নিবেশনের কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ
(Measures of Central Tendency of Distribution)

৩

আপনি ইউনিট-১ এ পরিসংখ্যানের সূচনা অর্থাৎ এর সংজ্ঞা, উৎস, তথ্যানুসন্ধান ও তথ্য সংগ্রহ সম্বন্ধে ধারণা লাভ করেছেন। ইউনিট-২ এ উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ ও তথ্য উপস্থাপন সম্বন্ধে শিখেছেন। এইবার ইউনিট-৩ এ আপনি ধারণা পেতে যাচ্ছেন নিবেশনের কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপসমূহ। যে কোন নিবেশনের মানগুলি বিশ্লেষণ করলে দেখা যাবে যে, নিবেশনের বিভিন্ন মানগুলি কোন একটি কেন্দ্রীয় মানের সমান বা আশে পাশে অবস্থান করছে। ফলে নিবেশনটির কেন্দ্রীয় মানটি নির্ণয় করতে পারলে নিবেশনটি সম্বন্ধে একটি সুস্পষ্ট ধারণা লাভ করা সহজ হয়। এই ইউনিটটি সাজানো হয়েছে ৪টি পাঠ দিয়ে। প্রথম পাঠে রয়েছে কেন্দ্রীয় প্রবণতার গড় (Average), দ্বিতীয় পাঠে মধ্যমা (Median) সম্বন্ধে বিশদ ব্যাখ্যা আর তৃতীয় পাঠে রয়েছে সংখ্যাগুরুমান বা প্রচুরক (Mode) সম্বন্ধে আলোচনা। এছাড়া কেন্দ্রীয় প্রবণতায় অন্যান্য যে বিশেষ পরিমাপসমূহ রয়েছে ঐগুলো দিয়েই সাজানো হয়েছে চতুর্থ পাঠ।

এই পৃষ্ঠা খালি থাকবে

ইউনিট-৩

পাঠ-১ : যোজিত গড় (Arithmatic Mean)

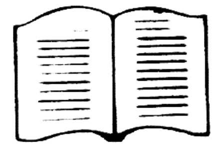
পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি ––

- কেন্দ্রীয় প্রবণতা কী- তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- যোজিত গড়ের সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন
- যোজিত গড়ের শ্রেণীবিভাগ বর্ণনা করতে পারবেন
- সাধারণ যোজিত গড় নির্ণয় করতে পারবেন
- সাধারণ পদ্ধতিতে এবং সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে বিচ্ছিন্ন গণসংখ্যা নিবেশনের গড় নির্ণয় করতে পারবেন
- বিন্যস্ত তথ্যের গড় নির্ণয় করতে পারবেন
- গুরুত্বপ্রদত্ত ও সম্মিলিত গড় নির্ণয় করতে পারবেন
- যোজিত গড়ের সুবিধা-অসুবিধা এবং ব্যবহার উল্লেখ করতে পারবেন।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা কী

সাধারণত কোন একটি সমগ্রকের (Population) বিশেষ একটি বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে সংখ্যাগত পর্যবেক্ষণের সমন্বয়ে পরিসংখ্যান তথ্য সারি গঠিত হয়। আপনার নিশ্চয়ই মনে আছে সমগ্রক হচ্ছে নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্য সম্পর্কিত তথ্য রাশি যেখান থেকে পর্যবেক্ষণের জন্য তথ্য সংগ্রহ করা হয়।



যে কোন সারিতে একটু লক্ষ্য করলে আপনি দেখতে পাবেন, সংখ্যাগুলি একটি কেন্দ্রীয় মূল্যমানের দিকে জমাট হয়ে থাকার প্রবণতা দেখাচ্ছে এবং অধিকাংশ সংখ্যা এই কেন্দ্র বিন্দু হতে নিবেশনের বৈশিষ্ট্য অনুসারে মোটামুটি সুষমভাবে বিচ্যুত বা ছড়ানো রয়েছে। গণসংখ্যা নিবেশন এবং অবিন্যস্ত পরিসংখ্যান অনুক্রম উভয় ক্ষেত্রেই এই প্রবণতা লক্ষ্য করা যায়। এই যে তথ্য মানগুলির কেন্দ্রের কোন একটি মানের দিকে পুঞ্জিভুত হয়ে থাকার প্রবণতা, একেই কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। আসুন বিষয়টিকে আরও সহজ করে বলা যাক্‌। মনে করুন, আপনি একটি প্রতিষ্ঠানের প্রত্যেকটি কর্মচারীর মাসিক আয় কত- তা সংগ্রহ করলেন। এখন কেউ যদি আপনাকে জিজ্ঞাসা করে ঐ প্রতিষ্ঠানের কর্মচারীদের গড় আয় কত- তখন আপনি নিশ্চয়ই এমন একটি সংখ্যা বলবেন যে সংখ্যাটির কাছাকাছি সকল কর্মচারীদের আয়। অর্থাৎ, এই নির্দিষ্ট সংখ্যাটিই সকল কর্মচারীর আয়ের প্রতিনিধিত্ব করছে, যার মাধ্যমে কর্মচারীদের আয় সম্বন্ধে ধারণা পাওয়া সহজ হয়। এই যে সকল সংগৃহীত সংখ্যা একটি সংখ্যার দিকে পুঞ্জিভুত হবার প্রবণতা - তাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। ঠিক এমনভাবেই আমরা প্রতিদিন বিভিন্ন শব্দ ব্যবহার করি। যেমন - গড় আয়, গড় বয়স, গড় পাশের হার ইত্যাদি। এ সকল তথ্যসমূহের যথার্থ বিশ্লেষণের জন্য সংখ্যাগত বিশ্লেষণ জানা প্রয়োজন। কেননা, সংখ্যাগত বিশ্লেষণ জানতে পারলে আপনি তথ্যরাশিকে একটি প্রতিনিধিত্বমূলক সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করতে সক্ষম হবেন। প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা বের করতে পারলে বিভিন্ন তথ্য সারির তুলনামূলক আলোচনা করা এবং সিদ্ধান্ত গ্রহণ সম্ভব হবে। এইরূপ কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের জন্য কতকগুলি বিশেষ পদ্ধতি রয়েছে। আসুন দেখা যাক্ এই পদ্ধতিগুলি কী কী ––

> সংগৃহীত সংখ্যাত্মক তথ্যগুলি কেন্দ্রের কোন একটি মানের দিকে পুঞ্জিভুত হয়ে থাকার প্রবণতাকেই সাধারণ ভাষায় কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে।

- যোজিত গড় (Arithmatic Mean)
- মধ্যমা (Median)
- মোড বা প্রচুরক (Mode)
- গুণিতক গড় (Geometric Mean)
- তরঙ্গ গড় (Harmonic Mean)
- দ্বিঘাত গড় (Quadratic Mean)

আপনি পরবর্তী বিভিন্ন পাঠে এই সকল পরিমাপের বিশদ ব্যাখ্যা জানতে পারবেন। তবে প্রাথমিকভাবে বলা যায় যোজিত গড়, মধ্যমা এবং প্রচুরক হলো সাধারণ গড়ের অন্তর্ভুক্ত। কোন তথ্য বিন্যাসের সহজীকরণ এবং প্রতিনিধিত্বশীল মাপকাঠি নির্ণয়ে এই সকল গড়ের ব্যবহার করা হয়। এগুলোর মধ্যে যোজিত গড় সবচেয়ে বেশী ব্যবহার করা হয় এবং অন্যান্য গড়গুলো তথ্য

> প্রাথমিকভাবে বলা যায় যোজিত গড়, মধ্যমা এবং প্রচুরক হলো সাধারণ গড়ের অন্তর্ভুক্ত।

বিশ্লেষণের বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয় যে সম্বন্ধে আমরা পরবর্তী পাঠগুলোতে বিস্তারিত জানবো। তাহলে আসুন প্রথমেই দেখা যাক যোজিত গড় কী?

যোজিত গড় (Arithmatic Mean)

তথ্য সারির অন্তর্ভুক্ত সংখ্যা মানগুলির যোগফলকে ঐ সারির মোট তথ্যসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যোজিত গড় পাওয়া যায়।

আমরা সকলে গড় কথাটির সঙ্গে অতি পরিচিত। যেমন বিভিন্ন সময়ে বলে থাকি গড় উচ্চতা কত, গড় ওজন কত বা ছাত্ররা গড়ে কত নম্বর পেয়েছে ইত্যাদি। এগুলোই প্রকৃত পক্ষে যোজিত গড়ের উদাহরণ। পরিসংখ্যান অনুক্রমের রাশিগুলির (যেমন, ১০ জন ছাত্রের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর) সর্বাধিক প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা হচ্ছে যোজিত গড়। একে গাণিতিক গড় বা সহজভাবে শুধু গড় বলে। যোজিত গড়ই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতার অধিক ব্যবহৃত পরিমাপক। সাধারণত তথ্যসারির অন্তর্ভুক্ত সংখ্যামানগুলির যোগফলকে ঐ তথ্যের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে গড় নির্ণয় করা হয়। যেমন মনে করুন আপনাকে জিজ্ঞেস করা হলো, আপনি ডিপ্লোমা-ইন-ম্যানেজমেন্ট এর প্রথম সিমেস্টারে তিনটি কোর্সে গড় কত নম্বর পেয়েছেন। আপনি যদি তিনটিতে ৬০, ৭০, ৮০ নম্বর পান তাহলে সঙ্গে সঙ্গে বলতে পারবেন গড়ে ৭০ নম্বর পেয়েছেন। এটা প্রকৃতপক্ষে যোজিত গড়ের ব্যবহার। কারণ, আপনি $\frac{৬০+৭০+৮০}{৩}=\frac{২১০}{৩}=৭০$ এইভাবে প্রশ্নের উত্তর পেয়েছেন।

তাহলে আসুন এখন যোজিত গড়ের বিভিন্ন শ্রেণী বিভাগ নিয়ে আলোচনা করা যাক।

যোজিত গড়ের শ্রেণীবিভাগ

এতক্ষণে আপনি যোজিত গড় কী তা স্পষ্টভাবে বুঝতে পেরেছেন। এবার যোজিত গড়ের শ্রেণী বিভাগ এবং কীভাবে যোজিত গড় নির্ণয় করতে হবে তা দেখা যাক। যোজিত গড় সাধারণত দুই প্রকার —

১. সাধারণ যোজিত গড় (Simple Arithmatic Mean)
২. গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় (Weighted Arithmatic Mean)

১. সাধারণ যোজিত গড় (Simple Arithmatic Mean)

সাধারণ যোজিত গড় পরিসংখ্যানিক তথ্যসারির একটি যথার্থ প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা।

সাধারণ যোজিত গড় বহুল ব্যবহৃত কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি সহজতর পরিমাপক। আমরা যে বলে থাকি, গড় উচ্চতা কত, গড় ওজন কত ইত্যাদি - এসকল সাধারণ যোজিত গড়েরই উদাহরণ। সাধারণ যোজিত গড় পরিসংখ্যানিক তথ্যসারির একটি যথার্থ প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা। এক্ষেত্রে আপনাকে অনুক্রম বা রাশি তথ্যমালার প্রতিটি তথ্যকে মাত্র একবার গণনা করতে হবে। তথ্য রাশিগুলোর প্রতিটি রাশিকে যোগ করে রাশির মোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে সাধারণ যোজিত গড় নির্ণয় করা হয়। সাধারণ গড় নির্ণয়ের জন্য দ'ুটি প্রক্রিয়া রয়েছে। একটি **সরাসরি প্রক্রিয়া** এবং অপরটি **সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া**। এবার আসুন তাহলে দেখা যাক সরাসরি প্রক্রিয়ায় কীভাবে গড় নির্ণয় করা হয়। এরপর দেখা যাবে সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ার গড় নির্ণয়ের পদ্ধতি। তারপর ফিরে যাওয়া যাবে গুরুত্বপ্রদত্ত গড় বা Weighted Arithmatic Mean নির্ণয়ে।

- ***সরাসরি প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয়***

সরাসরি প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয় একটি সহজ প্রক্রিয়া। যেমন ধরুন, আপনাকে চারজন শ্রমিকের গড় মজুরী নির্ণয় করতে বলা হলো। যদি চারজনের মজুরী যথাক্রমে ৪০, ৫০, ৬০ ও ৯০ টাকা হয় তবে গড় মজুরী হবে, $\frac{৪০+৫০+৬০+৯০}{৪}=৬০$ টাকা। এই যে তথ্য সারির অন্তর্ভুক্ত প্রতিটি তথ্যকে যোগ করে তথ্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে গড় নির্ণয় করা হলো এটা সরাসরি প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয়। যদি তথ্যরাশিকে $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ এরকম N সংখ্যক প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় এবং যোজিত গড়কে $\overline{x}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় তবে সরাসরি প্রক্রিয়ায় যোজিত গড়ের সূত্র $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots xn}{n} = \frac{\sum x}{N}$

যেখানে $\overline{x}$ = যোজিত গড়
x_1 = তথ্যসারিতে অন্তর্ভুক্ত প্রথম তথ্যরাশি
x_2 = দ্বিতীয় তথ্য রাশি
x_n = N তম তথ্য রাশি

N = তথ্যের সংখ্যা
$\sum$ = সমষ্টির প্রতীক

এবার আসুন দেখা যাক, যে সরাসরি প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয় শিখলাম, এ প্রক্রিয়ার সাহায্যে কীভাবে গড় নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ-১ ঃ পাঁচজন শ্রমিকের ঘন্টা প্রতি শ্রমের মজুরী নিচের তথ্যসারিতে দেওয়া হলো। উপরে বর্ণিত গড় নির্ণয়ের পদ্ধতিতে অর্থাৎ সরাসরি প্রক্রিয়ায় প্রতি ঘন্টার শ্রমিকদের গড় মজুরী নির্ণয় করুন।

শ্রমিকের ক্রমিক সংখ্যা	১	২	৩	৪	৫
ঘন্টা প্রতি মজুরী (x টাকা)	৮	৯	১০	১১	১২

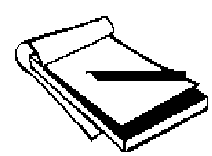
সমাধান ঃ সূত্র অনুসারে আপনি প্রথমে মজুরীর হারের সমষ্টি বের করবেন। সুতরাং,
মজুরীর হারের সমষ্টি $\sum x$ = ৮+৯+১০+১১+১২ = ৫০
অতএব, যোজিত গড় = $\frac{\sum X}{N} = \frac{৫০}{৫} =$ ১০ টাকা
এখানে N = ৫, শ্রমিকের সংখ্যা।

উদাহরণ-২ ঃ কোন শ্রেণীতে ৮ জন ছাত্রের চূড়ান্ত পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেয়া আছে। তাদের প্রাপ্ত গড় নম্বর বের করতে হবে।

ছাত্রের ক্রমিক সংখ্যা	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮
পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর	৫৫	৬০	৬৩	৬৮	৬৬	৬১	৫৬	৭৫

সমাধান ঃ যোজিত গড় নির্ণয়ের জন্য প্রথমে আমরা সূত্রটা দেখব। সরাসরি পদ্ধতিতে যোজিত গড়ের সূত্র, $\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$
অতএব, মোট নম্বর $\sum X$ = ৫৫+৬০+৬৩+..................+৭৫ = ৫০৪
মোট ছাত্রের সংখ্যা, N = ৮
সুতরাং গড় নম্বর, $\overline{X} = \frac{৫০৪}{৮} =$ ৬৩ টাকা

অনুশীলন
১০ জন ছাত্রের গড় উচ্চতা নির্ণয় করুন যাদের উচ্চতা যথাক্রমে - ৫′৬″, ৫′৩″, ৫′২″, ৫′৭″, ৫′৬″, ৫′৪″, ৫′৩″, ৫′১″, ৫′২″, ৫′৪″
সূত্র ঃ প্রথমে ইঞ্চিগুলোর যোগ করুন, পরে ফুটগুলোর।



এতক্ষণ সরাসরি প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয় প্রক্রিয়া শিখলেন। সেইসঙ্গে কয়েকটি উদাহরণ করার মাধ্যমে ধারণাটি আরও পরিস্কার হয়েছে নিশ্চয়ই। এবার সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয় পদ্ধতিটি দেখা যাক।

- ***সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয়***

সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয় প্রক্রিয়া শেখার আগে আপনাকে জানতে হবে, কেন সরাসরি প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয়ের পদ্ধতি থাকা সত্ত্বেও সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয় করা হয়। সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয়ের কারণ হলো, যদি কোন তথ্য সারিতে রাশির সংখ্যা অনেক বেশী হয় অথবা সংখ্যাগুলি অনেক বড় হয় তখন সরাসরি প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয় অনেক জটিল হয় এবং সময়ও বেশী লাগে। একারণে সময়, শ্রম কমানোর জন্য সরাসরি প্রক্রিয়ার বিকল্প হিসেবে সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া ব্যবহৃত হয়।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করার জন্য প্রথমে আপনাকে একটি আনুমানিক গড় ধরে নিতে হবে। এই আনুমানিক বা কল্পিত গড় (আনুমানিক গড় হবে তথ্য সারির মাঝামাঝি স্থানের কোন কল্পিত

গড়) হতে প্রতিটি সংখ্যার বিচ্যুতি বা পার্থক্য নির্ণয় করতে হবে। এরপর প্রথমে বিচ্যুতির মানসমূহকে যোগ করে ঐ যোগফলকে তথ্যসারির মোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে যে ভাগফল পাওয়া যায় তা অনুমিত গড়ের সঙ্গে যোগ করে প্রকৃত গড় বের করতে পারবেন। আনুমানিক গড় নির্ণয়ে মনে রাখতে হবে যে, **তথ্যসারির যে কোন মানকে আনুমানিক গড় হিসেবে ব্যবহার করা চলে তবে মানটি যত মাঝখানে হবে তত গণনা কাজ সহজ হবে।** মনে রাখবেন, আপনার অনুমান যত যথার্থ হবে বিচ্যুতির সমষ্টি তত কম হবে। সরাসরি প্রক্রিয়ার গড় নির্ণয়ের মত সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ার গড় নির্ণয়েও একটি সূত্র রয়েছে। সূত্রটি হলো,

