫২ - ৫৬	৫৬ - ৬০	৬০ - ৬৪	৬৪ - ৬৮
ছাত্রসংখ্যা	৫	৮	১২	৭	৩



গড় ব্যবধানের সুবিধা-অসুবিধা

সুবিধা

- গড় ব্যবধান সহজ বোধ্য।
- এর মান নির্ণয়ে রাশিতথ্যমালার প্রত্যেকটি রাশি ব্যবহৃত হয়।
- এর মান প্রান্তীয় রাশিসমূহ দ্বারা খুব বেশী প্রভাবিত হয় না ।
- যে কোন গড়ের ভিত্তিতে গড় ব্যবধানের মান নির্ণয় করা যায়, তবে মধ্যমার ভিত্তিতে নির্ণীত মানটি হয় ক্ষুদ্রতম।

অসুবিধা

- গড় থেকে প্রত্যেক রাশির পার্থক্য নিরুপনের সময় অনপেক্ষ পার্থক্য নেয়া হয় বিধায় ঋণাত্মক চিহ্ন উপেক্ষিত হয়। সেই জন্য গড় ব্যবধান নির্ণয়ে গাণিতিক সূত্রাবলীর সহজ প্রয়োগ সম্ভব হয় না।
- সীমাবিহীন শ্রেণীব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে গড় ব্যবধান নির্ণয় করা যায় না।

- তথ্যসারির সকল সংখ্যা জানা না থাকলে গড় ব্যবধান নির্ণয় করা যায় না।

সারাংশ

এই পাঠে পরিসংখ্যান তথ্যসারির সংজ্ঞা, তথ্য বিশ্লেষণে বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা ও গুরুত্ব, একটি যথাযর্থ বিস্তার পরিমাপকের বাঞ্ছনীয় গুণাবলী এবং দুইটি অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপক যেমন, পরিসর ও গড় ব্যবধান উদাহরণসহ আলোচনা করা হয়েছে। এই পাঠ পড়ে আপনি পরিসংখ্যান তথ্যরাশি ব্যবহার করে বিভিন্ন প্রকারের তথ্যমালা থেকে পরিসর ও গড় ব্যবধান নিরূপন করতে পারবেন।

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. বিস্তার পরিমাপ বলতে কী বুঝায়? সংক্ষেপে বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা ও গুরুত্ব আলোচনা করুন।

২. পরিসর কাকে বলে? পরিসরের সুবিধা ও অসুবিধা উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।

নিচে তিনটি তথ্যসারি দেয়া হলো। এদের পরিসর বের করে তথ্যসারি গুলির বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে আলোকপাত করুন।

তথ্য সারি 'ক'	৭৬ ২৬ ৫০ ৩০ ৬১ ৭৬ ৭৬ ৭৬
তথ্য সারি 'খ'	১৬ ৪৯ ৪৮ ১৮ ২০ ৭৬ ৩০ ২১
তথ্য সারি 'গ'	২৫ ২৩ ১৬ ৬৬ ৭৬ ২৯ ৫৯ ৬০

৩. পরিসরের সীমাবদ্ধতা উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।

নিচে গণসংখ্যা নিবেশনে পঁচিশ জন শ্রমিকের কাজের সময় সীমা দেয়া হলো,

কাজের সময় সীমা (বৎসর)	শ্রমিকের সংখ্যা
০ - ৫	২
৫ - ১০	৫
১০ - ১৫	৯
১৫ - ২০	৮
২০ - ২৫	১

নিবেশনটির পরিসর নির্ণয় করুন।

৪. গড় ব্যবধান কাকে বলে? এটি কী কাজে লাগে? বিস্তার পরিমাপে এর সুবিধা ও অসুবিধা আলোচনা করুন।

নিচের তালিকায় কয়েকজন ছাত্রের উচ্চতা অনুসারে সাজিয়ে গণসংখ্যা নিবেশনে প্রকাশ করা হলো,

উচ্চতা (ইঞ্চি)	৫১ - ৫৩	৫৩ - ৫৫	৫৫ - ৫৭	৫৭ - ৫৯	৫৯ - ৬১	৬১ - ৬৩
ছাত্রদের সংখ্যা	২	৭	২৪	২৮	১২	৬

এদের যোজিত গড়ের ভিত্তিতে উচ্চতার গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

৫. অনপেক্ষ ও আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপক গুলি কী? অনপেক্ষ ও আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপকের পার্থক্য উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।

নিচের গণসংখ্যা নিবেশন থেকে মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

দৈনিক মজুরী (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা
১০০ - ১১০	৫
১১০ - ১২০	৮
১২০ - ১৩০	৭
১৩০ - ১৪০	১২
১৪০ - ১৫০	২৮
১৫০ - ১৬০	২০
১৬০ - ১৭০	১০
১৭০ - ১৮০	৯

পাঠ-২ : পরিমিত ব্যবধান (*Standard Deviation*)

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- পরিমিত ব্যবধান কী তা বলতে পারবেন
- ভেদাংক-এর সংজ্ঞার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন
- অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক নির্ণয় করতে পারবেন
- গণসংখ্যা নিবেশন থেকে সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক নির্ণয় করতে পারবেন
- সম্মিলিত তথ্যসারির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করতে পারবেন
- পরিমিত ব্যবধানের সুবিধা ও সীমাবদ্ধতা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

পরিমিত ব্যবধান কী

ইউনিট-৪, পাঠ-১ এ আপনি বিস্তার পরিমাপকের পরিসর ও গড় ব্যবধান শিখেছেন। আপনার নিশ্চয়ই মনে আছে গড় ব্যবধান নির্ণয় করার জন্য তথ্যসারির মধ্যবিন্দু থেকে প্রতিটি রাশির বিচ্যুতির সমষ্টি জানার দরকার হয়। কিন্তু এই গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সময় ইচ্ছাকৃতভাবে বিচ্যুতির চিহ্নগুলি অগ্রাহ্য করে বিচ্যুতির অনপেক্ষ সমষ্টি নেয়া হয়। এইজন্য এটি পরবর্তী গাণিতিক প্রক্রিয়ার জন্য অপ্রয়োজনীয় হয়ে পড়ে। এবার আসুন আমরা এমন একটি বিস্তার পরিমাপকের বিষয় আলোচনা করি যা এই দোষ ত্রুটি থেকে গাণিতিকভাবে মুক্ত। পরিমিত ব্যবধান হচ্ছে তেমনি এক প্রকার বিস্তার পরিমাপক।

গাণিতিক ত্রুটি মুক্ত বিধায় পরিমিত ব্যবধান বিস্তার পরিমাপকগুলির মধ্যে সর্বাধিক গুরুত্বপূর্ণ ও বহুল ব্যবহৃত পরিমাপক। যোজিত গড় থেকে কোন নিবেশনের রাশিগুলির পার্থক্যের বর্গের সমষ্টিকে রাশিগুলির সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে যে ভাগ ফল পাওয়া যায়, তার বর্গমূলকে ঐ নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান বলা হয়। পরিমিত ব্যবধান পরিমাপকে গ্রীক অক্ষর σ (সিগ্‌মা) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। **পরিমিত ব্যবধানের বর্গকে বলা হয় ভেদাংক (Variance)। সাধারণত ভেদাংককে σ^2 (সিগ্‌মা স্কোয়ার) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।**

> তথ্যমালার রাশিগুলোর পার্থক্যের বর্গের সমষ্টি রাশির মোট সংখ্যা দি ভাগ করে যে ভাগফল পাওয়া যায় তার বর্গমূ নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান।

একটি যথার্থ বিস্তার পরিমাপকের যে সমস্ত গুণাবলী থাকা প্রয়োজন তার অধিকাংশই পরিমিত ব্যবধানের মধ্যে বর্তমান রয়েছে। পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সব সময়ই যোজিত গড়ের ব্যবহার করা হয়। **যোজিত গড়ের একটি বৈশিষ্ট্য হলো, তথ্য সারির সংখ্যামান গুলির যোজিত গড় থেকে বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টি সব চেয়ে কম।** যোজিত গড়ের এই বৈশিষ্ট্য পরিমিত ব্যবধানের ক্ষেত্রে এর ব্যবহারের উপযোগিতা বাড়িয়ে দেয়, **পরিমিত ব্যবধানকে মূল গড় বর্গকৃত ব্যবধানও (root mean squared deviation) বলা হয়।** এটি বিন্যাসের অনপেক্ষ বিস্তারের পরিমাপক। বিন্যাসের সকল রাশি একই হলে পরিমিত ব্যবধানের মান শূন্য হবে। পরিমিত ব্যবধানের মান যত বড় হবে নিবেশনের মধ্যে তথ্যের অসমতা বা বিস্তার অধিক হবে। পরিমিত ব্যবধানের কম মান নিবেশনের তথ্য রাশির সমতার (Uniformity) নির্দেশক। দুই বা ততোধিক তথ্য সারির গড় সমান বা কাছাকাছি হলে যে সারির পরিমিত ব্যবধান কম, সেটির গড় তথ্য সারির রাশিগুলির অধিক প্রতিনিধিত্বশীল। সে জন্য গড় দ্বারা তথ্য নিবেশনের রাশিগুলির প্রতিনিধিত্ব যাচাইয়ের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধানের ব্যবহার গুরুত্বপূর্ণ। অনেক ক্ষেত্রে এজন্য বিস্তার পরিমাপের জন্য এটি উত্তম পরিমাপক। তাহলে আলোচনা থেকে আপনি জানতে পারছেন যে,

> দুই বা ততোধিক তথ্য সারির গড় সমান বা কাছাকাছি হলে যে সারি পরিমিত ব্যবধান কম, সেটির গড় তথ্য সারির রাশিগুলির অধিক প্রতিনিধিত্বশীল।

- পরিমিত ব্যবধানকে মূল গড় বর্গকৃত ব্যবধানও বলে
- এটি বিন্যাসের অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপক
- বিন্যাসের সকল মান সমান হলে পরিমিত ব্যবধান শূন্য হয়
- পরিমিত ব্যবধানের মান যত বড় হবে নিবেশনের মধ্যে তথ্যের বিস্তার বা অসমতা তত বেশী হবে এবং পরিমিত ব্যবধান যত কম হবে নিবেশনের মধ্যে তথ্যের বিস্তার তত কম হবে।

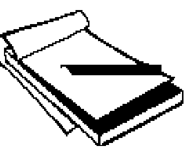
গড় ব্যবধান এবং পরিমিত ব্যবধানের মধ্যে পার্থক্য

ব্যবধান এবং পরিমিত
ান উভয় বিস্তার
াপকই নিবেশনের
 রাশির উপর নির্ভর
 নির্ণয় করা হয়।

গড় ব্যবধান এবং পরিমিত ব্যবধান উভয় বিস্তার পরিমাপকই নিবেশনের সকল রাশির উপর নির্ভর করে নির্ণয় করা হয়। আপনার মনে প্রশ্ন আসা স্বাভাবিক যে, তবে এদের মধ্যে মূল পার্থক্যগুলো কী কী? এই পার্থক্যগুলো হলো,

- গড় ব্যবধান নির্ণয় কালে কেন্দ্র বিন্দু থেকে নিবেশনের প্রতিটি রাশির বিচ্যুতির চিহ্ন (যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন) অগ্রাহ্য করা হয়। কিন্তু পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের জন্য তা করা হয় না।
- গড় ব্যবধান যোজিত গড় অথবা মধ্যমার উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়। কিন্তু পরিমিত ব্যবধান সর্বদাই শুধু যোজিত গড়ের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়।
- গড় ব্যবধান পরবর্তী গাণিতিক প্রক্রিয়ায় ব্যবহার করা চলে না, কিন্তু পরিমিত ব্যবধান পরবর্তী গাণিতিক প্রক্রিয়ায় ব্যবহার করা সম্ভব।

তাহলে আপনি নিশ্চয়ই এখন বুঝতে পারছেন যে, পরিমিত ব্যবধান ও গড় ব্যবধানের মধ্যে পার্থক্য কোথায়।



অনুশীলন

নিচে কোন ক্ষেত্রে গড় তথ্য সারির রাশিগুলির অধিক প্রতিনিধিত্বশীল বলে আপনি মনে করেন? কেন?

ক লিঃ — কর্মচারীদের গড় আয় ২,৫০০ টাকা, পরিমিত ব্যবধান ৫০০

খ লিঃ — কর্মচারীদের গড় আয় ৪,০০০ টাকা, পরিমিত ব্যবধান ৯০০

গ লিঃ — কর্মচারীদের গড় আয় ১,৫০০ টাকা, পরিমিত ব্যবধান ২০০

অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়

আসুন এখন বিভিন্ন প্রক্রিয়ায় পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় পদ্ধতি জেনে নেই।

মিত ব্যবধান সরাসরি
ংক্ষিপ্ত এই উভয়
তিতেই নিরূপণ করা

পরিমিত ব্যবধান সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত এই উভয় পদ্ধতিতেই নিরূপণ করা চলে। সরাসরি পদ্ধতিতে এটি নিরূপণের ধাপগুলো হলো,

- প্রথমে, তথ্যসারির যোজিত গড় নির্ণয় করুন।
- দ্বিতীয়ত, গড় থেকে প্রতিটি রাশির বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।
- তৃতীয়ত, বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টিকে রাশির মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করুন। এভাবে প্রাপ্ত সংখ্যাকে নিবেশনের ভেদাংক (Variance) বলে।

এই পদ্ধতিতে প্রাপ্ত ভাগফলের বর্গমূল নির্ণয় করলে আপনি পরিমিত ব্যবধান মানটি পাবেন। এই পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধানের সূত্র হলো,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$$

যেখানে, σ = পরিমিত ব্যবধান

x = রাশি বা সংখ্যামান

$\bar{x}$ = যোজিত গড়

n = তথ্যের মোট সংখ্যা

এবার উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টিকে সহজ করে বুঝে নেয়া যাক।

উদাহরণ-১ ঃ নিচে পাঁচজন কর্মকর্তার মাসিক আয় (হাজার টাকা) দেয়া হলো,

৬, ৭, ৮, ৯, ১০

তাদের আয়ের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রথমেই আপনাকে প্রচলিত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করতে হবে।

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{৪০}{৫} = ৮$ হাজার টাকা, (৬+৭+৮+৯+১০ = ৪০)

এখন ঐ কর্মকর্তাদের মাসিক আয়ের পরিমিত ব্যবধান হবে,

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
৬	-২	৪
৭	-১	১
৮	০	০
৯	১	১
১০	২	৪
	= ১০	$\sum(x - \bar{x})^2$ = ১০

সুতরাং, পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{১০}{৫}} = \sqrt{২}$

= ১.৪১৪২ = ১.৪১ হাজার টাকা (প্রায়)

এটি গেল সরাসরি পদ্ধতিতে অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় প্রক্রিয়া। এখন আসুন দেখা যাক, একই উপাত্ত থেকে কীভাবে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় সম্ভব হয়।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিটি পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের একটি সহজ পদ্ধতি। এ ক্ষেত্রে যোজিত গড়ের পরিবর্তে একটি অনুমিত যোজিত গড় ধরা হয়। এবং সেই কল্পিত গড় থেকে প্রতিটি সংখ্যামানের বিচ্যুতি নির্ণয় করা হয়। কল্পিত গড় যতদূর সম্ভব সঠিকতার সহিত ধরা হয়। অবিন্যস্ত তথ্যের ক্ষেত্রে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ে নিম্নলিখিত সূত্র ব্যবহার করা হয়,

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে যে
গড়ের পরিবর্তে একটি
অনুমিত গড় থেকে প্র
সংখ্যা মানের বিচ্যুতি
সাহায্যে পরিমিত ব্যব
নির্ণয় করা হয়।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X-A)^২}{n} - \left\{\frac{\sum(X-A)}{n}\right\}^২}$$

যেখানে, σ = পরিমিত ব্যবধান
A = কল্পিত গড়
X = সংখ্যামান
n = তথ্যের মোট সংখ্যা

উদাহরণ -২ ঃ পাঁচজন ছাত্রের নম্বর নিচের তথ্য সারিতে দেয়া হলো,
৭০, ৫০, ৩৫, ৪৫, ৬০
সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ প্রথমে তথ্যটিকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাতে হবে। মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজালে তথ্যটি দাঁড়ায় ৩৫, ৪৫, ৫০, ৬০, ৭০ (সব সময়ই যে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাতে হবে, এমন কথা নেই)।

মনে করি, কল্পিত গড় = ৫০
সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করতে হলে এরকম একটি টেবিল ব্যবহার করুন,

X	X-A	$(X-A)^2$
৩৫	-১৫	২২৫
৪৫	-৫	২৫
৫০	০	০
৬০	১০	১০০
৭০	২০	৪০০

	$\Sigma(X-A)$ = ১০	$\Sigma(X-A)^2$ =৭৫০

এখানে $\Sigma(X-A)$ = ১০, $\Sigma(X-A)^2$ = ৭৫০

সুতরাং $$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(X-A)^2}{n}-\left\{\frac{\Sigma(X-A)}{n}\right\}^2}$$

$$=\sqrt{\frac{৭৫০}{৫}-\left(\frac{১০}{৫}\right)^২} = \sqrt{১৫০-৪} = \sqrt{১৪৬} = ১২.০৮$$

উদাহরণ-৩ ঃ নিচে দশটি পরিবারের মাসিক আয় (হাজার টাকা) উল্লেখ করা হলো,

৩, ৬, ৯, ১১, ১২, ১৩, ১৪, ১৮, ১৯, ২৪

পরিবারগুলির আয়ের ভেদাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনেকরি, এই তথ্যসারির কল্পিত গড়, ১২ হাজার টাকা

সুতরাং A =১২

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে ভেদাংক নির্ণয় পদ্ধতি —

X	X-A	$(X-A)^2$
৩	-৯	৮১
৬	-৬	৩৬
৯	-৩	৯
১১	-১	১
১২	০	০
১৩	১	১
১৪	২	৪
১৮	৬	৩৬
১৯	৭	৪৯
২৪	১২	১৪৪
	$\Sigma(X-A)$ = ৯	$\Sigma(X-A)^2$ = ৩৬১

এখানে $\Sigma(X-A)$ = ৯ এবং $\Sigma(X-A)^2$ = ৩৬১

সুতরাং, ভেদাংক $=\sigma^২ = \frac{\Sigma(X-A)^২}{n}-\left\{\frac{\Sigma(X-A)}{n}\right\}^২$

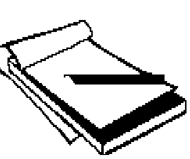
$= \frac{৩৬১}{১০}-\left(\frac{৯}{১০}\right)^২$

= ৩৬.১ - $(০.৯)^2$

= ৩৬.১ - ০.৮১

= ৩৫.২৯ হাজার টাকা।

অর্থাৎ, ঐ পরিবারের আয়ের ভেদাঙ্ক = $\sigma^২$ = ৩৫.২৯ হাজার টাকা।



অনুশীলন

প্রথম ১০টি ক্রমিক সংখ্যার সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন এবং ফলাফলের উপর মন্তব্য করুন।

গণসংখ্যা নিবেশন থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়

গণসংখ্যা নিবেশন থেকে পরিমিত ব্যবধান সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত উভয় পদ্ধতিতেই নির্ণয় করা সম্ভব। এখন এই দুইটি পদ্ধতি নিয়েই আলোচনা করা হবে।

গণসংখ্যা নিবেশন থে
পরিমিত ব্যবধান সরাস
ও সংক্ষিপ্ত উভয়
পদ্ধতিতেই নির্ণয় করা

সরাসরি পদ্ধতি

গণসংখ্যা নিবেশন থেকে সরাসরি পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত পদক্ষেপগুলোর প্রয়োজন হয়,

