ইউনিট ২

বিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা বিন্যাস
Discrete Probability Distribution

ভূমিকা

সম্ভাবনা বিন্যাস বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের প্রেক্ষিতে ব্যাখ্যা করা হয়। কোন বিচ্ছিন্ন চলক x এর বিভিন্ন মানের প্রেক্ষিতে যখন বিভিন্ন সম্ভাবনা পাওয়া যায় তখন তাকে সম্ভাবনা বিন্যাস বলে। আবার x অবিচ্ছিন্ন চলক হলে এর মান নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে অবস্থান করলে প্রাপ্ত সম্ভাবনাকেও সম্ভাবনা বিন্যাস বলা যায়। বিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা বিন্যাস সম্ভাবনা অপেক্ষকের সাথে সম্পর্কিত থাকে। অন্যদিকে অবিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা বিন্যাস সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকের সাথে সম্পর্কিত থাকে। দ্বিপদী বিন্যাস ও পৈঁসু বিন্যাস হল বিচ্ছিন্ন চলকের বিন্যাস। এই ইউনিটে এই সম্ভাবনা বিন্যাস সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ০২ সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ২.১	ঃ	দৈব চলক ও সম্ভাবনা বিন্যাস
পাঠ ২.২	ঃ	দ্বিপদী বিন্যাস
পাঠ ২.৩	ঃ	দ্বিপদী বিন্যাসের কতিপয় উপপাদ্য, সমস্যা ও সমাধান
পাঠ ২.৪	ঃ	পৈসুঁ বিন্যাস
পাঠ ২.৫	ঃ	পৈসুঁ বিন্যাসের কতিপয় উপপাদ্য, সমস্যা ও সমাধান

পাঠ ২.১ দৈব চলক ও সম্ভাবনা বিন্যাস
Random Variable and Probability Distribution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- দৈব চলক সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- সম্ভাবনা বিন্যাস সম্পর্কে লিখতে পারবেন।

দৈব চলক
Random Variable

দৈব চলক হল সম্ভাবনা অপেক্ষকে ব্যবহৃত একটি বিশেষ ধরনের চলক। এই চলকের মানসমূহের একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা থাকে। কাজেই বলা যায়, সম্ভাবনা অপেক্ষকে ব্যবহৃত নির্দিষ্ট সম্ভাবনাযুক্ত সংখ্যাবাচক চলককেই বলা হয় দৈব চলক (Random variable)। সাধারণতঃ দৈব চলককে x দ্বারা এবং এর সম্ভাবনাকে $P(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন–

একটি ঝোঁকশূন্য মুদ্রা নিক্ষেপ করে তা থেকে হেড (H) উঠার সম্ভাবনা x দ্বারা প্রকাশ করা হলে x চলকের মানসমূহ হবে–

$x = 1$ (H নমুনা বিন্দুর ক্ষেত্রে)

এবং $x = 0$ (T নমুনা বিন্দুর ক্ষেত্রে)

এক্ষেত্রে x -এর প্রতিটি মানে হেড উঠার সম্ভাবনা $p(x) = \frac{1}{2}$ হবে।

উল্লেখ্য, দৈব চলক দু'ধরনের হয়ে থাকে। (১) বিচ্ছিন্ন চলক (Discrete Random variable) এবং (২) অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক (Continuous Random variable)।

বিচ্ছিন্ন দৈব চলক (Discrete Random variable) **ঃ** যে দৈব চলকের মানসমূহ পরস্পর বিচ্ছিন্ন থাকে সেই দৈব চলককে বিচ্ছিন্ন দৈব চলক বলা হয়। বিচ্ছিন্ন দৈব চলকের একটি নির্দিষ্ট ও পৃথক মান থাকে এবং এই পৃথক মানের বিপরীতে একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা নিরূপন করা যায়। যেমন–

একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষণে Head উঠার সংখ্যাকে x দ্বারা নির্দেশ করা হলে, হেড উঠার সম্ভাবনা $p(x) = \frac{1}{2}$ হবে।

এক্ষেত্রে x হল বিচ্ছিন্ন দৈব চলক।

অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক (Continuous Random variable) **ঃ** যে দৈব চলকের মানসমূহ অবিচ্ছিন্ন থাকে সেই দৈব চলককে অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক বলা হয়। অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের কোন পৃথক মান নির্ণয় করা যায় না বলে এর বিপরীতে কোন নির্দিষ্ট সম্ভাবনাও নির্ণয় করা যায় না।

যেমন –

যদি x একটি দৈব চলক হয়,

এবং x-এর মান $0 \leq x \leq 1$-এর মধ্যে অবস্থান করে,

তাহলে, x-এর কোন স্বতন্ত্র মান নির্ণয় করা যায় না। ফলে, x-এর স্বতন্ত্র সম্ভাবনাও নির্ণয় করা যায় না। এক্ষেত্রে x-কে অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক চলা হয়।

