ইউনিট

৬

পরামাত্রিক পরীক্ষা
Parametric Test

ভূমিকা

পরিসংখ্যিক কল্পনা (Hypothesis) যাচাইয়ের ক্ষেত্রে সাধারণত দুটি পদ্ধতি অনুসরণ করা হয়। এদের একটি হল পরামিতিক যাচাই পদ্ধতি (Parametic Test Method)। যখন সমগ্রকের বিন্যাসের গঠন জানা থাকে তখন সমগ্রকের পরামিতি (Parameter) সম্পর্কে একটি বিশেষ মানকে কল্পনা করে তা যাচাই করা হয়। কল্পনা যাচাইয়ের এই পদ্ধতিকে বলা হয় পরামিতিক যাচাই পদ্ধতি। এ ধরনের যাচাই পদ্ধতির মধ্যে রয়েছে পরিমিত যাচাই, t যাচাই, F যাচাই ইত্যাদি। পরিসাংখ্যাধিক কল্পনা যাচাইয়ের ক্ষেত্রে পরামিতিক যাচাই পদ্ধতি সর্বাদিক নির্ভরযোগ্য।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ০২ সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৬.১ ঃ পরামাত্রিক পরীক্ষা
পাঠ ৬.২ ঃ টি পরীক্ষা
পাঠ ৬.৩ ঃ জেড পরীক্ষা
পাঠ ৬.৪ ঃ কাই বর্গ পরীক্ষা
পাঠ ৬.৫ ঃ এফ পরীক্ষা

পাঠ ৬.১ পরামাত্রিক পরীক্ষা
Parametric Test)

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন পরামাত্রিক পরীক্ষার নাম বলতে পারবেন।
- টেবিল হতে পরামাত্রিক পরীক্ষার মান নির্ণয় করতে পারবেন।

পরামাত্রিক পরীক্ষা
Parametric Test

এখানে সমগ্রকের বিন্যাস গঠন জানা থাকে এই অবস্থায় সমগ্রক পরামিতি সম্পর্কে একটি মান অনুমান করা হয়। পরে তা পরীক্ষা করা হয় অনুমানটি সত্য নাকি মিথ্যা। অনুমানের যাচাইয়ের এ পদ্ধতিকে বলা হয় পরামাত্রিক পরীক্ষা। পরামাত্রিক পরীক্ষায় যাচাইসমূহের মধ্যে জেড পরীক্ষা, টি পরীক্ষা, কাই-বর্গ পরীক্ষা এবং এফ পরীক্ষা উল্লেখযোগ্য।

পরামাত্রিক বিভিন্ন পরীক্ষার টেবিল হতে মান গ্রহনের পদ্ধতি :

যে কোন যাচাই নমুনাজের মানের বিপরীতে নির্দিষ্ট স্বাধীনতার মাত্রা (Degree of Freedom) এবং যথার্থতার সীমার (Level of significance) উপর ভিত্তি করে টেবিল থেকে মান পাওয়া যায় এবং পরবর্তীতে এই মানের সাপেক্ষে উক্ত মানের উপর বিভিন্ন ধরণের মন্তব্য করা হয়। টেবিল হতে মান গ্রহনের পদ্ধতি নিম্নে আলোচনা করা হলোঃ-

১. পরিমিত যাচাই ক্ষেত্রে (In case of normal Test) ঃ পরিমিত যাচাইয়ের ক্ষেত্রে এই বইয়ের পিছনে প্রদত্ত Standard Normal Distribution টেবিল থেকে z এর মান পাওয়া যাবে না, এর মান Critical Value of the Distribution এই Table থেকে পাওয়া যাবে। প্রদত্ত Table এর α সংশয় মাত্রায় (Level of significance) এর ভিত্তিতে পরিমিত যাচাইয়ের মান (Z-test) নির্ণয় করতে হবে। যেহেতু পরিমিত যাচাইয়ের ক্ষেত্রে z এর মান একটি সংশয় মাত্রা α এর উপর ভিত্তি করে বের করতে হবে। সেহেতু α সংশয় মাত্রায় বিভিন্ন মান এই বইয়ের শেষে টেবিল-৩ প্রযোজ্য।

২. t যাচাই ক্ষেত্রে (In case of t-test)ঃ t যাচাইয়ের জন্যও এই বইয়ের পেছনে Students t Distribution এই Table ব্যবহার করতে হবে। এক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা (Degree of freedom-d.f) দেখতে হয় কলাম হিসেবে এবং যথার্থতার সীমা দেখতে হয় সারি হিসেবে উভয়ের মিলিত স্থানের মানই হলো প্রত্যাশিত টেবিল থেকে প্রাপ্ত মান। যেমন ধরা যাক কোন একটি t যাচাইয়ের ক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা 10 এবং যথার্থতার সীমা 0.05 এক্ষেত্রে Table থেকে প্রাপ্ত মান হবে 2.228

৩. কাই বর্গ যাচাইয়ের ক্ষেত্রে (In case of χ^2-test) ঃ কাই বর্গের জন্য এই বইয়ের পেছনে Critical Values of the Chi Square Distribution এই টেবিল ব্যবহার করতে হবে। এই টেবিলে স্বাধীনতার মাত্রা $(d.f)$ দেখতে হয় কলামে এবং যথার্থতার সীমা দেখতে হয় সারিতে। যেমন কোন একটি χ^2 যাচাইয়ের ক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা $(d.f)$ 20 এবং যথার্থতার সীমা = 0.05 এক্ষেত্রে টেবিল থেকে প্রাপ্ত মান হবে 31.4104