- গণসংখ্যা নিবেশনে মূল তথ্য থাকে না বিধায় প্রতিটি শ্রেণীর মধ্যবিন্দুকে ঐ শ্রেণীর প্রতিনিধি ধরা হয় এবং প্রথমে তা' নির্ণয় করা হয়।
- প্রচলিত পদ্ধতিতে যোজিত গড় নির্ণয় করা হয়।
- গড় থেকে শ্রেণী মধ্যমানের বিচ্যুতি নির্ণয় করে বিচ্যুতিগুলির বর্গ করা হয়।
- প্রতিশ্রেণীর বর্গকৃত বিচ্যুতিকে সেই শ্রেণীর গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করা হয়।
- প্রাপ্ত ফলাফলকে মোট গণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করে ভাগফলকে বর্গমূল করলে পরিমিত ব্যবধান পাওয়া যায়

একটি গণসংখ্যা নিবেশন থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্রটি নিম্নরূপ,

পরিমিত ব্যবধান $$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(X-\bar{x})^2}{n}}$$

যেখানে, x = শ্রেণীর মধ্যমান
f = শ্রেণীর গণসংখ্যা
$\bar{x}$ = যোজিত গড়
n = মোট গণসংখ্যা
$(x-\bar{x})^2$ = গড় থেকে মধ্যমানের বিচ্যুতির বর্গ

তাহলে আপনি সরাসরি পদ্ধতিতে গণসংখ্যা নিবেশন থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের পদক্ষেপ ও সূত্রটি জানলেন। এখন আসুন সূত্রটি ও পদক্ষেপগুলো ব্যবহার করে বিষয়টি আরও সহজ করে নেই।

উদাহরণ -৪ ঃ কোন কারখানার কর্মকর্তাদের কাজের সময়কাল অনুসারে শ্রেণী বিভক্ত করে নিচের গণসংখ্যার সারণীতে দেখানো হলো,

কাজের সময়কাল বৎসর	কর্মকর্তার সংখ্যা
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১

সরাসরি পদ্ধতিতে নিবেশনটির পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ সরাসরি পদ্ধতিতে গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক নির্ণয় প্রক্রিয়া

শ্রেণীসীমা	f	শ্রেণী মধ্যমান x	f x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
০ - ৫	১	২.৫	২.৫	-১০	১০০	১০০
৫ - ১০	২	৭.৫	১৫.০	-৫	২৫	৫০
১০ - ১৫	৪	১২.৫	৫০.০	০	০	০

১৫ - ২০	২	১৭.৫	৩৫.০	৫	২৫	৫০
২০ - ২৫	১	২২.৫	২২.৫	১০	১০০	১০০
	১০		১২৫			৩০০

অর্থাৎ, $n = ১০$, $\sum f\,x = ১২৫$, $\sum f(x-\bar{x})^2 = ৩০০$

এখন, যোজিত গড় $\bar{X} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{১২৫}{১০}$ = ১২.৫ বৎসর

ভেদাংক, $\sigma^2 = \frac{\Sigma f\left(x-\bar{x}\right)^২}{n}$

$= \frac{৩০০}{১০} = ৩০$

সুতরাং, পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^২}{n}}$

$= \sqrt{\frac{৩০০}{১০}} = \sqrt{৩০}$

= ৫.৪৭৭ = ৫.৪৮ বৎসর (প্রায়)

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গণসংখ্যা নিবেশন থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়

এই পদ্ধতিতে কল্পিত গড়ের ভিত্তিতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করা হয়। এ অবস্থায় সাধারণত নিবেশনের মধ্যস্থানীয় মধ্যমান দুইটি থাকলে যে কোন একটিকে অনুমিত গড় ধরা যেতে পারে। সম-শ্রেণীব্যাপ্তি বিশিষ্ট গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র নিম্নরূপ,

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^২}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^২} \times C$

যেখানে, C = শ্রেণীব্যাপ্তি

f = শ্রেণী গণসংখ্যা

d = $\frac{x-A}{c}$ = স্তর বিচ্যুতি

x = শ্রেণীর মধ্যমান

A = অনুমিত বা কল্পিত গড়

n = মোট গণসংখ্যা

উদাহরণ -৫ ঃ কোন কারখানার কর্মকর্তাদের কাজের সময়কাল অনুসারে শ্রেণী বিভক্ত করে নিচের গণসংখ্যা সারণীতে দেখানো হলো,

কাজের সময়কাল (বৎসর)	কর্মকর্তার সংখ্যা
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২

২০ - ২৫	১

নিবেশনটির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে সম-শ্রেণী ব্যাপ্তি বিশিষ্ট গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়,

শ্রেণী	গণসংখ্যা f	মধ্যবিন্দু	স্তর ব্যবধান $d=\frac{X-A}{C}$	fd	fd^2
০ - ৫	১	২.৫	-২	-২	৪
৫ - ১০	২	৭.৫	-১	-২	২
১০ - ১৫	৪	১২.৫	০	০	০
১৫ - ২০	২	১৭.৫	১	২	২
২০ - ২৫	১	২২.৫	২	২	৪
	$\sum f=$ ১০			$\sum fd=$ ০	$\sum fd^2=$ ১২

মনে করি, অনুমিত গড় A = ১২.৫

শ্রেণী ব্যাপ্তি C = ৫

সুতরাং, পরিমিত ব্যবধান $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^{২}}{n}-\left(\frac{\sum fd}{n}\right)^{২}} \times C$$

$$= \sqrt{\frac{১২}{১০}-\left(\frac{০}{৫}\right)^{২}} \times ৫$$

$$= \sqrt{১.২-০} \times ৫ = \sqrt{১.২} \times ৫$$

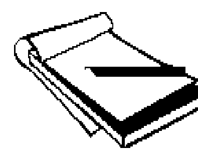
$$= ১.০৯৫ \times ৫ = ৫.৪৮$$ বৎসর (প্রায়)

তাহলে আপনি এতক্ষণ সমশ্রেণী ব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করতে শিখলেন। এখন আপনি জানতে পারবেন অসম শ্রেণীব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় প্রক্রিয়া।

অনুশীলন

নিচের তথ্যসারি হতে সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন —

জয়ের সংখ্যা	৪ - ৬	৬ - ৮	৮ - ১০	১০ - ১২	১২ - ২৪
ক্লাবের সংখ্যা	৩	৭	৮	৫	২



অসম শ্রেণীব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় -

অসম-শ্রেণীব্যাপ্তি থাকলে গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত সূত্রটির ব্যবহার করা হয়,

পরিমিত ব্যবধান $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(X-A)^{২}}{n}-\left(\frac{\sum f(x-A)}{n}\right)^{২}}$$

যেখানে, A = অনুমিত গড়

f = শ্রেণীর গণসংখ্যা

x = শ্রেণীর মধ্যমান

n = মোট গণসংখ্যা

উদাহরণ - ৬ ঃ বিশজন ছাত্রের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর নিচের নিবেশনে প্রদর্শিত হলো,

নম্বর	ছাত্রের সংখ্যা

০ - ৪০	২
৪০ - ৫০	৪
৫০ - ৬০	৮
৬০ - ৭০	৪
৭০ - ১০০	২

নিবেশনটির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ অসম-শ্রেণীব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়।

নম্বর	f	মধ্যমান X	X-A	f(X-A)	$f(X\text{-}A)^2$
০ - ৪০	২	২০	-৩৫	-৭০	২,৪৫০
৪০ - ৫০	৪	৪৫	-১০	-৪০	৪০০
৫০ - ৬০	৮	৫৫	০	০	০
৬০ - ৭০	৪	৬৫	১০	৪০	৪০০
৭০ - ১০০	২	৮৫	৩০	৬০	১,৮০০
মোট	২০			− ১০	৫,০৫০

মনেকরি, অনুমিত গড়, $A = ৫৫$

তালিকা অনুসারে $\Sigma f(x\text{-}A) = -১০$

$\Sigma f(x\text{-}A)^2 = ৫,০৫০$

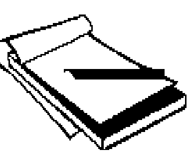
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(X-A)^২}{n} - \left(\frac{\sum f(x-A)}{n}\right)^২}$$

$$= \sqrt{\frac{৫,০৫০}{২০} - \left(\frac{-১০}{২০}\right)^২}$$

$$= \sqrt{২৫২.৫-(-০.৫)^২} = \sqrt{২৫২.৫-০.২৫}$$

$$= \sqrt{২৫২.২৫} = ১৫.৮৮$$

সুতরাং, পরিমিত ব্যবধান = ১৫.৮৮



অনুশীলন

২০ জন ছাত্রের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর বিশ্লেষণে নিচের তথ্য পাওয়া গেল ঃ

প্রাপ্ত নম্বর (শতকরা হার)	০ - ৪০	৪০ - ৬০	৬০ - ৭৫	৭৫ - ৯০	৯০ - ১০০
ছাত্র সংখ্যা	১	৪	৬	৫	৪

উক্ত নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন ও মন্তব্য করুন।

দুই বা ততোধিক সারির সম্মিলিত তথ্যের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়

কতকগুলি উপাত্ত
র গড়, তথ্যের সংখ্যা
পরিমিত ব্যবধান দেয়া
, তবে ঐ সব সারি
গঠিত সম্মিলিত
র পরিমিত ব্যবধান
া সম্ভব।

যদি কতকগুলি উপাত্ত সারির গড়, প্রতি সারির তথ্যের সংখ্যা এবং প্রতি সারির পরিমিত ব্যবধান দেয়া থাকে, তবে ঐ সব সারি নিয়ে গঠিত সম্মিলিত সারির পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় সম্ভব। মনে করুন, একটি শ্রেণীতে দুইটি শাখা আছে। প্রথম শাখায় n_1 সংখ্যক ছাত্র এবং তাদের গড় নম্বর $\bar{x}_1$ ও পরিমিত ব্যবধান σ_1। দ্বিতীয় শাখায় n_2 সংখ্যক ছাত্র ও তাদের নম্বরের গড় $\bar{x}_2$ এবং পরিমিত ব্যবধান σ_2। এই ক্ষেত্রে দুই শাখার মিলিত শ্রেণীর সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধান নিচের সূত্র অনুসারে দেখানো হলো,

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{n_১\sigma_১^{২} + n_২\sigma_২^{২} + n_১d_১^{২} + n_২d_২^{২}}{n_১ + n_২}}$$

যেখানে σ_c = সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধান

σ_1^2 = প্রথম শাখার ভেদাংক

σ_2^2 = দ্বিতীয় শাখার ভেদাংক

n_1 = প্রথম শাখার তথ্যসংখ্যা

n_2 = দ্বিতীয় শাখার তথ্যসংখ্যা

d_1 = $\bar{x}_১ - \bar{x}_c$

d_2 = $\bar{x}_২ - \bar{x}_c$

$$\bar{X}_c = \frac{n_১\bar{x}_১ + n_২\bar{x}_২}{n_১ + n_২}$$

$\bar{X}_c$ = সম্মিলিত গড়

উদাহরণ-৭ ঃ নিচের তালিকায় ছোট দুইটি কারখানার শ্রমিকদের মজুরী সম্পর্কিত তথ্য দেয়া হলো,

কারখানা	শ্রমিকের সংখ্যা	গড় মাসিক মজুরী	পরিমিত ব্যবধান
ক	১০	২,০০০	২৫
খ	১২	২,৩০০	২০

কারখানা দুটির কর্মচারীদের মজুরীর সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধান কত?

সমাধান ঃ

সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধান, $$\sigma_c = \sqrt{\frac{n_১\sigma_১^{২} + n_২\sigma_২^{২} + n_১d_১^{২} + n_২d_২^{২}}{n_১ + n_২}}$$

এখানে n_1 = ১০, n_2 = ১২,

$\bar{X}_1$ = ২,০০০, $\bar{X}_2$ = ২,৩০০, σ_1^2 = ৬২৫, σ_2^2 = ৪০০,

$$\bar{X}_c = \frac{n_১\bar{x}_১ + n_২\bar{x}_২}{n_১ + n_২} = \frac{১০ \times ২,০০০ + ১২ \times ২,৩০০}{১০ + ১২}$$

$$= \frac{২০,০০০ + ২৭,৬০০}{২২} = ২,১৬৩.৬৪$$

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_c$ = ২,০০০−২,১৬৩.৬৪ =−১৬৩.৬৪, $\therefore d_1^2$ =(−১৬৩.৬৪)২= ২৬,৭৭.০৫

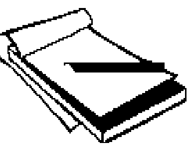
$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_c$ = ২৩০০ − ২১৬৩.৬৪ = ১৩৬.৩৬, $\therefore d_2^2$ =(−১৩৬.৩৬)২= ১৮,৫৯৪.০৫

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{(১০)(৬২৫) + (১২)(৪০০) + (১০)(২৬,৭৭৮.০৫) + ১২(১৮,৫৯৪.০৫)}{১০ + ১২}}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{৬,২৫০+৪,৮০০+২,৬৭,৭৮০.৫+২,২৩,১২৮.৬}{২২}}$$

$$= \sqrt{\frac{৫,০১,৯৫৯.১}{২২}} = \sqrt{২২,৮১৬.৩২২৭৩} = ১৫১.০৫ \text{ (প্রায়)}$$

সুতরাং সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধান ১৫১.০৫ টাকা (প্রায়)



অনুশীলন
তিনটি ক্লাশে ছাত্রসংখ্যা ভিন্ন হলেও যদি তাদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় ও পরিমিত ব্যবধান পরস্পরের সমান হয়, তবে তাদের সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধানও একই থাকবে কি? — কাল্পনিক তথ্য সহ পরীক্ষা করে দেখুন।

পরিমিত ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা

- গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সময় ইচ্ছাকৃতভাবে চিহ্ন অগ্রাহ্য করার জন্য যে অসুবিধার সম্মুখীন হতে হয়, পরিমিত ব্যবধান দ্বারা তা দূরীভূত হয়।
- নিবেশনের সকল রাশির উপর ভিত্তি করে এটি নির্ণীত হয়।
- এটি সঠিকভাবে সংজ্ঞায়িত এবং মোটামুটি দ্রুততার সঙ্গে নির্ণয় করা যায়।
- দুই বা ততোধিক সারির পরিমিত ব্যবধানসমূহ, যোজিত গড় ও তথ্য সংখ্যা জানা থাকলে সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করা যায়।
- পরিমিত ব্যবধান নমুনার তারতম্য হেতু অপেক্ষাকৃত কম প্রভাবিত হয়।

অসুবিধা

- পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ে যোজিত গড় প্রয়োজন হয় বিধায়, যোজিত গড়ের অসুবিধাগুলি বর্তমান থাকে।
- সীমাবিহীন শ্রেণীব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশন থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় সম্ভব নয়।
- পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ে যথেষ্ট সময় এবং গাণিতিক জ্ঞানের প্রয়োজন হয়।
- অসাধারণ প্রান্তিক রাশি দ্বারা গড় ব্যবধান অপেক্ষা পরিমিত ব্যবধান বেশী প্রভাবিত হয়।

ব্যবহার

মিত ব্যবধান উচ্চতর সংখ্যান কাজে সর্বাধিক হৃত হয়।

উল্লিখিত সীমাবদ্ধতা সত্ত্বেও পরিমিত ব্যবধান উচ্চতর পরিসংখ্যান কাজে সর্বাধিক ব্যবহৃত হয়। এটি সবচেয়ে উপযোগী বিস্তার পরিমাপক। নমুনা সংগ্রহ ও সহ-সংস্রব বিশ্লেষণের ভিত্তি হচ্ছে পরিমিত ব্যবধান। এছাড়াও দ্রব্য মানের গুণ নিয়ন্ত্রণের ক্ষেত্রেও এর ব্যবহার রয়েছে।

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. পরিমিত ব্যবধানের সংজ্ঞা দিন। গড় ব্যবধান অপেক্ষা যে এটি বিস্তার পরিমাপের অধিক উপযোগী তা উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।

নিচের সারণী থেকে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক নির্ণয় করুন।

দৈনিক আয়	কর্মচারীর সংখ্যা
১০০ - ১১০	৮
১১০ - ১২০	১২
১২০ - ১৩০	১৮
১৩০ - ১৪০	২৬
১৪০ - ১৫০	৬

২. বিস্তার বলতে কী বুঝায়? এটি কীভাবে পরিমাপ করা যায়। আপনার মতে কোনটি অপেক্ষাকৃত ভাল পরিমাপ? কেন তা ব্যাখ্যা করুন।

নিচের সারণী থেকে পরিমিত ব্যবধান ও গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

নম্বর	ছাত্রের সংখ্যা
৫০ - ৬০	৩
৬০ - ৭০	৮
৭০ - ৮০	১৬
৮০ - ৯০	৯
৯০ - ১০০	৪

৩. পরিমিত ব্যবধান কী? পরিমিত ব্যবধানের সুবিধা অসুবিধা ও ব্যবহার উল্লেখ করুন।

নিম্নের তথ্য থেকে সম্মিলিত পরিমিত ব্যবধান বের করুন।

শাখা	ছাত্রের সংখ্যা	গড় নম্বর	পরিমিত ব্যবধান
ক	২৫	৭৫	৮
খ	৩০	৭২	১০

৪. বিস্তার পরিমাপকগুলি কী কী? ভেদাংক-এর সংজ্ঞা দিন ও উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।

নিম্নলিখিত গণসংখ্যা নিবেশনের ভেদাংক বের করুন।

বয়স	শ্রমিকের সংখ্যা
১৮ - ২০	১২
২০ - ২২	২০
২২ - ২৪	২৫
২৪ - ২৬	৬৫
২৬ - ২৮	৬০
২৮ - ৩০	৪০
৩০ - ৩২	২০
৩২ - ৩৪	৮

৫. পরিমিত ব্যবধান কী পরিমাপ করে? গড় ব্যবধানের সাথে এর পার্থক্য কী? পরিসংখ্যান তথ্য বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে এই দুই পরিমাপের মধ্যে কোনটি সুবিধাজনক এবং কেন?