যোজিত গড় $\overline{X} = A + \frac{\sum(x - A)}{N}$

যেখানে $\overline{X}$ = যোজিত গড়

A = অনুমিত গড়

X = তথ্য সারির অন্তর্ভুক্ত প্রতিটি তথ্যের মান

N = তথ্যের মোট সংখ্যা

$X-A$ = অনুমতি গড় থেকে প্রতিটি তথ্যের বিচ্যুতি বা পার্থক্য

$\sum (X-A)$ = বিচ্যুতিসমূহের সমষ্টি

সরাসরি প্রক্রিয়ায় এবং সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় যোজিত গড় নির্ণয়ের পদ্ধতি শিখেছেন। এবার উদাহরণের মাধ্যমে দেখা যাক সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় কীভাবে গড় নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ-৩ ঃ আটটি পরিবারের মাসিক খরচ যদি নিম্নরূপ হয় তবে মাসিক গড় খরচ কত হবে।
৮২২০, ৮৩৪০, ৮৫০২, ৭৮২১, ৭৫০৩, ৭৯০৫, ৮১২৫, ৮২০৬

সমাধান ঃ সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের জন্য সূত্র মতে প্রথমে আসুন একটি অনুমিত গড় ধরে নেই। বুঝা যাচ্ছে, সর্বনিম্ন খরচ এখানে ৭,৫০৩ এবং সর্বোচ্চ খরচ ৮,৫০২। অনুমিত গড় এই দুটি সংখ্যার মাঝামাঝি কোথাও ধরি। মনে করুন এই সংখ্যাটি ৮,০০০। এখন তথ্যরাশি থেকে অনুমিত গড় বিয়োগ করে বিচ্যুতি নির্ণয়ের মাধ্যমে একটি টেবিল তৈরি করুন।

ক্রমিক নং	মাসিক খরচ (টাকা) X	X-A (A= ৮,০০০)
১	৮,২২০	২২০
২	৮,৩৪০	৩৪০
৩	৮,৫০২	৫০২
৪	৭,৮২১	-১৭৯
৫	৭,৫০৩	-৪৯৭
৬	৭,৯০৫	-৯৫
৭	৮,১২৫	১২৫
৮	৮,২০৬	২০৬
		$\sum$(X-A) = ৬২২

সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয়ের সূত্র, $\overline{X} = A + \frac{\sum(x - A)}{N}$

এখানে A = ৮,০০০, $\sum$ (X-A) = ৬২২, N = ৮

গড় $\overline{X}$ = ৮০০০ + $\frac{৬২২}{৮}$

= ৮০০০ + ৭৭.৭৫ = ৮০৭৭.৭৫ টাকা

তাহলে সাধারণ গড় নির্ণয়ের জন্য সরাসরি এবং সংক্ষিপ্ত উভয় প্রকারেই গড় নির্ণয়ের প্রক্রিয়া শেখা হলো। যদি তথ্য রাশি অনেক বড় হয় তবে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় কেন বেশী

সুবিধাজনক তাও বুঝা গেল। এবার আসুন, বিচ্ছিন্ন গণসংখ্যা নিবেশনের মাধ্যমে গড় নির্ণয় প্রক্রিয়া শিখতে চেষ্টা করি।

- ***বিচ্ছিন্ন গণসংখ্যা নিবেশনের সরাসরি প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয়***

পরিসংখ্যান তথ্যসারিতে একই উপাত্ত বা তথ্য একাধিকবার থাকতেই পারে। আর যদি থাকে তবে ঐ একাধিকবার থাকা তথ্যসমৃদ্ধ সংখ্যাকে নির্দিষ্ট তথ্যের গণসংখ্যা বলে। এক্ষেত্রে গড় নির্ণয় করতে গেলে প্রথমে তথ্যসমূহকে এর গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করে, প্রাপ্ত গুণফলের যোগফলকে মোট গণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করে গড় নির্ণয় করা হয়। এক্ষেত্রে কেবলমাত্র রাশিগুলির সমষ্টি দ্বারা নিবেশনের সমস্ত রাশির যোগফল পাওয়া যাবে না। যেমন ধরুন, কোন তথ্য সারিতে - ১০ একটি তথ্যসংখ্যা এবং এর গণসংখ্যা ৭। এর অর্থ ঐ তথ্য সারিতে ১০ মানটি ৭ বার রয়েছে। একারণে তথ্য সারির রাশিগুলির সমষ্টি পাওয়ার জন্য প্রতিটি রাশিকে তার গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করা হয়। তাহলে বিচ্ছিন্ন গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে যোজিত গড় নির্ণয়ের সূত্রটি হলো,

যখন তথ্য রাশিতে একই উপাত্ত বা তথ্য একাধিক বার থাকে তখন গড় নির্ণয়ের সুবিধার জন্য এবং অধিক প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা বের করার জন্য বিচ্ছিন্ন গণসংখ্যা নিবেশনের গড় নির্ণয় করা হয়।

যোজিত গড়, $\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$

যেখানে,
$\overline{x}$ = যোজিত গড়
x = তথ্যসারির অন্তর্ভুক্ত প্রতিটি তথ্যের মান
f = গণসংখ্যা
$n = \sum f$ = তথ্যের মোট সংখ্যা বা গণসংখ্যার সমষ্টি
$\sum$ = সমষ্টির প্রতীক

বিচ্ছিন্ন গণসংখ্যা নিবেশনের গড় নির্ণয়ের সূত্র জানা গেল। এখন এ সূত্রের সাহায্যে ২/১ টি গড় বের করলে নিশ্চয়ই আপনার ধারণা আরো পরিষ্কার হবে। আসুন তাহলে বিচ্ছিন্ন গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে গড় নির্ণয় করা যাক। তবে মনে রাখতে হবে **এক্ষেত্রেও সরাসরি প্রক্রিয়ায় এবং সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় যোজিত গড় নির্ণয় করা যায়।**

উদাহরণ-৪ ঃ দশটি পরিবারের সদস্য সংখ্যা নিচের তালিকাতে দেওয়া হলো।
৬, ৯, ৭, ৮, ৮, ১০, ৯, ৭, ৮, ৮

গড় নির্ণয়ের জন্য সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ার ধারণাটি নিশ্চয়ই আপনার মনে আছে। সুতরাং আসুন এখন এই **বিচ্ছিন্ন তথ্যসারি** থেকে পরিবারের গড় সদস্য সংখ্যা সরাসরি প্রক্রিয়ায় এবং সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করি।

সমাধান ঃ যোজিত গড় নির্ণয়ের জন্য প্রথমে আপনাকে তথ্যসমূহকে গণসংখ্যা নিবেশন আকারে সাজাতে হবে। তারপর সরাসরি প্রক্রিয়ার জন্য $\sum fX$ এবং সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ার জন্য অনুমিত গড় A ধরে $\sum f(X\text{-}A)$ নির্ণয় করতে হবে। তাহলে নিচের টেবিলে প্রয়োজনীয় গণনা কার্য সেরে নিন।

যোজিত গড় নির্ণয়ের জন্য প্রথমে তথ্যসমূহকে গণসংখ্যা নিবেশন আকারে সাজাতে হবে।

X	f	fX	(X-A)	f(X-A)
৬	১	৬	-২	-২
৭	২	১৪	-১	-২
৮	৪	৩২	০	০
৯	২	১৮	১	২
১০	১	১০	২	২
মোট	১০	৮০	০	০

টেবিলটি নিশ্চয়ই লক্ষ্য করছেন, ৮ সংখ্যাটি ৪ বার থাকলেও টেবিলে মাত্র ১টি বার x ঘরে ৮ সংখ্যাটিকে লেখা হয়েছে এবং এই সংখ্যাটি যে ৪ বার তথ্যসারিতে আছে তা বুঝানোর জন্য f ঘরে ৮ সংখ্যাটির পাশে '৪' লেখা হয়েছে। তাই একইভাবে ৭ এবং ৯ সংখ্যা দুইটির পাশে f ঘরে ২ লেখা হয়েছে।
এখানে ধরা হয়েছে, অনুমিত গড় = ৮

সরাসরি প্রক্রিয়ায় যোজিত গড়, $\overline{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{৮০}{১০} = ৮$ এবং

সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় যোজিত গড়, $\overline{X} = A + \frac{\sum f(x - A)}{N} = ৮ + \frac{০}{১০} = ৮$

অর্থাৎ **যে প্রক্রিয়ার মাধ্যমেই গড় নির্ণয় করা হউক না কেন এর ফলাফল সর্বদা সমান হবে,** এক্ষেত্রে পরিবারের গড় সদস্য সংখ্যা = ৮ জন।

- ***বিন্যস্ত উপাত্তের গড় নির্ণয় (সরাসরি প্রক্রিয়ায়)***

যে তথ্যরাশি শ্রেণীব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যার মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় তাকে বিন্যস্ত উপাত্ত বলা হয়।

বিন্যস্ত উপাত্তের গড় নির্ণয়ের পূর্বে প্রথমেই আপনাকে জানতে হবে বিন্যস্ত উপাত্ত কাকে বলে। বিন্যস্ত উপাত্ত হলো শ্রেণী ব্যাপ্তির সাহায্যে গণসংখ্যার মাধ্যমে তথ্যসারির প্রকাশ। **বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রেও সরাসরি এবং সংক্ষিপ্ত উভয় প্রকারে গড় নির্ণয় করা যায়।** এক্ষেত্রে গড় নির্ণয় করতে হলে প্রথমে গণসংখ্যা নিবেশনে শ্রেণীব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু নির্ণয় করতে হবে। শ্রেণীব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু নির্ণয় করার জন্য নির্দিষ্ট শ্রেণীর উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যোগ করে দুই দ্বারা ভাগ করা হয়। যেমন, ১০-২০ এই শ্রেণীর মধ্যবিন্দু হবে, (১০+২০) ÷ ২ =১৫। শ্রেণীর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করার কারণ, এই মধ্যবিন্দু শ্রেণীকে প্রতিনিধিত্ব করে এবং গণসংখ্যাগুলি, শ্রেণীর মধ্যে সমভাবে বিস্তৃত বলে ধরে নেয়া হয়। গড় নির্ণয়ের জন্য প্রতিটি শ্রেণীর মধ্যবিন্দুকে ঐ শ্রেণীর গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করে, গুণফলের যোগফলকে মোট গণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যোজিত গড় পাওয়া যায়।

এক্ষেত্রেও যোজিত গড় নির্ণয়ের সূত্র হচ্ছে,

যোজিত গড় $\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$

যেখানে, X = প্রতিটি শ্রেণীর মধ্যমান
f = প্রতিটি শ্রেণীর গণসংখ্যা
N = মোট গণসংখ্যা
$\sum$ = সমষ্টির প্রতীক

সুতরাং আপনি জানলেন, বিন্যস্ত উপাত্তের গড় নির্ণয়ের সূত্র কী। তাহলে আসুন উদাহরণের সাহায্যে দেখা যাক- কীভাবে বিন্যস্ত উপাত্তের গড় নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ-৫ ঃ ১০০ জন শ্রমিককে তাদের ঘন্টা প্রতি অর্জিত মজুরীর ভিত্তিতে নিচে সাজানো গণসংখ্যা নিবেশন দেখানো হলো।

ঘন্টা প্রতি মজুরীর শ্রেণীসীমা (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা f
০ - ৫	১০
৫ - ১০	২০
১০ - ১৫	৪০
১৫ - ২০	২০
২০ - ২৫	১০

এখন এই সারণী থেকে সরাসরি প্রক্রিয়ার মাধ্যমে শ্রমিকদের ঘন্টা প্রতি গড় মজুরী বের করতে হবে।

সমাধান ঃ আপনি জানেন যোজিত গড়ের সূত্র মতে আমাদের গড় নির্ণয় করতে গেলে প্রথমে শ্রেণী মধ্যবিন্দু X এবং গণসংখ্যার সাথে শ্রেণী মধ্যবিন্দুর গুণফল fX বের করতে হবে, তাহলে আসুন নিচের সারণীতে গণনা কাজটি সেরে নেই। এখানে, প্রথম শ্রেণী ব্যাপ্তি ০-৫ তাই এর মধ্যমান x = ২.৫। ঠিক একইভাবে সর্বশেষ শ্রেণীব্যাপ্তি ২০-২৫ এবং একইভাবে এই শ্রেণীব্যাপ্তির মধ্যমান ২২.৫।

শ্রেণীসীমা (টাকায়)	গণসংখ্যা f	শ্রেণীর মধ্যমান X	fX
০ - ৫	১০	২.৫	২৫
৫ - ১০	২০	৭.৫	১৫০

১০ - ১৫	৪০	১২.৫	৫০০
১৫ - ২০	২০	১৭.৫	৩৫০
২০ - ২৫	১০	২২.৫	২২৫
মোট	১০০		১,২৫০

যোজিত গড় $\overline{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{১,২৫০}{১০০} =$ ১২.৫০ টাকা

সুতরাং শ্রমিকদের ঘন্টা প্রতি গড় মজুরী = ১২.৫০ টাকা

তাহলে এখন পর্যন্ত প্রথমে আপনি জানলেন কীভাবে সাধারণ প্রক্রিয়ায় সরাসরি ও সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয় করা হয়। পরবর্তীতে আপনি জানলেন সরাসরি প্রক্রিয়ায় কীভাবে বিচ্ছিন্ন গণসংখ্যার ও বিন্যস্ত উপাত্তের গড় নির্ণয় করা হয়। এখন আপনি জানবেন, সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় কীভাবে বিন্যস্ত উপাত্তের গড় নির্ণয় করা হয়। আসুন তাহলে শুরু করা যাক্।

- ***সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া***

সরাসরি প্রক্রিয়ায় গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গড় নির্ণয় অনেক সময় জটিল ও শ্রমসাধ্য হয়ে দাঁড়ায়। তাই গণসংখ্যা বিন্যাসের ক্ষেত্রে গড় নির্ণয়ের জন্য সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া ব্যবহার করা হয়। সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় অল্প পরিশ্রমে ও কম সময়ে গড় নির্ণয় করা সম্ভব হয় এবং এখানে ভুলের সম্ভাবনা কম থাকে। সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় যোজিত গড় নির্ণয়ের সূত্রটি হলো,

> সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় অল্প পরিশ্রমে ও কম সময়ে গড় নির্ণয় করা সম্ভব হয়।

যোজিত গড় $\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{N} \times C$

যেখানে, $\overline{X}$ = যোজিত গড়

A = আনুমানিক গড়, যা তথ্য বিন্যাসের মাঝামাঝি অনুমান করা হয়

C = শ্রেণী ব্যাপ্তির আয়তন

$d = \frac{X - A}{C}$ অর্থাৎ, A থেকে স্তর বিচ্যুতি

f = প্রতিটি শ্রেণীর গণসংখ্যা

N = মোট গণসংখ্যা $(\sum f)$

উল্লেখ্য যে, **এই সূত্র শুধুমাত্র সম-শ্রেণী আয়তন বিশিষ্ট বিন্যাসের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।**

উদাহরণ-৬ ঃ ১০০ জন শ্রমিককে তাদের ঘন্টা প্রতি অর্জিত মজুরীর ভিত্তিতে নিচে সাজানো গণসংখ্যা নিবেশন দেখানো হলো।

ঘন্টা প্রতি মজুরীর শ্রেণীসীমা (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা f
০ - ৫	১০
৫ - ১০	২০
১০ - ১৫	৪০
১৫ - ২০	২০
২০ - ২৫	১০

উক্ত গণসংখ্যা বিন্যাস থেকে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে শ্রমিকদের গড় মজুরী নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের জন্য সূত্র মতে আপনাকে প্রথমে শ্রেণী মধ্যমান X এবং স্তর বিচ্যুতি $d = \frac{x - A}{c}$ বের করতে হবে। আসুন তাহলে, প্রয়োজনীয় গণনা কাজের জন্য নিচের সারণীটি ব্যবহার করি।

শ্রেণী (টাকা)	গণসংখ্যা f	মধ্যমান X	স্তর বিচ্যুতি $d = \frac{x - A}{c}$	fd
০ - ৫	১০	২.৫	-২	-২০

৫ - ১০	২০	৭.৫	-১	-২০
১০ - ১৫	৪০	**১২.৫**	০	০
১৫ - ২০	২০	১৭.৫	১	২০
২০ - ২৫	১০	২২.৫	২	২০
	১০০			$\sum fd = ০$

সাধারণত শ্রেণীর মধ্যমানগুলির মধ্যবর্তী মানটিকে অনুমিত গড় হিসাবে ধরা হয়।

উপরের তালিকাতে অনুমিত গড় (A) = ১২.৫ ধরা হয়েছে। সাধারণত শ্রেণীর মধ্যমানগুলির মধ্যবর্তী মানটিকে অনুমিত গড় হিসাবে ধরা হয়। এর ফলে গণনাকার্য সহজ হয়।

যোজিত গড় $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N} \times C$

$= ১২.৫ + \frac{০}{১০০} \times ৫$

$= ১২.৫০ + ০$

তাহলে সমশ্রেণী আয়তন বিশিষ্ট গণসংখ্যা বিন্যাসের ক্ষেত্রে গড় নির্ণয় শিখলেন। এখন কীভাবে অসম শ্রেণী আয়তন বিশিষ্ট গণসংখ্যা বিন্যাসের ক্ষেত্রে সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গড় নির্ণয় করতে হবে তা আলোচনা করা হবে। এক্ষেত্রে গড় নির্ণয়ের সূত্র হলো,

যোজিত গড় $\overline{X} = A + \frac{\sum f(x-A)}{N}$

যেখানে, $\overline{X}$ = যোজিত গড়
A = আনুমানিক গড়
X = মধ্যমান
X-A = আনুমানিক গড় থেকে মধ্যমানের বিচ্যুতি
N = $\sum f$ মোট গণসংখ্যা

উদাহরণ-৭ ঃ নিচের গণসংখ্যা নিবেশনে ১০০ জন ছাত্র-ছাত্রীকে তাদের নম্বরের ভিত্তিতে অসম শ্রেণীর আয়তনে বিভক্ত করে গড় নির্ণয় করুন,

নম্বর	ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা f
০ -৪০	১২
৪০ - ৫০	২০
৫০ - ৬০	৪৩
৬০ - ৭০	১৮
৭০ - ১০০	৭

