ইউনিট ১

সম্ভাবনা
Probability

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে সম্ভাবনা সম্বন্ধীয় বিভিন্ন মন্তব্য ব্যবহার করি। আজ বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা খুব বেশী, ঢাকা গামী পরিবহনে দুর্ঘটনা না ঘটার সম্ভাবনা খুব কম ইত্যাদি, সম্ভাবনা সম্বন্ধীয় ধারণা প্রতিক্ষেত্রে দেখতে পাওয়া যায়। অর্থাৎ কোন ঘটনা ঘটার ব্যাপারে অনিশ্চয়তা থাকলেই সম্ভাবনা কথাটি চলে আসে। যে সব ঘটনা নিশ্চিত ঘটে সে সব ক্ষেত্রে সম্ভাবনার গুরুত্ব মোটেই থাকে না, যেমন- আগামী কাল সূর্য পূর্ব দিকে উঠবে, এটি প্রতিনিয়তই সত্য, ফলে এ ক্ষেত্রে সম্ভাবনার কোন প্রশ্নই আসে না। এ ইউনিটে সম্ভাবনা তত্ত্বের বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ০২ সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১.১	ঃ	সম্ভাবনার সংজ্ঞা, এর কতিপয় ধারণা ও মতবাদ
পাঠ ১.২	ঃ	সম্ভাবনার কতিপয় উপপাদ্য, সমস্যা ও সমাধান
পাঠ ১.৩	ঃ	সম্ভাবনার বিধি ও শর্তাবলী
পাঠ ১.৪	ঃ	বেইজের উপপাদ্য, গৌণিক বিন্যাস ও সমাবেশ
পাঠ ১.৫	ঃ	গাণিতিক প্রত্যাশা

পাঠ ১.১ সম্ভাবনার সংজ্ঞা ও এর মতবাদ
Definition and Theory of Probability

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভাবনার বিভিন্ন প্রকার সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- সম্ভাবনার বিভিন্ন মতবাদ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

সম্ভাবনার সংজ্ঞা
Definition of Probability

কোন ঘটনা ঘটা বা না ঘটা সম্পর্কে নিশ্চিত না হলেই সম্ভাবনা ব্যবহার করা হয়। সাধারণভাবে কোন ঘটনা ঘটবে কি ঘটবে না তার পরিমাপই সম্ভাবনা। কোন দৈব পরীক্ষণের একটি ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা এবং মোট ফলাফল সংখ্যার অনুপাতকে ঐ ঘটনার সম্ভাবনা বলে।

অর্থাৎ সম্ভাবনা $= \dfrac{\text{কোন ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা}}{\text{পরীক্ষণের মোট ফলাফল সংখ্যা}}$

যদি কোন পরীক্ষণের মোট ফলাফল সংখ্যা n এবং কোন ঘটনা A এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা m হয় তাহলে A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা, $P(A) = \dfrac{m}{n}$

উদাহরণ : কোন একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপে মাথা উঠার সম্ভাবনা, $P(H) = \dfrac{1}{2}$

সম্ভাবনা সম্পর্কিত কতিপয় ধারণা
Some Concepts Related to Probability

ক) **পরীক্ষণ (Experiment):**নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে পরিচালিত এমন একটি কাজ, যা পুনরাবৃত্তি ঘটানো যায় তাকে পরীক্ষণ বলে।

খ) **দৈব পরীক্ষণ (Random experiment):**দৈব পরীক্ষণ (Random experiment) এর ক্ষেত্রে সম্ভাব্য ফলাফল সমূহ জানা থাকলেও তাদের মধ্যে কোনটি ঘটবে নিশ্চিতভাবে বলা যায় না।পরীক্ষণের ফলাফল সমূহ দৈব নির্ভর বলে, একে দৈব পরীক্ষণ (Random experiment) ও বলা হয়।যেমন: কোন একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করার কাজই পরীক্ষণ। এক্ষেত্রে সম্ভাব্য ফলাফল সমূহ 1, 2, 3, 4, 5, 6 হলেও কোন ফলাফলটি পাওয়া যাবে তা নিশ্চিত ভাবে বলা যায় না।

গ) **চেষ্টা (Trial):** কোন একটি দৈব পরীক্ষণে প্রয়োজনীয় কার্যক্রম সম্পন্ন করাকে চেষ্টা বা ট্রায়াল বলে। যেমন : একটি মুদ্রা ১০ বার নিক্ষেপ করা হলে, প্রত্যেক নিক্ষেপই এক একটি ট্রায়াল বা চেষ্টা।

ঘ) **নমুনা ক্ষেত্র (Sample Space):**কোন দৈব পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলাফল সমূহের সেটকে নমুনা ক্ষেত্র বলে।নমুনা ক্ষেত্রকে সংক্ষেপে S দ্বারা লিখা হয়।যেমন: একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় সম্ভাব্য ফলাফল সমূহ H ও T। অতএব নমুনা ক্ষেত্র, $S = \{H,T\}$.