নিচের দুইটি কোম্পানির মধ্যে কোনটি সুবিধাজনক অবস্থানে তার ব্যাখ্যা করুন।

উৎপাদন (হাজার টনে)	কোম্পানি ক	কোম্পানি খ
১৫ - ২০	২	১
২০ - ২৫	৯	৪
২৫ - ৩০	৬	৮
৩০ - ৩৫	১৫	২০
৩৫ - ৪০	১৭	২৫
৪০ - ৫০	১৮	১২
৫০ - ৫৫	৬	২
৫০ - ৬০	২	১

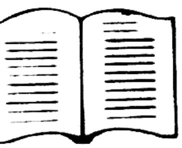
পাঠ-৩ : চতুর্থক ব্যবধান, দশহারিক ও শতহারিক
(Quartile Deviation Deciles and Percentiles)

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- চতুর্থক ব্যবধানের সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন
- অবিন্যস্ত ও শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত থেকে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করতে পারবেন
- লৈখিক উপায়ে চতুর্থক ব্যবধান উপস্থাপন করতে পারবেন
- চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা অসুবিধা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- দশহারিক (Deciles) এবং শতহারিক (Percentiles) নির্ণয় করতে পারবেন
- অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকসমূহের পারস্পরিক তুলনা করতে পারবেন।

চতুর্থক কী



পূর্বের পাঠে আপনি জেনেছেন যে, সীমা-বিহীন শ্রেণী ব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশন থেকে পরিমিত ব্যবধান ও গড় ব্যবধান নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। সেই সব ক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করে বিস্তার পরিমাপ বের করা যেতে পারে। একটি তথ্য সারির রাশিগুলিকে যদি তাদের মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজানো হয়, তবে যে সংখ্যামানগুলি তথ্য সারিটিকে সমান চার ভাগে ভাগ করে তাদেরকে চতুর্থক বলে। অর্থাৎ সাজানো উপাত্তকে সমান চারভাগে যে রাশিগুলি বিভক্ত করে সেগুলিই হচ্ছে চতুর্থক। প্রথম চতুর্থক, সারিকে ১ ঃ ৩ অনুপাতে বিভক্ত করে। দ্বিতীয় চতুর্থক হচ্ছে মাধ্যমা যা তথ্য সারিকে সমান দুই অংশে ভাগ করে। তৃতীয় চতুর্থক তথ্যসারিকে ৩ ঃ ১ অনুপাতে ভাগ করে। অর্থাৎ, তথ্যসমূহের তিন চতুর্থাংশ, মানের দিক থেকে তৃতীয় চতুর্থক থেকে ছোট এবং এক চতুর্থাংশ এর চেয়ে বড় মানের। চতুর্থক ব্যবধান হলো প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থকের মধ্যে ব্যবধানের অর্ধেক। চতুর্থক ব্যবধান নিচের সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়,

ক্রম অনুসারে
না উপাত্তকে যে
লো সমান চার ভাগে
করে সেগুলোই হচ্ছে

$$\text{চতুর্থক ব্যবধান} = \frac{Q_৩ - Q_১}{২}$$

যেখানে, $Q_৩$ = তৃতীয় চতুর্থক

$Q_১$ = প্রথম চতুর্থক

তাহলে চতুর্থক কী সেটা বুঝতে পারলেন। এবার কীভাবে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করতে হবে তা জানা দরকার। প্রথমে আসা যাক অবিন্যস্ত তথ্য থেকে কীভাবে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করা যায় সে আলোচনায়।

অবিন্যস্ত তথ্যসারি থেকে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয়

একটি তথ্য সারির রাশি সংখ্যা যদি n হয় এবং রাশিগুলিকে যদি মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজানো হয়, তবে $\frac{n}{৪}$তম রাশিটি হবে প্রথম চতুর্থক, $\frac{n}{২}$তম রাশিটি হবে মধ্যমা এবং $\frac{৩n}{৪}$তম রাশিটি হবে তৃতীয় চতুর্থক। তৃতীয় ও প্রথম চতুর্থকের ব্যবধানের অর্ধেক হবে চতুর্থক ব্যবধান।

য় ও প্রথম চতুর্থকের
ানের অর্ধেক হবে
র্ক ব্যবধান।

আসুন সহজ একটি উদাহরণ দিয়ে বিষয়টি সম্পর্কে ধারণাটি আরও একটু পরিষ্কার করে নেই।

উদাহরন - ১ ঃ দশটি দোকানের বিনিয়োগ (লক্ষ টাকায়) নিচে দেওয়া হলো,

৩, ৬, ২৪, ১১, ৮, ১২, ১৮, ১৭, ১৩, ১৪

তথ্যসারির চতুর্থক ব্যবধান কত?

সমাধান ঃ মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজানো উপাত্তটি দাঁড়ায়,

৩, ৬, ৮, ১১, ১২, ১৩, ১৪, ১৭, ১৮, ২৪

এখানে n = ১০ $\quad \therefore \quad \frac{n}{৪} = \frac{১০}{৪} = ২\frac{১}{২}$

অতএব $২\frac{১}{২}$তম মানই হল প্রথম চতুর্থক, যা দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশি দুইটির ব্যবধান (৮ - ৬) হবে ২। এর $\frac{১}{২}$অংশ অর্থাৎ ২ এর $\frac{১}{২} = ১$ দ্বিতীয় সংখ্যার সাথে যোগ করলেই প্রথম চতুর্থক পাওয়া যাবে। অতএব প্রথম চতুর্থক হলো,

Q_1 = ৬ + ১ = ৭

এখন, তৃতীয় চতুর্থক নির্ণয় করতে হলে প্রথমে $\frac{৩n}{৪}$এর মান নির্ণয় করতে হবে। অতএব,

$$\frac{৩n}{৪} = \frac{৩ \times ১০}{৪} = \frac{৩০}{৪} = ৭\frac{১}{২}$$

অতএব $৭\frac{১}{২}$তম রাশিকে তৃতীয় চতুর্থক হিসাবে ধরা যায়, যা ৭ম ও ৮ম রাশি দুইটি মধ্যে অবস্থিত। এই দুটি রাশির ব্যবধান (১৭-১৪) = ৩ যার $\frac{১}{২}$ অংশ ৭ম রাশির সাথে যোগ করতে হবে।

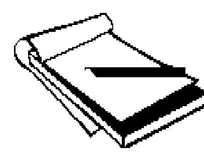
অতএব, $Q_৩ = ১৪ + ৩$ এর $\frac{১}{২}$

$= ১৪ + \frac{৩}{২} = ১৫.৫$

অতএব, চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{Q_৩ - Q_১}{২} = \frac{১৫.৫ - ৭}{২} = \frac{৮.৫}{২} = ৪.২৫$

$\therefore Q.D$ = ৪.২৫ লাখ টাকা।

অনুশীলন
প্রথম ২০টি ক্রমিক সংখ্যার চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করুন।



শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত থেকে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয়

অবিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে তথ্যগুলিকে আমরা মানের ক্রম অনুসারে সাজিয়ে নেই। যেহেতু, গণসংখ্যা নিবেশনে তথ্যগুলিকে বিন্যস্ত অবস্থাতেই পাওয়া যায়, সে জন্য ঐ গুলিকে সাজানোর প্রয়োজন হয় না। মধ্যমা হচ্ছে দ্বিতীয় চতুর্থক, একারণে মধ্যমা নির্ণয়ের অনুরূপ পদ্ধতিতে গণসংখ্যা নিবেশন থেকে চতুর্থক নির্ণয় করা হয়। শ্রেণীবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে প্রক্রিয়াকরণের ফলে কিছু মূল তথ্য নষ্ট হয়ে যায়। ফলে গণসংখ্যা নিবেশন থেকে চতুর্থক সঠিকভাবে নিরূপণ করা যায় না। এ ক্ষেত্রে চতুর্থক শুধু অনুমানের উপর ভিত্তি করেই নির্ণয় করা হয়। গণসংখ্যাগুলি যোজনের মাধ্যমে কোন্ শ্রেণীতে চতুর্থকের অবস্থান তা নির্ণয় করা হয়। যে শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা প্রথম বারের মত $\frac{n}{৪}$এর সমান বা অধিক হয় সেই শ্রেণীতেই প্রথম চতুর্থকের অবস্থান বলে চিহ্নিত করা হয় এবং এটিকেই প্রথম চতুর্থক শ্রেণী বলে। চতুর্থক শ্রেণী নির্ণয়ের পর রাশিগুলো শ্রেণীর মধ্যে সমভাবে বিস্তৃত, এই অনুমানের ভিত্তিতে চতুর্থক নির্ণয় করা হয়। এখন চতুর্থক নির্ণয়ের সূত্রটি হলো,

মধ্যমা হচ্ছে দ্বিতীয় চতু
একারণে মধ্যমা নির্ণয়ের
অনুরূপ পদ্ধতিতে গণস
নিবেশন থেকে চতুর্থক
করা হয়।

চতুর্থক শ্রেণী নির্ণয়ের প
রাশিগুলো শ্রেণীর মধ্যে
সমভাবে বিস্তৃত, এই
অনুমানের ভিত্তিতে চতু
নির্ণয় করা হয়।

$$Q_1 = L_১ + \frac{\frac{n}{৪} - f_c}{f_{Q_১}} \times C$$

যেখানে,
$L_১$ = প্রথম চতুর্থক শ্রেণীর নিম্ন সীমা
f_c = প্রথম চতুর্থক শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা
$f_{Q_১}$ = প্রথম চতুর্থক শ্রেণীর গণসংখ্যা
C = শ্রেণী ব্যাপ্তি

n = মোট গণসংখ্যা

তৃতীয় চতুর্থকের অবস্থান হচ্ছে সেই শ্রেণীতে, যে শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা প্রথম বারের মত $\frac{৩n}{৪}$ এর সমান বা বেশী। তৃতীয় চতুর্থক নির্ণয়ের সূত্রটি হলো,

$$Q_3 = L_৩ + \frac{\frac{৩n}{৪} - f_c}{f_{Q৩}} \times C$$

যেখানে, $L_৩$ = তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণীর নিম্নসীমা
f_c = তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা
$f_{Q৩}$ = তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণীর গণসংখ্যা
C = তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণীর ব্যাপ্তি

উদাহরণ -২ ঃ নিচে পুঁজি বিনিয়োগের ভিত্তিতে শ্রেণীকৃত দশটি দোকানের একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেয়া হলো,

পুঁজি (লাখ টাকা)	দোকানের সংখ্যা
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১

নিবেশনটির চতুর্থক ব্যবধান কত?

সমাধান ঃ চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় পদ্ধতি,

পুঁজি (লাখ টাকা)	গণসংখ্যা f	যোজিত গণসংখ্যা fc
০ - ৫	১	১
৫ - ১০	২	২+১ = ৩
১০ - ১৫	৪	৩+৪ = ৭
১৫ - ২০	২	৭+২ = ৯
২০ - ২৫	১	৯+১ = ১০

চতুর্থক শ্রেণী হচ্ছে
শ্রেণী, যার যোজিত
খ্যা প্রথমবারের মতো
া এর বেশী।

প্রথম চতুর্থক নির্ণয় ঃ $\frac{n}{৪} = \frac{১০}{৪} =$ ২.৫তম মান হবে প্রথম চতুর্থক। সুতরাং প্রথম চতুর্থক শ্রেণী হচ্ছে (৫-১০)। কারণ প্রথম চতুর্থক শ্রেণী হচ্ছে সেই শ্রেণী, যার যোজিত গণসংখ্যা প্রথমবারের মতো $\frac{n}{৪}$ বা ২.৫ এর বেশী। এখন সূত্র অনুসারে,

প্রথম চতুর্থক $$Q_1 = L_১ + \frac{\frac{n}{৪} - f_c}{f_{Q১}} \times C$$

$$= ৫ + \frac{২.৫ - ১}{২} \times ৫ \quad = \quad ৫ + \frac{১.৫}{২} \times ৫$$

$$= ৫ + ১.৫ (২.৫) = ৫ + ৩.৭৫ = ৮.৭৫ \text{ লক্ষ টাকা}$$

তৃতীয় চতুর্থক নির্ণয় ঃ এক্ষেত্রে $\frac{৩n}{৪} = \frac{৩ \times ১০}{৪} = ৭.৫$, যা যোজিত গণসংখ্যা ৯ এর মধ্যে অবস্থিত। (১৫-২০) শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা প্রথমবারের $\frac{৩n}{৪} = \frac{৩ \times ১০}{৪} = ৭.৫$ এর বেশী। সুতরাং তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণী হচ্ছে (১৫-২০) শ্রেণী। এখন সূত্র অনুসারে,

তৃতীয় চতুর্থক, $$Q_3 = L_৩ + \frac{\frac{৩n}{৪} - f_c}{f_{Q_৩}} \times C$$

$$= ১৫ + \frac{৭.৫ - ৭}{২} \times ৫ \quad = ১৫ + \frac{০.৫ \times ৫}{২}$$

$$= \quad ১৫ \ + \ ১.২৫ \ = \ ১৬.২৫$$ লক্ষ টাকা।

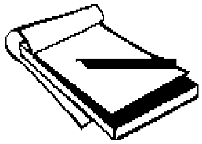
সুতরাং চতুর্থক ব্যবধান $= \; = \frac{Q_৩ - Q_১}{২}$

$$= \frac{১৬.২৫ - ৮.৭৫}{২} = \frac{৭.৫০}{২} \quad = \ ৩.৭৫$$ লক্ষ টাকা

অনুশীলন

নিচের বিন্যস্ত উপাত্ত হতে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করুন —

দৈনিক পড়ালেখার সময় (ঘন্টা)	২ - ৪	৪ - ৬	৬ - ৮	৮ - ১০	১০ - ১২
ছাত্রসংখ্যা	২	৫	১৩	৭	৩



লৈখিক উপায়ে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয়

ওজিভ লেখ এর মাধ্যমে প্রথমে সংশ্লিষ্ট চতুর্থক দ্বয় এবং পরে মান দুটি থেকে চতুর্থক ব্যবধান নিরূপণ করা যায়। পূর্ববর্তী ইউনিটে যে প্রক্রিয়ায় ওজিভ ব্যবহার করে মধ্যমা নিরূপণ করা হয়েছে, ঠিক একই পদ্ধতিতে প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক নির্ণয় করা যায়। তবে লেখ এর মাধ্যমে চতুর্থকদ্বয় এর সংখ্যামান অনুমান করা যায় মাত্র। আসুন তাহলে একটি উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি সম্পর্কে আরো পরিষ্কার ধারণা লাভ করা যাক্।

ওজিভ লেখ -এর মাধ্যমে প্রথমে সংশ্লিষ্ট চতুর্থক দ্ব এবং পরে সেগুলি থেকে চতুর্থক ব্যবধান নিরূপণ যায়।

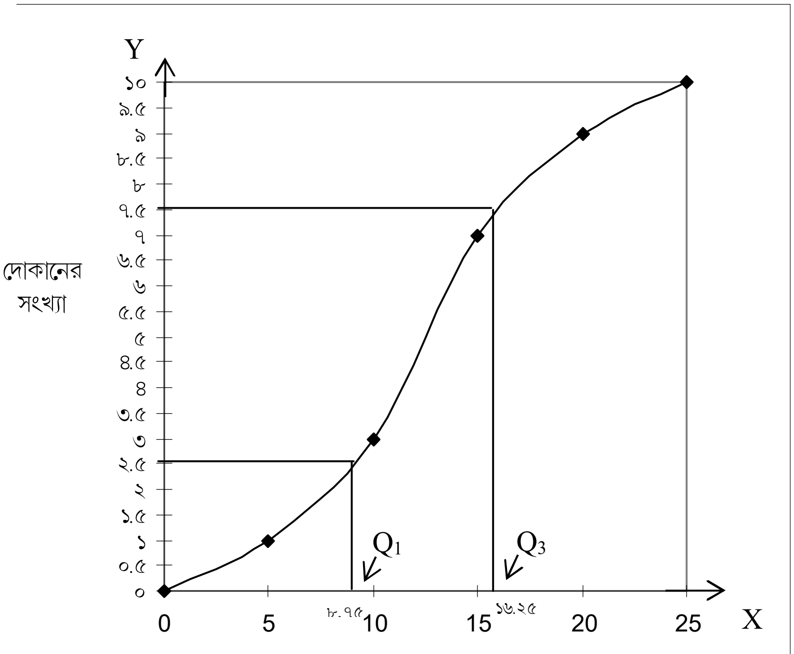
উদাহরণ -৩ ঃ নিচে পুঁজি বিনিয়োগের ভিত্তিতে শ্রেণীকৃত দশটি দোকানের একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেয়া হলো,

পুঁজি (লাখ টাকা)	দোকানের সংখ্যা
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১

এখন এই গণসংখ্যা নিবেশন থেকে লৈখিক চিত্রে অজিভের মাধ্যমে চতুর্থক ব্যবধান উপস্থাপন করুন।

সমাধান ঃ নিচের গণসংখ্যা নিবেশন থেকে ওজিভ অঙ্কন ও তার সাহায্যে চতুর্থক দ্বয় নিরূপণ,

পুঁজি (লাখ টাকা)	গণসংখ্যা	যোজিত গণসংখ্যা
০ - ৫	১	১
৫ - ১০	২	৩
১০ - ১৫	৪	৭
১৫ - ২০	২	৯
২০ - ২৫	১	১০



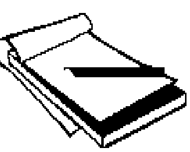
পুঁজি (লাখ টাকা)

চতুর্থক ব্যবধান = $=\dfrac{Q_৩ - Q_১}{২}$

$=\dfrac{১৬.২৫ - ৮.৭৫}{২}$

$=\dfrac{৭.৫০}{২}$

= ৩.৭৫ লক্ষ টাকা



অনুশীলন
কাল্পনিক তথ্যের সাহায্যে পরীক্ষা করে দেখুন যে, সূত্রের মাধ্যমে নির্ণীত চতুর্থক ব্যবধান ও লৈখিক চিত্রের মাধ্যমে নির্ণীত চতুর্থক ব্যবধান সমান হয় কি না।

চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধা

তিকভাবে এবং কভাবে চতুর্থক ান নির্ণয় ও উপস্থাপন যায়।

এতক্ষণ আপনি জানলেন কীভাবে গাণিতিকভাবে এবং লৈখিকভাবে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় ও তা উপস্থাপন করা যায়। আসুন এখন চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধাগুলো জেনে নেই।

সুবিধা

- গ্রাফ বা লেখ এর সাহায্যে সহজেই চতুর্থক দ্বয়ের অবস্থান নির্ণয় করা যায় এবং চতুর্থক ব্যবধান বের করা যায়।
- যেহেতু এটি একটি অবস্থান ভিত্তিক পরিমাপ, সেহেতু এটাকে বুঝতে অসুবিধা হয় না।
- প্রান্ত খোলা গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে অন্য পরিমাণ বের করা যায় না কিন্তু, চতুর্থক নির্ণয় করা যায় বিধায়, এই প্রকৃতির গণসংখ্যা নিবেশনের বিস্তার পরিমাপের জন্য এটি অধিক উপযোগী।

অসুবিধা

- চতুর্থক ব্যবধান কোন নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান থেকে ব্যবধান পরিমাপ করে না। সেই অর্থে এটি বিস্তারের যথার্থ পরিমাপক নয়।
- দুইটি অসম তথ্যসারির একই চতুর্থক ব্যবধান হতে পারে। তাই এই পরিমাপ দিয়ে অনেক সময় দুইটি নিবেশনের বিস্তার পরস্পরের সাথে তুলনা করা সম্ভব হয় না।
- এই পরিমাপক নির্ণয়কালে তথ্যসারির সকল রাশির অন্তর্ভূক্ত করার প্রয়োজন হয় না। ফলে ফলাফল সবসময় সর্বজন গ্রহণযোগ্য নাও হতে পারে।
- চতুর্থক ব্যবধান নমুনা বিচ্যুতি দ্বারা বেশী প্রভাবিত হয়।

চতুর্থক ব্যবধানের ব্যবহার

চতুর্থক ব্যবধান একটি অবস্থান ভিত্তিক বিস্তার পরিমাপ। যে সব নিবেশনের বিস্তার সম্পর্কে মোটামুটি অনুমান প্রয়োজন, সেক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধান ব্যবহার করা হয়। উচ্চতর পরিসংখ্যান কাজে এর ব্যবহার সীমিত। তবে প্রান্তখোলা গণসংখ্যা নিবেশনের বিস্তার পরিমাপের জন্য এর ব্যবহার করা চলে। আবার তথ্য সারিতে অস্বাভাবিক উচ্চ বা নিম্নমানের রাশির প্রভাব বর্জিত ব্যবধান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধান ব্যবহার করা হয়।

যে সব নিবেশনের বিস্তা
সম্পর্কে মোটামুটি অনুম
প্রয়োজন, সেক্ষেত্রে চতুর্
ব্যবধান ব্যবহার করা হ

দশহারিক এবং শতহারিক (Deciles and Percentiles) নির্ণয়

বিশ্লেষণের সুবিধার্থে তথ্য সারিকে ভাগ করে পর্যবেক্ষণ করলে তথ্যের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য সহজে ধরা পড়ে। চতুর্থক যেমন সাজানো তথ্য সারিকে সমান চার ভাগে বিভক্ত করে, তেমনিভাবে দশহারিক ও শতহারিক সাজানো তথ্য সারিকে যথাক্রমে দশ ভাগ ও একশত ভাগে বিভক্ত করে। তাই চতুর্থক বিভক্তিকরণের মাধ্যমে আমরা যেমন তিনটি চতুর্থক পাই, তেমনিভাবে ৯টি দশহারিক ও ৯৯টি শতহারিক পাই। অনুরূপভাবে তথ্যকে পাঁচটি ভাগে ভাগ করলে পঞ্চহারিক (Quintiles) এবং আট ভাগে ভাগ করলে অষ্টহারিক (Octiles) পাওয়া যায়। অবস্থান ভিত্তিক পরিমাপক বলে এদের ব্যবহার সীমিত। চতুর্থক নির্ণয়ে যে সূত্র ব্যবহার করা হয়, অনুরূপ সূত্র ব্যবহার করে এগুলো নিরূপণ করা যায়। লেখ এর মাধ্যমেও এগুলির অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