সমাধান ঃ ছাত্র-ছাত্রীদের নম্বরের গড় নির্ণয়

শ্রেণী	f	X	X-A	f(X-A)
০ -৪০	১২	২০	-৩৫	-৪২০
৪০ - ৫০	২০	৪৫	-১০	-১২০
৫০ - ৬০	৪৩	৫৫	০	০
৬০ - ৭০	১৮	৬৫	১০	১৮০
৭০ - ১০০	৭	৮৫	৩০	২১০
	১০০			-১৫০

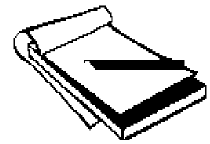
মনে করি A = ৫৫,

যোজিত গড় $\overline{X} = A + \frac{\sum f(x-A)}{N}$

$$= ৫৫ + \frac{-১৫০}{১০০}$$

$$= ৫৫ - ১.৫০ = ৫৩.৫০$$

সুতরাং প্রতি ছাত্রের গড় নম্বর = ৫৩.৫০



অনুশীলন

৫০ জন ছাত্রের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করুন।

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্রসংখ্যা
৪০ - ৫০	১২
৫০ - ৬০	৮
৬০ - ৭০	১৫
৭০ - ৮০	৬
৮০ - ৯০	৬
৯০ - ১০০	৩

আশা করি সাধারণ যোজিত গড় সম্পর্কে আপনার একটি ভাল ধারণা হয়েছে। আসুন এবার গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক।

২. *গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় (Weighted Arithmatic Mean)*

সাধারণ যোজিত গড়ের একটি অসুবিধা হলো, এই গড় তথ্যরাশির সব কয়টি মানকেই সমান প্রাধান্য দিয়ে থাকে। কিন্তু এমন কিছু তথ্য অনেক সময় সারিতে থাকে যার গুরুত্ব বা ভারের প্রাধান্যের তারতম্য থাকে। এই সমস্ত তারতম্য যুক্ত তথ্য অনুক্রমের ক্ষেত্রে সাধারণ যোজিত গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতার যথার্থ পরিমাপক হয় না। তারতম্যমুক্ত প্রাধান্যমূলক তথ্যসারির প্রতিনিধিত্বমূলক গড় পেতে হলে প্রতিটি সংখ্যামানকে তার প্রাধান্যের অনুপাত দিয়ে গুণ করতে হয়। এই গুণফলগুলির সমষ্টিকে গুরুত্বসমূহের মোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় পাওয়া যায়। গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড়ের সরাসরি প্রক্রিয়ার সূত্রটি হলো,

তথ্যের প্রাধান্যের তারতম্য হলে সাধারণ যোজিত গড় দিয়ে প্রতিনিধিত্বমূলক কেন্দ্রীয় মান বের করা যায় না বলেই গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় ব্যবহার করা হয়।

$$\overline{X} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

যেখানে, $\overline{X}$ = গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড়

x = প্রতিটি তথ্যের মান

w = প্রতিটি তথ্যের গুরুত্ব

$\sum w$ = গুরুত্বসমূহের সমষ্টি

উদাহরণ-৮ ঃ নিচে বাংলাদেশের চারিটি বৃহত্তর নগরীর শিক্ষিতের হার এবং মোট লোকসংখ্যা দেয়া হলো, শিক্ষাহারের গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় নির্ণয় করুন।

নগরী	শিক্ষিতের শতকরা হার	মোট লোকসংখ্যা (লক্ষে)
ঢাকা	৫৭	৬০
চট্টগ্রাম	৫৪	২০
রাজশাহী	৪৬	০৫
খুলনা	৫২	১৫

সমাধান ঃ নিচে তালিকায় বাংলাদেশের বৃহৎ নগরীর শিক্ষাহারের গুরুত্বপ্রদত্ত গড় নির্ণয় করা হলো।

নগরী	শিক্ষার শতকরা হার X	লোকসংখ্যা (লক্ষে) W	WX
ঢাকা	৫৭	৬০	৩,৪২০

চট্টগ্রাম	৫৪	২০	১,০৮০
রাজশাহী	৪৬	০৫	২৩০
খুলনা	৫২	১৫	৭৮০
		$\sum w = ১০০$	$\sum WX = ৫,৫১০$

$$\overline{X} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

$$= \frac{৫,৫১০}{১০০}$$

$$= ৫৫.১০\%$$

সুতরাং, বাংলাদেশের চারটি বৃহত্তর নগরীর শিক্ষিতের গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় ৫৫.১০%।

গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড়ের সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া

সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় চলকের পরিমাপের মধ্যস্থিত যে কোন সংখ্যাকে অনুমিত গড় হিসাবে ধরা হয়।

সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় চলকের পরিমাপের মধ্যস্থিত যে কোন সংখ্যাকে অনুমিত গড় হিসাবে ধরা হয় এবং অনুমিত গড় থেকে প্রতিটি সংখ্যার বিচ্যুতি বা পার্থক্য নির্ণয় করা হয়। বিচ্যুতিসমূহকে এর গুরুত্ব দিয়ে গুণ করে, গুণফলের সমষ্টিকে মোট গুরুত্ব দিয়ে ভাগ করা হয়। এই ভাগফলকে অনুমিত গড়ের সঙ্গে যোগ করলে গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় পাওয়া যায়। সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড়ের সূত্রটি হলো,

যোজিত গড় $\overline{X} = A + \frac{\sum w(x-A)}{\sum w}$

যেখানে, $\overline{X}$ = গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড়

A = আনুমানিক গড়

w = প্রতিটি রাশির গুরুত্ব

$\sum w$ = গুরুত্বসমূহের সমষ্টি

উদাহরণ-৯ ঃ নিচে বাংলাদেশের চারিটি বৃহত্তর নগরীর শিক্ষিতের হার এবং মোট লোকসংখ্যা দেয়া হলো,

নগরী	শিক্ষিতের শতকরা হার	মোট লোকসংখ্যা (লক্ষে)
ঢাকা	৫৭	৬০
চট্টগ্রাম	৫৪	২০
রাজশাহী	৪৬	০৫
খুলনা	৫২	১৫

বর্ণিত তথ্যসমূহের গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ায় গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় নির্ণয় -

নগরী	শিক্ষার হার X	লোকসংখ্যা (লক্ষে) W	X-A	W(X-A)
ঢাকা	৫৭	৬০	৫	৩০০
চট্টগ্রাম	৫৪	২০	২	৪০
রাজশাহী	৪৬	০৫	-৬	-৩০
খুলনা	৫২	১৫	০	০
		$\sum w = ১০০$		৩১০

মনে করি, আনুমানিক গড়, A = ৫২

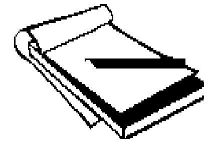
গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় $\overline{X} = A + \frac{\sum w(x-A)}{\sum w}$

$$= ৫২ + \frac{৩১০}{১০০} = ৫২ + ৩.১০ = ৫৫.১০$$

অনুশীলন

নিচের তথ্যের সাহায্যে গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় নির্ণয় করুন —

দ্রব্য	মূল্য (টাকায়) প্রতি কেজি	পরিমাণ (কেজি)
ক	১২	৫০
খ	১৫	৪২
গ	২০	৭৫
ঘ	১৪	৮০
ঙ	১৬	৪০



সম্মিলিত গড় (Combined Mean)

যদি একটি তথ্য অনুক্রমকে দুই বা ততোধিক উপ-অনুক্রমে বিভক্ত করা হয় এবং এদের প্রতিটি উপ-অনুক্রমের গড় এবং রাশি সংখ্যা জানা থাকে তবেই উহাদের সম্মিলিত যোজিত গড় নির্ণয় করা সম্ভব। প্রতিটি উপ-অনুক্রমের গড়কে তাদের স্ব স্ব রাশি সংখ্যা দ্বারা গুরুত্ব আরোপ করে গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড়ের সাহায্যে সম্পূর্ণ অনুক্রমটির যোজিত গড় নির্ণয় করা হয়। সম্মিলিত গড়ের সূত্রটি হলো,

প্রতিটি উপ-অনুক্রমের গড়কে তাদের স্ব স্ব র সংখ্যা দ্বারা গুরুত্ব আ করে গুরুত্বপ্রদত্ত যোজি গড়ের সাহায্যে সম্পূর্ণ অনুক্রমটির যোজিত গ

$$\overline{X}_c = \frac{n_১\overline{x}_১ + n_২\overline{x}_২ + \ldots\ldots\ldots\ldots n_k\overline{x}_k}{n_১ + n_২ + \ldots\ldots\ldots + n_k}$$

$$= \frac{\sum n\overline{x}}{\sum n}$$

যেখানে,
$\overline{X}_c$ = সম্মিলিত গড়
n = প্রতিটি উপ-অনুক্রমের রাশি সংখ্যা
$\overline{X}$ = প্রতিটি উপ-অনুক্রমের গড়
k = উপ-অনুক্রমের সংখ্যা

উদাহরণ-১০ ঃ একটি শ্রেণীর তিনটি শাখার ছাত্র-ছাত্রীদের সংখ্যা এবং প্রতিটি শাখার গড় নিচের তালিকায় দেখানো হল। শ্রেণীর তিনটি শাখার ছাত্র-ছাত্রীর সম্মিলিত গড় নির্ণয় করুন।

শাখা	ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	গড় নম্বর
ক	৩১	৬৫
খ	৩৩	৬২
গ	৩৬	৬১

সমাধান ঃ সম্মিলিত যোজিত গড়

$$\overline{X}_c = \frac{n_১\overline{x}_১ + n_২\overline{x}_২ + n_৩\overline{x}_৩}{n_১ + n_২ + n_৩}$$

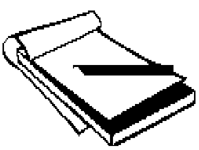
$$= \frac{\sum n\overline{x}}{\sum n}$$

সম্মিলিত যোজিত গড়

শাখা	N	$\overline{X}$	$N\overline{X}$
ক	৩১	৬৫	২,০১৫
খ	৩৩	৬২	২,০৪৬
গ	৩৬	৬১	২,১৯৬
	$\sum N$ = ১০০		৬,২৫৭

$$\overline{x} = \frac{\sum n\overline{x}}{\sum n}$$

$$= \frac{৬,২৫৭}{১০০} \quad = ৬২.৫৭$$



অনুশীলন
৫ জন শ্রমিকের গড় দৈনিক আয় ৬২ টাকা। আরো ১০ জন শ্রমিকের গড় দৈনিক আয় ৭০ টাকা। অপর ১৫ জন শ্রমিকের সাপ্তাহিক (৭ দিন) গড় আয় ৪৫৫ টাকা। এই সকল শ্রমিকের গড় দৈনিক আয় সম্মিলিত যোজিত গড় নির্ণয়ের সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করুন।
(সূত্র ঃ প্রথমে গড় সাপ্তাহিক আয়কে ৭ দ্বারা ভাগ করে শেষ ১৫ জন শ্রমিকের গড় দৈনিক আয় নির্ণয় করতে হবে)

যোজিত গড়ের গাণিতিক বৈশিষ্ট্যসমূহ

যোজিত গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি পরিমাপক। তথ্য অনুক্রমের কেন্দ্রস্থলে এর অবস্থান। ফলে এর কতগুলি গাণিতিক বৈশিষ্ট্য রয়েছে। বৈশিষ্ট্যগুলো হলো,

১. কোন একটি পরিসংখ্যান তথ্যসারির গড় থেকে প্রতিটি সংখ্যামানের বিচ্যুতি নির্ণয় করলে সমস্ত বিচ্যুতির সমষ্টি শূন্য হয়। সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করলে বৈশিষ্ট্যটি নিম্নরূপ,

$$\sum(X - \overline{X}) = 0.$$

উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে, যদি পাঁচজন শ্রমিকের প্রাপ্ত মজুরী যথাক্রমে ৫, ৬, ৭, ৮, ৯ টাকা হয়, তবে তাদের গড় মজুরী, x $\frac{\sum x}{n} = \frac{৩৫}{৫} = ৭$ টাকা। গড় থেকে অন্য রাশিগুলির বিচ্যুতির সমষ্টি, $\sum(X - \overline{X}) = 0.$

গড় থেকে রাশিগুলির বিচ্যুতির সমষ্টি নির্ণয় করে নিম্নের তালিকায় প্রদর্শিত হল,

X	$X - \overline{X}$
৫	-২
৬	-১
৭	০
৮	১
৯	২
	$\sum(X - \overline{X}) = 0$

২. একটি তথ্য অনুক্রমের প্রতিটি তথ্যের বদলে গড় ব্যবহার করলে তাদের যোগফল তথ্যসারির সংখ্যামানসমূহের সমষ্টির সমান।

ত গড় তথ্য অনুক্রমের প্রতিনিধিত্বশীল রাশি।

চিহ্নের মাধ্যমে বিষয়টি $\sum X = N\overline{X}$। উপরের উদাহরণে গড় মজুরী ৭ টাকা। অনুক্রমের রাশিগুলির সমষ্টি $\sum x$ = ৩৫। আবার রাশিগুলির পরিবর্তে গড় বসালে তাদের সমষ্টি হয় $\sum\overline{X} = N\overline{X}$ = ৫×৭ = ৩৫। সেজন্য বলা চলে যে, যোজিত গড় তথ্য অনুক্রমের যথার্থ প্রতিনিধিত্বশীল রাশি।

৩. যোজিত গড় থেকে তথ্য অনুক্রমের প্রতিটি সংখ্যামানের বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টি সর্বনিম্ন। চিহ্নের মাধ্যমে বিষয়টি নিম্নরূপ ঃ

$\sum(X-\overline{X})^2 \le \sum(X-A)^2$ । যেখানে A হচ্ছে গড় ব্যতীত যে কোন একটি সংখ্যামান। উপরের উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি দেখানো হলো, মনেকরি, A = ৮

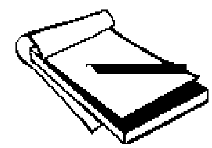
X	$(X-\overline{X})$	$(X-\overline{X})^2$	X–A	$(X-A)^2$
৫	-২	৪	-৩	৯
৬	-১	১	-২	৪
৭	০	০	-১	১
৮	১	১	০	০
৯	২	৪	১	১
		$\sum(X-\overline{X})^2 =$ ১০		$\sum(X-A)^2 =$ ১৫

উপরের তালিকায় দেখা যাচ্ছে, $\sum(X-\overline{X})^2 =$ ১০ এবং $\sum(X-A)^2 =$ ১৫

সুতরাং, $\sum(X-\overline{X})^2 \le \sum(X-A)^2$

অনুশীলন

উপযুক্ত উদাহরণের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, কোন একটি পরিসংখ্যান তথ্যসারির গড় ব্যতীত অন্য কোন মান হতে প্রতিটি সংখ্যা মানের বিচ্যুতি নির্ণয় করলে সমস্ত বিচ্যুতির সমষ্টি শূন্য হবে না।



যোজিত গড়ের সুবিধা

- যোজিত গড় সহজ বোধ্য হওয়ায় কারণে সাধারণভাবে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হিসাবে সর্বাধিক ব্যবহৃত হয়।
- যোজিত গড় নির্ণয়ে সারির সকল তথ্য রাশিকে বিবেচনায় আনা হয়।
- যোজিত গড় গাণিতিক সঠিকতার সহিত নির্ণয় করা সম্ভব হয়।
- অবিন্যস্ত তথ্য থেকেও যোজিত গড় নির্ণয় করা সম্ভব।
- অনুক্রমের রাশিগুলির প্রত্যেকটির প্রকৃত মান দেয়া না থাকলেও কেবলমাত্র এর সমষ্টি এবং সংখ্যা জানা থাকলেই যোজিত গড় নির্ণয় করা যায়।
- যোজিত গড়ের মাধ্যমে প্রতিটি তথ্যকে উহার আপেক্ষিক প্রাধান্য অনুসারে গুরুত্ব দিয়ে তা নির্ণয় করা যেতে পারে।
- যোজিত গড়ের মাধ্যমে আমরা সম্মিলিত গড় নির্ণয় করতে পারি। অন্যান্য কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকের সাহায্যে তা সম্ভব হয় না।
- যোজিত গড় গাণিতিক এবং বীজগণিতের প্রক্রিয়া আরোপের উপযোগী। এই সমস্ত কারণে পরিসংখ্যান তথ্য বিশ্লেষণে এর ব্যবহার সর্বাধিক।

যোজিত গড়ের অসুবিধা

- যে সমস্ত তথ্য অনুক্রমে অস্বাভাবিকভাবে বড় সংখ্যা বা খুব ছোট সংখ্যা বর্তমান থাকে, সেক্ষেত্রে যোজিত গড় তথ্যের প্রতিনিধিত্বের যথার্থ পরিমাপ করে না।

  যেমন, তিনজন লোকের দৈনিক আয় যথাক্রমে ১৫, ১৮, ও ৩০০ টাকা। তাঁদের গড় আয়, $\overline{X} = \frac{\sum x}{৩} = \frac{৩৩৩}{৩} =$ ১১১ টাকা। সত্যিকার অর্থে ১১১ টাকা অনুক্রমের তথ্যরাশি তিনটির কোনটিরই যথার্থ প্রতিনিধিত্বশীল কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক নহে। এমনক্ষেত্রে যোজিত গড় কম উপযোগী।
- উপাত্ত সারির দুই সীমারেখা জানা না থাকলে যোজিত গড় নির্ণয় সম্ভবপর হয় না। মুক্ত শ্রেণী ব্যাপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে কোন শর্ত ব্যাতিরেকে

যোজিত গড় নির্ণয় করা যায় না। যেমন, কোন শ্রেণী ব্যাপ্তির প্রথম শ্রেণীটি যদি শুধু ৫ হয়, সেক্ষেত্রে ৫ এর আগে কোন একটি সংখ্যা অনুমান করে নিতে হয়।

- গ্রাফের মাধ্যমে যোজিত গড় নির্ণয় করা যায় না। তবে মধ্যমা এবং প্রচুরক নির্ণয় করা যায়। যা পরবর্তীতে আলোচনা করা হয়েছে।
- যোজিত গড় এমন একটি সংখ্যামান হতে পারে যা তথ্য অনুক্রমে বিদ্যমান নয়। অন্য পরিমাপক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে তা দেখা যায় না।