সম্ভাবনা বিন্যাস

Probability Distribution

যদি x একটি বিচ্ছিন্ন চলক হয় এবং x-এর বিভিন্ন মান $x_1, x_2, \ldots \ldots x_n$-এর বিপরীতে সম্ভাবনা যথাক্রমে $P_1, P_2, \ldots \ldots P_n$ হয় এবং $P_1+P_2+\ldots\ldots+P_n = 1$ হয়, তখন তাকে x-এর সম্ভাবনা বিন্যাস (Probability Distribution) বলা হয়। নিম্নের টেবিলে x চলকের সম্ভাবনা বিন্যাস দেখানো হলঃ

x	x_1	x_2	... ...	x_n
P(x)	$P(x_1)$	$P(x_2)$	... ...	$P(x_n)$

তত্ত্বীয় সম্ভাবনা বিন্যাস

Theoratical Probability Distribution

যে কোন চলকের সম্ভাবনা বিন্যাস গাণিতিক সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে তত্ত্বীয় সম্ভাবনা বিন্যাস বলে। দৈব চলকের প্রকৃতি অনুসারে এটি দুই ধরণের যথা:

ক. বিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা বিন্যাস (Discrete Probability Distribution):

বিচ্ছিন্ন দৈব চলকের তত্ত্বীয় সম্ভাবনা বিন্যাসই বিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা বিন্যাস। যেমন: দ্বিপদী বিন্যাস ও পৈঁসু বিন্যাস।

খ. অবিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা বিন্যাস (Continuous Probability Distribution)

অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের তত্ত্বীয় সম্ভাবনা বিন্যাসই অবিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা বিন্যাস। যেমনঃ পরিমিত বিন্যাস ও নমুনায়ন বিন্যাস।

সারসংক্ষেপ

যে দৈব চলকের মানসমূহ পরস্পর অবিচ্ছিন্ন অর্থাৎ কোনো নির্দিষ্ট পরিসরে সকল মান গ্রহণ করে তাকে বিচ্ছিন্ন দৈব চলক বলে। বিচ্ছিন্ন দৈব চলকের মানসমূহ একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা থাকে বিধায় নির্দিষ্ট মানের নির্দিষ্ট সম্ভাবনা নিরূপণ করা যায়। আবার কোনো বিচ্ছিন্ন দৈব চলকের প্রতিটি মান এবং তাদের সম্ভাবনাকে বিন্যাসের মাধ্যমে যে সারণীতে উপস্থাপন করা হয় তাকে সম্ভাবনা বিন্যাস বলে। অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের মানসমূহ একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনা থাকে না বিধায় নির্দিষ্ট মানের নির্দিষ্ট সম্ভাবনা নিরূপণ করা যায় না।

পাঠ ২.২ দ্বিপদী বিন্যাস
Binomial Distribution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিপদী বিন্যাসের সংজ্ঞা, ধর্ম ও ব্যবহার সম্পর্কে লিখতে পারবেন;
- দ্বিপদী বিন্যাসের গড় নির্ণয় করতে পারবেন;
- দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক নির্ণয় করতে পারবেন।

দ্বিপদী বিন্যাস (Binomial Distribution)

সুইডিস গণিতবিদ Jacob Bernoulli দ্বিপদী বিন্যাস উদ্ভাবন করেন। তার মৃত্যুর পর ১৭১৩ সালে তার লেখা প্রবন্ধ Arc. Conjectandi তে তা প্রকাশিত হয়। কোন পরীক্ষায় দু'ধরণের ফলাফল থাকে। যথা– সফলতা ও বিফলতা। ট্রায়ালের সংখ্যা ৩০ এর কম হলে, কোন সফলতার নির্দিষ্ট সংখ্যক মানের সম্ভাবনা সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করে যে বিন্যাস পাওয়া যায় তাকে দ্বিপদী বিন্যাস বলে।

যদি কোন ট্রায়ালে একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা p এবং ঐ ঘটনাটি না ঘটার সম্ভাবনা q হয় তাহলে n সংখ্যক ট্রায়ালের মধ্যে ঐ ঘটনাটি x বার ঘটার সম্ভাবনা, $P(x) = {}^{n}c_{x}\ p^{x}q^{n-x}$; $[x = 0, 1, 2, ... n]$

x = একটি বিচ্ছিন্ন দৈব চলক যা সফলতার সংখ্যা নির্দেশ করে,
P(x) = x-এর সম্ভাবনা অপেক্ষক
n = ট্রায়ালের সংখ্যা p = সফলতার সম্ভাবনা q = বিফলতার সম্ভাবনা

দ্বিপদী বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য বা শর্তসমূহ (Properties or Conditions of Binomial Distribution)