ঙ) **নমুনা বিন্দু (Sample point):**নমুনা ক্ষেত্রের প্রত্যেক ফলাফলকে নমুনা বিন্দু (Sample point) বলে। যেমন: একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র $S = \{H, T\}$ এবং এর নমুনা বিন্দুহচ্ছে ২টি। অর্থাৎ $n(S)=2$ [H ও T]

চ) **ঘটনা (Events):** কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সেটকে ঘটনা বলে। অর্থাৎ নমুনা ক্ষেত্রের উপসেটকে ঘটনা বলে। একে সংক্ষেপে ইংরেজী বড় অক্ষর A, B, Cইত্যাদি দ্বারা লিখা হয়। নিম্নে বিভিন্ন প্রকার ঘটনা সম্পর্কে আলোচনা করা হলো:

১. **সরল ঘটনা (Simple Events):**যদি কোন ঘটনা একটি নমুনা বিন্দু নিয়ে গঠিত হয় তাহলে ঐ ঘটনাকে সরল ঘটনা বলে। যেমন: $A= \{H\}$, $B = \{HH\}$, $C = \{1\}$ইত্যাদি।

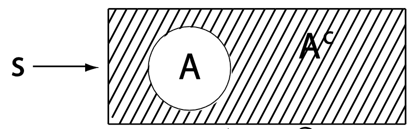
২. **যৌগিক ঘটনা (Compound Events):**যদি কোন ঘটনা একাধিক নমুনা বিন্দু নিয়ে গঠিত হয় তাহলে ঐ ঘটনাকে যৌগিক ঘটনা বলে।যেমন : A = {HH, TT}, B = {2, 4, 6}ইত্যাদি।

৩. **নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event):**কোন পরীক্ষায় একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এক হলে ঘটনাটি নিশ্চিতভাবে ঘটবে, ফলেতাকে নিশ্চিত ঘটনা বলে।

৪. **অনিশ্চিত ঘটনা (Uncertain Event):**কোন পরীক্ষায় একটি ঘটনা ঘটতেও পারে আবার নাও ঘটতে পারে, এরূপ ঘটনাকে অনিশ্চিত ঘটনা বলে।

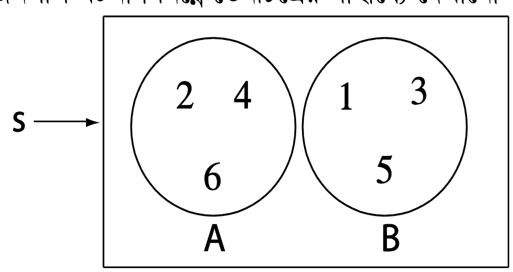
৫. **পূরক বা পরিপূরক ঘটনা (Complementary Events):** কোন নমুনা ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট কোন ঘটনার অনুকূল ফলাফলগুলো বাদ দিয়ে অবশিষ্ট ফলাফলগুলোর সেটকে প্রথমোক্ত ঘটনার পরিপূরক ঘটনা বলে। অর্থাৎ কোন পরীক্ষণের একটি নির্দিষ্ট ঘটনার বিপরীত ঘটনাই পরিপূরক ঘটনা। কোন ঘটনা A এর পরিপূরক ঘটনাকে A^cবা A'বা $\bar{A}$ দ্বারা লিখা হয়।যেমন : কোন ছক্কা একবার নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}এক্ষেত্রে জোড় সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা, A = {2, 4, 6}হলে তার পরিপূরক ঘটনা হবে A^c = S - A = {1, 3, 5}

নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো হলঃ

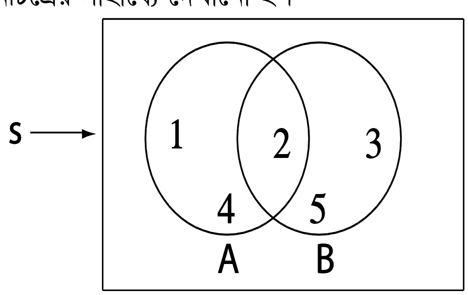


৬. **সম্পূরক ঘটনা (Supplementary Events):** কোন দৈব পরীক্ষণের প্রাপ্ত ফলাফলগুলো পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হলে এবং তাদের সম্মিলিত সেট যদি নমুনা ক্ষেত্রের সমান হয় তাহলে ঐ ঘটনাগুলোকে সম্পূরক ঘটনা বলে। যেমনঃ একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার ফলাফল হচ্ছে H এবং T; যেহেতু তারা পরস্পর বর্জনশীল এবং তাদের সম্মিলিত সেট {H, T} হচ্ছে ঐ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র। অতএব ঘটনাদ্বয়কে সম্পূরক ঘটনা বলে।

৭.**পরস্পর বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন ঘটনা (Mutually Exclusive Events):**কোন দৈব পরীক্ষণে যদি দুই বা ততোধিক ঘটনা এমন হয় যে, তাদের যে কোন দুটি ঘটনা একত্রে ঘটা সম্ভব নয়, তাহলে ঐ ঘটনাগুলোকে পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা বলে। এক্ষেত্রে ঘটনাগুলোর মধ্যে কোন সাধারণ বিন্দু থাকে না। যেমনঃA = {2, 4, 6} এবং B = {1, 3, 5}ঘটনাদ্বয় পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা। নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল–