৪. F-যাচাইয়ের ক্ষেত্রে (In case of F-test) ঃ F-যাচাই এর ক্ষেত্রে ভিন্ন ভিন্ন যথার্থতার সীমার জন্য ভিন্ন ভিন্ন টেবিল দেয়া থাকে। কারণ এ যাচাই -এ স্বাধীনতার মাত্রা থাকে দু'টি। প্রথমে যথার্থতার সীমা নির্ধারণ করে উপরের নমুনা ভেদাংকের স্বাধীনতার মাত্রা সারি অনুসারে এবং নিচের নমুনা ভেদাংকের স্বাধীনতার মাত্রা কলাম অনুসারে নিয়ে উভয়ের মিলিত স্থানের মান নির্ধারণ করতে হয় এবং ইহাই প্রত্যাশিত F-যাচাই এর টেবিলের মান।

উদারহণ ঃ ধরা যাক কোন একটি যাচাই এ যথার্থতার সীমা 0.05 এবং স্বাধীনতার মাত্রা যথাক্রমে 6 এবং 15। এক্ষেত্রে টেবিল প্রাপ্ত মান হবে 2.79।

সারসংক্ষেপ

সমগ্রকের বিন্যাস গঠন জানা থাকে এই অবস্থায় সমগ্রক পরামিতি সম্পর্কে একটি মান অনুমান করা হয়। পরে তা পরীক্ষা করা হয় অনুমানটি সত্য নাকি মিথ্যা। অনুমানের যাচাইয়ের এ পদ্ধতিকে বলা হয় পরামাত্রিক পরীক্ষা। পরামাত্রিক পরীক্ষায় যাচাইসমূহের মধ্যে জেড পরীক্ষা, টি পরীক্ষা, কাই-বর্গ পরীক্ষা এবং এফ পরীক্ষা উল্লেখযোগ্য।

পাঠ ৬.২ টি পরীক্ষা
t Test

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- টি বিন্যাস সংজ্ঞা লিখতে পারবেন।
- টি বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- টি বিন্যাসের ব্যবহার বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে পারবেন।

স্টুডেন্টের t বিন্যাস
Student's t Distribution

সমগ্রকের পরিমিত ব্যবধান (σ) জানা নাই, নমুনার আকার ছোট ($n < 30$) এবং সমগ্রক পরিমিত বিন্যস্ত হলে গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসকে t বিন্যাস বলে।

পরিসংখ্যানবিদ W.S. Gosset ১৯০৮ সালে এই বিন্যাস আবিষ্কার করেন। উনার ছদ্মনাম Student অনুসারে এই বিন্যাসের নামকরণ করা হয় Student's t বিন্যাস। অতপর ১৯২৬ সালে R.A. Fisher ও t বিন্যাসের সংজ্ঞা দেন।

W.S. Gosset এর সংজ্ঞানুসারে $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$

এখানে n = নমুনার আকার

$\bar{x}$ = নমুনার গড়

μ = সমগ্রকের গড়

s = নমুনার পরিমিত ব্যবধান

t বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য
Properties of t Distribution

১. এটি অবিচ্ছিন্ন চলকের বিন্যাস।

২. এই বিন্যাসের চলকের মান $-\alpha$ থেকে α পর্যন্ত।

৩. এই বিন্যাস ঘন্টাকৃতির ও সুষম।

৪. এই বিন্যাসের একটি পরিমিতি আছে। যথাঃ v। এখানে v হচ্ছে স্বাধীনতার মাত্রা, যার মান 3 বা তার অধিক ($v \geq 3$)।

৫. এই বিন্যাসের গড় $E(t) = 0$।

৬. এই বিন্যাসের ভেদাংক $v(t) = \dfrac{v}{v-2}$ । এর মান সর্বদা একের অধিক।

৭. এই বিন্যাসটির $t = 0$ বিন্দুতে প্রতিসম। তাই t বিন্যাসের গড় = মধ্যমা = প্রচুরক=0।

৮. এই বিন্যাসের বঙ্কিমতা $\beta_1 = 0$; অর্থাৎ বিন্যাসটি বংকিমতাহীন।

৯. বিন্যাসটির সূচালতা $\beta_2 = 3 + \frac{6}{v-4}$; $v \geq 5$; অর্থাৎ বিন্যাসটি অনতি সুঁচালো।

১০. এই বিন্যাসের আকৃতি স্বাধীনতার মাত্রার (v) উপর নির্ভরশীল। স্বাধীনতার মাত্রা বৃদ্ধির সাথে সাথে এই বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসের কাছাকাছি হবে।

t বিন্যাসের প্রয়োগ

Applications of t Distribution

নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে t বিন্যাস ব্যবহৃত হয়–

১. একটি সমগ্রকের গড়ের মান যাচাইয়ে।
২. দুইটি স্বাধীন নমুনা গড় যাচাইকরণে।
৩. দুইটি সম্পর্কিত নমুনা গড় যাচাইকরণে।
৪. শূন্য সংশ্লেষাংক যাচাইকরণে।
৫. আংশিক সংশ্লেষাংক যাচাইকরণে।
৬. নমুনা নির্ভরাংক যাচাইকরণে।
৭. দুইটি স্বাধীন নির্ভরাংকের সমতা যাচাইয়ে।