চতুর্থকের মত দশহারিক
সমগ্রককে দশভাগে এবং
শতহারিক সমগ্রককে
শতভাগে ভাগ করে।

উদাহরণ-৪ ঃ নিচের একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেয়া হলো,

বয়স (বৎসর)	২৫-৩০	৩০-৩৫	৩৫-৪০	৪০-৪৫	৪৫-৫০	৫০-৫৫
শ্রমিকের সংখ্যা	৪৭	৫১	৭০	৩১	২০	৫

সপ্তম দশহারিক ও ৩১ তম শতহারিক এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দশহারিক ও শতহারিক এর মান নির্ণয়।

বয়স	গণসংখ্যা f	যোজিত গণসংখ্যা f_c
২৫ - ৩০	৪৭	৪৭
৩০ - ৩৫	৫১	৯৮
৩৫ - ৪০	৭০	১৬৮
৪০ - ৪৫	৩১	১৯৯
৪৫ - ৫০	২০	২১৯
৫০ - ৫৫	৫	২২৪
	$\sum f=$ ২২৪	

সপ্তম দশহারিক নির্ণয় : সপ্তম দশহারিকের সূত্রটি নিম্নরূপ,

সপ্তম দশহারিক, $D_৭ = L_১ + \dfrac{\dfrac{৭n}{১০} - f_c}{f_{D৭}} \times C$

যেখানে, $L_১$ = সপ্তম দশহারিক শ্রেণীর নিম্ন সীমা

f_c = সপ্তম দশহারিক শ্রেণীর পূর্ব শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা

$f_{D৭}$ = সপ্তম দশ হারিক শ্রেণীর গণসংখ্যা

C = সপ্তম দশহারিক শ্রেণীর ব্যাপ্তি

সপ্তম দশহারিক শ্রেণী হচ্ছে সেই শ্রেণী, যে শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা প্রথম বারের মত $\dfrac{৭n}{১০}$ এর সমান বা অধিক।

এখানে, $\dfrac{৭n}{১০} = \dfrac{৭ \times ২২৪}{১০} = \dfrac{১,৫৬৮}{১০} = ১৫৬.৮$ (১৬৮ এর নিকটতম)

সুতরাং (৩৫-৪০) বয়স শ্রেণী হচ্ছে সপ্তম দশহারিক শ্রেণী।

সুতরাং, $D_৭ = ৩৫ + \dfrac{১৫৬.৮ - ৯৮}{৭০} \times ৫$

$= ৩৫ + \dfrac{৫৮.৮}{৭০} \times ৫$

$= ৩৫ + \dfrac{২৯৪.০}{৭০} = ৩৫ + ৪.২ = ৩৯.২$ বৎসর

৩১তম শতহারিক নির্ণয় : ৩১ তম শতহারিক নির্ণয়ের সূত্রটি নিম্নরূপ,

৩১তম শত হারিক (31st Percentiles) $P_{৩১} = L_১ + \dfrac{\dfrac{৩১n}{১০০} - f_c}{f_{p১}} \times C$

যেখানে, $L_১$ = ৩১তম শতহারিক শ্রেণীর নিম্ন সীমা

f_c = ৩১ তম শতহারিক শ্রেণীর পূর্ব শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা

$f_{p৩১}$ = ৩১ তম শতহারিক শ্রেণীর গণসংখ্যা

C = ৩১ তম শতহারিক শ্রেণীর ব্যাপ্তি

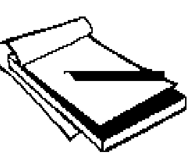
৩১ তম শতহারিক শ্রেণী হচ্ছে সেই শ্রেণী, যার যোজিত গণসংখ্যা প্রথম বারের মত $\dfrac{৩১n}{১০০}$ এর সমান বা অধিক।

সুতরাং, এখানে $\dfrac{৩১n}{১০০} = \dfrac{৩১ \times ২২৪}{১০০} = \dfrac{৬৯৪৪}{১০০} = ৬৯.৪৪$

সুতরাং, ৩১তম শতহারিক শ্রেণী হচ্ছে (৩০-৩৫) শ্রেণী

সুতরাং $P_{৩১} = ৩০ + \dfrac{৬৯.৪৪ - ৪৭}{৫১} \times ৫$

$= ৩০ + \dfrac{১১২.২}{৫১} = ৩০ + ২.২ = ৩২.২$ বৎসর



অনুশীলন

কোন একটি গণসংখ্যা নিবেশনে ৫ম দশহারিক ও ৫০তম শতহারিক কি পরস্পর সমান হবে? কাল্পনিক গণসংখ্যা বিন্যাসের থেকে নির্ণয় করে পরীক্ষা করুন।

বিভিন্ন অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকের পারস্পরিক সম্পর্ক

পরিসংখ্যান তথ্য বিশ্লেষণের অভিজ্ঞতার আলোকে এটি একটি প্রতিষ্ঠিত সত্য যে, একটি নিবেশনের চতুর্থক ব্যবধানের মান সবচেয়ে কম, পরিসরের মান সব চেয়ে বেশী এবং পরিমিত ব্যবধানের মান সাধারণত এ দুইটির মাঝামাঝি হয়। তথ্য নিবেশনের সকল রাশি সমান হলে সকল বিস্তার পরিমাপকের মান শুন্য হয়। নিবেশনের রাশিগুলি সমান না হলে বিস্তার পরিমাপক গুলির মধ্যে নিম্নলিখিত সম্পর্ক বিদ্যমান দেখতে পাওয়া যায়,

নিবেশনের চতুর্থক ব্যব
মান সবচেয়ে কম, পরি
মান সবচেয়ে বেশী এব
পরিমিত ব্যবধানের মান
দুয়ের মাঝামাঝি অবস্থা
থাকে।

- একটি সুষম নিবেশনের ক্ষেত্রে গড় ব্যবধানের মান হল পরিমিত ব্যবধানের পাঁচ ভাগের চার ভাগ এবং চতুর্থক ব্যবধান হল পরিমিত ব্যবধানের প্রায় দুই-তৃতীয়াংশ।
- পরিসর পরিমাপ বিস্তৃতির একটি সাধারণ ধারণা দেয় মাত্র। এর দ্বারা রাশিগুলির সর্বাধিক ব্যবধান ব্যক্ত হয়। তথ্য সারির সকল রাশি এই সীমার মধ্যে বিদ্যমান থাকে।
- একটি প্রতিসম বিন্যাসের (Symmetrical distribution) ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধানের মান পরিসরের মানের ছয় ভাগের এক ভাগ হয়।

অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকগুলির তুলনামূলক আলোচনা

অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকগুলি হচ্ছে - পরিসর, গড় ব্যবধান, পরিমিত ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধান। সব কয়টিই কোন না কোন ভাবে নিবেশনের বিস্তার পরিমাপ করে। তবে ঐগুলিকে পরস্পরের সাথে তুলনা করতে হলে একটি যথাযথ বিস্তার পরিমাপকের কী কী প্রয়োজনীয় বৈশিষ্ট্য থাকা দরকার তা আলোচনা করা প্রয়োজন। একটি যথাযথ বিস্তার পরিমাপকের যে লিখিত বৈশিষ্ট্যগুলো থাকা দরকার তাহলো,

অনপেক্ষ বিস্তার
পরিমাপকগুলি কোন না
কোন ভাবে নিবেশনের
পরিমাপ করে।

- এটিকে সহজ সংজ্ঞায় সংজ্ঞায়িত হতে হবে। যেমন, কোন শর্ত আরোপ করে গাণিতিক চিহ্ন অগ্রাহ্য করা ঠিক নয়।
- পরিমাপকটি সহজবোধ্য হতে হবে।
- নির্ণয় পদ্ধতি সহজ হতে হবে। অনুমানের উপর ভিত্তি না করে সঠিকতার সাথে নিরূপণযোগ্য হতে হবে।
- তথ্যসারির সকল রাশি পরিগণনার অন্তর্ভুক্ত থাকতে হবে। আংশিক তথ্যের ব্যবহারে প্রাপ্ত পরিমাপক সঠিক না হয়ে আনুমানিক হতে বাধ্য।
- নমুনা বিচ্যুতি দ্বারা কম প্রভাবিত হতে হবে।
- একটি যথাযথ বিস্তার পরিমাপক পরবর্তী সময়ে গাণিতিক প্রক্রিয়ার উপযোগী হওয়া উচিত। উপ-সারির পরিমাপক গুলির সহায়তায় সম্মিলিত সারির পরিমাপক নির্ণয়যোগ্য হতে হবে।

অনুশীলন
বিস্তার পরিমাপগুলোর মধ্যে কোনটি গননা করা সহজ এবং অধিক নির্ভরযোগ্য বলে আপনি মনে করেন? কেন? ব্যাখ্যা করুন। (অনুর্ধ্ব ২৫০ শব্দ)

যথাযথ পরিমাপকের বৈশিষ্ট্যগুলির অধিকাংশই পরিমিত ব্যবধানের মধ্যে বর্তমান রয়েছে। তাই পরিসংখ্যান নিবেশনের বিস্তার বিশ্লেষণে পরিমিত ব্যবধান সবচেয়ে উত্তম। তবে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করতে হলে যোজিত গড় দরকার হয়। প্রান্ত খোলা (Open-ended) গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে গড় যেমন নির্ণয় করা সম্ভব নয়, তেমনি পরিমিত ব্যবধান নিরূপনও সম্ভব নয়। সে ক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধান ব্যবহার করা যেতে পারে। পরিসর তথ্যসারির বিস্তার সম্পর্কে সাধারণ (rough) ধারণা দেয় মাত্র। চতুর্থক ব্যবধান সমস্ত সংখ্যামান বা রাশিকে পরিগণনার অন্তর্ভুক্ত করে না, তবে এটি পরিসরের চেয়ে অপেক্ষাকৃত ভাল। কারণ চতুর্থক ব্যবধান পরিসরের মত প্রান্তিক রাশি দ্বারা প্রভাবিত হয় না। পরিমিত ব্যবধানে অধিকাংশ বৈশিষ্ট্য বর্তমান থাকে বলে উচ্চতর পরিসংখ্যান কাজে এর ব্যবহার সর্বাধিক।

যথাযথ পরিমাপকের
বৈশিষ্ট্যগুলির অধিকাংশই
পরিমিত ব্যবধানের মধ্যে
বর্তমান রয়েছে।

তাহলে আলোচনা থেকে আপনি যা পেলেন তা হলো,

১. একটি গ্রহণযোগ্য পরিমাপকের প্রায় সব বৈশিষ্ট্যগুলোই পরিমিত ব্যবধানের মধ্যে রয়েছে। তাই এটি একটি উত্তম পরিমাপক।
২. প্রান্ত খোলা গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গড় বা পরিমিত ব্যবধান কোনটিই নির্ণয় সম্ভব নয়।
৩. চতুর্থক ব্যবধানের ক্ষেত্রে প্রান্ত খোলা গণসংখ্যা নিবেশন থেকেও বিস্তার পরিমাপ করা সম্ভব।
৪. পরিসর তথ্যরাশির বিস্তার সম্পর্কে একটি সাধারণ ধারণা দেয় মাত্র।

সারাংশ

এই পাঠে চতুর্থক ব্যবধানের সংজ্ঞা, নির্ণয় পদ্ধতি ও দোষ-গুণ আলোচনা করা হয়েছে। লৈখিক উপায়ে চতুর্থকের অবস্থান নির্ণয় ও লেখচিত্রের সাহায্যে চতুর্থক ব্যবধান নিরূপণ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। কোন কোন ক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধান বিস্তারের বাঞ্ছনীয় পরিমাপক এবং কী কী বিষয়ে অন্যান্য পরিমাপকের সঙ্গে তুলনা করা যায় তা বিস্তারিত ব্যাখ্যা করা হয়েছে। সমতুল্য ও অনুরূপ পদ্ধতিতে নির্ণেয় দশহারিক ও শতহারিক কীভাবে বিস্তার বিশ্লেষণে কাজে লাগে তা আলোচনা করা হয়েছে। উত্তম পরিমাপকের বৈশিষ্ট্যের আলোকে অনপেক্ষ পরিমাপকগুলি যথাযথভাবে তুলনা করা হয়েছে।

• পাঠোত্তর মূল্যায়ন

১. বিস্তার কী? সর্বোত্তম বিস্তার পরিমাপক কোনটি এবং কেন তার ব্যাখ্যা দিন। নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের চতুর্থক ব্যবধান কত?

বয়স শ্রেণী (বৎসর)	শ্রমিকের সংখ্যা
১৫ - ২০	৮
২০ - ২৫	২৫
২০ - ৩০	২৩
৩০ - ৩৫	২০
৩৫ - ৪০	৯

২. চতুর্থক ব্যবধান ও গড় ব্যবধানের পার্থক্য ব্যাখ্যা করুন। কোন কোন ক্ষেত্রে গড় ব্যবধান অপেক্ষা চতুর্থক ব্যবধান অধিক উপযোগী এবং কেন?

নিচের নিবেশনের গড় ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধান বের করে তুলনা করুন।

দৈনিক উৎপাদন (গজ)	শ্রমিকের সংখ্যা
৫০ - ৬০	১৮
৬০ - ৭০	২৫
৭০ - ৮০	৩২
৮০ - ৯০	২৪
৯০ - ১০০	৬

৩. দশহারিক ও শতহারিক কাকে বলে? এগুলো কী কাজে লাগে? এইগুলোর নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা করুন। নিচের নিবেশনের ষষ্ঠ দশহারিক ও ২১তম শতহারিক নির্ণয় করুন।

সাপ্তাহিক মজুরী	শ্রমিকের সংখ্যা
২০০ - ২৫০	২
২৫০ - ৩০০	৩০
৩০০ - ৩৫০	১৫০
৩৫০ - ৪০০	২২০
৪৫০ - ৪৫০	৯০
৪৫০ - ৫০০	৬

৪. লেখ চিত্রের মাধ্যমে কীভাবে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করা হয় তা উপযুক্ত উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন। নিচের গণসংখ্যা সারণী থেকে লেখ-এর মাধ্যমে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করুন।

বিক্রয় (হাজার টাকা)	দোকানের সংখ্যা
৫০ - ৬০	২০
৬০ - ৭০	৪০
৭০ - ৮০	৮০
৮০ - ৯০	৩০
৯০ - ১০০	১০

৫. একটি যথাযথ বিস্তার পরিমাপকের বাঞ্ছনীয় বৈশিষ্ট্য কী কী? এর আলোকে কোন বিস্তার পরিমাপক উত্তম বলে আপনি মনে করেন?

নিম্নের নিবেশনের চতুর্থক ব্যবধান কত?

মাসিক আয়	পরিবারের সংখ্যা
৫,০০০ - ১০,০০০	১২
১০,০০০ - ১৫,০০০	১৫
১৫,০০০ - ২০,০০০	৪০
২০,০০০ - ২৫,০০০	১৮
২৫,০০০ - ৩০,০০০	৬

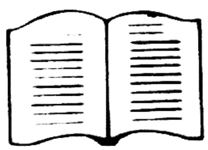
পাঠ-৪ : আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ ***(Relative Measures of Dispersion)***

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- অনপেক্ষ ও আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপক এর মধ্যে পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবেন
- ব্যবধানাঙ্ক কী তা বর্ণনা করতে পারবেন
- তথ্যসারি থেকে ব্যবধানাঙ্ক-এর মান নিরূপণ করতে পারবেন
- গড় ব্যবধানাঙ্ক কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- গড় ব্যবধানের মান নির্ণয় করতে পারবেন
- চতুর্থক ব্যবধানাঙ্কের সংজ্ঞার বর্ণনা দিতে পারবেন
- চতুর্থক ব্যবধানাঙ্কের মান নির্ণয় করতে পারবেন
- পরিসরাঙ্ক কী তা বর্ণনা করতে পারবেন
- পরিসরাঙ্ক নিরূপণ করতে পারবেন।

সূচনা (Introduction)



অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপক দিয়ে ভিন্ন এককে প্রকাশিত তথ্যসারি পরস্পর তুলনাযোগ্য নয়। এই ধরনের পরিস্থিতিতে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

এই ইউনিটের পূর্ববর্তী পাঠগুলিতে আমরা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকগুলি সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করেছি। যেখানে আপনি জেনেছেন যে, অভিন্ন রাশি সম্বলিত তথ্য সারির বিস্তার পরিমাপকের একক, তথ্য রাশিগুলির যে একক থাকে তাই-ই হয়ে থাকে। তথ্য সারি যদি বিক্রয় বিষয়ে হয় এবং তা যদি টাকার এককে প্রকাশিত থাকে, তবে সেই সারির বিস্তার পরিমাপক পরিসর, গড় ব্যবধান বা পরিমিত ব্যবধান যাই হোক না কোন- তা টাকার এককের মাধ্যমে অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপক দ্বারা তথ্য রাশির বিস্তার সম্পর্কিত বর্ণনা দিবে। মনে করুন পাঁচজন কর্মকর্তার চাকুরীর সময়কাল বৎসরে রেকর্ড করা হলো যা যথাক্রমে, ৫, ১০, ৭, ৯ ও ১৫ বৎসর। সুতরাং তাদের পরিসর (১৫-৫) =১০ বৎসর। কিন্তু দুইটি তথ্য সারির একক যদি ভিন্ন ভিন্ন একক মানে প্রকাশিত হয় তা হলে অনপেক্ষ এককের মাধ্যমে তাদের বিস্তার বিষয়ে তুলনা করা চলে না। যেমন ধরুন, একটি বহুজাতিক কোম্পানির দুইটি বিক্রয় কেন্দ্রের একটি ঢাকা শহরে ও অন্যটি আমেরিকার নিউইয়র্ক শহরে হলে, তাদের দুই কেন্দ্রের বিক্রয়ের একক যথাক্রমে ঢাকা কেন্দ্রে হবে টাকার অংকে এবং নিউইয়র্কের কেন্দ্রে হবে ডলারের মূল্যমানে। এই অবস্থায় তথ্যের একক পরিবর্তন না করে এই বিস্তার পরিমাপকের মানদ্বয় কোন ভাবেই অনপেক্ষ পরিমাপক দ্বারা তুলনাযোগ্য হবে না।

আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপকের কোন একক নেই। তাই এরা একক বিহীন তুলনা উপযোগী

আবার দুই তথ্য সারির মধ্যে যদি পরিমাপক একক একই প্রকারের হয় তবুও কোন কোন ক্ষেত্রে অনপেক্ষ পরিমাপের মাধ্যমে বিস্তারের তুলনা যথাযথভাবে অর্থপূর্ণ হয় না। যেমন ৩০, ৪০, ৫০, ৬০, ৭০ এই রাশিগুলির গড় ৫০ এবং গড় ব্যবধান ১২। অন্য একটি নিবেশন ১৩০, ১৪০, ১৫০, ১৬০, ১৭০ এর গড় ১৫০ এবং গড় ব্যবধান ১২। এ ক্ষেত্রে গড় ব্যবধান একই প্রকার হলেও ব্যবধানের আনুপাতিক হার এক নয়। অতএব এক বা ভিন্ন জাতীয় পরিমাপ একক সম্বলিত দুই তথ্য সারির মধ্যে বিস্তারের তুলনার জন্য অনপেক্ষ ব্যবধান গুলিকে আপেক্ষিক পদে রূপান্তরিত করার দরকার হয়। এর সহজ উপায় হলো তথ্যসমূহের গড় থেকে ব্যবধান সমূহকে ঐ গড়ের শতকরা হারে প্রকাশ করা। যার ফলে এগুলি নিজস্ব এককের প্রভাব মুক্ত হয়ে কেবল মাত্র সংখ্যা হিসাবে পরিগণিত হতে পারে। তাই আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপকগুলির কোন একক নাই। এরা একক বিহীন তুলনা উপযোগী সংখ্যামাত্র। তাই আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপকসমূহ শতকরা হারে প্রকাশিত এবং অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকসমূহের ভিন্নতর রূপ। এইগুলি শুধুমাত্র সংখ্যায় প্রকাশিত বিধায়, একাধিক পরিমাপ এককে প্রকাশিত ভিন্ন ভিন্ন তথ্যসারির বিস্তার সহজে তুলনার সুবিধা হয়। আসুন তাহলে একে একে গুরুত্বপূর্ণ আপেক্ষিক পরিমাপসমূহ সম্পর্কে জেনে নেয়া যাক।

ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Variation)

পরিমিত ব্যবধান পরিমাপকে গাণিতিক গড়ের শতকরা হারে প্রকাশ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাই-ই হলো ব্যবধানাঙ্ক।

ব্যবধানাঙ্ক হচ্ছে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপকগুলির মধ্যে সর্বাধিক ব্যবহৃত এবং সবচেয়ে বেশী গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপক। কোন নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান পরিমাপকে গাণিতিক গড়ের শতকরা হিসাব রূপে প্রকাশ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাকে ব্যবধানাঙ্ক বলে। পরিসংখ্যানবিদ কার্ল পিয়ারসন (Karl Pearson) এর সংজ্ঞা দেন এবং ব্যবহারের প্রচলন করেন। ব্যবধানাঙ্কের কোন

একক নেই। তাই বিভিন্ন এককে পরিগণিত একাধিক তথ্য সারির ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করলে, যে তথ্যসারির ব্যবধানাঙ্ক বেশী পাওয়া যায় - সেই তথ্যসারির বিস্তার অধিক বলে চিহ্নিত হয়।

বিভিন্ন এককে পরিগণিত একাধিক তথ্য সারির ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করলে, যে তথ্যসারির ব্যবধানাঙ্ক বেশী পাওয়া যায় - সেই তথ্যসারির বিস্তার অধিক বলে চিহ্নিত হয়।

ব্যবধানাঙ্কের সূত্রটির গাণিতিক প্রকাশ দাঁড়ায়,

ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Variation)

$$CV = \frac{\text{পরিমিত ব্যবধান}}{\text{যোজিত গড়}} \times ১০০$$

আসুন উদাহরণ দিয়ে ব্যবধানাঙ্ক সম্পর্কে ধারণাটি আরও পরিষ্কার করে নেই।

উদাহরণ -১ ঃ নিচে দুইটি কারখানার শ্রমিকদের মজুরী সম্পর্কে তথ্য দেয়া হল,

কারখানা	শ্রমিকের গড় মাসিক মজুরী (টাকা)	মজুরীর পরিমিত ব্যবধান (টাকা)
ক	২,২০০	১২০
খ	২,৫০০	১৫০

এই সারণী থেকে কোন কারখানার শ্রমিকদের মজুরীর বিস্তার অধিক তা বের করতে হবে।

সমাধান ঃ কারখানার শ্রমিকদের মজুরীর ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় পদ্ধতি ––

কারখানা	শ্রমিকদের মাসিক গড় মজুরী (টাকা)	পরিমিত ব্যবধান (টাকা)	ব্যবধানাঙ্ক
ক	২২০০	১২০	৫.৪৫%
খ	২৫০০	১৫০	৬.০০%

উপরের তালিকাতে কিভাবে ব্যবধানাঙ্ক বের হলো তা আলোচনা করা যাক্।

এখানে,

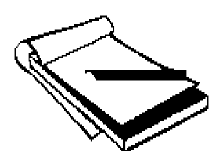
'ক' কারখানার শ্রমিকদের মজুরীর ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{\sigma_১}{\bar{x}_১} \times ১০০ = \frac{১২০}{২২০০} \times ১০০ = ৫.৪৫\%$

'খ' কারখানার শ্রমিকদের মজুরীর ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{\sigma_২}{\bar{x}_২} \times ১০০ = \frac{১৫০}{২৫০০} \times ১০০ = ৬.০০\%$

সুতরাং বলা যায়, যেহেতু কারখানা 'খ' এর শ্রমিকদের ব্যবধানাঙ্ক অধিক (৬%) সুতরাং 'খ' কারখানার শ্রমিকদের মজুরীর বিস্তার অধিক।

অনুশীলন

দুটি প্রতিষ্ঠানের মাসিক গড় মুনাফার পরিমিত ব্যবধান সমান হলেও যদি মাসিক গড় মুনাফার মধ্যে পার্থক্য থাকে তবে কোনটিকে ভালো বলা যাবে? কেন? ব্যাখ্যা করুন।



উদাহরণ-২ ঃ দুটি কোম্পানি কর্তৃক উৎপাদিত পলিথিন ব্যাগের সংখ্যা সম্পর্কে ৫০ দিনের নমুনা পরীক্ষা করে নিচের গণসংখ্যা সারণীতে ফলাফল প্রদর্শন করা হলো,

উৎপাদিত ব্যাগের সংখ্যা (হাজার)	দিনের সংখ্যা	
	ক কোম্পানি	খ কোম্পানি
৫ - ১০	২	১
১০ - ১৫	১০	৮
১৫ - ২০	২৫	২৮
২০ - ২৫	১১	৯
২৫ - ৩০	২	৪

সারণীতে কোন বিন্যাসটি অধিকতর স্থিতিশীল? দুইটি কোম্পানীর ব্যাগের উৎপাদনে দুটি ভিন্ন মেশিন ব্যবহৃত হলে কোন মেশিন ভালো?

দুটি কোম্পানির উৎপাদন ক্ষমাতার তথ্যবিন্যাসের ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করলে যে নিবেশনের ব্যবধানাঙ্ক কম সেটির উৎপাদন ক্ষমতা অধিক স্থিতিশীল হবে।

সমাধান ঃ দুটি কোম্পানির তথ্যবিন্যাসের ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করলে যে নিবেশনের ব্যবধানাঙ্ক কম সেটির উৎপাদন ক্ষমতা অধিক স্থিতিশীল হবে।

ক কোম্পানির ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয়

শ্রেণী	ব্যাগের সংখ্যা $= f$	মধ্যবিন্দু x	$d = \frac{x-A}{c}$	fd	fd^2
৫ - ১০	২	৭.৫	-২	-৪	১৬
১০ - ১৫	১০	১২.৫	-১	-১০	১০
১৫ - ২০	২৫	১৭.৫	০	০	০
২০ - ২৫	১১	২২.৫	১	১১	১১
২৫ - ৩০	২	২৭.৫	২	৪	৮
	$\sum f$ =৫০			$\sum f d$ =১	$\sum fd^2$ =৪৫

মনে করুন, অনুমিত গড় = ১৭.৫ এখানে, $d = \frac{x - ১৭.৫}{৫}$

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times C$$

$$\therefore = ১৭.৫ + \frac{১}{৫০} \times ৫ \qquad \overline{X} = ১৭.৫ + \frac{১}{১০} = ১৭.৫ + ০.১ = ১৭.৬$$

$$\sigma = c\sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2}$$

$$= ৫\sqrt{\frac{৪৫}{৫০} - \left(\frac{১}{৫০}\right)^২} \qquad = ৫\sqrt{০.৯ - .০০০৪}$$

$$= ৫\sqrt{.০৮৯৯৬} \qquad = ৪.৭৪২৪$$

সুতরাং, ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{\sigma}{x} \times ১০০ = \frac{৪.৭৪২৪}{১৭.৬} \times ১০০ = ২৬.৯৫\%$

খ কোম্পানির ব্যাবধানাঙ্ক নির্ণয়

শ্রেণী	ব্যাগের সংখ্যা f	মধ্যবিন্দু x	$d = \frac{x-A}{c}$	fd	fd^2
৫ - ১০	১	৭.৫	-২	-২	৪
১০ - ১৫	৮	১২.৫	-১	-৮	৮
১৫ - ২০	২৮	১৭.৫	০	০	০
২০ - ২৫	৯	২২.৫	১	৯	৯
২৫ - ৩০	৪	২৭.৫	২	৮	১৬
	$\sum f$ =৫০			$\sum f d$ = ৭	$\sum fd^2$ = ৩৭

মনে করুন, A = ১৭.৫

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \times C$$

$$\therefore \overline{X} = ১৭.৫ + \frac{৭}{৫০} \times ৫ = ১৭.৫ + \frac{৭}{১০} = ১৭.৫ + ০.৭ = ১৮.২ \text{ পাউন্ড}$$

$$\sigma = c\sqrt{\frac{\sum fd^{২}}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^{২}}$$

$$= ৫\sqrt{\frac{৩৭}{৫০} - \left(\frac{৭}{৫০}\right)^{২}} \quad = ৫\sqrt{০.৭৪ - (০.১৪)^{২}}$$

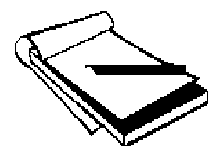
$$= ৫\sqrt{০.৭৪ - ০.০১৯৬} \quad = ৫\sqrt{০.৭২০৪} \quad = ৪.২৪৩৮$$

সুতরাং ব্যবধানাঙ্ক = $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times ১০০ = \frac{৪.২৪৩৮}{১৮.২} \times ১০০ = ২৩.৩২\%$

'খ' কোম্পানির ব্যবধানাঙ্ক কম। সুতরাং 'খ' কোম্পানির মেশিনের ব্যাগ উৎপাদন ক্ষমতা অধিক স্থিতিশীল। 'খ' কোম্পানির মেশিনের দৈনিক ব্যাগ উৎপাদনের গড় (১৮.২ হাজার) সুতরাং 'ক' কোম্পানির গড় (১৭.৬ হাজার) এর চেয়ে বেশী। সুতরাং উৎপাদনের জন্য খ কোম্পানির মেশিনটি উন্নত।

অনুশীলন

নিচের তথ্যের সাহায্যে একটি বিদ্যালয়ের ৯ম শ্রেণীর দুটি শাখার মধ্যে কোন শাখার ছাত্ররা গণিতে ভালো তা নির্ণয় করুন —



প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্র সংখ্যা	
	ক শাখা	খ শাখা
০ - ২০	৬	৫
২০ - ৪০	৯	১০
৪০ - ৬০	১৮	২০
৬০ - ৮০	১০	৯
৮০ - ১০০	৭	৬

গড় ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Mean Deviation)

ব্যবধানাঙ্ক এর মত অন্য এক প্রকার আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপক হচ্ছে গড় ব্যবধানাঙ্ক। এর মান নির্ণয়ে গড় ব্যবধান নির্ণয়ে যে বিশেষ ধরনের গড় ব্যবহার করা হয়েছে সেই গড়ের শতকরা হারে প্রকাশ করা হয়। যেহেতু গড় ব্যবধান যোজিত গড় এবং মধ্যমা - এই দুই জাতীয় গড় ব্যবহার করে নির্ণয় করা যায়, সেহেতু কোন প্রকারের গড় ব্যবহার করা হয়েছে তার উপর ভিত্তি করে নিচে উল্লেখিত দুইটি সূত্রের ব্যবহার করে গড় ব্যবধান নির্ণয় করা হয়। সূত্র দু'টি হলো,

ব্যবধানাঙ্ক এর মত অন্য এক প্রকার আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপক হচ্ছে গড় ব্যবধানাঙ্ক।

সূত্র ঃ ১, গড় ব্যবধানাঙ্ক = $\frac{\text{গড় ব্যবধান}}{\text{যোজিত গড়}} \times ১০০$

সূত্র ঃ ২, গড় ব্যবধানাঙ্ক = $\frac{\text{গড় ব্যবধান}}{\text{মধ্যমা}} \times ১০০$

উদাহরণ - ৩ ঃ একটি নমুনা জরিপ থেকে প্রাপ্ত দুইটি রেফ্রিজারেটরের মডেল সম্পর্কিত তথ্য নিম্নের গণসংখ্যা নিবেশনে দেয়া হলো,

জীবন সীমা (Life in years) বৎসর	রেফ্রিজারেটরের সংখ্যা	
	'ক' মডেল	'খ' মডেল
০ - ২	৫	৪
২ - ৪	১৭	১৪
৪ - ৬	২০	১৩
৬ - ৮	৯	১৯
৮ - ১০	৫	৯

১০ - ১২	৪	১

যোজিত গড়ের ভিত্তিতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করে গড় ব্যবধানাঙ্ক-এর সাহায্যে মডেল দুইটির জীবন সীমার (life in years) বিস্তার এর তুলনা করুন।

সমাধান ঃ গড় ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় (মডেল 'ক')

জীবনকাল বৎসর	গণসংখ্যা f	মধ্যমান x	fx	$\|x-\bar{x}\|$	$f\|x-\bar{x}\|$
০ - ২	৫	১	৫	৪.১৩	২০.৬৫
২ - ৪	১৭	৩	৫১	২.১৩	৩৬.২১
৪ - ৬	২০	৫	১০০	০.১৩	২.৬০
৬ - ৮	৯	৭	৬৩	১.৮৭	১৬.৮৩
৮ - ১০	৫	৯	৪৫	৩.৮৭	১৯.৩৫
১০ - ১২	৪	১১	৪৪	৫.৮৭	২৩.৪৮
	৬০		৩০৮		১১৯.১২

Σfx = ৩০৮

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{৩০৮}{৬০} = ৫.১৩$$

$$\text{গড় ব্যবধান} = \frac{\sum f|x-\bar{x}|}{n} = \frac{১১৯.১২}{৬০} = ১.৯৮৫৩$$

$$\text{সুতরাং, গড় ব্যবধানাঙ্ক} = \frac{\text{গড় ব্যবধান}}{\text{যোজিত গড়}} \times ১০০$$

$$= \frac{১.৯৮৫৩}{৫.১৩} \times ১০০ = ৩৮.৭\ \%$$

গড় ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় (মডেল 'খ')

জীবনকাল বৎসর	গণসংখ্যা f	মধ্যমান x	fx	$\|x-\bar{x}\|$	$f\|x-\bar{x}\|$
০ - ২	৪	১	৪	৪.৬০	১৮.৪০
২ - ৪	১৪	৩	৪২	২.৬০	৩৬.৪০
৪ - ৬	১৩	৫	৬৫	০.৬০	৭.৮০
৬ - ৮	১৯	৭	১৩৩	১.৪০	২৬.৬০
৮ - ১০	৯	৯	৮১	৩.৪০	৩০.৬০
১০ - ১২	১	১১	১১	৫.৪০	৫.৪০
	৬০		৩৩৬		১২৫.২০

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{৩৩৬}{৬০} = ৫.৬০$$

$$\text{গড় ব্যবধান} = \frac{\sum f|x-\bar{x}|}{n} = \frac{১২৫.২০}{৬০} = ২.০৮৬৭$$

$$\text{সুতরাং, গড় ব্যবধানাঙ্ক} = \frac{\text{গড় ব্যবধান}}{\text{যোজিত গড়}} \times ১০০$$

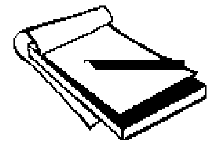
$$= \frac{২.০৮৬৭}{৫.৬০} \times ১০০ = ৩৭.২৬\%$$

যেহেতু 'ক' মডেলের রেফ্রিজারেটরের জীবনকাল বিন্যাসের গড় ব্যবধানাঙ্ক 'খ' মডেল অপেক্ষা বেশী, সেহেতু - 'ক' মডেল রেফ্রিজারেটরের জীবন কালের বিস্তার অপেক্ষাকৃত বেশী। অর্থাৎ জীবন কালের ভিত্তিতে খ মডেলের রেফ্রিজারেটর ভালো।

অনুশীলন

নিচের তথ্যের সাহায্যে মধ্যমার ভিত্তিতে গড় ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করুন এবং ফলাফলের উপর মন্তব্য করুন —

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্রের সংখ্যা	ছাত্রীর সংখ্যা
০ - ২০	৩	৪
২০ - ৪০	৫	৫
৪০ - ৬০	৮	৯
৬০ - ৮০	৬	৩
৮০ - ১০০	৪	৫



চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Quartile Deviation)

আপনি আগেই জেনেছেন যে সীমাবিহীন শ্রেণীব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে গড় নির্ণয় করা সম্ভব নয়। সে কারণেই ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয়ও সম্ভব হয় না। সে ক্ষেত্রে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপের উপযুক্ত পদ্ধতি হল চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক। এটি চতুর্থকের ভিত্তিতে নির্ণয় করা হয়। চতুর্থক আবার লেখ-এর সাহায্যেও নির্ণয় করা যায়। চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয়ের সূত্রটি হলো,

সীমাবিহীন শ্রেণীব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে গড় নির্ণয় করা সম্ভব নয়। সে কারণেই ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয়ও সম্ভব হয় না।

$$\text{চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times ১০০$$

যেখানে Q_3 = তৃতীয় চতুর্থক

Q_1 = প্রথম চতুর্থক।

উদাহরণ -৪ ঃ নিচের গণসংখ্যা নিবেশন থেকে চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করুন

সাপ্তাহিক আয় টাকা	শ্রমিকের সংখ্যা
৩৫০ টাকার কম	৮
৩৫০ - ৩৭০	১৬
৩৭০ - ৩৯০	৩৯
৩৯০ - ৪১০	৫৮
৪১০ - ৪৩০	৬০
৪৩০ - ৪৫০	৪০
৪৫০ - ৪৭০	২২
৪৭০ - ৪৯০	১৫
৪৯০ - ৫১০	১৫
৫১০ - ৫৩০	১০
৫৩০ এর অধিক	৯

সমাধান ঃ চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় পদ্ধতি

সাপ্তাহিক আয় টাকা	শ্রমিকের সংখ্যা f	যোজিত গণসংখ্যা fc
৩৫০ টাকার কম	৮	৮
৩৫০ - ৩৭০	১৬	৮+১৬ = ২৪
৩৭০ - ৩৯০	৩৯	২৪+৩৯ = ৬৩
৩৯০ - ৪১০	৫৮	৬৩+৫৮ = ১২১
৪১০ - ৪৩০	৬০	১২১+৬০ = ১৮১
৪৩০ - ৪৫০	৪০	১৮১+৪০ = ২২১
৪৫০ - ৪৭০	২২	২২১+২২ = ২৪৩

৪৭০ - ৪৯০	১৫	২৪৩+১৫ = ২৫৮
৪৯০ - ৫১০	১৫	২৫৮+১৫ = ২৭৩
৫১০ - ৫৩০	১০	২৭৩+১০ = ২৮৩
৫৩০ এর অধিক	৯	২৮৩+৯ = ২৯২

চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times ১০০$

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{n}{৪} - f_c}{f_{Q_১}} \times C$$

$\frac{n}{৪} = \frac{২৯২}{৪} = ৭৩$ যা ১২১তম মানের মধ্যে অবস্থান করছে।

সুতরাং, প্রথম চতুর্থক শ্রেণী হচ্ছে (৩৯০-৪১০) আয় শ্রেণী

$$\therefore Q_১ = ৩৯০ + \frac{৭৩ - ৬৩}{৫৮} \times ১০ = ৩৯০ + ১.৭২ = ৩৯১.৭২ \text{ টাকা}$$

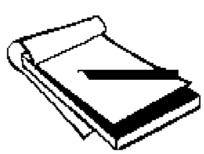
আবার, $\frac{৩n}{৪} = \frac{৩ \times ২৯২}{৪} = ২১৯$ যা ২২১তম মানের মধ্যে অবস্থান করছে।

অতএব, তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণী হচ্ছে (৪৩০-৪৫০) আয় শ্রেণী

$$\therefore Q_3 = L_১ + \frac{\frac{n}{৪} - f_c}{f_{Q_৩}} \times C$$

$$= ৪৩০ + \frac{২১৯ - ১৮১}{৪০} \times ১০ = ৪৩০ + ৯.৫ = ৪৩৯.৫ \text{ টাকা}$$

চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times ১০০ \quad = \frac{৪৩৯.৫ - ৩৯১.৭২}{৪৩৯.৫ + ৩৯১.৭২} \times ১০০ = ৫.৭৫\%$



অনুশীলন

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনে ছাত্রদের উচ্চতা অনুসারে শ্রেণীকৃত গণসংখ্যা বিন্যাস দেওয়া হলো,

উচ্চতা (ইঞ্চি)	ছাত্রের সংখ্যা
৫০ - ৫২	১
৫২ - ৫৪	৬
৫৪ - ৫৬	২০
৫৬ - ৫৮	২৬
৫৮ - ৬০	১৮
৬০ - ৬২	১৬
৬২ - ৬৪	১০
৬৪ - ৬৮	৫

বিন্যাসটির চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক কত?