৮. **পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা বা অবিচ্ছিন্ন ঘটনা (Non Mutually Exclusive Events):** কোন দৈব পরীক্ষণে যদি দুইটি ঘটনা এমন হয় যে, তাদের একত্রে ঘটা সম্ভব তাহলে ঘটনা দু'টিকে পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা বলেঃ এক্ষেত্রে ঘটনাদ্বয়ের মধ্যে সাধারণ বিন্দু থাকে।যেমন : A = {1, 2, 4} এবং B = {2, 3, 5}ঘটনাদ্বয় পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা। নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল-



৯. **স্বাধীন ঘটনা (Independent Events):**দুটি ঘটনার মধ্যে যে কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা, অন্যটি ঘটা বা না ঘটার উপর নির্ভর না করে তাহলে তাদেরকে স্বাধীন ঘটনা বলে। অন্যভাবে যদি দুটি ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা তাদের পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান হয় তবে তাদেরকে স্বাধীন ঘটনা বলে।

১০. **অধীন ঘটনা (Dependent Events) :**দু'টি ঘটনার মধ্যে যে কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা, অপরটি ঘটা বা না ঘটার উপর নির্ভর করলে তাদেরকে অধীন ঘটনা বলে। অন্যভাবে যদি দুটি ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা তাদের পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান না হয় তবে তাদেরকে অধীন ঘটনা বলে।

১১. **সমসম্ভাব্য ঘটনা (Equally likely Events) :**কোন পরীক্ষণের প্রত্যেকটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা সমান হলে উক্ত ঘটনাগুলোকে সমসম্ভাব্য ঘটনা বলে।যেমনঃ কোন একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় মাথা (H) উঠার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ এবং লেজ (T) উঠার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ । অতএব Hও Tঘটনাদ্বয় সমসম্ভাব্য ঘটনা।

১২. **অসম্ভব ঘটনা (Impossible Event)ঃ** কোন পরীক্ষার ফলাফলে যে ঘটনা কোন দিন ঘটবে না তাকে অসম্ভব ঘটনা বলে।

সম্ভাবনার বিভিন্ন মতবাদ

Theory of Probability:

সম্ভাবনা শব্দটির সুনির্দিষ্ট ব্যাখ্যা আজ পর্যন্ত এখনো পাওয়া যায় নি। বিভিন্ন সময় বিভিন্ন ব্যক্তিবর্গ সম্ভাবনাকে বিভিন্নভাবে সংজ্ঞায়িত করেছেন। এ পর্যন্ত সম্ভাবনার যে ব্যাখ্যা পাওয়া গেছে, সেগুলোকে চারটি শ্রেণিতে ভাগ করা হয়েছে। যথা:

ক. ধ্রুপদী (Classical) বা অবরোহী (Aprior) বা গাণিতিক (Mathematical) সম্ভাবনা,
খ. পরীক্ষালব্ধ (Empirical) বা আরোহী (Posterior) বা পরিসংখ্যানিক (Statistical) বা আপেক্ষিক (Relative) সম্ভাবনা।
গ. ব্যক্তি নির্ভর (Subjective) সম্ভাবনা
ঘ. স্বতঃ সিদ্ধ (Axiomatic) সম্ভাবনা।

ক. ধ্রুপদী বা অবরোহী বা গাণিতিক সম্ভাবনা(Priori Probability)

কোন দৈব পরীক্ষণের একটি ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যাকে ঐ পরীক্ষণের সমসম্ভাব্য, পরস্পর বর্জনশীল ও সম্পূরক ফলাফল সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ ঘটনার ধ্রুপদী সম্ভাবনা বলে।

কোন পরীক্ষণে n সংখ্যক সমসম্ভাব্য, পরস্পর বর্জনশীল ও সম্পূরক ফলাফলের মধ্যে কোন ঘটনা A এর অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা m হলে, A এর সম্ভাবনা হবে-

$$P(A) = \frac{A\text{ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা}}{\text{পরীক্ষণের মোট ফলাফল সংখ্যা}} = \frac{m}{n}$$

খ. পরীক্ষালব্ধ বা আরোহী বা পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা(Posterior Probability)

পূর্ব নির্ধারিত শর্ত ঠিক রেখে কোন পরীক্ষাকে অসংখ্যবার পুনরাবৃত্তি করা হলে কোন ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যার সঙ্গে পরীক্ষার মোট ফলাফল সংখ্যার অনুপাতের সীমায়িত মানকে উক্ত ঘটনার আরোহী সম্ভাবনা বলে। ধরি কোন ঘটনা A এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা m এবং মোট চেষ্টার সংখ্যা n কে অসংখ্যার পূনরাবৃত্তি করা হলে, A এর সম্ভাবনা হবে-

$$P(A) = \underset{n \to \infty}{Lt} \frac{m}{n}$$ এই সংজ্ঞাটি প্রদান করেন জার্মানি গণিতবিদ R. Von Mises