১. দ্বিপদী বিন্যাস একটি বিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা বিন্যাস
২. বিন্যাসটির চলকের মান হচ্ছে 0. 1, 2, ..., n।
৩. বিন্যাস টির ট্রায়ালের সংখ্যা নির্দিষ্ট।
৪. বিন্যাস টির ট্রায়ালগুলো পরস্পর স্বাধীন।
৫. প্রতিবার চেষ্টায় সফলতার সম্ভাবনা (p) ও বিফলতার সম্ভাবনা (q) অপরিবর্তিত থাকবে।
৬. দ্বিপদী বিন্যাসের সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল এক। অর্থাৎ সফলতা ও বিফলতার সম্ভাবনার সমষ্টি এক হবে $(p + q = 1)$।
৭. দ্বিপদী বিন্যাসের দুইটি পরামিতি যথাক্রমে n ও p (অথবা q)
৮. বিন্যাস টির গড় $(\mu) = np$
৯. বিন্যাসটির ভেদাংক $(\sigma^2) = npq$ ও পরিমিত ব্যবধান $(\sigma) = \sqrt{npq}$
১০. দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ভেদাংক অপেক্ষা বড়।
১১. বিন্যাসটির বংকিমতাংক $(\beta_1) = \frac{(q-p)2}{npq}$

যদি p = q হয়, তবে বিন্যাসটি সুষম বংকিম
যদি p < q হয়, তবে বিন্যাস টি ধনাত্বক বংকিম,
যদি p > q হয়, তবে বিন্যাসটি ঋণাত্বক বংকিম হবে।

১২. বিন্যাসটির সূচালতা $(\beta_2) = 3 + \frac{1\text{-}6pq}{npq}$

যদি $\beta_2 = 3$ হয়, তবে বিন্যাসটি সুষম সূচাল,
যদি $\beta_2 > 3$ হয়, তবে বিন্যাসটি অতি সূচাল,
যদি $\beta_2 < 3$ হয়, তবে বিন্যাসটি অনতি সূচাল হবে।

১৩. দু'টি স্বাধীন দ্বিপদী চলকের সমষ্টি একটি স্বাধীন দ্বিপদী চলক হবে।

১৪. যদি এই বিন্যাসে চেষ্টার সংখ্যা খুব বড় অর্থাৎ $n \rightarrow \sim$ এবং সফলতার সম্ভাবনা খুব কম অর্থাৎ $p \rightarrow 0$ হয়, তবে দ্বিপদী বিন্যাস পৈঁসো বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়।

১৫. যদি এই বিন্যাসে চেষ্টার সংখ্যা খুব বড় অর্থাৎ $n \rightarrow \infty$ এবং সফলতার সম্ভাবনা ও বিফলতার সম্ভাবনা প্রায় সমান অর্থাৎ $p = q$ হয়, তবে দ্বিপদী বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয় ।

দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার

Uses of Binomial Distribution

ক. কোন পরীক্ষায় ট্রায়ালে দু'টি সম্ভাব্য ফলাফল থাকলে এই বিন্যাস ব্যবহার করা যায়।

খ. বিভিন্ন বিন্যাস (যেমনঃ পৈঁসু ও পরিমিত বিন্যাস) উদ্ভাবনে দ্বিপদী বিন্যাস ব্যবহৃত হয়।

গ. ছোট নমুনার ক্ষেত্রে অনুপাত যাচাই করতে এই বিন্যাস ব্যবহৃত হয়।

ঘ. পর্যবেক্ষিত গণসংখ্যা বিন্যাস মিলকরণে এই বিন্যাস ব্যবহৃত হয়।

ঙ. সম্ভাবনা তত্ত্ব ভিত্তিক সমস্যা সমাধানে এই বিন্যাস ব্যবহার করা হয়।

দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ও ভেদাংক নির্ণয়

Determination of Mean and Variance of Binomial Distribution

দ্বিপদী বিন্যাসের গড় নির্ণয়:

মনে করি, x একটি দ্বিপদী চলক যার পরামিতি p ও q

$\therefore$ সম্ভাবনা অপেক্ষক, $P(x) = {}^{n}c_{x}\ p^{x}q^{n-x};\qquad [x = 0, 1, 2, ... n]$

চলকটির গড় $E(x)$ হলে $E(x)$ বা μ

$$= \sum_{x=0}^{n} x.p(x)$$

$$= 0.P(0) + 1.P(1) + 2.P(2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n.P(n)$$

$$= 0 + 1.n_{c_1}\, p^1q^{n-1} + 2.n_{c_2}\, p^2q^{n-2} + \ldots\ \ldots + n.n_{c_n}\, p^nq^{n-n}$$

$$= 0 + npq^{n-1} + 2.\frac{n(n-1)}{2\times1}\ p^2q^{n-2} + \ldots\ \ldots + n.1.p^n.1 \qquad [\because q^0 = 1]$$

$$= npq^{n-1} + n(n-1)\,p^2q^{n-2} + \ldots\ \ldots + n.p^n$$

$$= np\,[q^{n-1} + (n-1)\,pq^{n-2} + \ldots\ \ldots + p^{n-1}]$$

$$= np\,[q^{n-1} + (n-1)_{c_1}\, q^{(n-1)-1}\, p + \ldots\ \ldots + p^{n-1}]$$

$= np\,(q+p)^{n-1}$ [যেহেতু $q^{n-1} + (n-1)_{c_1}\, q^{(n-1)-1}\, p + \ldots\ \ldots + p^{n-1} = (q+p)^{n-1}$]

$= np\,(1)^{n-1}$ [যেহেতু $q + p = 1$]