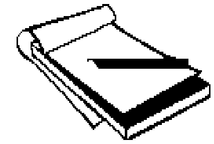
পরিসরাঙ্ক ঃ পরিসরের মাধ্যমে দুই বা ততোধিক তথ্য সারির বিস্তার তুলনা করতে পরিসরাঙ্ক ব্যবহার করা চলে। এই পরিসরাঙ্ক নির্ণয়ের সূত্রটি নিম্নরূপ,

পরিসরের মাধ্যমে দুই বা ততোধিক তথ্য সারির বিস্তার তুলনা করতে পরিসরাঙ্ক ব্যবহার করা চলে।

$$\text{পরিসরাঙ্ক} = \frac{L-S}{L+S}$$

যেখানে L = সবচেয়ে বড় রাশি

S = সবচেয়ে ছোট রাশি



অনুশীলন

সোমবার থেকে শনিবার পর্যন্ত গত সপ্তাহে XYZ কোম্পানির শেয়ারের দাম ছিল নিম্নরূপ,

দিবস	শেয়ারের দাম (টাকা)
সোমবার	১৪০
মঙ্গলবার	১৮০
বুধবার	২০০
বৃহস্পতিবার	১৯০
শুক্রবার	২২০
শনিবার	২০৫

তথ্যসারির পরিসরাঙ্ক কত?

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. বিস্তার বলতে কী বুঝায় ? আপেক্ষিক ও অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপকগুলি কী কী? এদের পার্থক্য বর্ণনা করুন।

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের ব্যবধানাঙ্ক কত?

সময় (সেকেন্ড)	টেলিফোনের সংখ্যা
০ - ২০	৮
২০ - ৪০	১৮
৪০ - ৬০	৪২
৬০ - ৮০	৮৩
৮০ - ১০০	৮০
১০০ - ১২০	৪৫
১২০ - ১৪০	২৪

২. ব্যবধানাঙ্ক, গড় ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধান কেন কখন ব্যবহৃত হয় উদাহরণসহ ব্যাখ্যা দিন।

নিচের গণসংখ্যা সারণীতে দুইটি কারখানার কর্মচারীদের বেতন সম্পর্কে তথ্য উপস্থাপন করা হলো,

আয় (টাকা)	কারখানা ‘ক’ কর্মচারীর সংখ্যা	কারখানা ‘খ’ কর্মচারীর সংখ্যা
২০০০ - ২৫০০	৬০	৫০
২৫০০ - ৩০০০	৭০	৮০
৩০০০ - ৩৫০০	১২০	৯০
৩৫০০ - ৪০০০	৩০	১১০
৪০০০ - ৪৫০০	১০	২০

কারখানা দুইটির বেতন বৈষম্য সম্পর্কে আলোকপাত করুন।

৩. বিস্তার বিশ্লেষণ সম্পর্কে বিশদ ব্যাখ্যা দিন। বিভিন্ন প্রকার বিস্তার পরিমাপকের দোষগুণ তুলনা করুন।

নিচের গণসংখ্যা সারণীতে দুই প্রকার গাড়ির সম্পর্কে নমুনা জরিপ থেকে প্রাপ্ত তথ্য উপস্থাপন করা হলো,

জবীনকাল (কি:মি:)	‘ক’ কোম্পানি	‘খ’ কোম্পানি
৪,০০০ - ৮,০০০	১৬	১০
৮,০০০ - ১২,০০০	২৪	২৯
১২,০০০ - ১৬,০০০	২৬	৩৫
১৬,০০০ - ২০,০০০	২২	১৯
২০,০০০ - ২৪,০০০	১০	১২

কোন প্রকার গাড়ির জীবনকাল অধিকতর স্থিতিশীল।

৪. বিস্তার ধারণাটির উদাহরণসহ আলোচনা করুন। পরিসংখ্যান তথ্য বিশ্লেষণে ব্যবধানাঙ্কের ব্যবহার কী কী?

একটি কারখানায় দুই প্রকারের বিদ্যুৎ বাতি তৈরি করা হয়। নিচের তথ্য থেকে এদের জীবনকালের বিস্তার সম্পর্কে তুলনা করুন।

জীবনকাল (ঘন্টা)	বাতি 'ক'	বাতি 'খ'
৭০০ - ৯০০	৪	৩
৯০০ - ১১০০	১২	৩৩
১১০০ - ১৩০০	২৭	১৫
১৩০০ - ১৫০০	২৭	৬
১৫০০ - ১৭০০	৮	৪

৫. অনপেক্ষ ও আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপক গুলির তুলনামূলক আলোচনা করুন। কোন কোন ক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক অধিক উপযোগী তা কারণসহ ব্যাখ্যা করুন।

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

নম্বর	ছাত্রের সংখ্যা
৪০ - ৫০	১৮
৫০ - ৬০	২৫
৬০ - ৭০	৩০
৭০ - ৮০	১০
৮০ - ৯০	৭

পাঠ-৫ : বঙ্কিমতা, পরিঘাত ও সূঁচালতা
(Skewness, Moments & Kurtosis)

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- বঙ্কিমতার সংজ্ঞা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- প্রতিসম ও অপ্রতিসম বিন্যাস চিহ্নিত করতে পারবেন
- দক্ষিনায়ত বঙ্কিমতা ও বাম বঙ্কিমতার পার্থক্য নিরূপণ ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- বঙ্কিমতা ও বিস্তারের মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করতে পারবেন
- কোন নিবেশনে বঙ্কিমতা বিদ্যমান আছে কিনা-তা' পরীক্ষা করতে পারবেন
- কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতা অঙ্ক, বাউলির বঙ্কিমতা অঙ্ক, কেলি-এর বঙ্কিমতা অঙ্কের সংজ্ঞার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন এবং সেইভাবে বিন্যাসের বঙ্কিমতার প্রকার নিরূপণ করতে পারবেন
- পরিঘাতের সংজ্ঞার বর্ণনা দিতে পারবেন
- প্রয়োজনীয় পরিঘাতসমূহ নির্ণয় করতে পারবেন
- সূঁচতালতার সংজ্ঞা ও প্রকারভেদ বিশ্লেষণ করতে পারবেন
- পরিঘাত ব্যবহার করে বঙ্কিমতা ও সূঁচালতা পরিমাপক নির্ণয় করতে পারবেন।

বঙ্কিমতা (Skewness)

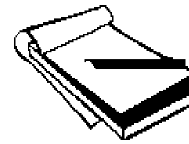
পূর্ববর্তী পাঠগুলি পড়ে আপনারা জেনেছেন যে, শুধুমাত্র একটি পরিমাপকের সাহায্যে পরিসংখ্যান নিবেশনের বৈশিষ্ট্যসমূহ প্রকাশ করা সম্ভব নয়। যোজিত গড়ের সাহায্যে পরিসংখ্যান নিবেশনের কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও পরিমিত ব্যবধানের সাহায্যে গড়ের উভয় পাশে তথ্য সারির রাশিসমূহ কিরূপে বিস্তৃত তা পরিমাপ করা হয়। কিন্তু দুই বা ততোধিক নিবেশনের গড় ও পরিমিত ব্যবধান এর মান সমান হলেও প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যের দিক দিয়ে এরা এক রকম নাও হতে পারে। বিষয়টি একটি উদাহরণ দিয়ে সহজ করা যাক্। তিনটি কারখানার প্রত্যেকটি থেকে ২০ জন করে শ্রমিকের নমুনা নিয়ে, তাদেরকে প্রতি ঘন্টার শ্রমের মজুরী অনুসারে শ্রেণীভূক্ত করে তিনটি মজুরী নিবেশন পাওয়া গেল এবং নিচে সেগুলি পাশাপাশি প্রদর্শিত হলো,

কারখানা 'ক'		কারখানা 'খ'		কারখানা 'গ'	
ঘন্টা প্রতি মজুরী	শ্রমিকের সংখ্যা	ঘন্টা প্রতি মজুরী	শ্রমিকের সংখ্যা	ঘন্টা প্রতি মজুরী	শ্রমিকের সংখ্যা
০ - ৫	১	০ - ৫	১	০ - ৫	১
৫ - ১০	৩	৫ - ১০	৪	৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৬	১০ - ১৫	৩	১০ - ১৫	৯
১৫ - ২০	৬	১৫ - ২০	৯	১৫ - ২০	৩
২০ - ২৫	৬	২০ - ২৫	২	২০ - ২৫	৪
২৫ - ৩০	১	২৫ - ৩০	১	২৫ - ৩০	১

তিনটি কারখানা থেকে প্রাপ্ত তিনটি মজুরী নিবেশনের প্রত্যেকটি গড় মজুরী ১৫ টাকা এবং এর প্রতি নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান ৬.২০ টাকা। কিন্তু প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যের দিক থেকে তিনটি কারখানা থেকে প্রাপ্ত মজুরী বিন্যাস একরকম নয়। কারখানা 'ক' এর মজুরী বিন্যাসের গড়, মধ্যমা ও মোড এর প্রত্যেকটির মান ১৫ টাকা। অর্থাৎ পরিমাপক তিনটির মান সমান। **যে সব বিন্যাসের রাশিগুলির বন্টন সুষম হয়, সে সব নিবেশনের গড়, মধ্যমা ও মোড সমান হয়। এরূপ গণসংখ্যা বিন্যাসকে প্রতিসম (Symmetrical) বিন্যাস বলে এবং নিবেশনটিকে বলে প্রতিসম নিবেশন।** কারখানা 'ক' থেকে প্রাপ্ত শ্রমিকদের মজুরী বিন্যাসটি প্রতিসম। আমরা যদি এই ধরনের নিবেশনকে লেখ চিত্রে উপস্থাপন করি, তা হলে একটি প্রতিসম রেখা পেয়ে থাকি। 'খ' এবং 'গ' কারখানা থেকে, প্রাপ্ত শ্রমিকদের মজুরী নিবেশনের উক্ত বৈশিষ্ট্য নাই। 'খ' এবং 'গ' মজুরী নিবেশনের গড়, মধ্যমা এবং মোডের মানগুলো যথাক্রমে ১৫, ১৬.১ ও ১৭.৫ এবং ১৫, ১৩.৯ ও ১২.৭। গণসংখ্যা নিবেশনে প্রতিসাম্যের অভাব (lack of symmetry)কে বলা হয় বঙ্কিমতা (Skewness)। একটি পূর্ণ প্রতিসম নিবেশন বঙ্কিমতা বিবর্জিত। বঙ্কিমতা পরিমাপের সময় পরিসংখ্যান নিবেশনের রাশিগুলির বন্টনে যে অসামঞ্জস্যতা - তার পরিমাণ নির্ণয় করা হয়।

প্রতিসম গণসংখ্যা রেখ
আকার উপুড় করা এ
ঘন্টার মত।

অপ্রতিসম বা বঙ্কিম (Skewed) নিবেশনে যোজিত গড়, মধ্যমা এবং মোডের মান সমান হয় না। এধরনের নিবেশনকে লেখ চিত্রে স্থাপন করলে আমরা প্রতিসম গণসংখ্যা রেখা পাই না। প্রতিসম গণসংখ্যা রেখার (Frequency curve) আকার উপুড় করা একটি ঘন্টার মত। আবার অপ্রতিসম গণসংখ্যা নিবেশনের রেখাটি হয় বঙ্কিম।



অনুশীলন

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের গড়, মধ্যমা ও প্রচুরক নির্ণয় করে দেখুন যে নিবেশনটি প্রতিসম কী না ___

প্রাপ্ত নম্বর	০ - ১০	১০ - ২০	২০ - ৩০	৩০ - ৪০	৪০ - ৫০
ছাত্রসংখ্যা	৪	৬	১০	৬	৪

গণসংখ্যা নিবেশন যে প্রকারেরই হোক না কেন, তাকে লেখ চিত্রে উপস্থাপন করলে যে রেখার সৃষ্টি হয় সেই রেখার শীর্ষ বিন্দুই হল মোডের প্রতীক। কারণ গণসংখ্যা রেখার (Frequency curve) শীর্ষ বিন্দু সর্বোচ্চ গণসংখ্যা প্রদর্শন করে। পরিসংখ্যান তথ্য নিবেশনে রাশিগুলির অসামঞ্জস্যতার ফলে কোন কোন সময় গণসংখ্যা রেখাটি বাম দিকে নীচু হয়ে ডানদিকে ফুলে উঠে, আবার কখন কখনও ডানদিকে নীচু হয়ে বামদিকে ফুলে উঠে। তথ্য নিবেশনের প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যের কারণে বঙ্কিমতা তিন প্রকারের হতে পারে। যেমন,

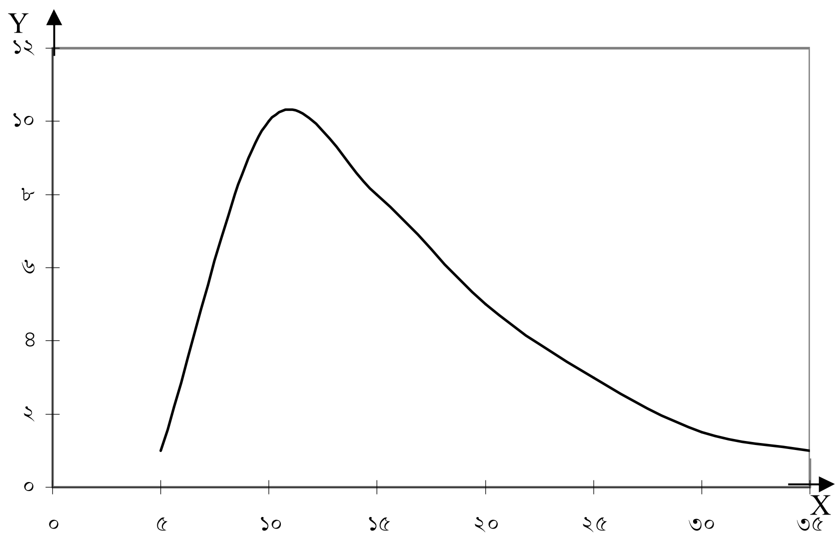
১. ধনাত্মক বঙ্কিমতা বা দক্ষিনায়ত বঙ্কিমতা
২. ঋণাত্মক বঙ্কিমতা বা বাম বঙ্কিমতা
৩. প্রতিসম বঙ্কিমতা

আসুন এই তিনটি বঙ্কিমতা নিয়ে অলোচনা করা যাক।

ধনাত্মক বা দক্ষিনায়ত বঙ্কিমতা

ডান দিকের রাশির বন্টন
যদি বাম দিকের রাশির
বন্টন অপেক্ষা কম হয়
তাকে ধনাত্মক বঙ্কিমতা

বঙ্কিমতার পরিমাপক ধনাত্মক হবে যদি গণসংখ্যা রেখার বাম দিকে রাশি গুলির বন্টন ডান দিক অপেক্ষা অধিক হয় (বামদিকের রাশির বন্টন > ডান দিকের রাশির বন্টন)। এ ক্ষেত্রে গণসংখ্যা রেখাটি ডান দিকে নিচু হয়ে বাম দিকে বেশী পরিমাণ ফুলে উঠবে। অর্থাৎ নিবেশনের চলকের পরিসরকে দুইভাগে বিভক্ত করলে প্রথমার্ধের গণসংখ্যার ঘনত্ব যদি অধিক পরিলক্ষিত হয় তবেই দক্ষিনায়ত বা ধনাত্মক বঙ্কিমতার লক্ষণ বলে বিবেচিত হবে। পূর্বে উল্লিখিত **কারখানা 'গ'** এর শ্রমিকদের মজুরী বিন্যাসের বঙ্কিমতা দক্ষিনায়ত বা ধনাত্মক। এরূপ বিন্যাসের গণসংখ্যা রেখার প্রকৃতিটি (Nature of the frequency curve) সাধারণত নিম্নরূপ হয়-

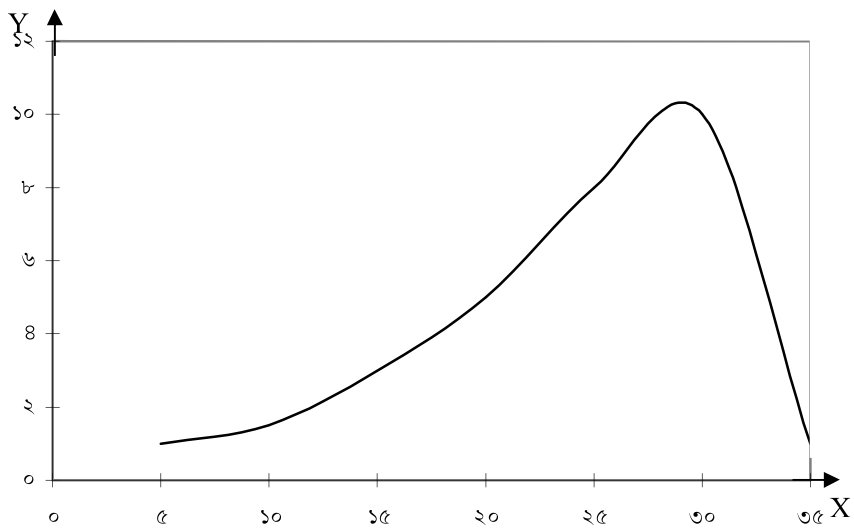


চিত্র -১ : দক্ষিনায়ত না ধনাত্মক বঙ্কিমতা গণসংখ্যা রেখায় ধনাত্মক বঙ্কিমতায় গড়ের মান মধ্যমা অপেক্ষা অধিক এবং মধ্যমার মান মোড অপেক্ষা অধিক হয়।

ঋণাত্মক বা বাম বঙ্কিমতা

দিকের রাশির বন্টন
াম দিকের রাশির
অপেক্ষা বেশী হয়
তা হবে ঋনাত্মক

কোন নিবেশনের বঙ্কিমতা ঋণাত্মক হবে, যদি ডান দিকের রাশিগুলির বন্টন বাম দিক অপেক্ষা অধিক হয় (ডানদিকের রাশির বন্টন > বামদিকের রাশির বন্টন) অর্থাৎ গণসংখ্যা রেখার বাম দিক নীচু হয়ে এবং ডান দিক বেশী পরিমাণে ফুলে উঠে। এ ক্ষেত্রে নিবেশনের পরিসরকে দুই ভাগে ভাগ করলে দ্বিতীয় অংশের গণসংখ্যার ঘনত্ব (Frequency concentration) প্রথম অংশ অপেক্ষা অধিক পরিলক্ষিত হবে। পূর্বে উল্লিখিত **কারখানা 'খ'** এর শ্রমিকদের মজুরী বিন্যাস বাম বঙ্কিম বা বঙ্কিমতা ঋণাত্মক। এরূপ নিবেশনের গণসংখ্যা রেখার প্রকৃতি সাধারণত নিম্নরূপ হয়-