গ. ব্যক্তি নির্ভর সম্ভাবনা (Subjective Probability)

যে সম্ভাবনা কোন ব্যক্তি বিশেষের বিশ্বাস, বিবেচনা ও অভিজ্ঞতার আলোকে নির্ণয় করা হয় তাকে ব্যক্তি নির্ভর সম্ভাবনা বলে।

বিভিন্ন ব্যক্তির দৃষ্টি ভঙ্গির ভিন্নতার কারণে একই ঘটনার সম্ভাবনা ভিন্ন ভিন্ন হয়ে থাকে। যেমন: আজ বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা ক ব্যক্তি 70% মনে করলেও খ ব্যক্তির মতে 20% হতে পারে।

এই সংজ্ঞাটি প্রদান করেনKyness ও Jeffreys প্রমুখ গণিতবিদগণ। তবে সংজ্ঞাটির গাণিতিক ভিত্তি নেই বলে তা বস্তুনিষ্ঠ নয়।

ঘ. স্বতঃ সিদ্ধ সম্ভাবনা (Axiomatic Probability)

এটা সম্ভাবনার সবচেয়ে আধুনিক সংজ্ঞা এবং এর প্রবক্তা হলেন রাশিয়ান গণিতবিদ A. N. Kolmogorov. এক্ষেত্রে সম্ভাবনার বিস্তারিত সংজ্ঞার পরিবর্তে কিছু স্বতঃ সিদ্ধ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। তাই একে স্বতঃ সিদ্ধ সম্ভাবনা বলে। স্বতঃ সিদ্ধসমূহ হলোঃ

ক. কোন ঘটনার সম্ভাবনা শূন্য হতে একের মধ্যে থাকবে। অর্থাৎ $O \le (A) \le 1$

খ. নমুনা ক্ষেত্রের মোট সম্ভাবনা, $P(S) = 1$

গ. যদি A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হয় তবে $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$হবে।

সারসংক্ষেপ

কোন ঘটনা ঘটা বা না ঘটা সম্পর্কে নিশ্চিত না হলেই সম্ভাবনা ব্যবহার করা হয়। সাধারণভাবে কোন ঘটনা ঘটবে কি ঘটবে না তার পরিমাপই সম্ভাবনা। কোন দৈব পরীক্ষণের একটি ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা এবং মোট ফলাফল সংখ্যার অনুপাতকে ঐ ঘটনার সম্ভাবনা বলে। সম্ভাবনার বিভিন্ন ধারণার মধ্যে পরীক্ষণ, দৈব পরীক্ষণ, চেষ্টা, নমুনা ক্ষেত্র, নমুনা বিন্দু, ঘটনা ইত্যাদি বিদ্যমান। এছাড়া সম্ভাবনার বিভিন্ন মতবাদ যেমন অবরোহী সম্ভাবনা, আরোহী সম্ভাবনা, ব্যক্তি নির্ভর সম্ভাবনা, স্বতঃসিদ্ধ সম্ভাবনা ইত্যাদি রয়েছে।

পাঠ ১.২ সম্ভাবনার কতিপয় উপপাদ্য, সমস্যা ও সমাধান
Theorem, Problems and Solutions of Probability

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভাবনা সম্পর্কিত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন;
- সম্ভাবনা সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

সম্ভাবনার কতিপয় উপাপদ্য
Some Theorems of Probability

কোন ঘটনার সম্ভাবনা শূন্য হতে একের মধ্যে থাকবে। অর্থাৎ O≤P(A) ≤1

প্রমাণ : ধরি কোন দৈব পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র S এবং A একটি ঘটনা।

আরো ধরি,

নমুনা ক্ষেত্র, S এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n(S) = n$

ঘটনা A এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(A) = m$

সম্ভাবনার ক্লাসিক্যাল সংজ্ঞানুসারে-

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}$$

যেহেতু m এর মান সর্বনিম্ন 0 এবং সর্বোচ্চ n হতে পারে।

$$\therefore \quad 0 \le m \le n$$

বা, $\frac{o}{n} \le \frac{m}{n} \le \frac{n}{n}$

বা, $0 \le P(A) \le 1$

অর্থাৎ কোন ঘটনার সম্ভাবনা শূন্য হতে একের মধ্যে থাকবে।

সম্ভাবনা সম্পর্কিত সমস্যাবলি এবং সমাধানসমূহ
Problems and Solutions of Probability

উদাহরণ-: একটি মুদ্রা দুইবার বা দুটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে-

ক. নমুনা ক্ষেত্রটি লিখুন। এর মোট ফলাফল সংখ্যা কয়টি?

খ. দুইটি মাথা আসার সম্ভাবনা কত?

গ. কমপক্ষে একটি মাথা আসার সম্ভাবনা কত?

ঘ. বড়জোড় একটি মাথা আসার সম্ভাবনা কত?