সারসংক্ষেপ

সমগ্রকের পরিমিত ব্যবধান (σ) জানা নাই, নমুনার আকার ছোট (n < 30) এবং সমগ্রক পরিমিত বিন্যস্ত হলে গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসকে t বিন্যাস বলে। পরিসংখ্যানবিদ W.S. Gosset ১৯০৮ সালে এই বিন্যাস আবিষ্কার করেন। উনার ছদ্মনাম Student অনুসারে এই বিন্যাসের নামকরণ করা হয় Student's t বিন্যাস। অতপর ১৯২৬ সালে R.A. Fisher ও t বিন্যাসের সংজ্ঞা দেন। W.S. Gosset এর সংজ্ঞানুসারে $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$

পাঠ ৬.৩ পরিমিত যাচাই বা জেড পরীক্ষা
Z Test

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পরিমিত যাচাইয়ের অনুমিতি সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- পরিমিত যাচাইয়ের ব্যবহারিক প্রয়োগ করতে পারবেন।

পরিমিত যাচাই বা z যাচাই
Normal test or z-test

অনুমান ঃ পরিমিত যাচাইয়ের জন্য দুইটি অনুমানের প্রয়োজন হয়–

(i) কোন একটি নমুনাজ মানের দৈব নমুনাজ বিন্যাস (Random sampling distribution) পরিমিত বিন্যাস হবে।

(ii) নমুনা থেকে প্রাপ্ত তথ্য সমগ্রকের তথ্যের খুবই নিকটবর্তী এবং পরিমিত বিচ্যুতি (Standard error) নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সমগ্রকের তথ্যের পরিবর্তে নমুনা তথ্য ব্যবহারযোগ্য।

যাচাই নমুনাজমান (Test Statistic) ঃ Chebyshev-এর অসমতা হতে আমরা জানি যে, কোন একটি নমুনাজমান u-এর প্রত্যাশিত (বা গড় মান E(u) এবং পরিমিত বিচ্যুতি SE (u) হলে-

$$z = \frac{u - E(u)}{S.E.(u)} \sim N(0,1)$$

$$= \frac{u - E(u)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

অর্থাৎ, নতুন নমুনাজ মান z পরিমিতভাবে বিন্যাস্ত (Normally distributed) যার গড় '0' এবং ভেদাংক 1। অধিকাংশ ক্ষেত্রে পরিমিত যাচাই দ্বি-প্রান্তিক (Two-tailed) হয়ে থাকে, তবে অনেক সময় তা এক প্রান্তিক (One-tailed)ও হয়। পরিমিত যাচাই সাধারণত বড় আকারের নমুনা ($n \geq 30$) যাচায়ের জন্য ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

পরিমিত যাচাই এর ব্যবহার (Uses of Normal test) ঃ

পরিসংখ্যানিক যথার্থতা যাচাইয়ে অত্যন্ত জনপ্রিয় এবং বহুল ব্যবহৃত পদ্ধতি হল পরিমিত যাচাই। সাধারণভাবে নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে পরিমিত যাচাই ব্যবহৃত হয়ঃ

১. পরিমিত যাচাই একক নমুনা গড়ের যথার্থতা যাচাইয়ের ব্যবহৃত হয়।
২. ইহা দুটি স্বাধীন নমুনা পার্থক্যের যাচাই করতে ব্যবহৃত হয়।
৩. নমুনার অনুপাত যাচাইয়ে এটি ব্যবহৃত হয়।
৪. দুটি অনুপাতের তুলনা যাচাই করতে পরিমিত যাচাই ব্যবহৃত হয়।
৫. সংশ্লেষাংক যাচাই করতে এটি ব্যবহৃত হয়।
৬. দুটি সংশ্লেষাংকের সমতা যাচাইয়ে পরিমিত যাচাই ব্যবহৃত হয়।

z ও t বিন্যাসের পার্থক্য

Difference Between z and t Distribution

z ও t বিন্যাসের মধ্যে অনেক সাদৃশ্য থাকা সত্ত্বেও তাদের মধ্যে সুস্পষ্ট পার্থক্য বিদ্যমান। যা নিম্নরূপ–

	z বিন্যাস	t বিন্যাস
১.	সমগ্রকের পরিমিত ব্যবধান (σ) জানা আছে, নমুনার আকার (n) ছোট বা বড় হলে z বিন্যাস ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে $z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	সমগ্রকের পরিমিত ব্যবধান (σ) জানা নাই এবং নমুনার আকার ছোট (n < 30) হলে t বিন্যাস ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে $t = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
২.	z বিন্যাসের ক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা প্রয়োজন হয় না।	t বিন্যাসের ক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা প্রয়োজন হয়।
৩	z বিন্যাসের ভেদাংক $v(z) = 1$	t বিন্যাসের ভেদাংক $v(t) = \dfrac{v}{v-2}$
৪	z বিন্যাস মধ্যম সূঁচালো।	t বিন্যাস অনতি সূঁচালো।
৫	z বিন্যাস বৃহৎ নমুনা যাচাই-এ ব্যবহৃত হয়।	t বিন্যাস ক্ষুদ্র নমুনা যাচাই-এ ব্যবহৃত হয়।
৬	z বিন্যাসের পরিমিত ব্যবধান বেশী।	t বিন্যাসের পরিমিত ব্যবধান কম।

সারসংক্ষেপ

পরিমিত যাচাই একক নমুনা গড়ের যথার্থতা যাচাইয়ের ব্যবহৃত হয়। এছাড়া দুটি স্বাধীন নমুনা পার্থক্যের যাচাই করতে ব্যবহৃত হয়। আবার নমুনার অনুপাত যাচাইয়ে ইহা ব্যবহৃত হয়। দুটি অনুপাতের তুলনা যাচাই করতেও পরিমিত যাচাই ব্যবহৃত হয়। সংশ্লেষাংক যাচাই করতে ইহা ব্যবহৃত হয়। দুটি সংশ্লেষাংকের সমতা যাচাইয়ে পরিমিত যাচাই ব্যবহৃত হয়।