চিত্র -২ ঃ বাম বঙ্কিমতা বা ঋণাত্মক বঙ্কিমতা

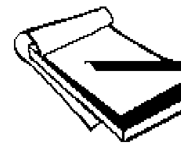
ঋণাত্মক বঙ্কিমতার ক্ষেত্রে মোডের মান, মধ্যমা অপেক্ষা অধিক এবং মধ্যমার মান গড় অপেক্ষা অধিক হয়।

প্রতিসম বঙ্কিমতা

ডান দিকের রাশির
বাম দিকে রাশির
র সমান হয় তখন
প্রতিসম বলা হয়।

এর পরে আসছে প্রতিসম বঙ্কিমতা কোন নিবেশনে গড়, মধ্যমা ও মোডের মান সমান হলে, বঙ্কিমতা শূন্য হবে এবং নিবেশনের গণসংখ্যা রেখাটি হবে প্রতিসম। পূর্বে **কারখানা 'ক'** এর শ্রমিকদের মজুরী বিন্যাসের বঙ্কিমতা শূন্য এবং এর গণসংখ্যা রেখাটি প্রতিসম। এরূপ নিবেশনের গণসংখ্যা রেখাটি সাধারণত নিম্নরূপ হয়-

চিত্র -৩ ঃ বঙ্কিমতা শূন্য প্রতিসম গণসংখ্যা রেখা



অনুশীলন

নিচের নিবেশনগুলোর বঙ্কিমতা উল্লেখ করুন —

১ম নিবেশন : গড় ∠ মধ্যমা ∠ প্রচুরক

২য় নিবেশন : প্রচুরক = গড় = মধ্যমা

৩য় নিবেশন : প্রচুরক ∠ মধ্যমা ∠ গড়

নিবেশনের বঙ্কিমতার পরীক্ষা (Tests of Skewness)

নির্দিষ্ট পরীক্ষার মাধ্যমে পরিসংখ্যান তথ্যসারি প্রতিসম না বঙ্কিম তা নিরূপণ করা যায়।

আপনি এতক্ষণ যে বঙ্কিমতার শ্রেণী বিভাগ পড়লেন এর একটা পরীক্ষা আছে। অর্থাৎ নির্দিষ্ট পরীক্ষার মাধ্যমে কোন পরিসংখ্যান তথ্যসারি প্রতিসম (symetrical) না বঙ্কিম (skewed) তা নিরূপণ করা যায়। নিচের শর্তসমূহ বর্তমান থাকলে একটি পরিসংখ্যান নিবেশন প্রতিসম হবে,

- তথ্য নিবেশনের গড়, মধ্যমা ও মোড সমান
- মধ্যমা থেকে রাশিগুলির ধনাত্মক পার্থক্যসমূহের সমষ্টি ও ঋণাত্মক পার্থক্যগুলির সমষ্টি সমান
- মধ্যমা থেকে প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক সমদূরবর্তী, অর্থাৎ $\text{Mode} - Q_{১} = Q_{৩} - \text{Mode}$
- মোড থেকে উভয়পাশে সমদূরত্বে অবস্থিত গণসংখ্যা পরস্পর সমান
- নিবেশনের গণসংখ্যা রেখার আকৃতি একটি উল্টানো ঘন্টার মত

বঙ্কিমতা ও বিস্তারের মধ্যে পার্থক্য

বঙ্কিমতা পরিমাপ বিস্তারের মাত্রার উপর নির্ভরশীল।

বিস্তার বলতে কোন নিবেশনের কেন্দ্র বিন্দু থেকে তথ্য রাশিগুলির ভেদ বা ব্যবধানকে বুঝায়। অপরপক্ষে, বঙ্কিমতা বিস্তারের নির্দিষ্ট দিক নির্দেশ করে এবং তথ্য সারির প্রতিসাম্যের অভাবকে বুঝায়। বঙ্কিমতা হচ্ছে তথ্য নিবেশনের অসামঞ্জস্যতার প্রকাশ। সত্যিকার অর্থে বঙ্কিমতা পরিমাপ বিস্তারের মাত্রার উপর নির্ভরশীল। বিন্যাসের প্রকৃতি চিহ্নিতকরণে বঙ্কিমতা একটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য। তবে বিস্তার পরিসংখ্যান তথ্য বিশ্লেষণে অবশ্যই অধিকতর গুরুত্বপূর্ণ।

বঙ্কিমতার পরিমাপ

দুই বা ততোধিক তথ্য নিবেশনের মধ্যে তুলনা করতে বঙ্কিমতা সহায়ক।

কোন নিবেশনের প্রতিসাম্য অভাব ও তা গড়ের কোন দিকে বিদ্যমান এবং তার পরিমাণ কী ইত্যাদি নির্ণয়ের জন্য বঙ্কিমতার পরিমাণগত পরিমাপের প্রয়োজন হয়। বঙ্কিমতার পরিমাপ দ্বারা দুই বা ততোধিক তথ্য নিবেশনের প্রকৃতি (Nature) তুলনা করা সম্ভব হয়। গড় এবং মোডের পার্থক্যই হচ্ছে অনপেক্ষ বঙ্কিমতার পরিমাপক। একই বিন্যাসের গড় যদি মোডের চেয়ে বড় হয় তবে নিবেশনটি ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম এবং মোড যদি গড়ের চেয়ে বেশী হয়, তবে নিবেশন হবে বাম বঙ্কিম। বিভিন্ন এককে প্রকাশিত তথ্যের বঙ্কিমতা অনপেক্ষ পরিমাপ দ্বারা তুলনা করা সম্ভব নয়। সেজন্য বঙ্কিমতার আপেক্ষিক পরিমাপই বহুল প্রচলিত। নিচে বঙ্কিমতার কয়েকটি আপেক্ষিক পরিমাপ বিষয়ে আলোচনা করা হলো।

আপনি এতক্ষণ জানলেন, বঙ্কিমতা কী, বঙ্কিমতার প্রকারভেদ, বিস্তারের সাথে এর পার্থক্য এবং কীভাবে বঙ্কিমতা পরিমাপ করা যায় এসব। আসুন এখন বিভিন্ন পরিসংখ্যানবিদের বঙ্কিমতা পরিমাপ প্রক্রিয়া আলোচনা করে ধারণা নেয়া যাক।

কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতা অঙ্ক

কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিম অঙ্ক নির্ণয়ে মোড থেকে যোজিত গড়ের বিচ্যুতি পরিমাপকে আপেক্ষিক জন্য পরিমিত ব্যবধান ভাগ করা হয়।

প্রথমে মোড থেকে যোজিত গড়ের বিচ্যুতির পরিমাপ দ্বারা বঙ্কিমতার মাত্রা নির্ণয় করে – এই পরিমাপকে একক থেকে বিমুক্ত করে, আপেক্ষিক করার জন্য পরিমিত ব্যবধান দ্বারা ভাগ করা হয়। পরিসংখ্যানবিদ কার্ল পিয়ারসন এই সূত্রের প্রণেতা। সূত্রটি আংশিকভাবে প্রকাশ করলে দাঁড়ায়,

$$\text{বঙ্কিমতা অঙ্ক} = \frac{\text{যোজিত গড়} - \text{মোড}}{\text{পরিমিত ব্যবধান}}$$

যে সকল নিবেশনের ক্ষেত্রে মোড নির্ণয় সম্ভব নয়, সেই সব ক্ষেত্রে উপর্যুক্ত সূত্রের পরিবর্তে নিচের সূত্রটি ব্যবহার করা হয়।

$$\text{বঙ্কিমতা অঙ্ক} = \frac{৩\ (\text{যোজিত গড়} - \text{মধ্যমা})}{\text{পরিমিত ব্যবধান}}$$

এখন আসুন উদাহরণের সাহায্য নিয়ে বিষয়টি আরও সহজভাবে জেনে নেই।

উদাহরণ-১ ঃ নিচের নিবেশনে ঘন্টা প্রতি শ্রমের মজুরী অনুসারে শ্রেণীভূক্ত শ্রমিকদের গণসংখ্যা বিন্যাস দেয়া হলো,

ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা
০ - ৫	১০
৫ - ১০	২০
১০ - ১৫	৪০
১৫ - ২০	২০
২০ - ২৫	১০
	১০০

কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতা অঙ্ক নিরূপণ করে নিবেশনের প্রকৃতি সম্পর্কে আলোকপাত করুন।

সমাধান ঃ গড়, মোড ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়

মজুরী	f	মধ্যমান x	fx	$d = \frac{x - A}{c}$	fd	$f\text{d}^2$
০ - ৫	১০	২.৫	২৫	-২	-২০	৪০
৫ - ১০	২০	৭.৫	১৫০	-১	-২০	২০
১০ - ১৫	৪০	১২.৫	৫০০	০	০	০
১৫ - ২০	২০	১৭.৫	৩৫০	১	২০	২০
২০ - ২৫	১০	২২.৫	২২৫	২	২০	৪০
মোট	$\sum f$ = ১০০		$\sum f$x = ১,২৫০		$\sum f$d = ০	$\sum f\text{d}^2$ =১২০

মনে করি, A = ১২.৫ সুতরাং, $\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{১,২৫০}{১০০} = ১২.৫০$ টাকা

পরিমিত ব্যবধান $\sigma = c\sqrt{\frac{\sum \text{fd}^২}{\text{n}} - \left(\frac{\sum \text{fd}}{\text{n}}\right)^২}$

$= ৫\sqrt{\frac{১২০}{১০০} - \left(\frac{০}{১০০}\right)^২} = ৫\sqrt{১.২০} = ৫.৪৮$

মোড শ্রেণী হচ্ছে (১০-১৫) মজুরী শ্রেণী। যেহেতু এ শ্রেণীতে গণসংখ্যা সর্বোচ্চ।

সুতরাং মোড $= \text{L}_1 + \frac{\text{A}_1}{\text{A}_1 + \text{A}_2} \times \text{C}$

এখানে $\text{L}_১$ = ১০,

$\text{A}_১$ = ৪০ - ২০ = ২০ (মোড শ্রেণীর গণসংখ্যা – এর পূর্ববর্তী শ্রেণীর গণসংখ্যা)

$\text{A}_২$ = ৪০ - ২০ =২০ (মোড শ্রেণীর গণসংখ্যা – এর পরবর্তী শ্রেণীর গণসংখ্যা)

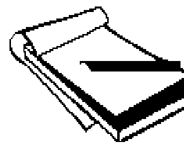
$$মোড = ১০ + \frac{২০}{২০+২০} \times ৫ = ১০ + ২.৫ = ১২.৫০ \text{ টাকা}$$

$$কার্ল\ পিয়ারসনের\ বঙ্কিমতা\ অঙ্ক = \frac{যোজিত\ গড়\ -\ মোড}{পরিমিত\ ব্যবধান}$$

$$= \frac{১২.৫০ - ১২.৫০}{৫.৪৮} = ০$$

যেহেতু বঙ্কিমতা অঙ্ক শূণ্য সুতরাং নিবেশনটি প্রতিসম (Symmetrical)।

অনুশীলন
প্রান্ত খোলা নিবেশনের ক্ষেত্রে কি কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতা অঙ্ক নির্ণয় করা সম্ভব? আপনার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি প্রদান করুন।



বাউলী'র বঙ্কিমতা অঙ্ক

গণসংখ্যা নিবেশনে প্রান্তখোলা শ্রেণীসীমা থাকলে যোজিত গড় নির্ণয় করা যায় না। সেক্ষেত্রে কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতা অঙ্ক ব্যবহার করে বঙ্কিমতা নির্ণয় করা যায় না। তাই চতুর্থক ও মধ্যমা ব্যবহার করে বঙ্কিমতা পরিমানের জন্য বাউলী একটি সূত্র প্রদান করেন। এই সূত্রটি হলো,

গণসংখ্যা নিবেশনে প্রান্ত শ্রেণীসীমা থাকলে কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতা অ ব্যবহার করে বঙ্কিমতা নি করা যায় না।

বাউলী'র বঙ্কিমতা অঙ্ক (Bowley's Co-efficient of skewness) $= \frac{Q_৩ + Q_১ - ২\ মধ্যমা}{Q_৩ + Q_১}$

বাউলী'র পদ্ধতিতে বঙ্কিমতার সর্বোচ্চ মাত্রা হতে পারে +১ এবং সর্বনিম্ন মাত্রা হতে পারে -১। এই বঙ্কিমতা পরিমাপকটিকে চতুর্থক ভিত্তিক পরিমাপক বলা হয়। আসুন উদাহরণটি দেখি।

বাউলী'র পদ্ধতিতে বঙ্কিমতার সর্বোচ্চ মাত্রা পারে +১ এবং সর্বনিম্ন হতে পারে-১।

উদাহরণ -২ ঃ নিচের তথ্য থকে বাউলীর বঙ্কিমতা অঙ্ক নিরূপণ করে নিবেশনটির প্রকৃতি সম্পর্কে আলোকপাত করুন।

ওজন (পাউন্ড)	ব্যক্তির সংখ্যা
৭০ - ৮০	৭
৮০ - ৯০	১১
৯০ - ১০০	১৫
১০০ - ১১০	২৫
১১০ - ১২০	৩০
১২০ - ১৩০	৪০
১৩০ - ১৪০	৫
১৪০ - ১৫০	৩

সমাধান ঃ Q_1, মধ্যমা ও Q_3 নির্ণয়

ওজন (পাউন্ড)	ব্যক্তির সংখ্যা f	যোজিত গণসংখ্যা fc
৭০ - ৮০	৭	৭
৮০ - ৯০	১১	১৮
৯০ - ১০০	১৫	৩৩
১০০ - ১১০	২৫	৫৮
১১০ - ১২০	৩০	৮৮
১২০ - ১৩০	৪০	১২৮
১৩০ - ১৪০	৫	১৩৩
১৪০ - ১৫০	৩	১৩৬

$$Q_১ = L_১ + \frac{\frac{n}{৪} - f_c}{f_{Q_১}} \times C$$

যেহেতু $\frac{n}{৪} = \frac{১৩৬}{৪} = ৩৪$ সুতরাং, প্রথম চতুর্থক শ্রেণী হচ্ছে (১০০-১১০) শ্রেণী।

অতএব, $Q_১ = L_১ + \frac{\frac{n}{৪} - f_c}{f_{Q_১}} \times C$

এখানে $L_১$ =১০০, f_c = ৩৩, $f_{Q_১}$ =২৫, C =১০

$$Q_১ = ১০০ + \frac{৩৪ - ৩৩}{২৫} \times ১০$$

$= ১০০ + \frac{১}{২৫} \times ১০ = ১০০ + ০.৪ = ১০০.৪০$ পাউন্ড

মধ্যমা শ্রেণী হচ্ছে সেই শ্রেণী, যার যোজিত গণসংখ্যা $\frac{n}{২}$এর চেয়ে প্রথম বারের মত সমান বা বেশী হয়। $\frac{n}{২} = \frac{১৩৬}{২} = ৬৮$, অতএব মধ্যমা শ্রেণী হচ্ছে (১১০-১২০) শ্রেণী।

মধ্যমা = $L_১ + \frac{\frac{n}{২} - f_c}{f_m} \times C$

$= ১১০ + \frac{৬৮ - ৫৮}{৩০} \times ১০ = ১১০ + \frac{১০}{৩০} \times ১০$

$= ১১০ + ৩.৩৩ = ১১৩.৩৩$ পাউন্ড।

তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণী হচ্ছে সেই শ্রেণী যে শ্রেণীর গণসংখ্যা প্রথমবারের মত $\frac{৩n}{৪}$ এর সমান বা অধিক হয়। $\frac{৩n}{৪} = \frac{১৩৬ \times ৩}{৪} = ১০২$; অতএব তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণী হচ্ছে (১২০-১৩০) শ্রেণী।

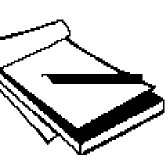
$$Q_৩ = L_১ + \frac{\frac{৩n}{৪} - f_c}{f_{Q_৩}} \times C$$

$= ১২০ + \frac{১০২ - ৮৮}{৪০} \times ১০ = ১২০ + ৩.৫ = ১২৩.৫$

বাউলীর বঙ্কিমতা অঙ্ক = $\frac{১২৩.৫০ + ১০০.৪০ - ২ \times ১১৩.৩৩}{১২৩.৫০ - ১০০.৪০}$

$= \frac{২২৩.৯০ - ২২৬.৬৬}{২৩.১০} = -\frac{২.৭৬}{২৩.১০} = -০.১১৯৪৮$

নিবেশনটি প্রকৃতিগত ভাবে বাম বঙ্কিম বা উহার বঙ্কিমতা ঋণাত্মক। অর্থাৎ, অধিক সংখ্যক ওজনের ব্যক্তির সংখ্যা কম ওজনের লোকের সংখ্যার চেয়ে বেশী।



অনুশীলন

কাল্পনিক তথ্য নিবেশনের সাহায্যে দেখান যে, বাউলী'র বঙ্কিমতা অঙ্ক-এর মান +১ থেকে −১ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে।

কেলীর বঙ্কিমতা অঙ্ক

পূর্বে বর্ণিত বাউলীর বঙ্কিমতা অঙ্ক নিরূপণে তথ্যসারির প্রাপ্ত রাশিসমূহ যথার্থভাবে গণনার মধ্যে ধরা হয় না। সে জন্য কেলী দশহারিক ও শতহারিক ব্যবহার করে নিচে উল্লিখিত বঙ্কিমতা অঙ্ক নিরূপন পদ্ধতি প্রণয়ন করেছেন। তাঁর দেয়া সূত্রগুলো হলো,

কেলী দশহারিক ও শতহারিক ব্যবহার করে বঙ্কিমতা অঙ্ক নিরূপন পদ্ধতি প্রণয়ন করেছেন।

কেলীর বঙ্কিমতা অঙ্ক, $SK_k = \frac{D_১ + D_৯ - ২ \text{ মধ্যমা}}{D_৯ - D_১}$

অথবা, শতহারিক ব্যবহার করে,

$$SK_k = \frac{p_১ + p_৯ - ২ \text{ মধ্যমা}}{p_৯ - p_১}$$

তবে এই পদ্ধতি তিনটির মধ্যে কার্ল পিয়ারসনের পদ্ধতিটিই সর্বাধিক ব্যবহৃত হয়। কেননা, তার প্রদত্ত পদ্ধতিটি সহজবোধ্য ও নিরূপণ পদ্ধতিটিও সহজ।

পরিঘাত (Moment)

পরিঘাত বা মোমেন্ট শব্দটি পদার্থবিদ্যায় বহুল প্রচলিত। পদার্থবিদ্যায় পরিঘাত বলতে, কোন একটি বলের (force) বিন্দুর সাপেক্ষে তার ঘূর্ণনের প্রবণতা বুঝায় এবং এর মান, বলের (force) পরিমাণ ও বিন্দু থেকে বলের ক্রিয়া রেখার দূরত্বের গুণফলের সমান। প্রচলিত অর্থে পরিসংখ্যানে পরিঘাতসমূহ হচ্ছে কতকগুলি গাণিতিক (Mathematical) ধ্রুব (Constants) যেগুলি তথ্য নিবেশনের আকৃতি ও প্রকৃতি নিরূপণে ব্যবহৃত হয়। গড় অথবা ইচ্ছামত যে কোন মান নিয়ে তা থেকে বিচ্যুতিসমূহের পরিঘাত নির্ণয় করা যেতে পারে। গড় থেকে পারিঘাতসমূহকে গ্রীক অক্ষর μ (মিউ) দ্বারা সাধারণত প্রকাশ করা হয়। পরিসংখ্যান কাজে প্রথম চারটি পরিঘাত খুব প্রয়োজনীয়। নিচে গড় থেকে প্রথম চারটি পরিঘাতের সূত্র দেয়া হলো,

পরিসংখ্যানে পরিঘাতসমূহ হচ্ছে কতকগুলি গাণিতিক ধ্রুব যেগুলি তথ্য নিবেশনের আকৃতি ও প্রকৃতি নিরূপণে ব্যবহৃত হয়।