ঙ. একটি মাথা আসার সম্ভাবনা কত?

চ. কোন মাথা না আসার সম্ভাবনা কত?

ছ. একটি মাথা ও একটি লেজ আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধানঃ

আমরা জানি, একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র $S = \{H, T\}$ এবং এর নমুনা বিন্দু হচ্ছে ২টি। অর্থাৎ $n(S) = 2$ [H ও T]

ক. একটি মুদ্রা দুইবার বা দুটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে নমুনা ক্ষেত্রটি হবে–

	H	T
H	HH	HT
T	TH	TT

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

এক্ষেত্রে মোট ফলাফল সংখ্যা $= 2^2 = 4$

খ. দুটি মাথা আসার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা একটি। যথাঃ (HH)

$\therefore$ দুটি মাথা আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{4} = 0.25$

গ. কমপক্ষে একটি মাথা আসার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা তিনটি। যথাঃ (HH, HT,TH)

$\therefore$ কমপক্ষে একটি মাথা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{4} = 0.75$

ঘ. বড়জোড় একটি মাথা আসার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা তিনটি। যথাঃ (HT, TH, TT)

$\therefore$ বড়জোড় একটি মাথা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{4} = 0.75$

ঙ. একটি মাথা আসার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা দু'টি। যথাঃ (HT, TH)

$\therefore$ একটি মাথা আসার সম্ভাবনা $= \frac{2}{4} = 0.5$

চ. কোন মাথা না আসার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা একটি। যথাঃ (TT)

$\therefore$ কোন মাথা না আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{4} = 0.25$

ছ. একটি মাথা ও একটি লেজ আসার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা দুটি। যথাঃ (HT, TH)

$\therefore$ একটি মাথা ও একটি লেজ আসার সম্ভাবনা $= \frac{2}{4} = 0.5$

সারসংক্ষেপ

- কোন ঘটনার সম্ভাবনা শূন্য হতে একের মধ্যে থাকবে।

পাঠ ১.৩ সম্ভাবনার বিধি ও শর্তাবলী
Law and condition of Probability

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভাবনার যোগসূত্র লিখতে ও প্রমাণ করতে পারবেন;
- সম্ভাবনার গুণনসূত্র লিখতে ও প্রমাণ করতে পারবেন;
- শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞা বলতে পারবেন।

সম্ভাবনার বিধি ও শর্তাবলী
Law and Condition of Probability

সম্ভাবনা যোগ সূত্র বা সম্ভাবনার সমষ্টি তত্ত্ব

(Additive Law of Probability or Theorem of Total Probability)

কোন দৈব পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট দুই বা ততোধিক সম্ভাবনা জানা থাকলে সম্ভাবনার যোগসূত্র প্রতিষ্ঠা করা যায়। সম্ভাবনার যোগসূত্র দুই ধরণের। যথা:

ক. পরস্পর বর্জনশীল ঘটনাসমূহের যোগসূত্র

খ. পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনাসমূহের যোগসূত্র

ক.পরস্পর বর্জনশীল ঘটনাসমূহের যোগসূত্র: দুটি পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার যে কোনটি ঘটার সম্ভাবনা তাদের প্রত্যেকটি পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান।

অর্থাৎ A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হলে A ও B ঘটার সম্ভাবনা,

$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ হবে।

প্রমাণ : ধরি, দৈব পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র, S এবং A ,B দুটি পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা।

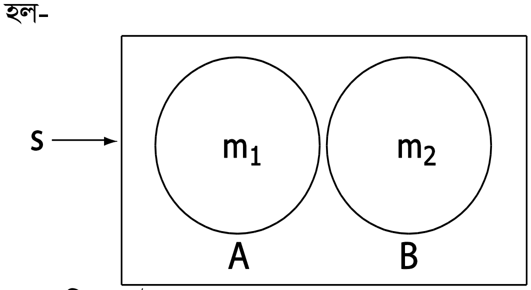
আরো ধরি,

নমুনা ক্ষেত্র, S এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(S) = n$

ঘটনা A এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(A) = m_1$

ঘটনাB এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(B) = m_2$

নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল-



যেহেতু A ও B এর মধ্যে কোন সাধারণ বিন্দু নেই ।সুতরাং $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$ হবে

সম্ভাবনার ক্লাসিক্যাল সংজ্ঞানুসারে- $P(A) = \frac{m_1}{n}$, এবং $P(B) = \frac{m_2}{n}$

A অথবা B ঘটার সম্ভাবনা, $P(A\cup B) = \frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$

$\therefore P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

অনুরূপভাবে k সংখ্যক পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায় যে,

$P(A_1,\cup A_2\cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \ldots + P(A_k)$

খ.পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনাসমূহের যোগসূত্র: দুটি পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনার যে কোনটি ঘটার সম্ভাবনা তাদের প্রত্যেকটি ঘটার সম্ভাবনার যোগফল হতে তাদের একত্রে ঘটার সম্ভাবনার বিয়োগফলের সমান।