যোজিত গড়ের ব্যবহার

কটি বিশেষ ক্ষেত্র ছাড়া াদের দৈনন্দিন জীবনে মি, আপনি, সবাই জিত গড় বহুল পরিমাণে হার করে থাকি।

এই পাঠে আপনি নিশ্চয়ই যোজিত গড় সম্পর্কে বিস্তারিত জানতে পেরেছেন। আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমরা বিভিন্ন বক্তব্য যেমন, মাসিক গড় আয়, কোন দ্রব্যের গড় মূল্য, কোন পণ্যের গড় আমদানী, শিল্প পণ্যের গড় চাহিদা ইত্যাদি বিষয়ক ধারণার সম্মুখীন হই। এক্ষেত্রে যে গড় ব্যবহৃত হয় তাহল প্রকৃতপক্ষে যোজিত গড়। পরিসংখ্যান তথ্য অনুক্রমের বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে যোজিত গড় ব্যবহৃত হয়। কোন বিষয়ের সময়ের ভিত্তিতে সাজানো তথ্যকে সুষম করার জন্য অর্থাৎ বিভিন্ন মাসে উৎপাদন বিভিন্ন রকম হলেও প্রতিমাসে একটি প্রতিনিধিত্বশীল উৎপাদন সম্পর্কে বুঝানোর ক্ষেত্রে যে গড় ব্যবহৃত হয়, তাহল যোজিত গড়। তেমনিভাবে সূচক সংখ্যা পরিগণনায়ও যোজিত গড় ব্যবহৃত হয়। যোজিত গড় ছাড়া সম্মিলিত গড় বের করা সম্ভব নয়।

সারাংশ

ব্যবহারিক জীবনে যোজিত গড়ের ব্যবহার খুব বেশী। আমরা ক্ষেত্র বিশেষে অন্যান্য গড় ব্যবহার করি মাত্র। এ পাঠে আপনি যোজিত গড়ের সংজ্ঞা, প্রকারভেদ, যোজিত গড় নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত ও সরাসরি পদ্ধতি সম্পর্কে ধারণা পেয়েছেন। কোন তথ্যসারিতে তারতম্যযুক্ত প্রাধান্যমূলক তথ্য থাকলে, কেন গুরুত্বপ্রদত্ত যোজিত গড় ব্যবহার করা হয়- এব্যাপারেও সঠিক ধারণা লাভ করেছেন। যোজিত গড়ের গাণিতিক বৈশিষ্ট্যসমূহ জেনেছেন। এছাড়া যোজিত গড়ের সুবিধা, তথ্য রাশিতে খুব বেশী বড় বা খুব বেশী ছোট তথ্য থাকলে ঐ মান দ্বারা গড় খুব প্রভাবিত হয় সেটাও বুঝতে পেরেছেন। সর্বোপরি যোজিত গড় কীভাবে আমাদের দৈনন্দিন জীবনধারায় ব্যবহার হচ্ছে সে সম্পর্কে একটি সাধারণ ধারণা লাভ করেছেন।

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. কেন্দ্রীয় প্রবণতা কাকে বলে? দৃষ্টান্ত সহকারে ব্যাখ্যা করুন। নিচের গণসংখ্যা সারণীতে কোন একটি শিল্প কারখানার খণ্ডকালীন শ্রমিকদের শ্রমের মজুরীর বিন্যাস দেয়া হলো,

সাপ্তাহিক মজুরী (টাকা)	১২৫-১৭৫	১৭৫-২২৫	২২৫-২৭৫	২৭৫-৩২৫	৩২৫-৩৭৫	৩৭৫-৪২৫
শ্রমিকের সংখ্যা	৪	২৫	১২	১০	৫	২

এই মজুরীর যোজিত গড় নির্ণয় করুন।

২. যোজিত গড়ের সুবিধা ও অসুবিধাসমূহ সংক্ষিপ্তভাবে আলোচনা করুন।

তিনটি কারখানার কর্মকর্তাদের সংখ্যা এবং তাদের মাসিক গড় বেতন নিচে দেওয়া হলো,

কারখানার ক্রমিক নং	১	২	৩
কর্মকর্তার সংখ্যা	২৫	১০	১৫
মাসিক বেতন	৫,৫০০	৬,০০০	৭,০০০

তিনটি কারখানার কর্মকর্তাদের বেতনের সম্মিলিত গড় নির্ণয় করুন।

৩. যোজিত গড়ের গাণিতিক বৈশিষ্ট্যসমূহ ব্যাখ্যা করুন।

নিচের কয়েকটি পরিবারের মাসিক আয় উল্লেখ করা হলো,

মাসিক আয় (টাকা)	পরিবারের সংখ্যা
০ - ৬০০০	৭
৬০০০ - ১২০০০	১২
১২০০০ - ১৮০০০	২৫
১৮০০০ - ২৪০০০	১৬
২৪০০০ - ৩০০০০	১০
৩০০০০ - ৩৬০০০	৫

পরিবারগুলির আয়ের যোজিত গড় নির্ণয় করুন।

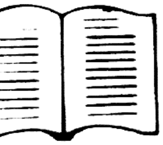
পাঠ-২ : মধ্যমা (Median)

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- মধ্যমা কাকে বলে তা বর্ণনা করতে পারবেন
- অবিন্যস্ত তথ্য অনুক্রম থেকে মধ্যমা নির্ণয় করতে পারবেন
- গণসংখ্যা বিন্যাস দেয়া থাকলে তার মধ্যমা নির্ণয় করতে পারবেন
- লেখচিত্রের মাধ্যমে কোন তথ্য সারির মধ্যমা চিহ্নিত করতে পারবেন
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হিসাবে মধ্যমার সুবিধা ও অসুবিধা বর্ণনা করতে পারবেন
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার অন্যান্য পরিমাপকের সঙ্গে মধ্যমার তুলনা করতে পারবেন
- যে কোন তথ্যসারি থেকে মধ্যমা বের করতে পারবেন।

মধ্যমা কী



মধ্যমা কেন্দ্রীয় প্রবণতার অন্য একটি পরিমাপক। যে সব ক্ষেত্রে যোজিত গড় নির্ণয় করা সম্ভব নয় অথবা, যোজিত গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হিসাবে কম উপযোগী - সেসব ক্ষেত্রে মধ্যমা পরিমাপক ব্যবহার করা যেতে পারে।

টি উর্ধ্ব বা নিম্নক্রম
ারে সাজানো
াশিকে যে রাশিটি
 দুইভাগে ভাগ করে
ই হলো মধ্যমা।

মানের উর্ধ্ব অথবা নিম্নক্রম অনুসারে সাজানো কোন তথ্য অনুক্রমের যে সংখ্যাটি অনুক্রমটিকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে তাকে মধ্যমা বলে। মধ্যমা পরিসংখ্যান সারিকে সমান দুইভাগে ভাগ করে, একদিকে থাকে মধ্যমা থেকে কম মানের সব সংখ্যা এবং অন্যদিকে থাকে মধ্যমা থেকে বৃহত্তর মানের সমস্ত সংখ্যা। তাই কোন তথ্য সারিকে সাজানোর পর সমান দুই ভাগে ভাগ করলে যে মধ্যবর্তী রাশিটি পাওয়া যায় সেই মানই হচ্ছে মধ্যমা। মধ্যমা মধ্যক মানের একটি অবস্থান ভিত্তিক পরিমাপ। একটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টিকে আরও সহজভাবে প্রকাশ করা হলো।

উদাহরণ-১ ঃ পাঁচজন শ্রমিকের প্রতি ঘন্টার শ্রমের মজুরী নিচে দেয়া হলো,

৭, ৯, ১১, ৮, ১০

তথ্য অনুক্রমটির মধ্যমা নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ তথ্য সারিটিকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজালে অনুক্রমটি নিম্নরূপে দাঁড়ায়,

৭, ৮, ৯, ১০, ১১

এখন তথ্য সারিটি ভালভাবে পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যে, তথ্যসারির মধ্যম সংখ্যা হল ৯। সুতরাং মধ্যমার সংজ্ঞা অনুসারে এই তথ্য সারির মধ্যমা হচ্ছে ৯।

অবিন্যস্ত তথ্য অনুক্রম থেকে মধ্যমা নির্ণয়

জোড় সংখ্যক রাশি
িষ্ট তথ্য সারির ক্ষেত্রে
মার অবস্থান
হ্নিতকরণ সহজ হয়।

কোন তথ্য সারিতে বেজোড় সংখ্যক রাশি থাকলে একটি বিশেষ সংখ্যা সারিটিকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করে। সেজন্য বেজোড় সংখ্যক রাশি বিশিষ্ট তথ্য সারির ক্ষেত্রে মধ্যমার অবস্থান চিহ্নিতকরণ সহজ হয়। যেমন, উপরের উদাহরণে সাজানো তথ্য সারির ঠিক মাঝখানে ৯ সংখ্যাটির অবস্থান। সেজন্য ৯ ই হচ্ছে তথ্য সারির মধ্যমা। প্রতীকের মাধ্যমে বেজোড় সংখ্যা বিশিষ্ট তথ্যসারির মধ্যমা হচ্ছে $\frac{n+১}{২}$তম সংখ্যামান, যেখানে n হচ্ছে তথ্য অনুক্রমের রাশি সংখ্যা। উপরের উদাহরণে $\frac{৫+১}{২}$ তম সংখ্যা বা ৩য় সংখ্যা, ৯ হচ্ছে মধ্যমা। এখন স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন আসে অনুক্রমে জোড় সংখ্যা থাকলে এর মাধ্যমা কী হবে? জোড় সংখ্যা বিশিষ্ট তথ্য অনুক্রমের মধ্যমার সংজ্ঞা হচ্ছে $\frac{n}{২}$ তম এবং $(\frac{n}{২}+১)$তম রাশির গড়, যেখানে n হল অনুক্রমের রাশির সংখ্যা। বিষয়টি একটি উদাহরণে উপস্থাপন করা যাক।

উদাহরণ-২ ঃ মনে করুন, আটজন শ্রমিকের কোন একটি নির্দিষ্ট দিনে উৎপাদিত দ্রব্যের সংখ্যা নিম্নরূপ,

৬৮, ৪৪, ৬০, ৭৫, ৬৪, ৫৫, ৪৮, ৫০

এই তথ্য অনুক্রমের মধ্যমা নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ এই তথ্যসারির রাশি সংখ্যা ৮। এটি একটি জোড় সংখ্যা বিশিষ্ট্য তথ্য অনুক্রম। সংজ্ঞা অনুসারে এর মধ্যমা হলো, $\frac{n}{২}$ তম এবং $(\frac{n}{২}+১)$তম রাশির গড়। মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজানো সারিটি হল, ৪৪, ৪৮, ৫০, ৫৫, ৬০, ৬৪, ৬৮, ৭৫

$$\text{সুতরাং মধ্যমা} = \frac{\frac{n}{২}\text{তম রাশি} + (\frac{n}{২}+১)\text{তম রাশি}}{২}$$

$$\text{যেখানে } n = ৮, = \frac{\frac{৮}{২}\text{তম রাশি} + (\frac{৮}{২}+১)\text{তম রাশি}}{২} = \frac{৪\text{র্থ রাশি} + ৫\text{ম রাশি}}{২}$$

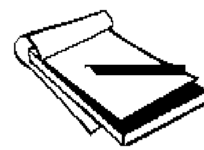
$$= \frac{৫৫+৬০}{২} = \frac{১১৫}{২} = ৫৭.৫$$

সুতরাং শ্রমিকদের উৎপাদিত দ্রব্য সংখ্যার মধ্যমা হচ্ছে ৫৭.৫।

অনুশীলন

নিচের তথ্য অনুক্রমের মধ্যমা নির্ণয় করুন —

১০ জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর ঃ ৫৭, ৪২, ৩৭, ৬৮, ৫৩, ৭৫, ৮১, ৪৪, ৩৫, ৬১



বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে মধ্যমা নির্ণয়

বিন্যস্ত তথ্য সাধারণত গণসংখ্যা সারণীতে প্রকাশ করা হয়। কোন গণসংখ্যা নিবেশনের মধ্যমা নির্ণয় করতে হলে গণসংখ্যাগুলি যোজনের মাধ্যমে নিবেশনের শ্রেণীগুলির কোনটিতে মধ্যমা অবস্থান করছে- তা প্রথমে নিরূপণ করা হয়। নিবেশনের যোজিত গণসংখ্যা নির্ণয় করে যে শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা $\frac{n}{২}$ মানটির সমান বা বেশী তা নির্ণয় করা হয়। সেই শ্রেণীর মধ্যে **মধ্যমার অবস্থান ধরে নেয়া হয়।** মধ্যমা শ্রেণী নিরূপিত হওয়ার পর মধ্যমা শ্রেণীর গণসংখ্যা ঐ শ্রেণীতে সমভাবে নিবেশিত- এই অনুমানের ভিত্তিতে মধ্যমা নিরূপণের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত সূত্র ব্যবহার করা হয়।

বিন্যস্ত তথ্য সাধারণত গণসংখ্যা সারণীতে প্র করা হয়।

$$\text{মধ্যমা} = L_1 + \frac{\frac{n}{২} - f_c}{f_m} \times C$$

যেখানে,
- L_1 = মধ্যমা শ্রেণীর নিম্ন সীমা
- C = প্রতিটি উপ-অনুক্রমের রাশি সংখ্যা বা শ্রেণী ব্যাপ্তি
- L_2 = মধ্যমা শ্রেণীর উচ্চ সীমা
- n = মোট গণসংখ্যা
- f_m = মধ্যমা শ্রেণীর গণসংখ্যা
- f_c = মধ্যমা শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীর যোজিত গণসংখ্যা

উদাহরণ-৩ ঃ কোন পরীক্ষায় একদল ছাত্রের নম্বর নিচের গণসংখ্যা সারণীতে দেয়া হলো —

নম্বর	ছাত্রের সংখ্যা
০ - ১০	১
১০ - ২০	৪
২০ - ৩০	৬
৩০ - ৪০	৮
৪০ - ৫০	১০
৫০ - ৬০	২০
৬০ - ৭০	২৪
৭০ - ৮০	১৮
৮০ - ৯০	৬
৯০ - ১০০	৩

সারণী থেকে ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যমা বের করতে হবে।

সমাধান ঃ

নম্বর	ছাত্রসংখ্যা গণসংখ্যা (f)	যোজিত গণসংখ্যা cf	
০ - ১০	১	১	
১০ - ২০	৪	১+৪ =৫	
২০ - ৩০	৬	৫+৬ =১১	
৩০ - ৪০	৮	১১+৮ =১৯	
৪০ - ৫০	১০	১৯+১০ =২৯	
৫০ - ৬০	২০	২৯+২০ =৪৯	= f_c
৬০ - ৭০	**২৪** = f_m	**৪৯+২৪ =৭৩**	
৭০ - ৮০	১৮	৭৩+১৮ =৯১	
৮০ - ৯০	৬	৯১+৬ =৯৭	
৯০ - ১০০	৩	৯৭+৩ =১০০	
	n = ১০০		

$$\frac{n}{২} = \frac{১০০}{২} = ৫০$$

সুতরাং, যোজিত গণসংখ্যা ৫০ অতিক্রম করায় ধরে নেয়া যায় মধ্যমার শ্রেণীটি শ্রেণীব্যাপ্তি (৬০-৭০) এর মধ্যে অবস্থান করছে।

সুতরাং, মধ্যমা শ্রেণী = (৬০ - ৭০)

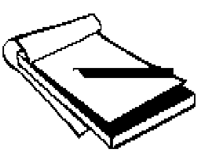
L_1 বা মধ্যমা শ্রেণীর নিম্নসীমা = ৬০, f_m বা মধ্যমা শ্রেণীর গণসংখ্যা = ২৪

$$\text{মধ্যমা} = L_1 + \frac{\frac{n}{২} - f_c}{f_m} \times C$$

$$= ৬০ + \frac{৫০ - ৪৯}{২৪} \times ১০$$

$$= ৬০ + \frac{১}{২৪} \times ১০ = ৬০ + ০\cdot৪২ = ৬০\cdot৪২$$

সুতরাং, ছাত্রদের নম্বরের মধ্যমা = ৬০·৪২



অনুশীলন

নিচের বিন্যস্ত উপাত্তের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করুন —

বানান ভুলের সংখ্যা	পৃষ্ঠা সংখ্যা
০ - ২	২
২ - ৪	২
৪ - ৬	৩
৬ - ৮	২
৮ - ১০	১

বিচ্ছিন্ন অনুক্রমের মধ্যমা নির্ণয়

সংখ্যার মধ্যস্থল নির্বাচিত
তা যে মানের বিপরীতে
ান করে সেইমানকে
া বলে চিহ্নিত করা

বিচ্ছিন্ন অনুক্রম তথ্যসারির জন্য মধ্যমা নির্ণয় করতে হলে প্রথমেই, $\frac{n}{২}$ তম সংখ্যার অবস্থান চিহ্নিত করতে হয়। সেক্ষেত্রে প্রথমে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার একটি কলাম প্রস্তুত করে নিতে হয়। এভাবে গণসংখ্যার মধ্যস্থল নির্বাচিত হলে তা যে মানের বিপরীতে অবস্থান করে সেইমানকে মধ্যমা বলে চিহ্নিত করা হয়। একটি উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টিকে আরও সহজ করা যায় এইভাবে —

উদাহরণ-৪ ঃ নিচের নিবেশনে ১০০ জন শ্রমিকের কাজের সময়সীমা দেয়া হলো,

কাজের সময় সীমা (বৎসর)	৫	৬	৭	৮	৯
শ্রমিকের সংখ্যা	১০	২০	৪০	২০	১০

নিবেশনের মধ্যমা নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মধ্যমা নির্ণয় করার জন্য প্রথমে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নির্ণয় করতে হবে। পরে সূত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করতে হবে।

কাজের সময় সীমা	গণসংখ্যা f	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা cf
৫	১০	১০
৬	২০	১০+২০ =৩০
৭	**৪০**	**৩০+৪০ =৭০**
৮	২০	৭০+২০ =৯০
৯	১০	৯০+১০ =১০০
	n = ১০০	

মধ্যমা = $\frac{n}{২}$তম রাশির মান, এখানে n = ১০০

= $\frac{১০০}{২}$ = ৫০ তম রাশি

এখন যোজিত গণসংখ্যার কলাম লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, ৫০তম সংখ্যার অবস্থান কাজের জীবন সীমার ৭ (সাত) এর বিপরীতে অবস্থান করছে। অতএব, শ্রমিকদের কাজের সময়সীমার মধ্যমা = ৭ বৎসর।