প্রথম পরিঘাত, $\mu_১ = \frac{\sum f(x-\bar{x})}{n}$

দ্বিতীয় পরিঘাত, $\mu_২ = \frac{\sum f(x-\bar{x})^২}{n}$

তৃতীয় পরিঘাত, $\mu_৩ = \frac{\sum f(x-\bar{x})^৩}{n}$

চতুর্থ পরিঘাত, $\mu_৪ = \frac{\sum f(x-\bar{x})^৪}{n}$

যেখানে x = গণসংখ্যা নিবেশনের শ্রেণীর মধ্যবিন্দু
f = গণসংখ্যা
n = মোট গণসংখ্যা

গড় থেকে প্রথম পরিঘাতের মান সব সময় শূণ্য হয় এবং গড় থেকে দ্বিতীয় পরিঘাতকে ভেদাঙ্ক বলে। তৃতীয় এবং চতুর্থ পরিঘাতদ্বয় নিবেশনের যথাক্রমে আকৃতি অর্থাৎ বঙ্কিমতা এবং গঠন অর্থাৎ সূঁচালতা নির্ণয়ে সহায়তা করে। ইচ্ছামত যে কোন মান "A" থেকে প্রথম চারটি পরিঘাতের সূত্র নিচে দেয়া হলো। এই পরিঘাতগুলো সাধারণত গ্রীক অক্ষর ν প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সূত্রগুলি নিম্নরূপ,

গড় থেকে প্রথম পরিঘাতের মান সব সময় শূন্য হয় এবং গড় থেকে দ্বিতীয় পরিঘাতকে ভেদাঙ্ক বলে।

প্রথম পরিঘাত, $\nu_{১} = \frac{\sum f(x-A)}{n}$

দ্বিতীয় পরিঘাত, $\nu_{২} = \frac{\sum f(x-A)^{২}}{n}$

তৃতীয় পরিঘাত, $\nu_{৩} = \frac{\sum f(x-A)^{৩}}{n}$

চতুর্থ পরিঘাত, $\nu_{৪} = \frac{\sum f(x-A)^{৪}}{n}$

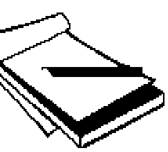
পরিসংখ্যান কাজে গড় থেকে নির্ণীত পরিঘাতসমূহ ব্যবহার করা হয়। যে কোন মান (arbitrary value) থেকে পরিঘাতসমূহ নির্ণয় করলে তা ব্যবহারের সময় নিম্নবর্ণিত সূত্র অনুসারে নির্ণীত পরিঘাতকে গড় থেকে পরিঘাতে পরিবর্তন করতে হয়। পরিবর্তনের সূত্রসমূহ হলো,

$\mu_{১} = ০$

$\mu_{২} = \nu_{২} - \nu_{১}^{২}$

$\mu_{৩} = \nu_{৩} - ৩\nu_{২}\nu_{১} + ২\nu_{১}^{৩}$

$\mu_{৪} = \nu_{৪} - ৪\nu_{৩}\nu_{১} + ৬\nu_{২}\nu_{১}^{২} + ৩\nu_{১}^{৪}$



অনুশীলন

নিচের নিবেশন হতে প্রথমে যে কোন মান A হতে প্রথম চারটি পরিঘাত নির্ণয় করুন এবং পরবর্তীতে সূত্রের সাহায্যে যোজিত গড় হতে প্রথম চারটি পরিঘাত নির্ণয় করুন।

ছক্কা থেকে প্রাপ্ত মান	১	২	৩	৪	৫	৬
সংখ্যা	৭	১২	৯	১১	১৪	৭

পরিঘাত বা মোমেন্টের উপর ভিত্তি করে বঙ্কিমতার পরিমাপঙ্ক

ত পরিসংখ্যান নের গঠন ও প্রকৃতি ণে সাহায্য করে।

পরিঘাত পরিসংখ্যান নিবেশনের গঠন ও প্রকৃতি নির্ধারণে সাহায্য করে। বঙ্কিমতা নিবেশনের এমন একটি বৈশিষ্ট্য, যার পরিবর্তনের ফলে নিবেশনের প্রকৃতি পরিবর্তিত হয়। মোমেন্ট ব্যবহার করে বঙ্কিমতা পরিমাপের যথাযথ প্রণালী হলো $\beta_{১}$ এর মান নির্ণয়। $\beta_{১}$ হচ্ছে যোজিত গড়ের প্রেক্ষিতে নির্ণীত তৃতীয় পরিঘাতের বর্গের সাথে দ্বিতীয় পরিঘাতের ঘন (Cube) এর অনুপাত। পরিঘাতের ভিত্তিতে বঙ্কিমতা অঙ্ক হচ্ছে $\beta_{১}$ এর বর্গমূল। এই প্রক্রিয়ার বঙ্কিমতা অঙ্কের সূত্রটি হলো,

বঙ্কিমতা অঙ্ক, $SK = \sqrt{\beta_{১}} = \sqrt{\frac{\mu^{2}_{3}}{\mu^{3}_{2}}} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu^{3}_{2}}}$

সূঁচালতা (Kurtosis)

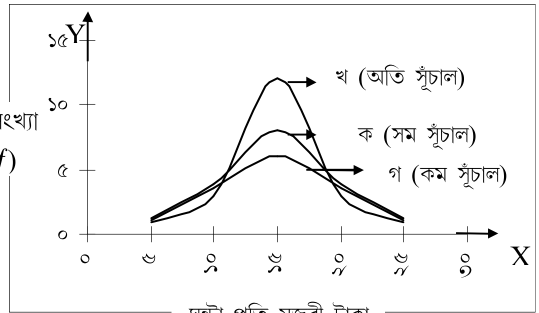
খ্যা রেখার গঠন বা তিগত বৈশিষ্ট্য যা র সূক্ষ্মাগ্রতা বা তার বর্ণনা দেয় তাকে তা বলে।

গণসংখ্যা বিন্যাস প্রতিসম (Symmetrical) হলেও সকল বিন্যাসের গঠন বা আকৃতি এক রকম নয়। চলক পরিসরের মধ্যমাত্রার গণসংখ্যার ঘনত্বের তারতম্যের জন্য গণসংখ্যা রেখার সূক্ষাগ্রতা (Peakedness) ভিন্ন ভিন্ন হয়। গণসংখ্যা রেখার গঠন বা আকৃতিগত বৈশিষ্ট্য যা রেখাটির সূক্ষ্মাগ্রতা বা তীক্ষ্মতার (Peakedness) বর্ণনা দেয় তাকে সূঁচালতা বলে। মনে করুন 'ক' 'খ' ও 'গ' তিনটি অঞ্চল থেকে দশজন করে শ্রমিকের নমুনা সংগ্রহ করা হলো। এই তিনটি নমুনা সংগ্রহ করে ঘন্টা প্রতি শ্রমের ভিত্তিতে শ্রেণীবদ্ধ করে নিচে বর্ণিত তিনটি নিবেশন পাওয়া গেল,

'ক' অঞ্চল		'খ' অঞ্চল		'গ' অঞ্চল	
ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা (f)	ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা (f)	ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা (f)
০ - ৫	১	০ - ৫	১	০ - ৫	১

৫ - ১০	২	৫ - ১০	১	৫ - ১০	২
১০ - ১.৫	৪	১০ - ১.৫	৬	১০ - ১.৫	৩
১৫ - ২০	২	১৫ - ২০	১	১৫ - ২০	৩
২০ - ২৫	১	২০ - ২৫	১	২০ - ২৫	১

তিনটি অঞ্চল থেকে প্রাপ্ত তিনটি মজুরী নিবেশনের গণসংখ্যার রেখা একই লেখ চিত্রে উপস্থাপন করলে চিত্রটি দাঁড়ায় নিম্নরূপ,



চিত্র -৪.৫.১ ঃ বিভিন্ন প্রকার সূঁচালতা

একই লেখ-এ অঙ্কিত গণসংখ্যা রেখা তিনটির মধ্যে 'ক' অঞ্চলের মজুরী নিবেশনের রেখাটি সম-সূঁচাল, খ-অঞ্চলের রেখাটি অতিসূঁচাল, এবং 'গ' অঞ্চলের গণসংখ্যা রেখা কম সূঁচাল। সূঁচালতা গণসংখ্যা রেখার বিস্তৃতি পরিমাপ করে। এর দ্বারা পরিমিত রেখার প্রেক্ষিতে গণসংখ্যা নিবেশনের সমতলতা, বিস্তৃতি ও সূক্ষাগ্রতার পরিমাপ করা হয়। চলকের পরিসরের মধ্যবিন্দুর আশে-পাশে গণসংখ্যার ঘনত্বের ভিত্তিতে সূঁচালতাকে তিন ভাগে ভাগ করা যায়। যেমন,

সূঁচালতা দ্বারা পরিমিত রেখার প্রেক্ষিতে গণসংখ্যা নিবেশনের সমতলতা, বিস্তৃতি ও সূক্ষাগ্রতার পরিমাপ করা হয়।

১. অতি সূঁচাল
২. সমসূঁচাল
৩. অনতিসূঁচাল বা সূঁচাল

উপরের চিত্রে (চিত্র-৪.৫.১) এই তিন প্রকার সূঁচালতা তিনটি মজুরী বিন্যাসের দৃষ্টান্তসহ দেখানো হলো।

আসুন সূঁচালতা অঙ্ক দিয়ে বিষয়টি পরিষ্কার করা যাক্।

সূঁচালতা অঙ্ক ঃ পরিঘাতের ভিত্তিতে সূঁচালতা পরিমাপ করা হয়। সূঁচালতার অঙ্ক $\beta_২$ (বিটা-২) দ্বারা নির্দেশিত ও সংজ্ঞায়িত করা হয়।

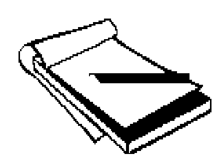
নিচে $\beta_২$ এর সূত্র দেয়া হলো, $\beta_২ = \frac{\mu_৪}{\mu_২^২}$

$$= \frac{\text{যোজিত গড়ের প্রেক্ষিতে চতুর্থ পরিঘাত}}{\text{যোজিত গড়ের প্রেক্ষিতে দ্বিতীয় পরিঘাত এর বর্গ}}$$

$\beta_২$-এর মান যদি ৩ হয় তবে নিবেশনটিকে বলা হয় সম-সূঁচাল, যদি ৩ হতে বড় হয় তবে নিবেশনটি অতি সূঁচাল, এবং $\beta_২$-এর মান যদি ৩ থেকে কম হয় তবে নিবেশনটি হবে অনতি-সূঁচাল।

$\beta_২$-এর মান যদি ৩ হয় তবে নিবেশনটিকে বলা হয় সম-সূঁচাল।

অনুশীলন
পূর্ববর্তী অনুশীলন থেকে প্রাপ্ত তথ্যের ভিত্তিতে নিবেশনের বঙ্কিমতা অঙ্ক ও সূঁচালতা নির্ণয় করুন।



উদাহরণ-৩ ঃ দশটি দোকানের বিনিয়োগ সম্পকীত তথ্য নিচের নিবেশনে দেয়া হল,

পুঁজি (লাখ টাকা)	দোকানের সংখ্যা
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১

রাশিসমূহের উপর ভিত্তি করে বঙ্কিমতা অঙ্ক ও সূঁচালতা অঙ্ক নিরূপণ করুন ও নিবেশনের আকৃতি ও প্রকৃতি সম্পর্কে আলোকপাত করুন।

সমাধান

পরিঘাত বা মোমেন্টের মাধ্যমে বঙ্কিমতা ও সূঁচালতা অঙ্ক নিরূপন —

পুঁজি লাখ টাকা	দোকানের সংখ্যা f	মধ্যবিন্দু x	fx	$x-\bar{x}$	$f(x-\bar{x})$	$f(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^3$	$f(x-\bar{x})^4$
০ - ৫	১	২.৫	২.৫	-১০	-১০	১০০	-১,০০০	১০,০০০
৫ - ১০	২	৭.৫	১৫.০	-৫	-১০	৫০	-২৫০	১,২৫০
১০ - ১৫	৪	১২.৫	৫০.০	০	০	০	০	০
১৫ - ২০	২	১৭.৫	৩৫.০	৫	১০	৫০	২৫০	১,২৫০
২০ - ২৫	১	২২.৫	২২.৫	১০	১০	১০০	১,০০০	১০,০০০
	১০		১২৫.০		০	৩০০	০	২২,৫০০

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{১২৫}{১০} = ১২.৫০$$

যোজিত গড়ের প্রেক্ষিতে প্রথম পরিঘাত, $\mu_১ = \frac{\sum f(x-\bar{x})}{n} = \frac{০}{১০} = ০$

যোজিত গড়ের প্রেক্ষিতে দ্বিতীয় পরিঘাত, $\mu_২ = \frac{\sum f(x-\bar{x})^২}{n} = \frac{৩০০}{১০} = ৩০$

যোজিত গড়ের প্রেক্ষিতে তৃতীয় পরিঘাত, $\mu_৩ = \frac{\sum f(x-\bar{x})^৩}{n} = \frac{০}{১০} = ০$

যোজিত গড়ের প্রেক্ষিতে চতুর্থ পরিঘাত, $\mu_৪ = \frac{\sum f(x-\bar{x})^৪}{n} = \frac{২২,৫০০}{১০} = ২,২৫০$

$$\therefore \text{ বঙ্কিমতা অঙ্ক, } SK_k = \sqrt{\beta_১} = \sqrt{\frac{\mu^2{}_3}{\mu^3{}_2}} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2{}^3}} = \frac{০}{\sqrt{৩০^৩}} = ০$$

যেহেতু বঙ্কিমতা ‘0’। অতএব নিবেশনটি বঙ্কিমতা বিবর্জিত বা প্রতিসম।

সুতরাং, সূঁচালতা $\beta_২ = \frac{\mu_৪}{\mu_২{}^২} = \frac{২,২৫০}{(৩০)^২} = \frac{২,২৫০}{৯০০} = ২.৫ < ৩$

যেহেতু, $\beta_২ < ৩$, অতএব নিবেশনটি অনতি-সূঁচাল বা Platy Kurtic.

সারাংশ

আপনি এতক্ষণ ৪নং ইউনিটের ৫নং পাঠে বঙ্কিমতা, পরিঘাত ও সূঁচালতা সম্বন্ধে শিখলেন। বঙ্কিমতা সাধারণত তিন প্রকারের যেমন-ধনাত্মক, ঋনাত্মক ও প্রতিসম বঙ্কিমতা। এরপরে রয়েছে বিস্তার ও বঙ্কিমতার পার্থক্য। বিস্তার হচ্ছে নিবেশনের কেন্দ্রবিন্দু থেকে রাশিগুলোর পার্থক্য অপরদিকে বঙ্কিমতা হচ্ছে বিস্তারের নির্দিষ্ট দিক। বঙ্কিমতার পরিমাপে রয়েছে কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতা অঙ্ক, বাউলীর বঙ্কিমতা অঙ্ক ও কেলীর বঙ্কিমতা অঙ্ক। এরপর পরিঘাত। পরিঘাত হচ্ছে নিবেশনের আকৃতি ও প্রকৃতি নিরূপক। পরিঘাতের উপর ভিত্তি করে বঙ্কিমতা অঙ্ক নির্ণয় করা যায়। যেমন, বঙ্কিমতা অঙ্ক $SK_k = \sqrt{\beta_১} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^{3}}}$ । এরপর রয়েছে সূঁচালতা। সূঁচালতা গণসংখ্যা রেখার সূক্ষ্মাগ্রতা বা তীক্ষ্ণতার বর্ণনা দেয়। সূঁচালতার অঙ্ক $\beta_২ = \frac{\mu_৪}{\mu_২^{২}}$ অর্থাৎ, পরিঘাতের মাধ্যমে সূঁচালতা অঙ্ক নির্ণয় করা যায়।

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. বঙ্কিমতা কাকে বলে? বঙ্কিমতা ও বিস্তারের মধ্যে পার্থক্য নিরূপণ করুন।
নিচের নিবেশন থেকে কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতা অঙ্ক নিরূপণ করুন এবং নিবেশনের প্রকৃতি সম্পর্কে আলোচনা করুন।

সাপ্তাহিক বেতন	বিক্রেতার সংখ্যা
৪০০ - ৬০০	৪
৬০০ - ৮০০	১০
৮০০ - ১০০০	১৯
১০০০ - ১২০০	১২
১২০০ - ১৪০০	৪
১৪০০ - ১৬০০	১

২. সূঁচালতা কী? পরিঘাতের সাহায্যে কীভাবে সূঁচালতা পরিমাপ করা হয় ?
নিচের তথ্য থেকে সূচালতা অঙ্ক বের করুন এবং নিবেশনের গঠন সম্পর্কে আলোকপাত করুন।

বয়স (বৎসর)	ব্যক্তির সংখ্যা
২০ - ২৫	৫০
২৫ - ৩০	৭০
৩০ - ৩৫	৮০
৩৫ - ৪০	১৮০
৪০ - ৪৫	১৫০
৪৫ - ৫০	১২০
৫০ - ৫৫	৭০
৫৫ - ৬০	৫০

৩. পরিঘাত বা মোমেন্ট কাকে বলে? পরিসংখ্যান কাজে এদের ব্যবহার কী কী? যোজিত গড়ের প্রেক্ষিতে কোন নিবেশনের প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পরিঘাত যথাক্রমে ০, ২৫, ১৮, ৭৫। যোজিত গড় হচ্ছে ১১ ; বিন্যাসটির বঙ্কিমতা ও সূঁচালতা সম্পর্কে আলোকপাত করুন।

৪. নিচে উল্লিখিত ধারণাসমূহের উদাহরণসহ ব্যাখ্যা দিন —
ক. কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতা অঙ্ক
খ. বাউলীর বঙ্কিমতা অঙ্ক
গ. কেলীর বঙ্কিমতা অঙ্ক
ঘ. পরিঘাত ভিত্তিক বঙ্কিমতা অঙ্ক

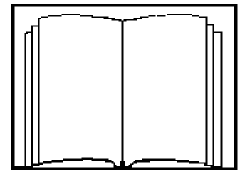
৫. নিচের নিবেশনের বঙ্কিমতা ও সূঁচালতা নির্ণয় করুন —

মাসিক আয় টাকা	পরিবারের সংখ্যা
৫০০০ - ১০০০০	১১০
১০০০০ - ১৫০০০	১৫০
১৫০০০ - ২০০০০	৮০
২০০০০ - ২৫০০০	৩০
২৫০০০ - ৩০০০০	১২
৩০০০০ - ৩৫০০০	২

৬। পরিঘাত, বঙ্কিমতা ও সূঁচালতার ধারণাসমূহ উপযুক্ত উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।
নিচের তথ্য থেকে চতুর্থক ভিত্তিক বঙ্কিমতা অঙ্ক বাহির করুন।

শ্রেণী	গণসংখ্যা
০ - ৫	৩
৫ - ১০	৪
১০ - ১৫	৬৮
১৫ - ২০	৩০
২০ - ২৫	১০
২৫ - ৩০	৬
৩০ - ৩৫	২

Reference :



1. Richard L. Mills : Statistics for Applied Economics and Business, Mc GRAW HILL BOOK COMPANY, New York, 1977.
2. Harnett, Donald L, and James L. Murphy : Introductory Statistical Analysis, Addison-Werley Publishing Company Inc, Reading Mass, 1975.
3. S.P. Gupta : Advanced Practical Statistics, S. Chand and Company Ltd., Ram Nagor, New Delhi, 1991.
4. মুহাম্মদ আলী মিঞা এবং মোঃ আলিম উল্ল্যা মিয়ান : পরিসংখ্যান পরিচিতি, আইডিয়াল লাইব্রেরী, ঢাকা, ১৯৮৫।
5. এস. এ. হাসীব : বাণিজ্যিক পরিসংখ্যান, আলী পাবলিকেশন্স, পাটুয়াটুলী, ঢাকা, ১৯৬৯।