পাঠ ৬.৪ কাই বর্গ পরীক্ষা
Chi-Square Test

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- কাই বর্গ পরীক্ষার নমুনাজমান লিখতে পারবেন।
- কাই বর্গ পরীক্ষার বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- কাই বর্গ পরীক্ষার ব্যবহার বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে পারবেন।

কাই বর্গ বিন্যাস
Chi-Square Distribution

১৯০০ সালে কার্ল পিয়ারসন এই বিন্যাস উদ্ভাবন করেন। ভেদাংকের নমুনায়ন বিন্যাস হতে এই বিন্যাস পাওয়া যায়। একটি ভেদাংকের পরীক্ষা যে নমুনাজ মান দ্বারা করা হয় উহাই কাই বর্গ। একে সংক্ষেপে χ^2 দ্বারা লিখা হয়।

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

এক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা, v = n - 1

এখানে, n = নমুনার আকার
s^2= নমুনার ভেদাংক
σ^2= সমগ্রকের ভেদাংক

অন্যভাবেও কাই বর্গকে সংজ্ঞায়িত করা যায়। কোন বিন্যাসের মিলকরণের (Goodness of Fit) সঠিকতা যাচাইয়ে যে নমুনাজ মান প্রয়োগ কর হয় তাকে কাই বর্গ বলে।

$$\chi^2 = \Sigma\frac{(O-E)^2}{E}$$

এক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা, v = (r - 1)(c-1)

এখানে, O = পর্যবেক্ষিত গণসংখ্যা
E= তাত্ত্বিক বা প্রত্যাশিত গণসংখ্যা

কোন কাই বর্গ বিন্যাসে তাত্ত্বিক বা প্রত্যাশিত গণসংখ্যার মান 5 এর কম হলে, উক্ত মানটি কাছাকাছি প্রত্যাশিত গণসংখ্যার সাথে যোগ করতে হয়।

ইয়েটের সংশোধনী (Yate's Correction): ১৯৩৪ সালে F. Yates বলেন যে, স্বাধীনতার মাত্রা, v= 1 হলে এক্ষেত্রে χ^2 এর মান নির্ণয়ে শুদ্ধিকরণ প্রয়োজন। একে ইয়েটের সংশোধনী (Yate's Correction) বলা হয়। এক্ষেত্রে χ^2 এর নমুনাজ মান হবে–

$$\chi^2 = \Sigma\frac{(|O-E|-0.5)^2}{E}$$

χ^2 বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য (Properties of Chi-Square Distribution)

১. এটি অবিচ্ছিন্ন চলকের বিন্যাস।
২. এই বিন্যাসের চলকের মান 0 হতে ∞ পর্যন্ত।
৩. এই বিন্যাসের একটি পরিমিতি আছে। যথাঃ v, এখানে v হচ্ছে স্বাধীনতার মাত্রা।
৪. এই বিন্যাসের আকৃতি স্বাধীনতার মাত্রার (v) উপর নির্ভরশীল। সাধারণত এই বিন্যাসের আকৃতি ডানদিকে বংকিম এবং অতি সূঁচালো।
৫. এই বিন্যাসের গড়, $E(\chi^2) = v$ এবং ভেদাংক $v(\chi^2) = 2v$
৬. $v \to \alpha$ হলে χ^2 বিন্যাস পরিমিত বিন্যাস হবে। এক্ষেত্রে গড় v এবং পরিমিত ব্যবধান $\sqrt{2v}$
৭. দুই বা ততোধিক স্বাধীন χ^2 চলকের সমষ্টি একটি স্বাধীন χ^2 চলক হবে।

৮. v_1 ও v_2 স্বাধীনতার মাত্রার দুটি স্বাধীন কাই বর্গ চলক χ_1^2 এবং χ_2^2 হলে, F চলক হবে ঃ $F = \dfrac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2}$

χ^2 বিন্যাসের প্রয়োগ (Applications of Chi-Square Distribtion)

নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে χ^2 বিন্যাস ব্যবহৃত হয়:

১. একটি ভেদাংকের পরীক্ষার ক্ষেত্রে।

২. পরিমিত বিন্যাস থেকে নেয়া নমুনার ভেদাংক যাচাই করতে ব্যবহৃত হয়।

৩. কোন বিন্যাসের মিলকরণের সঠিকতা যাচাই (Goodness of fit test) করতে।

৪. গুণবাচক চলকগুলোর স্বাধীনতা যাচাই (Test of independence) করতে।

৫. কতগুলো অনুপাতের সমতা যাচাই করতে ব্যবহৃত হয়।

৬. কতগুলো সংশ্লেষাংকের সমতা যাচাই করতে ব্যবহৃত হয়।

৭. t বিন্যাস নির্ণয় করার জন্য।

৮. দুই χ^2 বিন্যাসের সাহায্যে বিটা (β) ও F বিন্যাস নির্ণয়ে।

χ^2 বিন্যাসের সমস্যাবলী ও সমাধান সমূহ (Problems and Solutions of χ^2 Distribution)

ক. Test of One Variance (একটি ভেদাংকের যাচাই)

উদাহরণ: কোন উৎপাদন প্রতিষ্ঠানের উৎপাদিত দ্রব্যের জীবনকালের ভেদাংক পরীক্ষা করা হচ্ছে। ঐ প্রতিষ্ঠান হতে দৈবচয়ন ভিত্তিতে 20টি দ্রব্য নির্বাচন করে জানা গেল যে, পরিমিত ব্যবধান 16 ঘন্টা।