লৈখিক প্রক্রিয়ায় মধ্যমা নির্ণয়

লেখ চিত্রের মাধ্যমেও কোন গণসংখ্যা বিন্যাসের মধ্যমা নির্ণয় করা সম্ভব। এই প্রক্রিয়ার মধ্যমা নির্ণয় করতে হলে প্রথমেই একটি অজিভ বা যোজিত গণসংখ্যা রেখা অংকন করতে হবে। আপনার নিশ্চয়ই অজিভ অঙ্কন প্রণালী মনে আছে যা আপনি ইউনিট ২ এর পাঠ-৫ এ জেনে এসেছেন। যাহোক, আসুন দেখা যাক অজিভের মাধ্যমে মধ্যমা নির্ণয় করতে গেলে আপনাকে কি কি ধাপ অতিক্রম করতে হবে।

মধ্যমার লৈখিক উপস্থাপ সারণীবদ্ধ তথ্যকে সহজভাবে বুঝতে সাহা করে।

- অজিভের Y-অক্ষে থাকবে যোজিত গণসংখ্যা এবং X-অক্ষে থাকবে চলকের শ্রেণী সীমা।
- কোন গণসংখ্যা বিন্যাসের মোট গণসংখ্যা n হলে $\frac{n}{২}$এর অবস্থান প্রথমে Y-অক্ষে চিহ্নিত করতে হবে।
- সেই $\frac{n}{২}$বিন্দু থেকে X-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা অংকন করতে হবে।
- X-অক্ষের সমান্তরাল রেখা যে বিন্দুতে অজিভকে ছেদ করে সেই ছেদ বিন্দু থেকে X-অক্ষ রেখার উপর একটি লম্ব অংকন করতে হবে।
- একটি বিন্দুতে লম্বটি X-অক্ষকে ছেদ করবে।
- সেই ছেদ বিন্দুর অবস্থানেই মধ্যমা চিহ্নিত হবে এবং ছেদ বিন্দুটির মানই হবে মধ্যমা।

আসুন, উদাহরণ দিয়ে বিষয়টি আরও সহজ করে বুঝে নেই।

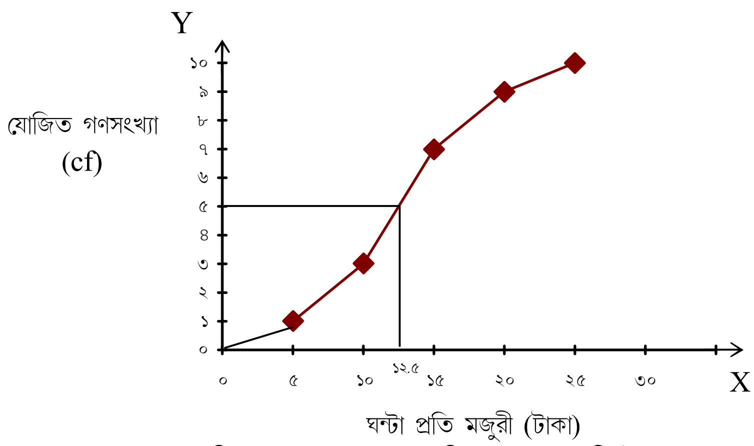
উদাহরণ-৫ ঃ দশজন শ্রমিকের প্রতি ঘন্টার মজুরী নিচের গণসংখ্যা বিন্যাসে দেখানো হলো,

ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১
মোট	১০

অজিভ অংকন করে তার সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করতে হবে।

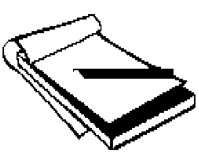
সমাধান ঃ

ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	গণসংখ্যা f	যোজিত গণসংখ্যা cf
০ - ৫	১	১
৫ - ১০	২	৩
১০ - ১৫	৪	৭
১৫ - ২০	২	৯
২০ - ২৫	১	১০



অজিভের সাহায্যে গণসংখ্যা বিন্যাসের মধ্যমা নির্ণয়

সুতরাং, মধ্যমা = ১২.৫০ টাকা



অনুশীলন

নিচের গণংখ্যা নিবেশন হতে অজিভ অঙ্কন করে মধ্যমা নির্ণয় করুন —

তাপমাত্র (ডিগ্রি)	দিনের সংখ্যা
১৫ - ১৯	২৫
১৯ - ২৩	২৯
২৩ - ২৭	৩৬
২৭ - ৩১	৪৫
৩১ - ৩৫	৩৮
৩৫ - ৩৯	৩০
৩৯ - ৪৩	২১

মধ্যমার গাণিতিক বৈশিষ্ট্য

্যরাশির প্রতিটি রাশির মা থেকে বিচ্যুতির পেক্ষ যোগফল সর্বনিম্ন- ় মধ্যমার গাণিতিক শিষ্ট্য।

মধ্যমা হচ্ছে কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি প্রধান পরিমাপক। মধ্যমার একটি গাণিতিক বৈশিষ্ট্য আছে। এই বৈশিষ্ট্যটি হলো, পরিসংখ্যান তথ্য সারির প্রতিটি রাশির মধ্যমা থেকে বিচ্যুতির বা পার্থক্যের অনপেক্ষ যোগফল সর্বনিম্ন। এখানে অনপেক্ষ শব্দের অর্থ হচ্ছে চিহ্ন উপেক্ষা করে (অর্থাৎ, বিয়োগফল ঋনাত্মক হলেও তাকে ধনাত্মক ধরতে হবে) বিচ্যুতিসমূহের সমষ্টি এবং এভাবে প্রকাশিত তথ্যকে $\sum|x$ - মধ্যমা$|$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। মধ্যমা ভিন্ন অন্যকোন সংখ্যামান থেকে রাশিগুলির অনপেক্ষ বিচ্যুতির সমষ্টি, মধ্যমা থেকে অনপেক্ষ বিচ্যুতির যোগফল অপেক্ষা বেশি হবে। বিষয়টি উদাহরণের সাহায্যে আরও সহজ করে উপস্থাপন করা হলো।

উদাহরণ-৬ ঃ পাঁচজন কর্মকর্তার চাকুরীর সময়কাল দেয়া হল - ৬, ৭, ৮, ৯, ১০
এই তথ্য সারির মধ্যমা নির্ণয় করুন এবং দেখান যে, প্রতিটি সংখ্যামানের মধ্যমা থেকে বিচ্যুতির অনপেক্ষ যোগফল সর্বনিম্ন।

সমাধান ঃ

১	২	৩	৪
চাকুরীর সময়কাল (বৎসর) X	মধ্যমা থেকে অনপেক্ষ ব্যবধান |X - মধ্যমা|	৯ থেকে অনপেক্ষ ব্যবধান |X - ৯|	১০ থেকে অনপেক্ষ ব্যবধান |X - ১০|
৬	|৬ -৮| =২	|৬ -৯| =৩	|৬ -১০| =৪
৭	|৭ -৮| =১	|৭ -৯| =২	|৭ -১০| =৩
৮	|৮ -৮| =০	|৮ -৯| =১	|৮ -১০| =২
৯	|৯ -৮| =১	|৯ -৯| =০	|৯ -১০| =১
১০	|১০ -৮| =২	|১০ -৯| =১	|১০ -১০| =০
	৬	৭	১০

এই সাজানো তথ্য সারির মধ্যমা = ৮। প্রথমে এই মধ্যমা থেকে অন্যান্য রাশির বিচ্যুতির অনপেক্ষ যোগফল (সারণী-২) বের করা হলো যা ৬। পরবর্তীতে একইভাবে সারণী-৩ এবং সারণী-৪ এ অন্যান্য রাশির অনপেক্ষ যোগফল বের করা হলো যা যথাক্রমে ৭ ও ১০।

অতএব, $\Sigma|X$ - মধ্যমা$| =$ ৬

$\Sigma|X$ - ৯$| =$ ৭

$\Sigma|X$ - ১০$| =$ ১০

সুতরাং ৬ < ৭ < ১০

অর্থাৎ, আপনি দেখতে পাচ্ছেন মধ্যমা থেকে রাশিসমূহের বিচ্যুতির যোগফল সবচাইতে কম বা সর্বনিম্ন। সুতরাং, এখন আপনি গাণিতিক ভাবে প্রকাশ করতে পারেন যে,

$\Sigma|X$ - মধ্যমা$| < \Sigma|X$ - ৯$| < \Sigma|X$ - ১০$|$

সুতরাং, এখন বলা যায় যে, তথ্যরাশির প্রতিটি রাশির মধ্যমা থেকে অনপেক্ষ বিচ্যুতির যোগফল সর্বনিম্ন।

মধ্যমার সুবিধাসমূহ

- মধ্যমা একটি অবস্থান ভিত্তিক কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক। এটি সহজবোধ্য এবং সাজানো তথ্যসারি থেকে কম সময়ে নির্ণয় করা যায়।
- তথ্যসারিতে বিদ্যমান অস্বাভাবিক ভাবে বড় বা ছোট সংখ্যা দ্বারা মধ্যমা কম প্রভাবিত হয়।
- সীমাবিহীন গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে যেখানে যোজিত গড় নির্ণয় করা যায় না সেক্ষেত্রে মধ্যমা নির্ণয় করা সম্ভব। এইসব ক্ষেত্রে মধ্যমাই কেন্দ্রীয় প্রবণতার যথার্থ পরিমাপক।
- মধ্যমা লেখচিত্রের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়।
- মধ্যমার অবস্থান যেহেতু সাজানো তথ্য সারির মাঝখানে, সেহেতু কোন কোন ক্ষেত্রে কেবলমাত্র চোখে দেখেই মধ্যমা নির্বাচন করা সম্ভব।

মধ্যমার অসুবিধাসমূহ

- মধ্যমা নির্ণয় করতে হলে প্রথমে রাশিগুলিকে মানের উর্ধ্ব বা নিম্নক্রম অনুসারে সাজাতে হয়। তথ্যসারিতে অত্যধিক রাশি সংখ্যা থাকলে এই কাজ কষ্টসাধ্য হয়।
- কোন নিবেশনের মধ্যমার মান এবং রাশিগুলির সংখ্যা জানা থাকলে রাশিগুলির সমষ্টি নির্ণয় করা সম্ভব নয়। তবে যোজিত গড়ের ক্ষেত্রে তা সম্ভব।
- মধ্যমা গাণিতিক প্রক্রিয়া প্রয়োগের উপযোগী নয়। তথ্য অনুক্রমের কয়েকটি উপ-অনুক্রম থাকলে তাদের সম্মিলিত গড় নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু সম্মিলিত মধ্যমা নির্ণয় করা সম্ভব নয়।
- অনিয়মিত তথ্যসারির ক্ষেত্রে মধ্যমা অনেক সময় যথার্থভাবে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হিসাবে প্রকাশ পায় না। যেমন, পাঁচ ব্যক্তির দৈনিক আয় যথাক্রমে ২০, ২১,

২২, ৯০, ১০০ টাকা। তাদের আয়ের মধ্যমা ২২ টাকা। এই ২২ টাকা ২০, ২১ টাকার প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা হলেও ৯০ ও ১০০ টাকা যথার্থ প্রতিনিধিত্বমূলক নয়।

তবে যে যে ক্ষেত্রে যোজিত গড় নির্ণয় অসম্ভব অথবা অন্য কোন গড় নির্ণয় করা অসম্ভব - সে ক্ষেত্রে মধ্যমা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের একটি যথার্থ পরিমাপক। শ্রেণী সীমাবিহীন গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে মধ্যমার অধিক ব্যবহার করা হয়।

সারাংশ

মধ্যমা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের একটি প্রধান পরিমাপক। যোজিত গড় ও অন্যান্য গড় যেখানে নির্ণয় করা প্রায় অসম্ভব সেখানে মধ্যমা সহজ ও সঠিক ফলাফল দিয়ে থাকে। এছাড়া লৈখিক উপস্থাপনের মাধ্যমেও মধ্যমা উপস্থাপন করা যায় বলে মধ্যমা বোঝা সহজ হয়। সাধারণভাবে কোন কোন সময় শুধুমাত্র সারণীবদ্ধ সংখ্যা দেখেই মধ্যমা নির্ণয় করা যায়। মধ্যমা নির্ণয়ের একাধিক সুবিধা থাকায় পরিসংখ্যানবিদদের কাছে দিন দিন মধ্যমা নিরূপণ জনপ্রিয় হচ্ছে। কেননা শ্রেণীবিহীন গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে মধ্যমার ব্যবহার ফলপ্রসূ ফলাফল দিয়ে থাকে।

• পাঠোত্তর মূল্যায়ন

১. মধ্যমা কাকে বলে? কোন কোন ক্ষেত্রে যোজিত গড় অপেক্ষা মধ্যমা বেশি উপযোগী?

নিচে কিছু সংখ্যক কর্মচারীর সাপ্তাহিক আয় দেয়া হলো,

সাপ্তাহিক আয় (টাকা)	৫০০-৭৫০	৭৫০-১০০০	১০০০-১২৫০	১২৫০-১৫০০	১৫০০-১৭৫০
কর্মচারী সংখ্যা	২৫	২৭	৪৫	২৪	৯

কর্মচারীদের সাপ্তাহিক আয়ের মধ্যমা নির্ণয় করুন।

২. লেখচিত্রের সাহায্যে মধ্যমা কীভাবে নির্ণয় করা হয় বর্ণনা করুন।

নিচে কয়েকজন শ্রমিকের দৈনিক আয় লিপিবদ্ধ করা হলো,

দৈনিক আয় (টাকা)	৫০	৬০	৭০	৮০	৯০	১০০	১১০	১২০	১৩০
শ্রমিকের সংখ্যা	২১	৪৫	৭৫	৬৭	৭৩	৪৭	৪৫	৩৯	০৯

শ্রমিকদের আয়ের মধ্যমা নির্ণয় করুন।

৩. মধ্যমার গাণিতিক বৈশিষ্ট্য কী?

১০০ টি পরিবারে মাসিক আয়ের পরিমাণ নিচের গণসংখ্যা বিন্যাসে দেখানো হলো,

মাসিক আয় (হাজার টাকায়)	পরিবারের সংখ্যা
০ - ৫	১০
৫ - ১০	২০
১০ - ১৫	৪০
১৫ - ২০	২০
২০ - ২৫	১০

পরিবারগুলির মাসিক আয়ের মধ্যমা লৈখিক প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করুন।

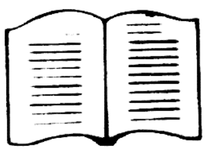
পাঠ-৩ : প্রচুরক (Mode)

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- প্রচুরক কাকে বলে তা বর্ণনা করতে পারবেন
- অবিন্যস্ত তথ্য অনুক্রম থেকে প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবেন
- অনিয়মিত শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত থেকে প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবেন
- বিন্যস্ত তথ্য বা গণসংখ্যা বিন্যাস থেকে প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবেন
- লেখচিত্রের মাধ্যমে গণসংখ্যা বিন্যাসের প্রচুরক বের করতে পারবেন
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হিসাবে প্রচুরকের সুবিধা-অসুবিধা চিহ্নিত করতে পারবেন
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার অন্যান্য পরিমাপকের সঙ্গে প্রচুরকের তুলনা করতে পারবেন।

প্রচুরক কী



কোন পরিসংখ্যান তথ্য সারিতে যে সংখ্যাটি বা রাশিটি সর্বাধিকসংখ্যক পরিলক্ষিত হয় তাকেই ঐ তথ্যরাশির প্রচুরক বলা হয়। কোন গণসংখ্যা নিবেশনের যে অংশে গণসংখ্যা সর্বাধিক কেন্দ্রীভুত থাকে - সেই অংশেই প্রচুরকের অবস্থান। তাই বলা যায়, প্রচুরকের অবস্থান তথ্য সারির সর্বোচ্চ ঘনত্ব বিশিষ্ট বিন্দুতে। বিচ্ছিন্ন তথ্য অনুক্রমের ক্ষেত্রে বারংবার সংঘটিত সংখ্যাই ঐ অনুক্রমের প্রচুরক। মনে করুন, কোন গার্মেন্টিস্ কারখানায় ৭, ৮, ৯, ১০ ও ১১ সাইজের শার্ট তৈরি করা হয়। ঐ প্রতিষ্ঠানের কোন একটি বিক্রয় কেন্দ্রের একটি দিনে বিভিন্ন সাইজের শার্টের বিক্রয় নিম্নরূপ,

> একটি তথ্যসারিতে যে সংখ্যাটি সর্বাধিকবার সংঘটিত হয় সেই সংখ্যাটিই ঐ সারির প্রচুরক।

সাইজ	বিক্রীত শার্টের সংখ্যা
৭	১০টি
৮	২০টি
৯	৪০টি
১০	২০টি
১১	১০টি

> মডেল সাইজ হচ্ছে সেই সাইজ যে সাইজের চাহিদা সর্বাধিক।

উপরের তথ্যে ৯ সাইজের বিক্রীত শার্টের বিক্রয় সর্বাধিক। অর্থাৎ বিক্রিত শার্টের মধ্যে ৪০টিই ৯ সাইজের শার্ট। অতএব শার্টের মডেল সাইজ হচ্ছে ৯। মডেল সাইজ হচ্ছে সেই সাইজ যে সাইজের চাহিদা সর্বাধিক। অবিন্যস্ত তথ্যসারির প্রচুরক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সারিটিকে মানের ক্রম অনুসারে সাজিয়ে সবচেয়ে বেশীবার সংঘটিত সংখ্যাটি খুঁজে বের করে প্রচুরক নির্ণয় করতে হয়। একটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি আরও সহজ করে তুলে ধরা যাক।

উদাহরণ-১ ঃ নিচে দশজন ছাত্রের কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেয়া হলো,

৭৫, ৬২, ৮০, ৭৭, ৮০, ৮০, ৬৫, ৭৩, ৯০, ৮৫

এই তথ্য অনুক্রমটির প্রচুরক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ প্রথমে অনুক্রমটি মানের নিম্নরূপ ক্রম অনুসারে সাজিয়ে নিন -