$= np$

= ট্রায়ালের সংখ্যা $\times$ সফলতার সম্ভাবনা

$\therefore$ দ্বিপদী বিন্যাসের গড় বা প্রত্যাশিত মান = ট্রায়ালের সংখ্যা $\times$ সফলতার সম্ভাবনা

দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক নির্ণয়ঃ

ভেদাংক V(x) বা σ^2 $= E(x^2) - \{E(x)\}^2$

$= E\{x(x-1) + x\} - (np)^2$ [যেহেতু গড় E(x) = np]

$= E\{x(x-1)\} + E(x) - n^2p^2$

$= E\{x(x-1)\} + np - n^2p^2$

এখন E{x (x-1)}

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\, p(x)$$

$$= 0(0-1)P(0) + 1(1-1)P(1) + 2(2-1)P(2) + 3(3-1)P(3) + \text{--------------} + n(n-1)P(n)$$

$$= 0+0+2.1\, n_{c_2}\, p^2q^{n-2} + 3.2\, n_{c_3}\, p^3q^{n-3} + \ldots\ldots + n(n-1).\, n_{c_n}\, p^nq^{n-n}$$

$$= 2.1.\frac{n(n-1)}{2\times1}\, p^2q^{n-2} + 3.2\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}\, p^3q^{n-3} + \ldots\ldots + n(n-1).1.p^n.1 \quad [\because q^0 = 1]$$

$$= n(n-1)p^2q^{n-2} + n(n-1)(n-2)p^3q^{n-3} + \ldots\ldots + n(n-1)p^n$$

$$= n(n-1)p^2[q^{n-2} + (n-2)p\, q^{n-3} + \ldots\ldots + p^{n-2}]$$

$$= n(n-1)p^2[q^{n-2} + (n-2)_{c_1}\, q^{(n-2)-1}\, p + \ldots\ldots + p^{n-2}]$$

$= n(n-1)p^2(q+p)^{n-2}$ [যেহেতু $q^{n-2} + (n-2)_{c_1}\, q^{(n-2)-1}\, p + \ldots\ldots + p^{n-2} = (q+p)^{n-2}$]

$= n(n-1)p^2(1)^{n-2}$ [যেহেতু p + q = 1]

$$= n(n-1)p^2.1$$

$$= (n^2-n)p^2$$

$$= n^2p^2 - np^2$$

$\therefore V(x) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$

$= np(1-p)$

$= npq$ = ট্রায়ালের সংখ্যা × সফলতার সম্ভাবনা × বিফলতার সম্ভাবনা

∴ দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক = ট্রায়ালের সংখ্যা × সফলতার সম্ভাবনা × বিফলতার সম্ভাবনা

সারসংক্ষেপ

সুইডিস গণিতবিদ Jacob Bernoulli দ্বিপদী বিন্যাস উদ্ভাবন করেন। ১৭১৩ সালে তার লেখা প্রবন্ধতে Arc. Conjectandi তে দ্বিপদী বিন্যাস প্রকাশিত হয়। কোন পরীক্ষায় দু'ধরণের ফলাফল থাকে। যথা– সফলতা ও বিফলতা। ট্রায়ালের সংখ্যা ৩০ এর কম হলে, কোন সফলতার নির্দিষ্ট সংখ্যক মানের সম্ভাবনা সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করে যে বিন্যাস পাওয়া যায় তাকে দ্বিপদী বিন্যাস বলে।

পাঠ ২.৩ দ্বিপদী বিন্যাসের কতিপয় উপপাদ্য, সমস্যা ও সমাধান
Theorem, Problems and Solutions of Binomial Distribution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিপদী বিন্যাস সম্পর্কিত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন;
- দ্বিপদী বিন্যাস সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

দ্বিপদী বিন্যাসের কতিপয় উপপাদ্য
Some Theorems of Binomial Distribution

প্রমাণ করুন যে, দ্বিপদী বিন্যাসের সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল এক (১)।

অর্থাৎ $\sum_{x=0}^{n} {}^{n}c_{x}\ p^{x}q^{n-x} = 1$

প্রমাণঃ মনে করি, x একটি দ্বিপদী চলক যার পরামিতি n ও p

$\therefore$ সম্ভাবনা অপেক্ষক, $P(x) = {}^{n}c_{x}\ p^{x}q^{n-x}$; [x = 0, 1, 2, ... , n এবং p+ q = 1]

এখন, সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল = $\sum_{x=0}^{n} P(x)$

$= P(0)+ P(1)+P(2)+ P(3)+\text{----------}+ n$

$= n_{c_0}\ p^{0}q^{n-0} + n_{c_1}\ p^{1}q^{n-1} + n_{c_2}\ p^{2}q^{n-2} + \dots \dots + n_{c_n}\ p^{n}q^{n-n}$

$= 1.1.q^{n} + n_{c_1}\ p^{1}q^{n-1} + n_{c_2}\ p^{2}q^{n-2} + \dots \dots + 1.\ p^{n}.1$ $[\because q^{0} = 1]$