ক. সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 এর অধিক কিনা 5% গুরুত্বের স্তরে পরীক্ষা করুন।

খ. সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 এর কম কিনা 5% তাৎপর্য স্তরে পরীক্ষা করুন।

গ. সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 কিনা 5% গুরুত্বের স্তরে পরীক্ষা করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, নমুনার আকার (n) = 20

নমুনার পরিমিত ব্যবধান (s) = 16

ক. নাস্তি অনুমান, H_0: $\sigma^2 = 144$ অর্থাৎ সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 এর অধিক নয়।

বিকল্প অনুমান, H_A : $\sigma^2 > 144$ অর্থাৎ সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 এর অধিক।

এক্ষেত্রে Test Statistic হবে–

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(20-1)(16)^2}{144}$$

$$= \frac{19 \times 256}{144} = 33.78$$

$\therefore$ χ^2 এর নির্ণীত মান = 33.78

যেহেতু H_A: $\chi^2 > 144$

অতএব পরীক্ষাটি একদিক (ডানদিক) বিশিষ্ট।

এখানে গুরুত্বের স্তর, $\alpha = 5\% = 0.05$

স্বাধীনতার মাত্রা, v = n-1 = 20-1 =19

$\therefore$ χ^2 এর ডানদিকের Critical মান = 30.14

যেহেতু χ^2 এর নির্ণীত মান (33.78) উহার Critical মান (30.14) অপেক্ষা বড় । তাই নমুনা বর্জনীয় এলাকায় পড়ে। অর্থাৎ H_0 বর্জনীয়। অতএব বলা যায় যে, সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 এর অধিক।

খ. নাস্তি অনুমান, $H_0: \sigma^2 = 144$ অর্থাৎ সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 এর কম নয়।

বিকল্প অনুমান, $H_A : \sigma^2 < 144$ অর্থাৎ সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 এর কম।

এক্ষেত্রে Test Statistic হবে−

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(20-1)(16)^2}{144}$$

$$= \frac{19 \times 256}{144} = 33.78$$

$\therefore \chi^2$ এর নির্ণীত মান = 33.78

যেহেতু $H_A: \chi^2 < 144$

অতএব পরীক্ষাটি একদিক (বামদিক) বিশিষ্ট।

এখানে তাৎপর্য স্তর, $\alpha = 5\% = 0.05$

$\therefore 1\text{-}\alpha = 1-0.05 = 0.95$

স্বাধীনতার মাত্রা, v = n-1 = 20-1 =19

$\therefore \chi^2$ এর বামদিকের Critical মান = 10.12

যেহেতু χ^2 এর নির্ণীত মান (33.78) উহার বামদিকের Critical মান (10.12) অপেক্ষা বড় । তাই নমুনা গ্রহণীয় এলাকায় পড়ে। অর্থাৎ H_0 গ্রহণীয়।

গ. নাস্তি অনুমান, $H_0 : \sigma^2 = 144$ অর্থাৎ সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144।

বিকল্প অনুমান, $H_A : \sigma^2 \neq 144$ অর্থাৎ সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 নয়।

এক্ষেত্রে Test Statistic হবে−

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(20-1)(16)^2}{144}$$

$$= \frac{19 \times 256}{144} = 33.78$$

$\therefore \chi^2$ এর নির্ণীত মান = 33.78

যেহেতু $H_A: \chi^2 \neq 144$

অতএব পরীক্ষাটি দুইদিক বিশিষ্ট।

এখানে গুরুত্বের স্তর, $\alpha = 5\% = 0.05$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} = \frac{.05}{2} = 0.025$$

এবং $1\text{-}\frac{\alpha}{2} = 1\text{-}0.025=0.975$

স্বাধীনতার মাত্রা, v = n-1 = 20-1 =19

$\therefore \chi^2$ এর বামদিকের Critical মান $\chi^2_{0.975} = 8.91$

এবং ডানদিকের Critical মান $\chi^2_{0.025} = 32.9$

যেহেতু χ^2 এর নির্ণীত মান (33.78) উহার Critical মানদ্বয়ের মধ্যে নেই। তাই নমুনা বর্জনীয় এলাকায় পড়ে। অর্থাৎ H_0 বর্জনীয়। অতএব বলা যায় যে, সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 নয়।

<u>খ. মিলকরণের সঠিকতা যাচাই (Test of Goodness of Fit):</u>

উদাহরণ: কোন দ্রব্যের একটি সপ্তাহের বিভিন্ন দিনের চাহিদা নিম্নে দেয়া হল–

দিন	শনিবার	রবিবার	সোমবার	মঙ্গলবার	বুধবার	বৃহস্পতিবার	শুক্রবার
চাহিদা	1124	1125	1110	1120	1126	1115	1120

ঐ দ্রব্যের চাহিদা সপ্তাহের বিভিন্ন দিনের উপর নির্ভরশীল কিনা 5% গুরুত্বের স্তরে পরীক্ষা কর।

সমাধান: নাস্তি অনুমান, H_0 : দ্রব্যের চাহিদা সপ্তাহের বিভিন্ন দিনের উপর নির্ভরশীল নয়।

বিকল্প অনুমান, H_A : দ্রব্যের চাহিদা সপ্তাহের বিভিন্ন দিনের উপর নির্ভরশীল।

এক্ষেত্রে Test Statistic হবে– $\chi^2 = \Sigma \dfrac{(O-E)^2}{E}$

χ^2 এর মান নির্ণয়:

দিন	পর্যবেক্ষিত গণসংখ্যা (O)	অনুপাত বা সম্ভাবনা (P)	প্রত্যাশিত গণসংখ্যা E = ΣO×P	$(O-E)^2$	$\dfrac{(O-E)^2}{E}$
শনিবার	1124	$\frac{1}{7}$	1120	16	0.014
রবিবার	1125	$\frac{1}{7}$	1120	25	0.022
সোমবার	1110	$\frac{1}{7}$	1120	100	0.089
মঙ্গলবার	1120	$\frac{1}{7}$	1120	0	0
বুধবার	1126	$\frac{1}{7}$	1120	36	0.032
বৃহস্পতিবার	1115	$\frac{1}{7}$	1120	25	0.022
শুক্রবার	1120	$\frac{1}{7}$	1120	0	0
	ΣO = 7840				$\Sigma \dfrac{(O-E)^2}{E} = 0.179$

$\therefore \chi^2$ এর নির্ণীত মান = 0.179 এখানে গুরুত্বের স্তর, $\alpha = 5\% = 0.05$

স্বাধীনতার মাত্রা, v = n-1 = 7-1 = 6 $\therefore \chi^2$ এর Critical মান = 12.59

যেহেতু χ^2 এর নির্ণীত মান (0.179) উহার Critical মান (12.59) অপেক্ষা ছোট। তাই নমুনা গ্রহণীয় এলাকায় পড়ে। অর্থাৎ H_0 গ্রহণীয়। অতএব বলা যায় যে, দ্রব্যের চাহিদা সপ্তাহের বিভিন্ন দিনের উপর নির্ভরশীল নহে।

গ. স্বাধীনতা যাচাই (Test of Independence)

উদাহরণ: নিম্নে ছাত্রদের গণিত ও পরিসংখ্যানের ফলাফলের সম্পর্ক দেয়া হল–

গণিত / পরিসংখ্যান	উচ্চ গ্রেড	মধ্যম গ্রেড	নিম্ন গ্রেড
উচ্চ গ্রেড	56	71	12
মধ্যম গ্রেড	47	163	38
নিম্ন গ্রেড	14	42	85

গণিতের ফলাফল ও পরিসংখ্যানের ফলাফল পরস্পর স্বাধীন কিনা 5% গুরুত্বের স্তরে পরীক্ষা করুন।

সমাধান: নাস্তি অনুমান H_0: গণিতের ফলাফল ও পরিসংখ্যানের ফলাফল পরস্পর স্বাধীন।
বিকল্প অনুমান H_A: গণিতের ফলাফল ও পরিসংখ্যানের ফলাফল পরস্পর স্বাধীন নয়।

এক্ষেত্রে Test Statistic হবে $\chi^2 = \Sigma \frac{(O-E)^2}{E}$

গণিত / পরিসংখ্যান	উচ্চ গ্রেড	মধ্যম গ্রেড	নিম্ন গ্রেড	মোট
উচ্চ গ্রেড	56	71	12	$139 = R_1$
মধ্যম গ্রেড	47	163	38	$248 = R_2$
নিম্ন গ্রেড	14	42	85	$141 = R_3$
মোট	$117 = C_1$	$276 = C_2$	$135 = C_3$	$528 = N$

χ^2 এর মান নির্ণয়:

পর্যবেক্ষিত গণসংখ্যা (O)	প্রত্যাশিত গণসংখ্যা (E) = $\left(\frac{\Sigma R \times \Sigma C}{N}\right)$	$(0\text{-}E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
56	$\frac{R_1 \times C_1}{N} = \frac{139 \times 117}{528} = 30.80$	635.04	20.62
47	$\frac{R_2 \times C_1}{N} = \frac{248 \times 117}{528} = 54.95$	63.20	1.15
14	$\frac{R_3 \times C_1}{N} = \frac{141 \times 117}{528} = 31.24$	297.22	9.51
71	$\frac{R_1 \times C_2}{N} = \frac{139 \times 276}{528} = 72.66$	2.76	0.04
163	$\frac{R_2 \times C_2}{N} = \frac{248 \times 276}{528} = 129.64$	1112.89	5.58
42	$\frac{R_3 \times C_2}{N} = \frac{141 \times 276}{528} = 73.70$	1004.89	13.63
12	$\frac{R_1 \times C_3}{N} = \frac{139 \times 135}{528} = 35.54$	554.13	15.59
38	$\frac{R_2 \times C_3}{N} = \frac{248 \times 135}{528} = 63.41$	645.67	10.18
85	$\frac{R_3 \times C_3}{N} = \frac{141 \times 135}{528} = 36.05$	2396.10	66.47
$\Sigma O = 528$			$\Sigma \frac{(O-E)^2}{E} = 145.78$

$\therefore$ χ^2 এর নির্ণীত মান = 145.78

এখানে গুরুত্বের স্তর, $\alpha = 5\% = 0.05$

স্বাধীনতার মাত্রা, $v = (R-1)(C-1)$ [এখানে R = Row এর সংখ্যা এবং C = Column এর সংখ্যা]

$= (3-1)(3-1) = 4$

$\therefore$ χ^2 এর Critical মান = 9.49

যেহেতু χ^2 এর নির্ণীত মান (145.78) উহার Critical মান (9.49) অপেক্ষা বড়। তাই নমুনা বর্জনীয় এলাকায় পড়ে। অর্থাৎ H_0 বর্জনীয়। অতএব বলা যায় যে, গণিতের ফলাফল ও পরিসংখ্যানের ফলাফল পরস্পর স্বাধীন নয়।