৬২, ৬৫, ৭৩, ৭৫, ৮০, ৮০, ৮০, ৮৫, ৯০

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, ৮০ নম্বরটি অনুক্রমে তিনবার এসেছে। অর্থাৎ এই পরীক্ষায় সর্বাধিক ছাত্র ৮০ নম্বর পেয়েছে। অতএব এই অনুক্রমটির প্রচুরক হচ্ছে ৮০।

অনিয়মিত শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত থেকে প্রচুরক নির্ণয়

> অনেক সময় পরিসংখ্যান তথ্য সারিতে সংখ্যাগুলির মধ্যে অনিয়মিত অবস্থান পরিলক্ষিত হয়।

অনেক সময় পরিসংখ্যান তথ্য সারিতে সংখ্যাগুলির মধ্যে অনিয়মিত অবস্থান পরিলক্ষিত হয়। অর্থাৎ একাধিক সংখ্যা সমানভাবে বা কম বেশী একই প্রকারে সংঘটিত হয়। সেক্ষেত্রে তাদের কোনটি প্রচুরক হবে তা নির্ণয় করতে হলে প্রথমে উপাত্তটিকে বিভিন্নভাবে শ্রেণীকৃত করে, বিভিন্ন শ্রেণীকরণে কোন কোন সংখ্যা মোডরূপে পরিগণিত হচ্ছে তা নির্ণয় করতে হয়। এইভাবে নির্ণীত প্রচুরক হওয়ার সম্ভাবনা পূর্ণ সংখ্যাগুলির মধ্যে যেটি বেশী প্রচুরকরূপে গণ্য হয় সেটিকে ঐ উপাত্তের প্রচুরক হিসাবে স্থির করা হয়। আসুন, বিষয়টি আরও সহজভাবে বোঝার জন্য একটি উদাহরণের আশ্রয় নেই।

উদাহরণ-২ ঃ নিচে একটি কর্পোরেশনে কর্মরত কিছু সংখ্যক অফিসারের চাকুরীর সময়কাল ও তাদের গণসংখ্যা দেয়া হলো,

চাকুরীর সময়কাল X (বৎসর)	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	১০	১১	১২	১৩
গণসংখ্যা, f	৩	৫	৯	১০	১৪	১৫	১২	১০	১২	৮	৩	২

এই অনিয়মিত শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত থেকে প্রচুরক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ অনিয়মিত শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত থেকে প্রচুরক নির্ণয় ঃ

চাকুরীর সময়কাল (বৎসর)	গণসংখ্যা	পুনঃকৃত শ্রেণীকরণে গণসংখ্যার তারতম্য				
	১	২	৩	৪	৫	৬
২	৩					
৩	৫	৮				
৪	৯		১৪	১৭		
৫	১০	১৯			২৪	৩৩
৬	১৪		২৪	৩৯		
৭	১৫	২৯			৪১	৩৭
৮	১২		২৭	৩৪		
৯	১০	২২			৩০	২৩
১০	১২		২২	১৩		
১১	৮	২০				
১২	৩		১১			
১৩	২	৫				

আসুন দেখা যাক, এই সারণী থেকে কীভাবে প্রচুরক নির্ণয় করা হলো।

আলোচ্য নিবেশনে সর্বাধিক গণসংখ্যা ৭ এর বিপরীতে দেখা গেলেও ৬ এর বিপরীতে এবং আবার ৮ ও ১০ এর বিপরীতেও অধিক গণসংখ্যা পরিলক্ষিত হচ্ছে। তাই এটি একটি অনিয়মিত (inregular) নিবেশনের দৃষ্টান্ত। সুতরাং, এখানে তথ্যসারির কোন সংখ্যামান প্রচুরক হবে তা ঠিক করার জন্য নিবেশনটির নতুন নতুন শ্রেণীকরণ করে কখন কোনটি প্রচুরক হচ্ছে তা দেখা প্রয়োজন। সেই উদ্দেশ্যে ১ম কলামের দুইটি একত্র করে (৩+৫, ৯+১০ ইত্যাদি) একটি শ্রেণী করা হয়েছে। এইভাবে ২য় কলামও পূর্ণ করা হয়েছে। ৩য় কলামেও দুইটি গণসংখ্যা একত্রিত করে লেখা হয়েছে কিন্তু এক্ষত্রে ১মটি বাদ দিয়ে ২য়টি থেকে (৫+৯, ১০+১৪ ইত্যাদি) শুরু করা হয়েছে। ৪র্থ কলামে তিনটি গণসংখ্যা একত্রিত করে এক একটি শ্রেণী করা হয়েছে। ৫ম কলামেও তিনটি গণসংখ্যা একত্রিত করে এক একটি শ্রেণী করা হয়েছে - কিন্তু এক্ষেত্রে ১মটি বাদ দিয়ে আরম্ভ করা হয়েছে। ৬ষ্ঠ কলামেও তিনটি গণসংখ্যা একত্রিত করে এক একটি শ্রেণী করা হয়েছে কিন্তু এক্ষেত্রে ১ম ও ২য়টি বাদ দিয়ে শুরু করা হয়েছে।

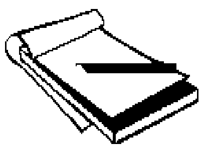
এখন বিভিন্ন শ্রেণীকৃত অবস্থায় কোন কোন সংখ্যা প্রচুরক হলো তা নির্ধারণ করে তাদের মধ্যে সর্বাধিক যে সংখ্যা প্রচুরক রূপে গণ্য হলো সেটিকেই এই নিবেশনের প্রকৃত প্রচুরক ধরা হয়েছে।

বিষয়টি বিশ্লেষণ তালিকায় দেখানো হলো —

কলাম সংখ্যা	যে যে মানের বিপরীতে সর্বাপেক্ষা বেশী গণসংখ্যা পরিলক্ষিত হলো				
১ম	-	-	৭	-	-
২য়	-	৬	৭	-	-
৩য়	-	-	৭	৮	-
৪র্থ	৫	৬	৭	-	-
৫ম	-	৬	৭	৮	-
৬ষ্ঠ	-	-	৭	৮	৯
কোন মানটি কতবার সংঘটিত হলো	১	৩	৬	৩	১

বিশ্লেষণ তালিকা

বিশ্লেষণ তালিকা থেকে সহজেই বোঝা যাচ্ছে যে, ৭ সংখ্যাটি এখানে সর্বাধিকবার সংঘটিত হয়েছে। তাই বলা যায় এই উদাহরণে প্রচুরক হলো ৭।



অনুশীলন

নিচের অনিয়মিত শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত হতে বিশ্লেষণ তালিকার সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় করুন —

গোল সংখ্যা	খেলার সংখ্যা
১	১০
২	৮
৩	১২
৪	৬
৫	১২
৬	৭
৭	৪
৮	১

গণসংখ্যা নিবেশন থেকে প্রচুরক নির্ণয়

কোন নিবেশনের যে অংশে গণসংখ্যা সর্বাধিক কেন্দ্রীভুত থাকে সেই অংশেই প্রচুরক অবস্থান করে।

কোন গণসংখ্যা বিন্যাসের প্রচুরক নির্ণয় করতে হলে প্রথমেই আপনাকে বিন্যাসটির প্রচুরক শ্রেণী নির্ণয় করতে হবে। কারণ, কোন নিবেশনের যে অংশে গণসংখ্যা সর্বাধিক কেন্দ্রীভুত থাকে সেই অংশেই প্রচুরক অবস্থান করে। গণসংখ্যা নিবেশনের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত সূত্রটির ব্যবহার করা হয়।

$$\text{প্রচুরক} = L_১ + \frac{A_১}{A_১ + A_২} \times C$$

যেখানে, $L_১$ = প্রচুরক শ্রেণীর নিম্ন সীমা
$A_১$ = প্রচুরক শ্রেণী এবং প্রচুরকের পূর্ববর্তী শ্রেণীর গণসংখ্যার মধ্যে পার্থক্য
$A_২$ = প্রচুরক শ্রেণী এবং প্রচুরকের পরবর্তী শ্রেণীর গণসংখ্যার মধ্যে পার্থক্য
C = প্রচুরক শ্রেণীর শ্রেণীব্যাপ্তি

আসুন, একটি সহজ উদাহরণ দিয়ে জেনে নেই, কীভাবে গণসংখ্যা নিবেশন থেকে প্রচুরক নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ-৩ ঃ নিচে দশজন শ্রমিকের ঘন্টা প্রতি মজুরীর গণসংখ্যা বিন্যাস দেয়া হলো,

ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা f
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১
মোট	১০

গণসংখ্যা বিন্যাসটির প্রচুরক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ বিন্যাসটিতে দেখা যাচ্ছে, ঘন্টা প্রতি ১০ থেকে ১৫ টাকা প্রাপ্ত শ্রমিকের সংখ্যা চার এবং এটিই সর্বাধিক শ্রমিক সংখ্যা। সুতরাং প্রচুরক এই শ্রেণীতেই অবস্থান করছে। এখন সূত্র অনুসারে,

$$\text{প্রচুরক} = L_১ + \frac{A_১}{A_১ + A_২} \times C$$

যেখানে, $L_১ = ১০$
$A_১ = ৪ - ২ = ২$
$A_২ = ৪ - ২ = ২$
$C = ১৫ - ১০ = ৫$

$$\text{সুতরাং, প্রচুরক} = ১০ + \frac{২}{২ + ২} \times ৫$$

$= ১০ + ২.৫ \qquad = ১২.৫০$ টাকা

দ্বিমোড বা বহু প্রচুরক সমস্যা

তথ্যের বিভিন্নতা হেতু অনেক সময় গণসংখ্যা নিবেশনের একাধিক শ্রেণীতে অন্য শ্রেণী অপেক্ষা বেশী কিন্তু সমঘনত্ব বিশিষ্ট গণসংখ্যা বিদ্যমান থাকতে দেখা যায়। সেক্ষেত্রে দ্বি প্রচুরক বা বহু প্রচুরক সমস্যার সৃষ্টি হয়। কোন গণসংখ্যা নিবেশনের দুইটি শ্রেণীর বিপরীতে যদি সর্বাধিক গণসংখ্যা বিদ্যমান থাকে তবে দ্বি প্রচুরক সমস্যার সৃষ্টি হয় এবং সেক্ষেত্রে শ্রেণী সীমা পরিবর্তন না করে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় না।

যখন গণসংখ্যা নিবেশনের একাধিক শ্রেণীতে অন্যশ্রেণী অপেক্ষা বেশী কিন্তু সমান ঘনত্ব বিশিষ্ট গণসংখ্যা থাকে তখন দ্বি প্রচুরক বা বহু প্রচুরক সমস্যার সৃষ্টি

তেমনিভাবে সমপ্রাধান্যমূলক কেন্দ্রীয় প্রবণতা দু'য়ের অধিক শ্রেণীতে বিদ্যমান থাকলে বহু প্রচুরক সমস্যার সৃষ্টি করে। এই রকম পরিস্থিতে প্রচুরক নির্ণয়ের প্রক্রিয়া হলো, যতক্ষণ না একটি সত্যিকারের প্রচুরক শ্রেণী নির্ণয় করা যায় ততক্ষণ - শ্রেণী ব্যাপ্তি ও শ্রেণী সীমা পরিবর্তন করে নতুন করে গণসংখ্যা বিন্যাস তৈরি করা। কোন কোন সময় যোজিত গড় এবং মধ্যমা থেকে একটি অভিজ্ঞতালব্ধ সূত্র দিয়ে প্রচুরক নির্ণয় করা হয়। প্রচুরক নির্ণয়ের অন্য কোন প্রক্রিয়া উপযোগী না হলে নিচের সূত্রও ব্যবহার করা যেতে পারে।

সূত্রটি হলো,

যোজিত গড় – প্রচুরক = ৩ (যোজিত গড় – মধ্যমা)
অথবা, প্রচুরক = যোজিত গড় – ৩ (যোজিত গড় – মধ্যমা)
∴ প্রচুরক = ৩ মধ্যমা – ২ যোজিত গড়

উদাহরণ- ৪ ঃ নিচে বয়স অনুসারে কোন কারখানার শ্রমিকদের একটি বিন্যাস দেয়া হলো,

বয়স (বৎসর)	শ্রমিকের সংখ্যা
২০ - ২৫	১০
২৫ - ৩০	২০
৩০ - ৩৫	৪০
৩৫ - ৪০	২০
৪০ - ৪৫	১০

সারণীটি থেকে শ্রমিকদের বয়সের গড় ও মধ্যমা নির্ণয় করতে হবে এবং এদের সাহায্যে প্রচুরক বের করতে হবে।

সমাধান ঃ গড়, মধ্যমা ও প্রচুরক নির্ণয় ঃ

বয়স	শ্রমিক সংখ্যা f	f_c	x	f x
২০ - ২৫	১০	১০	২২.৫	২২৫.০
২৫ - ৩০	২০	৩০	২৭.৫	৫৫০.০
৩০ - ৩৫	৪০	৭০	৩২.৫	১৩০০.০
৩৫ - ৪০	২০	৯০	৩৭.৫	৭৫০.০
৪০ - ৪৫	১০	১০০	৪২.৫	৪২৫.০
	Σf = ১০০			Σfx = ৩২৫০

যোজিত গড় = $\frac{\sum fX}{N} = \frac{৩,২৫০}{১০০} =$ ৩২.৫০ বৎসর

মধ্যমা = $L_১ + \frac{\frac{n}{২} - f_c}{f_m} \times c$

যেখানে, $L_১$ = ৩০, f_c= ৩০, f_m = ৪০, c = ৫

সুতারাং মধ্যমা = ৩০ + $\frac{৫০ - ৩০}{৪০}$ × ৫

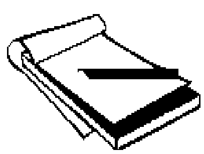
= ৩০ + $\frac{১}{২}$ × ৫

= ৩২.৫০ বৎসর

প্রচুরক = ৩ × মধ্যমা - ২ যোজিত গড়

= ৩ × ৩২.৫০ - ২ × ৩২.৫০

= ৩২.৫০ বৎসর



অনুশীলন

একটি কাল্পনিক বিন্যস্ত উপাত্তের সারণী থেকে সূত্রের সাহায্যে এবং গড় ও মধ্যমার সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় করে দুটি ফলাফলের উপর মন্তব্য করুন।

লেখ-চিত্রের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয়

আয়তলেখের সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্র হচ্ছে সর্বাধিক গণসংখ্যার প্রতীক।

এই প্রক্রিয়ায় প্রচুরক নির্ণয় করতে হলে প্রথমে আপনাকে গণসংখ্যা নিবেশনের একটি আয়ত লেখ তৈরি করতে হবে। লেখচিত্রে X-অক্ষের মাধ্যমে শ্রেণীর মান এবং Y-অক্ষের সাহায্যে গণসংখ্যার মান দেখানো হয়। আয়তলেখের সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্র হচ্ছে সর্বাধিক গণসংখ্যার প্রতীক। এই শ্রেণীই হচ্ছে প্রচুরক শ্রেণী। আয়তেক্ষেত্রের বিস্তৃতির কোন স্থানে প্রচুরক হবে - তা নির্ভর করে উহার উভয় পাশের দুইটি শ্রেণীর গণসংখ্যার উপর। প্রচুরক -এর পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী শ্রেণীদ্বয়ের গণসংখ্যা বিস্তারে অসমতা দূর করার জন্য এই দুটি আয়তক্ষেত্রের দুই উচ্চসীমা থেকে সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্রের দুই মাথায় দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করা হয়, যা পরস্পরকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে। এরপর ছেদ বিন্দু থেকে X-অক্ষের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করা হয়। এখন যে বিন্দুতে লম্বটি X-অক্ষকে ছেদ করে সেই বিন্দুর সংখ্যামানই হলো ঐ শ্রেণীবিন্যাসের প্রচুরক।

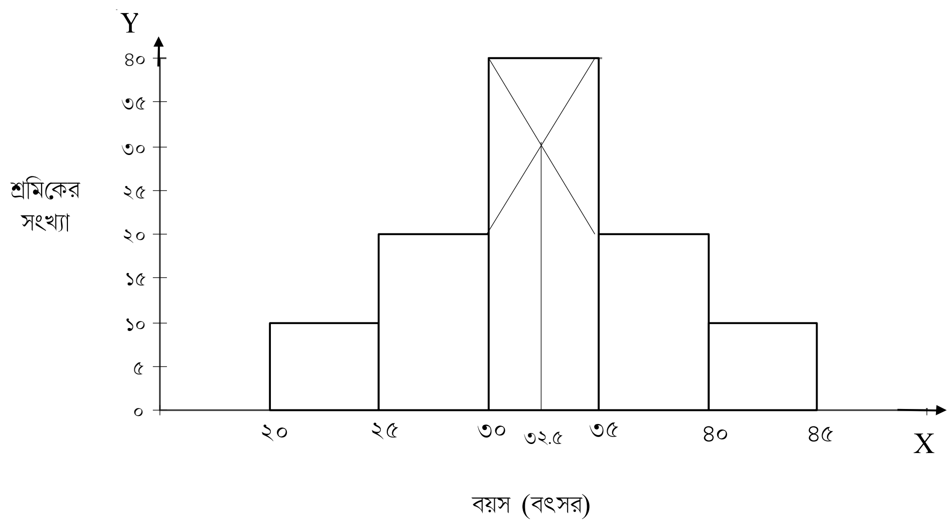
বিষয়টি উদাহরণের সাহায্যে সহজ করা যাক।

উদাহরণ-৫ ঃ নিচে বয়স অনুসারে কোন কারখানার শ্রমিকদের একটি বিন্যাস দেয়া হলো,

বয়স (বৎসর)	শ্রমিকের সংখ্যা
২০ - ২৫	১০
২৫ - ৩০	২০
৩০ - ৩৫	৪০
৩৫ - ৪০	২০
৪০ - ৪৫	১০

গণসংখ্যা বিন্যাসটির প্রচুরক লেখ-এর মাধ্যমে নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ প্রথমে গণসংখ্যা নিবেশনের আয়তলেখ অঙ্কন করি।

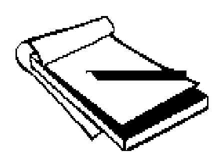


সুতরাং বলা যায়, এই গণসংখ্যা নিবেশনের প্রচুরক = ৩২.৫০ বৎসর।

অনুশীলন

নিচের গণসংখ্যা বিন্যাস হতে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় করুন —