$= q^{n} + n_{c_1}\ q^{n-1}p + n_{c_2}\ q^{n-2}p^{2} + \dots \dots + p^{n}$

$= (q+p)^{n}$ $[\because q^{n} + n_{c_1}\ q^{n-1}p + n_{c_2}\ q^{n-2}p^{2} + \dots \dots + p^{n} = (q+p)^{n}]$

$= (1)^{n}$ $[\because q + p = 1]$

$= 1$

অর্থাৎ, দ্বিপদী বিন্যাসের সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল এক। (প্রমাণিত)

প্রমান করুন যে, দ্বিপদী বিন্যাসের গড়, ভেদাংক অপেক্ষা বড়। অর্থাৎ $np > npq$

প্রমাণঃ মনে করি, x একটি দ্বিপদী চলক যার পরামিতি n ও p এবং $p+ q = 1$

আমরা জানি দ্বিপদী বিন্যাসের গড় $E(x) = np$……… (i)

এবং ভেদাংক $V(x) = npq$

$V(x) = np\ (1-p)$ [যেহেতু $q=1- p$]

$V(x) = np - np^{2}$

$V(x) = E(x) - np^{2}$ [(i) নং সমীকরণ হতে পাই]

বা, $E(x) = V(x)+ np^{2}$

কিন্তু দ্বিপদী বিন্যাসের ক্ষেত্রে, $n \geq 1$এবং $p> 0$ বলে $np^{2}> 0$

$E(x) = V(x)+$ ধনাত্বক সংখ্যা

$\therefore E(x) > V(x)$

অর্থাৎ দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ভেদাংক অপেক্ষা বড়। (প্রমাণিত)

দ্বিপদী বিন্যাসের সমস্যাবলী ও সমাধানসমূহ
Problems and Solutions of Binomial Distribution

উদাহরণ: কোন উৎপাদন প্রতিষ্ঠান হতে দৈবচয়ন ভিত্তিতে ১০টি দ্রব্য নির্বাচন করা হল। যদি ২০% দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হয় তাহলে–

ক. ঠিক ৩টি দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত?
খ. ৩টির কম দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত?
গ. ৩টি বা তার কম দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ঘ. ৩টির অধিক দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত?
ঙ. ৩টি বা তার বেশী দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: দেয়া আছে-

ট্রায়ালের সংখ্যা $(n) = 10$, ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্যের সম্ভাবনা $= 20\% = 0.20$ $\therefore$ ত্রুটিহীন দ্রব্যের সম্ভাবনা $= 1\text{-}0.20=0.80$
এখানে, সফলতা $(p) = 0.20$ বিফলতা $(q) = 0.80$

ক. ঠিক 3টি দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা $p(x=3)= 10_{c_3}\ (0.20)^3\ (0.80)^{10-3} = 0.2013$

খ. 3টির কম দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা $p(x < 3)$
$= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x=2)$
$= 10_{c0}\,(0.20)^0\,(0.80)^{10-0} + 10_{c1}\,(0.20)^1\,(0.80)^{10-1} + 10_{c2}\,(0.20)^2\,(0.80)^{10-2}$
$= 0.1074 + 0.2684 + 0.3020$
$= 0.6778$

গ. 3টি বা তার কম দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা $p(x \leq 3)$
$= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$
$= 10_{c0}\,(0.20)^0\,(0.80)^{10-0} + 10_{c1}\,(0.20)^1\,(0.80)^{10-1} + 10_{c2}\,(0.20)^2\,(0.80)^{10-2} + 10_{c_3}\ (0.20)^3\,(0.80)^{10-3}$
$= 0.1074 + 0.2684 + 0.3020+0.2013$
$= 0.8791$

ঘ. 3টির অধিক ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা $p(x > 3)$
$=1-P\ ((x \leq 3)$
$=1-[P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)]$
$=1-[10_{c0}\,(0.20)^0\,(0.80)^{10-0} + 10_{c1}\,(0.20)^1\,(0.80)^{10-1} + 10_{c2}\,(0.20)^2\,(0.80)^{10-2} + 10_{c_3}\ (0.20)^3\,(0.80)^{10-3}]$
$=1- [0.1074 + 0.2684 + 0.3020+0.2013]$
$=1 - 0.8791$
$=0.1209$

ঙ. 3টি বা তার বেশী ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা $p(x \geq 3)$
$=1-P\ ((x < 3)$
$=1-[P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)]$
$=1-[10_{c0}\,(0.20)^0\,(0.80)^{10-0} + 10_{c1}\,(0.20)^1\,(0.80)^{10-1} + 10_{c2}\,(0.20)^2\,(0.80)^{10-2]}$
$=1- [0.1074 + 0.2684 + 0.3020]$
$=1 - 0.6778$
$=0.3222$

সারসংক্ষেপ

- দ্বিপদী বিন্যাসের গড় ভেদাংক অপেক্ষা বড়।

পাঠ ২.৪ পৈসুঁ বিন্যাস
Poisson Distribution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পৈসুঁ বিন্যাসের সংজ্ঞা, ধর্ম ও ব্যবহার সম্পর্কে লিখতে পারবেন;
- পৈসুঁ বিন্যাসের গড় নির্ণয় করতে পারবেন;
- পৈসুঁ বিন্যাসের ভেদাংক নির্ণয় করতে পারবেন।