অর্থাৎ A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হলে Aঅথবা B ঘটার সম্ভাবনা,

$P(A\cup B) = P(A) + P(B)-P(A\cap B)$হবে।

প্রমাণ : ধরি, কোন দৈব পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র S এবং Aও B দুটি পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা।

আরো ধরি,

নমুনা ক্ষেত্র, S এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(S) = n$

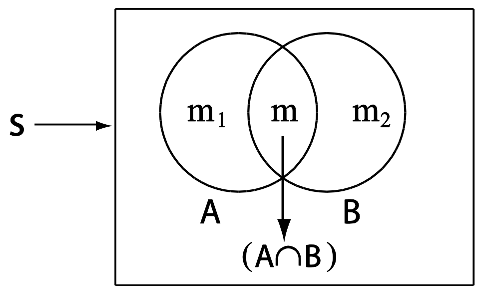
ঘটনা A এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(A) = m_1$

ঘটনাB এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(B) = m_2$

নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল-

ঘটনা A এবং B এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n(A\cap B) = m$

নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো হলঃ



যেহেতুA ও B ঘটনার মধ্যে সাধারণ বিন্দু আছে

$$\therefore n(A\cup B) = \{n(A)-n(A\cap B)\} + \{n(B) - n(A\cap B) + n(A\cap B)$$
$$= (m_1-m) + (m_2-m) + m$$
$$= m_1 + m_2 - m$$

সম্ভাবনার ক্লাসিক্যাল সংজ্ঞানুসারে-

$P(A) = \frac{m_1}{n}$, এবং $P(B) = \frac{m_2}{n}$ এবং $P(A\cap B) = \frac{m}{n}$

এবং $P(A\cup B) = \frac{n(A\cup B)}{n(S)}$

$$= \frac{m_1+m_2-m}{n}$$
$$= \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m}{n}$$
$$= P(A)+ P(B) - P(A\cap B)$$

$\therefore P(A\cup B) = P(A) + P(B)-P(A\cap B)$ হবে।

সম্ভাবনার গুণন সূত্রঃ সম্ভাবনা গুনন সূত্র দু'ক্ষেত্রে সংঘঠিত হয়-

১ গুণন সূত্র [যখন ঘটনা সমূহ স্বাধীন হয়]

২ গুণন সূত্র [যখন ঘটন সমূহ অধীন হয়]

১. **গুনন সূত্র (যখন ঘটনা সমূহ স্বাধীন):** দুইটি ঘটনা স্বাধীন হলে, উহাদের একত্রে ঘটার সম্ভাবনা, উহাদের পৃথক ভাবে ঘটার সম্ভাবনার গুনফলের সমান অর্থাৎ নমুনা ক্ষেত্র S এর অন্তর্গত A ও B দুইটি স্বাধীন ঘটনা হলে,

$P[A\cap B] = P[A] \times P[B]$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, S নমুনা ক্ষেত্রে A ও B দুইটি স্বাধীন ঘটনা যেখানে -

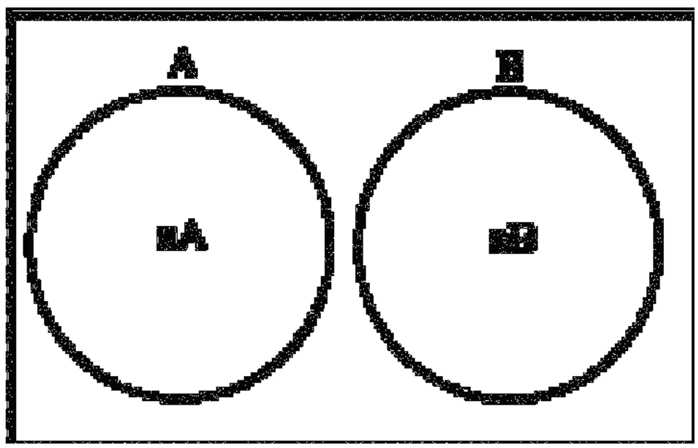
নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা = n(S)

A ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা = n(A), B ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা = n(B)

$A \cap B$ ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা = $n(A \cap B)$

নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল:

S:



সুতরাং $P[A] = \frac{n(A)}{n(s)}$; $P[B] = \frac{n(B)}{n(s)}$ এবং $P[A\cap B] = \frac{n(A\cap B)}{n(s)}$

$$P[A\cap B] = \frac{n(A\cap B)}{n(s)} = \frac{n(A)\times n(B)}{n(s)} = \frac{n(A)}{n(s)} \times \frac{n(B)}{n(s)} = P[A] \times P[B]$$

বা, $P(A\cap B) = P[A] \times P[B]$ প্রমাণিত

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $P(A\cap B\cap C) = P(A)\times P(B)\times P(C)$

২. **গুণন সূত্র (দুইটি অধীন ঘটনার ক্ষেত্রে):** দুইটি অধীন ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাবনা উহাদের একটির শর্তহীন সম্ভাবনা ও অন্যটির শর্তাধীন সম্ভাবনার গুনফলের সমান।

শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability): A ও B কোন নমুনা ক্ষেত্র S এর অন্তর্ভুক্ত দুইটি ঘটনা।

ঘটনা B এর মানের জন্য A এর শর্তাধীন সম্ভাবনাকে $P[\frac{B}{A}]$ দ্বারা প্রকাশ করলে শর্তাধীন সম্ভাবনা-

$$P[A \cap B] = P[A]\, P[\frac{B}{A}];\ P[B] \neq 0$$

আবার, ঘটনাAএর মানের জন্য Bএর শর্তাধীন সম্ভাবনাকে $P[\frac{A}{B}]$দ্বারা প্রকাশ করলে শর্তাধীন সম্ভাবনা-

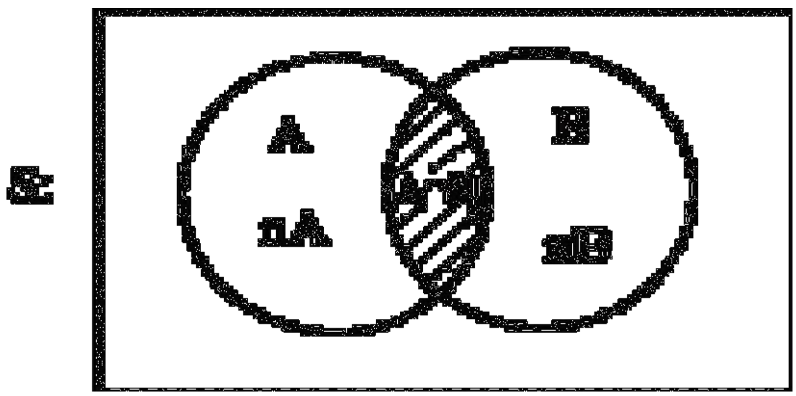
$$P[A \cap B] = P[B]\,P[\frac{A}{B}]; \qquad P[A] \neq 0$$

প্রমাণ : ধরা যাক, S নমুনা ক্ষেত্রে Aও B দুইটি অধীন ঘটনা যেখানে

নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা = n(S)

A ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা = n(A), B ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা = n(B)

$A \cap B$ঘটনার অনুকুল ফলাফল সংখ্যা = $n(A \cap B)$



$$P[A] = \frac{n(A)}{n(s)}\ ;\ P[B] = \frac{n(B)}{n(s)}\ ;\ P[A \cap B] = \frac{n(A \cap B)}{n(s)}$$ এবং $$P[\frac{B}{A}] = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}\ ;\ P[\frac{A}{B}] = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

আমরা জানি, $P[A \cap B] = \frac{n(A \cap B)}{n(s)}$

$= \frac{n(A \cap B)}{n(s)} \times \frac{n(A)}{n(A)}$ [হর ও লবকে n(A) দ্বারা গুণ করে পাই]

$= \frac{n(A)}{n(s)} \times \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = P[A]\,P[\frac{B}{A}]$ [প্রমাণিত]

$P[A \cap B] = \frac{n(A \cap B)}{n(s)}$

$= \frac{n(A \cap B)}{n(s)} \times \frac{n(B)}{n(B)}$ [হর ও লবকে n(B) দ্বারা গুণ করে পাই]

$= \frac{n(B)}{n(s)} \times \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = P[B]\,P[\frac{A}{B}]$ [প্রমাণিত]

সারসংক্ষেপ

দুই বা ততোধিক ঘটনার মধ্যে কোনো সাধারণ নমুনাবিন্দু না থাকলে ঘটনাসমূহকে বর্জনশীল ঘটনা বলে। এছাড়াদুই বা ততোধিক ঘটনার মধ্যে কোনো সাধারণ নমুনাবিন্দু থাকে ঘটনাসমূহকে অবর্জনশীল ঘটনা বলে। কোনো ঘটনা ঘটা বা নাঘটা যদি অন্য কোনো ঘটনার দ্বারা প্রভাবিত হয় না বা নির্ভর করে না, তবে তাদেরকে অনির্ভরশীল বা স্বাধীন ঘটনা বলে এবংকোনো ঘটনা ঘটা বা নাঘটা যদি অন্য কোনো ঘটনার দ্বারা প্রভাবিত হয় বা নির্ভর করে, তবে তাদেরকে নির্ভরশীল বা অধীন ঘটনা বলে।যদি কোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অন্য কোনো ঘটনার ইতিপূর্বে ঘটার বা না ঘটার উপর নির্ভর করে তবে ঐ ঘটনার সম্ভাবনাকে শর্তাধীন সম্ভাবনা বলে।

পাঠ ১.৪ বেইজের উপপাদ্য এবং গৌণিক, বিন্যাস ও সমাবেশ
Bayes Theorem, Factorial, Permutation and Combination

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বেইজের উপপাদ্য লিখতে ও প্রমাণ করতে পারবেন;
- বেইজ সম্পর্কিত কতিপয় সমস্যা সমাধান করতে পারবেন;
- গৌণিক, বিন্যাস ও সমাবেশ সম্পর্কে লিখতে পারবেন।