বিক্রয় (হাজার টাকা)	দিনের সংখ্যা
১০ - ২০	২
২০ - ৩০	৪
৩০ - ৪০	৭
৪০ - ৫০	৫
৫০ - ৬০	২



প্রচুরকের সুবিধা

- কোন অনুক্রমের প্রচুরক ঐ অনুক্রমের সর্বাধিক সংঘটিত রাশি। তাই এটি নির্ণয় সহজ এবং সহজে বুঝতে পারা যায়।
- লেখচিত্রের মাধ্যমে এর অবস্থান নিরূপণ করা যায়।
- যে গণসংখ্যা নিবেশনে সীমাহীন শ্রেণীব্যাপ্তি থাকে সেক্ষেত্রে যোজিত গড় নির্ণয় সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে প্রচুরক নির্ণয়ে কোন অসুবিধা হয় না।
- গুণবাচক বৈশিষ্ট্যের বর্ণনা দিতে প্রচুরকের সহজ ব্যবহার করা যায়। যেমন, কোন কোম্পানির উৎপাদিত দ্রব্যে ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্যের সংখ্যা কতটা বেশী তা সহজে ধরা যায়।

প্রচুরকের অসুবিধা

- কোন অনুক্রমে সর্বাধিক সংঘটিত রাশির সংখ্যা দুই বা তার অধিক হলে প্রচুরক নির্ণয় করা সম্ভব হয় না।
- প্রচুরক নির্ণয় শ্রম সাপেক্ষ কারণ এতে তথ্যের সুশৃঙ্খল বিন্যাস, শ্রেণীবদ্ধকরণ এবং অনেক ক্ষেত্রে পুনঃশ্রেণীবদ্ধকরণের দরকার হয়।
- প্রচুরক বীজগাণিতিক পরিগণনার উপযোগী নয়। যেমন, দুই বা ততোধিক সংখ্যক তথ্যসারির প্রচুরক জানা থাকলেও সম্মিলিত তথ্যসারির প্রচুরক নির্ণয় করা যায় না।
- নির্ণয় প্রক্রিয়া প্রচুরক মানের উপর প্রভাব বিস্তার করে। যেমন, শ্রেণীবদ্ধকরণের প্রকৃতির উপর প্রচুরকের মানের প্রভাব থাকে।

বাণিজ্যিক সিদ্ধান্ত গ্রহণে প্রচুরক একটি বহুল প্রচলিত গড়।

বাণিজ্যিক সিদ্ধান্ত গ্রহণে প্রচুরক একটি বহুল প্রচলিত গড়। যেমন, একই প্রকৃতির শাড়ীর মধ্যে কোন কোম্পানীর শাড়ী দৈনিক বেশী বিক্রয় হয় তা সহজেই প্রচুরকের মাধ্যমে চিহ্নিত করা যায়। একইভাবে বাজারে যে সাইজের জুতা বেশী চলে তা সহজেই নির্ণয় করা যায়। সেই চিহ্নিত সাইজটিই হচ্ছে মডেল সাইজ। এমনিভাবে প্রচুরক শব্দের যথার্থ অর্থ না বুঝেও অনেকে তা ব্যবহার করে থাকেন।

সারাংশ

প্রচুরক কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের একটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপক। মধ্যমার মত প্রচুরককেও লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা সহজ। সীমাহীন শ্রেণীব্যপ্তি সম্বলিত গণসংখ্যার ক্ষেত্রে যোজিত গড় নির্ণয় সম্ভব হয় না। কিন্তু এক্ষেত্রে একজন পরিসংখ্যানবিদকে প্রচুরক সাহায্য করে থাকে। গুণবাচক বৈশিষ্ট্যের ক্ষেত্রেও প্রচুরকের ব্যবহার করা যায়। তবে সর্বাধিক রাশি দুই বা ততোধিক অনুক্রমে থাকলে তা থেকে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় না। তাছাড়া প্রচুরক বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ারও উপযোগী নয়। তথাপি প্রচুরক একটি বহুল ব্যবহৃত পরিমাপক।

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. প্রচুরক কাকে বলে? প্রচুরক এবং মাধ্যমার মধ্যে পার্থক্য কি? প্রচুরক কোথায় কোথায় ব্যবহৃত হয়?

২. দ্বি প্রচুরক ও বহু প্রচুরক সমস্যাটি কী- ব্যাখ্যা করুন।

৩. একটি অনিয়মিত শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত থেকে বিশ্লেষণের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় করুন ––

অনিয়মিত শ্রেণী

বয়স X	৮	১০	১২	১৩	১৬	১৭	১৯	২০	২২
গণসংখ্যা f	৪	৬	১০	১৪	১১	১২	১১	১০	১১

৪. নিচে কোন একটি গার্মেন্টস্ কারখানার শ্রমিকদের মাসিক আয় অনুসারে তাদেরকে সাজানো হয়েছে, এখান থেকে প্রচুরক নির্ণয় করুন।

মাসিক আয় (শত টাকায়)	গার্মেন্টস্ শ্রমিকের সংখ্যা
৫ - ১০	৫০
১০ - ১৫	২৪
১৫ - ২০	২৮
২০ - ২৫	৩২
২৫ - ৩০	১২
৩০ - ৩৫	১৫
৩৫ - ৪০	১০
৪৫ এর বেশী	২৯

পাঠ-৪ : কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিশেষ পরিমাপসমূহ
(Special Measures of Central Tendency)

পাঠের উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিশেষ পরিমাপকসমূহ কী তা জানতে পারবেন
- গুণিতক গড়ের সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন
- গুণিতক গড় নির্ণয় করে এর ব্যবহার ও সুবিধা অসুবিধাগুলি চিহ্নিত করতে পারবেন
- তরঙ্গ গড়ের সংজ্ঞার ব্যাখ্যা প্রদান করতে পারবেন
- তরঙ্গ গড় নির্ণয় করে এর ব্যবহার ও সুবিধা অসুবিধাগুলি চিহ্নিত করতে পারবেন
- দ্বিঘাত গড় কী তা বর্ণনা করতে পারবেন
- যোজিত গড়, গুণিতক গড় এবং তরঙ্গ গড়ের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্ক নিরূপণ করতে পারবেন
- একটি কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপকের আবশ্যকীয় বৈশিষ্ট্যসমূহ চিহ্নিত করতে পারবেন।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিশেষ পরিমাপকসমূহ

কেন্দ্রীয় প্রবণতার সাধারণ পরিমাপকগুলি হচ্ছে, যোজিত গড়, মধ্যমা এবং প্রচুরক। বিভিন্ন কারণে অনেক সময় সাধারণ পরিমাপকগুলি উপাত্ত থেকে নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। সেক্ষেত্রে বিশেষ পরিমাপক নির্ণয়ের প্রয়োজন হয়। এই বিশেষ পরিমাপকগুলি হচ্ছে, গুণিতক গড়, তরঙ্গ গড় এবং দ্বিঘাত গড়। আসুন, এই বিশেষ পরিমাপগুলি সম্পর্কে সাধারণ একটি ধারণা নিয়ে নেই।

গুণিতক গড় (Geometric Mean)

গুণিতক গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি বিশেষ পরিমাপক। যেসব ক্ষেত্রে আনুপাতিক হিসাব, শতকরা হিসাব এবং পরিবর্তনের হার পরিমাপের প্রয়োজন হয় সেক্ষেত্রে গুণিতক গড় বিশেষভাবে উপযোগী। অর্থনৈতিক ও বাণিজ্যিক তথ্য বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে এবং সূচক সংখ্যা প্রদত্ত কারণে গুণিতক গড় ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

> যেসব ক্ষেত্রে আনুপাতিক হিসাব, শতকরা হিসাব এবং পরিবর্তনের হার পরিমাপের প্রয়োজন হয় সেক্ষেত্রে গুণিতক গড় বিশেষভাবে উপযোগী।

কোন পরিসংখ্যান তথ্যসারিতে n সংখ্যক রাশি থাকলে সেই তথ্যসারির গুণিতক গড়ের সংজ্ঞা হলো n সংখ্যক রাশির গুণফলের n তম মূল। অর্থাৎ মনে করুন, দুইটি কোম্পানীর লভ্যাংশ বিনিয়োগকৃত মূলধনের ২% এবং ৮%। এদের গুণিতক গড় হচ্ছে $\sqrt{২ \times ৮} = ৪\%$। তেমনিভাবে তিনটি কোম্পানীর লভ্যাংশের হার যদি ১%, ২% এবং ৩২% হয় তবে কোম্পানীগুলির লভ্যাংশের গুণিতক গড় হবে $\sqrt[৩]{১ \times ২ \times ৩২} = \sqrt[৩]{৬৪} = \sqrt[৩]{৪ \times ৪ \times ৪} = ৪\%$

যদি তথ্যসারিতে n সংখ্যক সমজাতীয় রাশি $x_1\ x_2\ .\ .\ .\ .\ x_n$ থাকে এবং এর গুণিতক গড় G হয়, তবে গুণিতক গড়ের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$G = \sqrt[n]{x_১ x_২ \ldots\ldots x_n}$$

অর্থাৎ, $$G = (x_১\, x_২\ .\ .\ .\ .\ x_n)^{\frac{1}{n}}$$

যেখানে, G = গুণিতক গড়

x = প্রতিটি রাশির মান

n = তথ্যসারিতে রাশির সংখ্যা

উপরের সূত্রের যদি উভয় অংশে লগ ব্যবহার করেন তবে সূত্রটি হবে —

$$\log G = \log (x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n)^{\frac{১}{n}}$$

বা, $$\log G = \frac{১}{n} \log (x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n)$$ [লগের সূত্র অনুসারে]

বা, $$\log G = \frac{১}{n} (\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n)$$ [লগের সূত্র অনুসারে]

$$\text{বা, } \log G = \frac{\sum \log x}{n}$$

$$\therefore G = \text{Anti}\log\left[\frac{\sum \log x}{n}\right]$$

আসুন, এই সূত্রের সাহায্য নিয়ে গুণিতক গড় নির্ণয় করি।

উদাহরণ-১ ঃ নিচে পাঁচটি কোম্পানির লভ্যাংশের শতকরা হার দেয়া হল,

কোম্পানি	ক	খ	গ	ঘ	ঙ
লভ্যাংশের শতকরা হার	২	৫	৮	৭	১০

কোম্পানিগুলির লভ্যাংশের গুণিতক গড় নির্ণয় করতে হবে।

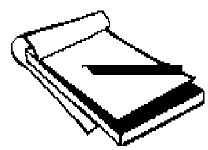
সমাধান ঃ গুণিতক গড় নির্ণয়ের টেবিল

কোম্পানি	লভ্যাংশের হার (x)	logx
ক	২	০.৩০১০
খ	৫	০.৬৯৯০
গ	৮	০.৯০৩১
ঘ	৭	০.৮৪৫১
ঙ	১০	১.০০০০
		Σlogx = ৩.৭৪৮২

$$\log G = \frac{\sum \log x}{n} = \frac{৩\cdot৭৪৮২}{৫} = ০\cdot৭৪৯৬$$

$$\therefore G = \text{Antilog } ০\cdot৭৪৯৬ = ৫\cdot৬১৮ \text{ (প্রায়)}$$

অনুশীলন
একটি দ্রব্যের পাঁচ মাসে মূল্য পরিবর্তনের হার দেওয়া আছে। মূল্য পরিবর্তনের হারের গুণিতক গড় নির্ণয় করুন।
১৯৯৫ ঃ জানুয়ারি ৫%, ফেব্রুয়ারি ৭%, মার্চ ১০%, এপ্রিল ১২%, মে ১৩%।



শ্রেণীবদ্ধ উপাত্তের গুণিতক গড়

আপনি এতক্ষণ শ্রেণীবদ্ধহীন উপাত্তের গুণিতক গড় নির্ণয় সম্পর্কে একটি ধারণা পেলেন। আসুন এখন দেখা যাক শ্রেণীবদ্ধ উপাত্তের থেকে কীভাবে গুণিতক গড় নির্ণয় করা যায়।

শ্রেণীবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে গুণিতক গড়ের সূত্র নিম্নরূপ,

$$G = \sqrt[n]{x_১^{f_১} x_২^{f_২} \ldots\ldots x_n^{f_k}}$$

যেখানে, G = গুণিতক গড়
x = প্রতি শ্রেণীর মধ্যমান
f = প্রতি শ্রেণীর গণসংখ্যা
n = $\sum f$ = মোট গণসংখ্যা
k = শ্রেণীর সংখ্যা

এখন উভয় পাশে log ব্যবহার করলে সূত্রটি নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$\log G = \frac{\sum f \log x}{n}$$

$$\therefore G = \text{Anti}\log\left[\frac{\sum f \log x}{n}\right]$$

উদাহরণ-২ঃ নিচের গণসংখ্যা নিবেশনে দশটি কোম্পানিকে লাভের শতকরা অনুসারে দেখানো হলো,

লাভের শতকরা হার	কোম্পানির সংখ্যা
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১
মোট	১০

এখন গণসংখ্যা বিন্যাসটির গুণিতক গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ গণসংখ্যা সারণী থেকে গুণিতক গড় নির্ণয় ––

লাভ (শতকরা হার)	f	X মধ্যমান	logx	$f$logx
০ - ৫	১	২.৫	০.৩৯৭৯	০.৩৯৭৯
৫ - ১০	২	৭.৫	০.৮৭৫১	১.৭৫০২
১০ - ১৫	৪	১২.৫	১.০৯৬৯	৪.৩৮৭৬
১৫ - ২০	২	১৭.৫	১.২৪৩০	২.৪৮৬০
২০ - ২৫	১	২২.৫	১.৩৫২২	১.৩৫২২
				১০.৩৭৩৯

$\therefore \sum f\log x$ = ১০.৩৭৩৯

গুণিতক গড় $= G = \text{Anti}\log\left[\frac{\sum \log x}{n}\right]$

$= \text{Anti log}\left[\frac{১০.৩৭৩৯}{১০}\right]$

$= \text{Anti log}$ [১.০৩৭৩৯]

= ১০.৮৯৯

সুতরাং গুণিতক গড় = ১০.৮৯৯

গুণিতক গড়ের সুবিধা

যদিও গুণিতক গড়ের নির্ণয় প্রক্রিয়া কিছুটা জটিল তথাপি তথ্যসারির হ্রাসবৃদ্ধির পরিমাপে এটি বিশেষ উপযোগী পরিমাপ পদ্ধতি।

- গুণিতক গড় নির্ণয় করার সময় তথ্য সারির সব কয়টি রাশিকে বিবেচনায় আনা হয়।
- এটি যোজিত গড়ের তুলনায় চরম বা প্রান্তিক রাশিগুলি দ্বারা অপেক্ষাকৃত কম প্রভাবিত হয়।
- পরিবর্তনের হার বা শতকরা হারের গড় নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গুণিতক গড় বিশেষভাবে উপযোগী। অন্য কোন গড় এ ব্যাপারে যথার্থ ফলাফল দেয় না।
- এটি গাণিতিক প্রক্রিয়া প্রয়োগের উপযোগী।
- দুই বা ততোধিক তথ্যসারির গুণিতক গড় জানা থাকলে সম্মিলিত সারির গুণিতক গড় নির্ণয় করা যায়। কেন্দ্রীয় প্রবণতার সকল পরিমাপকের ক্ষেত্রে তা সম্ভব হয় না।

গুণিতক গড়ের অসুবিধা

- তথ্যসারিতে ঋনাত্মক বা শূন্যমানের রাশি থাকলে গুণিতক গড় নির্ণয় সম্ভব নয়।
- গুণিতক গড়ের নির্ণয় প্রক্রিয়া সহজবোধ্য নয়, বরং অপেক্ষাকৃত জটিল।
- লগ এর মাধ্যম ছাড়া এটি নির্ণয় করা যায় না।

নির্ণয় প্রক্রিয়া জটিল হলেও তথ্যসারির হ্রাস বৃদ্ধির হারের গড় নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গুণিতক গড় বিশেষভাবে উপযোগী। সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গুণিতক গড়ের বহুল ব্যবহারের প্রচলন রয়েছে।

তরঙ্গ গড় (Harmonic Mean)

এটি কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি বিশেষ পরিমাপক। কতকগুলি বিশেষ ক্ষেত্র যেমন, শেয়ার প্রতি আয় (Earning per share), টাকা প্রতি পণ্য ক্রয়ের পরিমাণ (products purchased per taka), প্রতি ঘন্টায় দূরত্ব অতিক্রম প্রভৃতি তথ্যের গড় নির্ণয়ে তরঙ্গ গড় ব্যবহৃত হয়। একটি তথ্যসারির তরঙ্গ গড় হলো, সেই তথ্যসারির প্রতিটি সংখ্যামানের উল্টো (reciprocal) সংখ্যাগুলির গড়ের উল্টো সংখ্যা। একটি তথ্যসারিতে যদি $x_1\ x_2\ .\ .\ .\ .\ x_n$ এই রকম n সংখ্যক সংখ্যা থাকে, তবে তাদের তরঙ্গ গড়, H নিম্নলিখিত সূত্র অনুসারে নির্ণয় করা হয়।

একটি তথ্যসারির প্রতিটি সংখ্যামানের উল্টো সংখ্যাগুলির গড়ের উল্টো সংখ্যাকে তরঙ্গ গড় বলা হয়।

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x_n}\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x}}$$

আসুন, উদাহরণ দিয়ে তরঙ্গ গড় সম্পর্কে ধারণাটি পরিষ্কার করে নেয়া যাক্।

উদাহরণ-৩ ঃ নিচে পাঁচটি কোম্পানির শেয়ার প্রতি আয় দেয়া হলো,

কোম্পানি	A	B	C	D	E
শেয়ার প্রতি আয় (টাকা)	৫	১০	১৫	২০	২৫

শেয়ার প্রতি আয়ের তরঙ্গ গড় নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ

কোম্পানি	শেয়ার প্রতি আয় (টাকা), X	$\frac{1}{x}$
A	৫	০.২০
B	১০	০.১০
C	১৫	০.০৭
D	২০	০.০৫
E	২৫	০.০৪
n = ৫		$\sum\frac{1}{x}$ = ০.৪৬

$$\sum\frac{1}{x} = ০.৪৬$$

$$H = \frac{১}{\frac{১}{n}\sum\frac{১}{X}} = \frac{১}{\frac{১}{৫}(০.৪৬)} = \frac{১}{০.০৯২} = ১০.৮৭$$