পৈঁসু বিন্যাস
Poisson Distribution

ফরাসী গণিতবিদ Simon Danis Poisson অষ্টাদশ শতাব্দীতে (১৮৩৭ খ্রীষ্টাব্দে) এই বিন্যাস আবিষ্কার করেন। তাঁর নামানুসারে এই বিন্যাসের নামকরণ করা হয় পৈঁসু বিন্যাস। যখন ট্রায়ালের সংখ্যা খুব বড় ($n \geq 50$), সফলতার সম্ভাবনা খুব ছোট ($p \leq 0.10$) এবং $np \leq 5$ হয় তখন দ্বিপদী বিন্যাস পৈঁসু বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়।

কোন একটি বিচ্ছিন্ন দৈব চলক, x এর সম্ভাবনা অপেক্ষক, $p(x) = \dfrac{e^{-m} m^{x}}{x!}$ কে পৈঁসু বিন্যাস এর সম্ভাবনা অপেক্ষক বলে।

উক্ত অপেক্ষকের সাহায্যে নির্ণীত বিন্যাসকে পৈঁসু বিন্যাস বলে।

এখানে, x = বিচ্ছিন্ন দৈব চলক

$p(x)$ = x এর সম্ভাবনা অপেক্ষক

m = পৈঁসু বিন্যাসের গড় বা ভেদাংক

পৈঁসু বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য সমূহঃ
Properties of Poisson Distribution

১. পৈঁস বিন্যাস একটি বিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা বিন্যাস।

২. বিন্যাসটির চলকের মান হচ্ছে $0, 1, 2, \ldots \ldots, \infty$।

৩. পৈঁসু বিন্যাসের সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল এক।

৪. বিন্যাসটির পরিমিতি m।

৫. বিন্যাসটির গড় পরিমিতির সমান অর্থাৎ m (পরিমিতি)।

৬. বিন্যাসটির ভেদাংক পরিমিতির সমান অর্থাৎ m (পরিমিতি)।

৭. বিন্যাসটির পরিমিত ব্যবধান $(\sigma) = \sqrt{m}$ ।

৮. বিন্যাসটির বংকিমতা $(\beta_1) = \dfrac{1}{m}$ ।

৯. বিন্যাসটির সূচালতা $(\beta_2) = 3 + \dfrac{1}{m}$ ।

১০. দুইটি স্বাধীন পৈঁসু চলকের যোগফল একটি স্বাধীন পৈঁসু চলক হবে।

১১. যদি ট্রায়ালের সংখ্যা খুব বড় ($n \geq 50$), সফলতার সম্ভাবনা খুব ছোট ($p \leq 0.10$) এবং $np \leq 5$ হয় তাহলে দ্বিপদী বিন্যাস পৈঁসু বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়। এক্ষেত্রে $np = m$ হবে।

পৈঁসু বিন্যাসের ব্যবহার

Uses of Poisson Distribution

যে সকল বাস্তব ঘটনা পৈঁসু বিধি মেনে চলে বা পৈঁসু চলকের আওতাভুক্ত সে সকল চলকের সম্ভাবনা নির্ণয়ে পেঁসো বিন্যাস ব্যবহার করা হয়।

নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেয়া হল:

ক. কোন পুস্তকে প্রতি পৃষ্ঠায় ভুলের সংখ্যার সম্ভাবনা নির্ণয়।

খ. কোন বিমানবন্দরে প্রতিদিন লাগেজ চেক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয়।

গ. ব্যস্ত সময়ে টেলিফোন বক্সে প্রতি মিনিটে টেলিফোন কলের সম্ভাবনা নির্ণয়।

ঘ. কোন শহরে প্রতি বছর দূর্ঘটনায় মৃত্যুবরনকারীর সম্ভাবনা নির্ণয়।

পৈঁসু বিন্যাসের গড় ও ভেদাংক নির্ণয়

Determination of Mean and Variance of Poisson Distribution

মনে করি, x একটি পৈঁসু চলক যার পরামিতি m

$\therefore$ সম্ভাবনা অপেক্ষক, $P(x) = \frac{e^{-m}m^x}{x!}$ $\qquad x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, \infty$

চলকটির গড় E(x) হলে E(x) বা μ

$= \sum_{x=0}^{\infty} x.\, p(x)$

$= 0.P(0) + 1.P(1) + 2.P(2) + 3.P(3) + \text{---------} + \infty$

$= 0.\frac{e^{-m}m^0}{0!} + 1\frac{e^{-m}m^1}{1!} + 2\frac{e^{-m}m^2}{2!} + 3\frac{e^{-m}m^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$

$= e^{-m}\left(0.\frac{m^0}{0!} + 1.\frac{m^1}{1!} + 2.\frac{m^2}{2!} + 3.\frac{m^3}{3!}\ldots\ldots\ldots + \infty\right)$