সারসংক্ষেপ

১৯০০ সালে কার্ল পিয়ারসন এই বিন্যাস উদ্ভাবন করেন। ভেদাংকের নমুনায়ন বিন্যাস হতে এই বিন্যাস পাওয়া যায়। একটি ভেদাংকের পরীক্ষা যে নমুনাজ মান দ্বারা করা হয় উহাই কাই বর্গ। একে সংক্ষেপে χ^2 দ্বারা লিখা হয়।

পাঠ ৬.৫ এফ পরীক্ষা F Test

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- এফ বিন্যাসের সম্ভাবনা অপেক্ষক লিখতে পারবেন।
- এফ পরীক্ষার বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- এফ পরীক্ষার ব্যবহার বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে পারবেন।

F যাচাই (F test)

১৯২৪ সালে R.A. Fisher সর্বপ্রথম এই যাচাই উদ্ভাবন করেন। তাই উনার নামানুসারে এই যাচাইয়ের নামকরণ করা হয় F যাচাই।

ধরি, দুটি সমগ্রক হতে স্বাধীনভাবে n_1 ও n_2 আকার বিশিষ্ট নমুনা নেয়া হল, যাদের ভেদাংক হল যথাক্রমে s_1^2 এবং s_2^2 ।

যেহেতু $$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{v_1}}{\frac{\chi_2^2}{v_2}} = \frac{\frac{\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2}}{v_1}}{\frac{\frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2}}{v_2}}$$

অতএব $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ যেখানে $v_1 = n_1-1$ এবং $v_2 = n_2-1$

এখানে $s_1^2 > s_2^2$ হবে এবং স্বাধীনতার মাত্রাদ্বয় হচ্ছে $v_1 = (n_1-1)$ ও $v_2 = n_2-1$

F যাচাইকে অন্যভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। ধরি, n_1 ও n_2 আকারের দুটি নমুনা দুটি ভিন্ন পরিমিত বিন্যাস হতে নেয়া হয়েছে যাদের ভেদাংকদ্বয় s_1^2 এবং s_2^2 । যদি σ_1^2 এবং σ_2^2 দুটি ভিন্ন বিন্যাসের ভেদাংক হয়। তাহলে F যাচাই হবে–

$$F = \frac{\frac{n_1 s_1^2}{(n_1-1)\sigma_1^2}}{\frac{n_2 s_2^2}{(n_2-1)\sigma_2^2}}$$

এক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রাদ্বয় হচ্ছে $v_1 = n_1-1$ এবং $v_2 = n_2-1$

উপরের F যাচাইয়ের নমুনায়ন বিন্যাসই F বিন্যাস নামে পরিচিত।

F বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য (Properties of F-Distribution)

ক. এটি অবিচ্ছিন্ন চলকের বিন্যাস।

খ. এই বিন্যাসের চলকের মান 0 থেকে ∞ পর্যন্ত।

গ. এই বিন্যাসটির দুটি পরিমিতি আছে। যথাঃ v_1 এবং v_2 ।

ঘ. এই বিন্যাসের আকৃতি স্বাধীনতার মাত্রাদ্বয়ের (v_1 এবং v_2) এর উপর নির্ভরশীল।

ঙ. এই বিন্যাসের গড় $= \dfrac{v_2}{v_2 - 2}$ যখন $v_2 > 2$।

চ. এ বিন্যাসের ভেদাংক $= \dfrac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}$ যখন $v_2 > 4$।

ছ. এই বিন্যাসের আকৃতি ডানদিকে বংকিম এবং অতি সূঁচালো। তবে v_1 এবং v_2 বৃদ্ধির সাথে এর বংকিমতা হ্রাস পেতে থাকে।

F বিন্যাসের ব্যবহার (Uses of F-Distribution) নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে F বিন্যাস ব্যবহৃত হয়:-

ক. দুই বা ততোধিক সমগ্রকের গড়ের সমতা বা পার্থক্য যাচাইয়ে ব্যবহৃত হয়।

খ. দুটি সমগ্রকের ভেদাংকের পার্থক্য যাচাইয়ে ব্যবহৃত হয়।

গ. বহুধা সংশ্লেষাংক যাচাইয়ে।

ঘ. সংশ্লেষের অনুপাত যাচাইয়ে ব্যবহৃত হয়।

ঙ. নির্ভরাংক যাচাই করতে।

চ. শর্তসাপেক্ষে F বিন্যাস হতে z, ঃ ও χ^2 বিন্যাস নির্ণয়ে।

χ^2 বিন্যাসের সাথে z এবং t বিন্যাসের সম্পর্ক (Relation Between χ^2 and z, t Distributions)

ক. χ^2 বিন্যাসের সাথে পরিমিত বিন্যাসের সম্পর্ক:
স্বাধীনতার মাত্রা, v এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে χ^2 বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসের দিকে রূপান্তরিত হয়। তবে $n \geq 30$ হলে পরিমিত বিন্যাসে (z বিন্যাসে) রূপান্তরিত হয়।

খ. χ^2 বিন্যাসের সাথে t বিন্যাসের সম্পর্ক: $t = \dfrac{z}{\sqrt{\dfrac{\chi^2}{v}}}$; $\chi^2 = \dfrac{z^2}{t^2} v$ এখানে v = স্বাধীনতার মাত্রা।

F বিন্যাসের সাথে z, t, χ^2 বিন্যাসের সম্পর্ক (Relation Between F and z, t, χ^2 Distributions)