সুতরাং শেয়ার প্রতি আয়ের তরঙ্গ গড় = ১০.৮৭

শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত থেকে তরঙ্গ গড় নির্ণয়

আপনি এতক্ষণ সাধারণ উপাত্ত থেকে তরঙ্গ গড় নির্ণয় প্রক্রিয়া জানলেন। এখন আপনি জানতে পারবেন কীভাবে শ্রেণীবদ্ধ উপাত্ত থেকে তরঙ্গ গড় নির্ণয় করা হয়।

শ্রেণীবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে তরঙ্গ গড়ের সূত্রটি নিম্নরূপ,

$$H = \frac{১}{\frac{১}{n}\left[\frac{f_১}{x_১} + \frac{f_২}{x_২} + \ldots\ldots + \frac{f_k}{x_k}\right]}$$

$$= \frac{১}{\frac{১}{n}\sum\frac{f}{x}}$$

যেখানে, H = তরঙ্গ গড়

x = প্রতি শ্রেণীর মধ্যমান

f = প্রতি শ্রেণীর গণসংখ্যা

$n = \sum f =$ মোট গণসংখ্যা

k = শ্রেণীর সংখ্যা

আসুন, একটি উদাহরণ দিয়ে সূত্রটি পরীক্ষা করা যাক্।

উদাহরণ-৪ ঃ দশটি কোম্পানির শেয়ার প্রতি আয় নিচের গণসংখ্যা বিন্যাসে দেওয়া হলো,

শেয়ার প্রতি আয় (টাকা) Earnings per share	কোম্পানির সংখ্যা
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১

শেয়ার প্রতি আয়ের তরঙ্গ গড় নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ শেয়ার প্রতি আয়ের তরঙ্গ গড় নির্ণয় —

শেয়ার প্রতি আয়	গণসংখ্যা f	মধ্যমান X	$\frac{1}{x}$	$\frac{f}{x}$
০ - ৫	১	২.৫	০.৪০	০.৪০
৫ - ১০	২	৭.৫	০.১৩	০.২৬
১০ - ১৫	৪	১২.৫	০.০৮	০.৩২
১৫ - ২০	২	১৭.৫	০.০৬	০.১২
২০ - ২৫	১	২২.৫	০.০৪	০.০৪
	$\sum f$ = ১০			$\sum\frac{f}{x}$ = ১.১৪

$$\sum\frac{f}{x} = ১.১৪$$

$$H = \frac{১}{\frac{১}{n}\sum\frac{f}{x}} = \frac{১}{\frac{১}{১০}(১.১৪)}$$

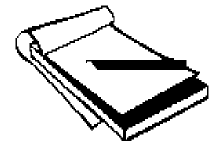
$$= \frac{১}{০.১১৪} = ৮.৭৭$$

সুতরাং কোম্পানিগুলির শেয়ার প্রতি আয়ের তরঙ্গ গড় = ৮.৭৭ টাকা

অনুশীলন

নিচের বিন্যস্ত উপাত্ত হতে তরঙ্গ গড় নির্ণয় করুন —

ঘন্ট প্রতি গতিবেগ (কিমি)	গাড়ির সংখ্যা
৩০ - ৪০	১৮
৪০ - ৫০	২৩
৫০ - ৬০	৩০
৬০ - ৭০	২৫
৭০ - ৮০	২০



তরঙ্গ গড়ের সুবিধা

- তরঙ্গ গড় তথ্যসারির প্রতিটি রাশির উপর ভিত্তি করে নিরূপণ করা হয়।
- তরঙ্গ গড় কোন অনুমানের উপর নির্ভর করে না বিধায় সঠিকতার সাথে নিরূপণ করা যায়।
- তথ্যসারিতে বিদ্যমান অতিরিক্ত ছোট অথবা বড় সংখ্যা দ্বারা তরঙ্গ গড় কম প্রভাবিত হয়।
- এটি গাণিতিক পরিগণনার উপযোগী।
- প্রতি টাকায় বিক্রয়, প্রতি ঘন্টার কাজ প্রভৃতি হার-এর গড় নির্ণয়ের বিশেষ ক্ষেত্রে তরঙ্গ গড় উপযোগী।

তরঙ্গ গড়ের অসুবিধা

- তরঙ্গ গড় সহজবোধ্য নয়, তাই নির্ণয় করতে অধিক সময় ও শ্রমের প্রয়োজন হয়।
- তথ্যসারির সমস্ত সংখ্যা সম্পর্কে বিশদভাবে জানা না থাকলে তরঙ্গ গড় নিরূপণ করা যায় না।
- এটি নিরূপণের ক্ষেত্রে ছোট সংখ্যাকে বেশী গুরুত্ব দেয়া হয় বিধায় অর্থনৈতিক বিশ্লেষণে এর ব্যবহার সীমিত।

তরঙ্গ গড়ের ব্যবহার সীমিত হলেও উপরে বর্ণিত বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে এর ব্যবহার রয়েছে বলে এটি কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপক হিসাবে চিহ্নিত।

দ্বিঘাত গড় (Quadratic Mean)

কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিভিন্ন রকম গড়ের মধ্যে এটি কম ব্যবহৃত হয়। তবে বিস্তার পরিমাপকের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ে এই গড় ব্যবহৃত হয়ে থাকে। দ্বিঘাত গড় হল একটি পরিসংখ্যান তথ্যসারির রাশিসমূহের বর্গের যোজিত গড়ের বর্গমূল। দ্বিঘাত গড় নির্ণয়ের সূত্র হলো,

একটি তথ্যসারির রাশিসমূহের বর্গের যোজিত গড়ের বর্গকে দ্বিঘাত গড় বলা হয়।

$$QM = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$$

যেখানে, Q.M. = দ্বিঘাত গড়
x = প্রতিটি রাশির মান
n = তথ্যের সংখ্যা

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকসমূহের মধ্যে সম্পর্ক

তথ্যসারির রাশিগুলির মান ভিন্ন হলে যোজিত গড়, গুণিতক গড় ও তরঙ্গ গড়ের মধ্যে সম্পর্ক হবে $A \geq G \geq H$

একই পরিসংখ্যান তথ্যসারি থেকে নির্ণীত কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিভিন্ন পরিমাপকসমূহের মধ্যে এক প্রকার গাণিতিক সম্পর্ক বিদ্যমান রয়েছে। একই তথ্যসারির সংখ্যামান প্রতিটি যদি সমান হয়, তবে সেই তথ্যসারির যোজিত গড়, গুণিতক গড় এবং তরঙ্গ গড় সমান হবে। তথ্যসারির রাশিগুলি ভিন্ন ভিন্ন মানের হলে যোজিত গড় গুণিতক গড় অপেক্ষা বড় এবং গুণিতক গড় তরঙ্গ গড় অপেক্ষা বড় হবে। যোজিত গড়, গুণিতক গড় এবং তরঙ্গ গড়কে যথাক্রমে A, G, H প্রতীক চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করলে এদের মধ্যে সম্পর্ক হবে $A \geq G \geq H$.

এখন আসুন দেখা যাক্ এই যে আমরা বলছি, তথ্যসারির রাশিগুলির মান ভিন্ন হলে যোজিত গড়, গুণিতক গড় ও তরঙ্গ গড়ের মধ্যে সম্পর্ক হবে $A \geq G \geq H$ -এই সূত্রটি প্রমাণ করি। উদাহরণ-৫ এ সূত্রটির প্রমাণ দেয়া হলো।

উদাহরণ-৫ ঃ একশত ছাত্রের নম্বর নিচের গণসংখ্যা নিবেশনে প্রদর্শিত হলো,

নম্বর	ছাত্রের সংখ্যা
৪০ - ৫০	১০
৫০ - ৬০	২০
৬০ - ৭০	৪০
৭০ - ৮০	২০
৮০ - ৯০	১০

বিন্যাসটির যোজিত গড়, গুণিতক গড় এবং তড়ঙ্গ গড় নির্ণয় করুন এবং তাদের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্ক দেখান।

সমাধান ঃ যোজিত গড় নির্ণয়

নম্বর	গণসংখ্যা f	মধ্যমান X	f X
৪০ - ৫০	১০	৪৫	৪৫০
৫০ - ৬০	২০	৫৫	১,১০০
৬০ - ৭০	৪০	৬৫	২,৬০০
৭০ - ৮০	২০	৭৫	১,৫০০
৮০ - ৯০	১০	৮৫	৮৫০
	$\sum f$= ১০০		$\sum f$X = ৬,৫০০

$$n = \sum f = ১০০$$

$$\sum f\text{X} = ৬,৫০০$$

যোজিত গড়, $A = \frac{\sum \text{fx}}{n} = \frac{৬,৫০০}{১০০} = ৬৫$

গুনিতক গড় নির্ণয় —

নম্বর	গণসংখ্যা f	মধ্যমান X	logX	f logX
৪০ - ৫০	১০	৪৫	১.৬৫৩২	১.৬৫৩২
৫০ - ৬০	২০	৫৫	১.৭৪০৪	৩৪.৮০৮
৬০ - ৭০	৪০	৬৫	১.৮১২৯	৭২.৫১৬
৭০ - ৮০	২০	৭৫	১.৮৭৫১	৩৭.৫০২
৮০ - ৯০	১০	৮৫	১.৯২৯৪	১৯.২৯৪
	$\sum f$= ১০০			১৮০.৬৫২

$$\therefore \sum f \log X = ১৮০.৬৫২$$

$$G = \text{Anti log}\left[\frac{\sum f \log x}{n}\right]$$

$$= \text{Anti log}\ \frac{১৮০.৬৫২}{১০০} = \text{Anti log}\ (১.৮০৬৫২) = ৬৪.০৫$$

∴ গুণিতক গড় = ৬৪.০৫

তড়ঙ্গ গড় নির্ণয় —

নম্বর	গণসংখ্যা f	মধ্যমান X	$\frac{1}{x}$	$\frac{f}{x}$
৪০ - ৫০	১০	৪৫	০.০২২২	০.২২২০
৫০ - ৬০	২০	৫৫	০.০১৮২	০.৩৬৪০
৬০ - ৭০	৪০	৬৫	০.০১৫৪	০.৬১৬০
৭০ - ৮০	২০	৭৫	০.০১৩৩	০.২৬৬০
৮০ - ৯০	১০	৮৫	০.০১১৮	০.১১৮০
	১০০			১.৫৮৬০

$$\therefore \sum \frac{f}{x} = ১.৫৮৬০$$

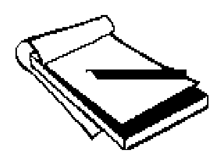
$$H = \frac{১}{\frac{১}{n}\sum \frac{f}{x}} = \frac{১}{\frac{১}{১০০}(১.৫৮৬০)} = \frac{১০০}{১.৫৮৬০} = ৬৩.০৫$$

∴ তরঙ্গ গড় = ৬৩.০৫

সুতরাং, যোজিত গড় = ৬৫
গুণিতক গড় = ৬৪.০৫
তড়ঙ্গ গড় = ৬৩.০৫

সুতরাং, এখন আপনি প্রমাণ স্বরূপ বলতে পারেন, $A \geq G \geq H$

অনুশীলন
প্রথম ১০টি ক্রমিক সংখ্যার যোজিত গড়, জ্যামিতিক গড় ও তরঙ্গ গড় নির্ণয় করুন এবং ফলাফলের উপর মন্তব্য করুন।



একটি যথার্থ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকের বাঞ্চনীয় বৈশিষ্ট্য

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক তথ্যসারির একটি প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা। এই ইউনিটে অনেকগুলি পরিমাপকের কথা উল্লেখ করা হয়েছে। একটি উপযুক্ত পরিমাপকের নিম্নবর্ণিত বৈশিষ্ট্য থাকা বাঞ্চনীয়, যা নিশ্চয়ই আপনি জানতে চান। এই বৈশিষ্ট্যগুলো হলো,

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক তথ্যসারির একটি প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা।

১. একটি পরিমাপক সহজবোধ্য ও সহজে নির্ণয় উপযোগী হতে হবে।
২. একটি পরিমাপককে তথ্যসারির সকল সংখ্যাকে পরিগণনায় আনতে হবে।
৩. পরিমাপকটি গাণিতিক পরিগণনার উপযুক্ত হওয়া বাঞ্চনীয়।
৪. একটি সমগ্রক থেকে অনেক নমুনা নেয়া যেতে পারে। কিন্তু পরিমাপকটি এমন হওয়া দরকার যে নমুনা বিচ্যুতি হলেও ফলাফল যেন খুব বেশী প্রভাবিত না হয়।

৫. পরিমাপক এমন হওয়া উচিত যে উপসারিগুলির পরিমাপ জানা থাকলে সম্মিলিত তথ্যসারির গড় সহজে নির্ণয় করা যায়।

যথার্থতার আলোকে যোজিত গড়ে সব বৈশিষ্ট্য বর্তমান রয়েছে। সেজন্য পরিসংখ্যান বিশ্লেষণে যোজিত গড়ের ভূমিকা সর্বাধিক। তবে কেন্দ্রীয় প্রবণতার অন্যান্য পরিমাপকও কম প্রয়োজনীয় নয়।

সারাংশ

গুনিতক গড়, তরঙ্গ গড় ও দ্বিঘাত গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের বিশেষ পরিমাপক। কেননা কেবলমাত্র বিশেষ বিশেষ কাজেই যেমন, জনপ্রতি আয় নির্ণয়, শেয়ার প্রতি লভ্যাংশ নির্ণয় ইত্যাদির ক্ষেত্রে এদের জনপ্রিয় ব্যবহার লক্ষণীয়। এই গড়গুলির নির্ণয় প্রক্রিয়া কিছুটা জটিল। কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের যে তিনটি খুবই প্রয়োজনীয় গড় আছে এদের মধ্যে যোজিত গড় (A), গুনিতক গড় (G) এবং তরঙ্গ গড় (H) প্রধান। এই গড় তিনটির মধ্যে সম্পর্ককে চিহ্নিত করা যায় এইভাবে, $A \geq G \geq H$। পরিশেষে বলা যায় যে, প্রতিটি গড়ই কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপককে বহুলভাবে সাহায্য করে বলে, বিবিধ পরিমাপকে এদের বহুল ব্যবহার হয়ে থাকে।

- **পাঠোত্তর মূল্যায়ন**

১. কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিশেষ পরিমাপকগুলি কী কী? প্রত্যেকটির সংজ্ঞা দিন এবং উদাহরণ সহকারে আলোচনা করুন।

নিচে সাতটি কোম্পানির বাৎসরিক মুনাফার শতকরা হার দেয়া হলো, (লক্ষ টাকায়)
৭.৫২, ৬.৪১, ৮.৩৯, ১১.৫৪, ৭.৩২, ৫.৪৮

বাৎসরিক মুনাফার গুণিতক গড় নির্ণয় করুন।

২. গুণিতক গড়ের সংজ্ঞা দিন। পরিসংখ্যানের বিভিন্ন প্রকারের তথ্য থেকে গুণিতক গড়ের নির্ণয় পদ্ধতিসমূহ আলোচনা করুন।

নিচের গণসংখ্যা নিবেশনে ১০০টি দোকানের বাৎসরিক লাভের হার প্রদর্শিত হলো,

বাৎসরিক লাভের শতকরা হার	দোকানের সংখ্যা
০ - ৫	২
৫ - ১০	২৫
১০ - ১৫	৪৬
১৫ - ২০	২১
২০ - ২৫	৬

নিবেশনটির গুণিতক গড় এবং তরঙ্গ গড় নির্ণয় করুন।

৩. তরঙ্গ গড় কী? এর সুবিধা-অসুবিধা বর্ণনা করুন। যোজিত গড়, গুণিতক গড় এবং তরঙ্গ গড়ের মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ে আলোকপাত করুন।

নিচে কিছুসংখ্যক ছাত্রের কোন পরীক্ষার নম্বরের একটি গণসংখ্যা বিন্যাস দেয়া হলো,

শতকরা নম্বর	ছাত্রের সংখ্যা
৫০ - ৬০	৪
৬০ - ৭০	১২
৭০ - ৮০	২৪
৮০ - ৯০	১১
৯০ - ১০০	৬

বিন্যাসটির যোজিত গড়, গুণিতক গড় এবং তরঙ্গ গড় নির্ণয় করুন এবং বিন্যাসটি আলোকপাত করুন।

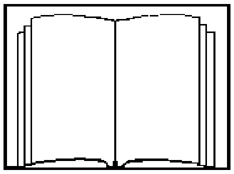
৪. একটি যথার্থ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের কী কী বৈশিষ্ট্য থাকা বাঞ্ছনীয়? কোন পরিমাপকটি সঠিক বিবেচনায় উত্তম বলে আপনার মনে হয়?

নিচে কয়েকটি কোম্পানীর শেয়ার প্রতিবেদন দেয়া হলো,

শেয়ার প্রতি আয় (টাকায়)	কোম্পানীর সংখ্যা
১০ - ১২	৮
১২ - ১৪	২০
১৪ - ১৬	২৫
১৬ - ২০	১০
২০ - ২২	৭

বিন্যাসটির তরঙ্গ গড় নির্ণয় করুন।

Reference :



1. Croxton Frederick E, Dudley J. Cowden and Sidney Klein : Applied General Statistics, Prentice-Hall Inc. Euglewood Cliff N. J., 1967.
2. Harnett, Donald L, and James L. Murphy : Introductory Statistical Analysis, Addison-Werley Publishing Company Inc, Reading Mass, 1975.
3. Anderson, Sweeney and William : Introduction to Statistics - An Application Approach, West Publishing Company, New York, 1981.
4. মুহাম্মদ আলী মিঞা এবং মোঃ আলিম উল্ল্যা মিয়ান : পরিসংখ্যান পরিচিতি, আইডিয়াল লাইব্রেরী, ঢাকা, ১৯৮৫।
5. এস. এ. হাসীব : বাণিজ্যিক পরিসংখ্যান, আলী পাবলিকেশন্স, পাটুয়াটুলী, ঢাকা, ১৯৬৯।
6. J.C.S. Das : Lesson Note on Statistics, ICMA, Bangladesh, Nilkhet, Dhaka, 1988.