$= e^{-m}\left(0 + m + m^2 + m^3 \ldots\ldots\ldots + \infty\right)$

$= e^{-m}\, m\left(1 + m + m^2 + \ldots\ldots\ldots + \infty\right)$

$= e^{-m}\, m\, e^m$ $\qquad [\because 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\infty = e^m]$

$= m\, e^{-m+m}$

$= m\, e^0$

$= m\, 1$ $\qquad [\because e^0 = 1]$

$= m$

$\therefore$ পৈঁসু বিন্যাসের গড় E(x) বা $\mu = m$

পৈঁসু বিন্যাসের ভেদাংক V(x) বা σ^2

$= E(x^2) - \{E(x)\}^2$

$= E\{x(x-1) + x\} - m^2$

$= E\{x(x-1)\} + E(x) - m^2$

$= E\{x(x-1)\} + m - m^2$ [যেহেতু গড়, E(x) = m]

এখন E{x(x-1)}

$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\, P(x)$

$= 0(0-1)\, P(0) + 1(1-1)\, P(1) + 2(2-1)\, P(2) + 3(3-1)\, P(3) + 4(4-1)\, P(4)$ --------------+ ∞

$= 0+0 + 2\times1\, \frac{e^{-m}m^2}{2!} + 3\times2\, \frac{e^{-m}m^3}{3!} + 4\times3\times2\, \frac{e^{-m}m^4}{4!}$ -----------------------+∞

$= 2\times1\, \frac{e^{-m}m^2}{2\times1} + 3\times2\, \frac{e^{-m}m^3}{3\times2\times1!} + 4\times3\, \frac{e^{-m}m^4}{4\times3\times2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. +\infty$

$= e^{-m}m^2 + \frac{e^{-m}m^3}{1!} + \frac{e^{-m}m^4}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +\infty$

$= e^{-m}m^2 \left(1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +\infty\right)$

$= e^{-m}m^2\, e^m \qquad \left[\because 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty = e^m\right]$

$= m^2\, e^{-m+m}$

$= m^2\, e^0$

$= m^2\, 1\ [\because e^0 = 1]$

$= m^2$

∴ পৈঁসু বিন্যাসের ভেদাংক V(x) বা σ^2

$= m^2 + m - m^2$

$= m$

দ্বিপদী বিন্যাস পৈঁসু বিন্যাসে রূপান্তর

The Poisson Approximation to the Binomial Distribution

যদি ট্রায়ালের সংখ্যা খুব বড় $(n \geq 50)$, সফলতার সম্ভাবনা খুব ছোট $(p \leq 0.10)$ এবং $np \leq 5$ হয় তাহলে দ্বিপদী বিন্যাস পৈঁসু বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়।

যেমন : $n = 100,\ p = 0.04$ হলে $np = 100\times0.04 = 4$ হবে। এক্ষেত্রে দ্বিপদী বিন্যাস পৈঁসু বিন্যাসে রূপান্তরিত হবে।

সারসংক্ষেপ

ফরাসী গণিতবিদ Simon Danis Poisson অষ্টাদশ শতাব্দীতে (১৮৩৭ খ্রীষ্টাব্দে) এই বিন্যাস আবিষ্কার করেন। তাঁর নামানুসারে এই বিন্যাসের নামকরণ করা হয় পৈঁসু বিন্যাস। যখন ট্রায়ালের সংখ্যা খুব বড় $(n \geq 50)$, সফলতার সম্ভাবনা খুব ছোট $(p \leq 0.10)$ এবং $np \leq 5$ হয় তখন দ্বিপদী বিন্যাস পৈঁসু বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়।

পাঠ ২.৫ পৈসুঁ বিন্যাসের কতিপয় উপপাদ্য, সমস্যা ও সমাধান
Theorem, Problems and Solutions of Poisson Distribution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পৈসুঁ বিন্যাস সম্পর্কিত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন;
- পৈসুঁ বিন্যাস সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

পৈঁসু বিন্যাসের কতিপয় উপপাদ্য

Some Theorems of Poisson Distribution

প্রমাণ করুন যে, পৈঁসু বিন্যাসের সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল এক (১)।

অর্থাৎ $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m} m^x}{x!} = 1$

প্রমাণঃ মনে করি, x একটি পৈঁসু চলক যার পরামিতি m

$\therefore$ সম্ভাবনা অপেক্ষক, $P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$ $\qquad x = 0, 1, 2, \ldots \ldots \ldots, \infty$

এখন, সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল $= \sum_{x=0}^{\infty} P(x)$

$$= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + \text{---------} + \infty$$

$$= \frac{e^{-m} m^0}{0!} + \frac{e^{-m} m^1}{1!} + \frac{e^{-m} m^2}{2!} + \frac{e^{-m} m^3}{3!} \text{ --------} + \infty$$

$$= e^{-m} \left(\frac{m^0}{0!} + \frac{m^1}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \infty \right)$$

$$= e^{-m} \left(1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \infty \right)$$

$$= e^{-m} e^{m} \left[\because 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \infty = e^m\right]$$

$$= e^{-m+m}$$

$$= e^0$$

$$= 1 \; [\because e^0 = 1]$$

অর্থাৎ, পৈঁসু বিন্যাসের সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল এক। (প্রমাণিত)

পৈঁসু বিন্যাসের সমস্যাবলী ও সমাধানসমূহ
Problems and Solutions of Poisson Distribution

উদাহরণ-ঃ কোন এলাকায় প্রতি ঘন্টায় পার্ক করা গাড়ীর সংখ্যা ৩টি। যা পৈঁসু বিধি মেনে চলে।

ক. ঐ সময়ে একটি গাড়ী পার্ক করার সম্ভাবনা কত?