ক. F বিন্যাসের সাথে z বিন্যাসের সম্পর্ক: যদি $v_1 = 1$এবং $v_2 \to \alpha$ হয় তাহলে F বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসে (z বিন্যাসে) রূপান্তরিত হয়।

খ. F বিন্যাসের সাথে t বিন্যাসের সম্পর্ক: v স্বাধীনতা মাত্রা বিশিষ্ট t চলকের বর্গ হচ্ছে F চলক। অর্থাৎ $F = t^2$
এক্ষেত্রে $v_1 = 1$ এবং $v_2 = v$

গ. F বিন্যাসের সাথে χ^2 বিন্যাসের সম্পর্ক: v_1 ও v_2 স্বাধীনতা মাত্রা বিশিষ্ট χ_1^2 এবং χ_2^2 দুটি স্বাধীন কাই বর্গ চলক হলে F চলক হবে– $F = \dfrac{\dfrac{\chi_1^2}{v_1}}{\dfrac{\chi_2^2}{v_2}}$

সারসংক্ষেপ

১৯২৪ সালে R.A. Fisher সর্বপ্রথম এই যাচাই উদ্ভাবন করেন। তার নামানুসারে এই যাচাইয়ের নামকরণ করা হয় F যাচাই।

দুটি সমগ্রক হতে স্বাধীনভাবে n_1 ও n_2 আকার বিশিষ্ট নমুনা নেয়া হল, যাদের ভেদাংক হল যথাক্রমে s_1^2 এবং s_2^2 ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন

রচনামূলক প্রশ্ন

১. t বিন্যাস কি? এর বৈশিষ্ট্য লিখুন?
২. t বিন্যাস কখন ব্যবহৃত হয়?
৩. z বিন্যাস কি?
৪. পরিমিত যাচাই এর ব্যবহার লিখুন।
৫. z বিন্যাস ও t বিন্যাসের মধ্যে পার্থক্য লিখুন।
৬. কাই বর্গ যাচাই কি? এর বৈশিষ্ট্যগুলো কি কি? কাই বর্গ পরীক্ষা কোথায় ব্যবহৃত হয়?
৭. কোন উৎপাদন প্রতিষ্ঠানের উৎপাদিত দ্রব্যের জীবনকালের ভেদাংক পরীক্ষা করা হচ্ছে। ঐ প্রতিষ্ঠান হতে দৈবচয়ন ভিত্তিতে 20টি দ্রব্য নির্বাচন করে জানা গেল যে, পরিমিত ব্যবধান 16 ঘন্টা।
ক. সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 এর অধিক কিনা 5% গুরুত্বের স্তরে পরীক্ষা করুন।
খ. সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 এর কম কিনা 5% তাৎপর্য স্তরে পরীক্ষা করুন।
গ. সকল দ্রব্যের ভেদাংক 144 কিনা 5% গুরুত্বের স্তরে পরীক্ষা করুন।
৮. কোন দ্রব্যের একটি সপ্তাহের বিভিন্ন দিনের চাহিদা নিম্নে দেয়া হল–

দিন	শনিবার	রবিবার	সোমবার	মঙ্গলবার	বুধবার	বৃহস্পতিবার	শুক্রবার
চাহিদা	1124	1125	1110	1120	1126	1115	1120

ঐ দ্রব্যের চাহিদা সপ্তাহের বিভিন্ন দিনের উপর নির্ভরশীল কিনা 5% গুরুত্বের স্তরে পরীক্ষা করুন।
৯. নিম্নে ছাত্রদের গণিত ও পরিসংখ্যানের ফলাফলের সম্পর্ক দেয়া হল–

পরিসংখ্যান \ গণিত	উচ্চ গ্রেড	মধ্যম গ্রেড	নিম্ন গ্রেড
উচ্চ গ্রেড	56	71	12
মধ্যম গ্রেড	47	163	38
নিম্ন গ্রেড	14	42	85

গণিতের ফলাফল ও পরিসংখ্যানের ফলাফল পরস্পর স্বাধীন কিনা 5% গুরুত্বের স্তরে পরীক্ষা করুন।
১০. F যাচাই কি? এর বৈশিষ্ট্যগুলো লিখুন? এটি কখন ব্যবহৃত হয়?
১১. কাই বর্গ পরীক্ষা এর সাথে z ও t বিন্যাসের সম্পর্ক কিরুপ?
১২. F যাচাই এর সাথে z, t ও χ^2 বিন্যাসের সম্পর্ক কিরুপ?

রেফারেন্স (References)

1. S.P.Gupta and M.P.Gupta (2023), Business Statistics, S Chand & Sons, New Delhi, India.
2. Richard I. Levin and D. S. Rubin (2023), Business Statistics, Prentice Hall Inc. New Delhi, India.
3. Murray R Spigel and Larry Stephens (2023), “Theory and Problems of Statistics: Schaum’s Outline Series.” McGraw Hill, New Delhi, India.
4. খন্দকার মোঃ সাদেকুর রহমান কাজল (২০২৪), অর্থনীতির জন্য পরিসংখ্যান, সমন্বয় পাবলিকেশন্স, ঢাকা।
5. মোঃ আব্দুল আজিজ(২০২৪), অর্থনীতির জন্য পরিসংখ্যান, দি এনজেল পাবলিকেশন্স, ঢাকা।
6. ড. নুর ইসলাম, আবুল খায়ের (২০২৪), দি ইউনাইটেড পাবলিশার্স, ঢাকা।
7. এম.এ.কালাম, প্রবীর রায় (২০২৩), কমার্স পাবলিকেশন্স, ঢাকা।