খ. ঐ সময়ে দুইটির কম গাড়ী পার্ক করার সম্ভাবনা কত?

গ. ঐ সময়ে কমপক্ষে দুইটি গাড়ী পার্ক করার সম্ভাবনা কত?

সমাধানঃ দেয়া আছে, প্রতি ঘন্টায় পার্ক করা গাড়ীর সংখ্যা = ৩টি

এখানে, পৈঁসু বিন্যাসের পরিমিতি, m=3

ক. ঐ সময়ে একটি গাড়ী পার্ক করার সম্ভাবনা,

$$P(x = 1) = \frac{e^{-3}3^{1}}{1!}$$
$$= 0.1494$$

খ. ঐ সময়ে দুইটির কম গাড়ী পার্ক করার সম্ভাবনা,

$$P(x < 2) = p(x=0) + p(x=1)$$
$$= \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!}$$
$$= 0.0498+01494$$
$$= 0.1992$$

গ. ঐ সময়ে দুইটির কম গাড়ী পার্ক করার সম্ভাবনা,

$$P(x \geq 2) = 1- p(x<2)$$
$$= 1 - [p(x = 0) + (x = 1)]$$
$$= 1- [\frac{e^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!}]$$
$$= 1- [0.0498+01494]$$
$$= 1 - 0.1992$$
$$= 0.8008$$

সারসংক্ষেপ

- পৈঁসু বিন্যাসের সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল এক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন

রচনামূলক প্রশ্ন

১. দ্বিপনী বিন্যাস কাকে বলে? এর বৈশিষ্ট্য সমূহ লিখুন।
২. দ্বিপদী বিন্যাসের ব্যবহার লিখুন।
৩. দ্বিপদী বিন্যাসের গড় নির্ণয় করুন।
৪. দ্বিপদী বিন্যাসের ভেদাংক নির্ণয় করুন।
৫. প্রমাণ করুন যে, দ্বিপদী বিন্যাসের সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল এক।
৬. প্রমান করুন যে, দ্বিপদী বিন্যাসের গড়, ভেদাংক অপেক্ষা বড়।
৭. কোন উৎপাদন প্রতিষ্ঠান হতে দৈবচয়ন ভিত্তিতে ১০টি দ্রব্য নির্বাচন করা হল। যদি ২০% দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হয় তাহলে– ক. ঠিক ৩টি দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত? খ. ৩টির কম দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত? গ. ৩টি বা তার কম দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত? ঘ. ৩টির অধিক দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত? ঙ. ৩টি বা তার বেশী দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত?
৮. পৈঁসু বিন্যাসের সংজ্ঞা দিন। এর বৈশিষ্ট্যগুলো লিখুন।
৯. পৈঁসু বিন্যাসের ব্যবহার লিখুন।
১০. পৈঁসু বিন্যাসের গড় নির্ণয় করুন।
১১. পৈঁসু বিন্যাসের ভেদাংক নির্ণয় করুন।
১২. কখন দ্বিপদী বিন্যাস পৈঁসু বিন্যাসে পরিণত হয়?
১৩. প্রমাণ করুন যে, পৈঁসু বিন্যাসের সমস্ত সম্ভাবনার যোগফল এক (১)।
১৪. কোন এলাকায় প্রতি ঘন্টায় পার্ক করা গাড়ীর সংখ্যা ৩টি। যা পৈঁসু বিধি মেনে চলে। ক. ঐ সময়ে একটি গাড়ী পার্ক করার সম্ভাবনা কত? খ. ঐ সময়ে দুইটির কম গাড়ী পার্ক করার সম্ভাবনা কত? গ. ঐ সময়ে কমপক্ষে দুইটি গাড়ী পার্ক করার সম্ভাবনা কত?

রেফারেন্স (References)

1. S.P.Gupta and M.P.Gupta (2023), Business Statistics, S Chand & Sons, New Delhi, India.
2. Richard I. Levin and D. S. Rubin (2023), Business Statistics, Prentice Hall Inc. New Delhi, India.
3. খন্দকার মোঃ সাদেকুর রহমান কাজল (২০২৪), অর্থনীতির জন্য পরিসংখ্যান, সমন্বয় পাবলিকেশন্স, ঢাকা।
4. মোঃ আব্দুল আজিজ(২০২৪), অর্থনীতির জন্য পরিসংখ্যান, দি এনজেল পাবলিকেশন্স, ঢাকা।
5. ড. নুর ইসলাম, আবুল খায়ের (২০২৪), দি ইউনাইটেড পাবলিশার্স, ঢাকা।