বেইজের উপপাদ্য
Bayes Theorem

কোন দৈব পরীক্ষণের নমুনাক্ষেত্রের পরস্পর বর্জনশীল ঘটনাগুলোর প্রত্যেকটির ক্ষেত্রে অন্য একটি ঘটনা সংঘটিত হয়। তাহলে উক্ত ঘটনাটি ঘটেছে এই শর্তে পরস্পর বর্জনশীল ঘটনাগুলোর যে কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা টমাস বেইজ যে উপপাদ্যের সাহায্যে প্রকাশ করেন তাকে তাঁর নামানুসারে বেইজের উপপাদ্য বলে।

ধরি, $A_1, A_2, \ldots \ldots A_n$ পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা। B অপর একটি ঘটনা যা $A_1, A_2, \ldots \ldots A_n$ ঘটনাগুলোর যে কোন একটি ঘটনা ঘটার শর্তে সংঘটিত হয়। তাহলে B ঘটনাটি ঘটেছে এই শর্তে কোন ঘটনা A_i এর সম্ভাবনা

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\Sigma P(A_i)P(B/A_i)} \text{ এখানে } i = 1, 2, \ldots \ldots, n$$

$$\therefore P(A_i/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+ \ldots \ldots + P(A_n)P(B/A_n)}$$

এটিই বেইজের উপপাদ্য।

বেইজের উপপাদ্য সম্পর্কিত সমস্যাবলি এবং সমাধানসমূহ
Problems and Solutions Related to Bayes Theorem

উদাহরণ-: একটি কারখানায় B_1, B_2 ও B_3 মেশিন তিনটি যথাক্রমে 45%, 30% এবং 25% বাল্ব উৎপাদন করে। তাদের দ্বারা উৎপাদিত বাল্বের 5%, 2% এবং 1% ত্রুটিপূর্ণ। উক্ত কারখানা হতে একটি বাল্ব দৈবভাবে চয়ন করে দেখা গেল তা ত্রুটিপূর্ণ। উক্ত বাল্বটি B_3 মেশিন দ্বারা উৎপাদিত সম্ভাবনা কত?

সমাধান : ধরি বাল্বটি ত্রুটিপূর্ণ হওয়ার ঘটনা A ।দেওয়া আছে-

$P(B_1) = 45\%=0.45$, $P(B_2) = 30\% = 0.30$ এবং $P(B_3) = 25\% = 0.25$

$P(A/B_1) = 5\% = 0.05$, $P(A/B_2) = 2\% = 0.02$, $P(A/B_3) = 1\% = 0.01$

দৈবভাবে নির্বাচিত বাল্বটি ত্রুটিপূর্ণ যা B_3 মেশিন দ্বারা উৎপাদনের সম্ভাবনা,

$$\begin{aligned} P(B_3/A) &= \frac{P(B_3)P(A/B_3)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+ P(B_3)P(A/B_3)} \\ &= \frac{0.25\times0.01}{0.45\times0.05+0.30\times0.02+ 0.25\times0.01} \\ &= \frac{0.0025}{0.0225+0.0060+ 0.0025} \\ &= \frac{0.0025}{0.031} \\ &= 0.0806 \end{aligned}$$

গৌণিক, বিন্যাস এবং সমাবেশ
Factorial, Permutation and Combination

পরিসংখ্যানের বিভিন্ন সংখ্যাগত পরিমাপ বিশেষতঃ সম্ভাবনার পরিমাণ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে 'গৌণিক' (Factorial), 'বিন্যাস' (Permutation), সমাবেশ (Combination) ধারণাগুলো ব্যবহার করা হয়। নিম্নে এই ধারণাগুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

গৌণিক (Factorial)

ধরি, n যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। এখন, nথেকে ১ পর্যন্ত মানের নিম্নক্রম অনুসারে সাজানো সকল পূর্ণ সংখ্যার গুণফলকে বলা হয় n গৌণিক। সাংকেতিকভাবে লেখা হয় n! (উচ্চারণ- Factorial n)। Factorial n নির্দেশ করতে অনেক সময় $\underline{|n}$ সংকেতটিও ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে–

$$n! = n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.2.1$$

উদাহরণ-ঃ

$$\begin{aligned} 5! &= 5\ (5-1)\ (5-2)\ (5-3)\ (5-4) \\ &= 5\times4\times3\times2\times1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

উল্লেখ্য, Factorial 0-এর মান 1, অর্থাৎ
০ ! = 1। আবার, ঋণাত্মক কোন সংখ্যার ক্ষেত্রেFactorial-এর নিয়মটি প্রযোজ্য নয়।

বিন্যাস (Permutation)

নির্দিষ্ট সংখ্যক কতগুলো বস্তু থেকে কয়েকটি করে একবারে নিয়ে কিংবা সবকটিকে একবারে নিয়ে একটি নির্দিষ্ট ক্রম (order) অনুসারে সাজানোর প্রক্রিয়াকে বলা হয় বিন্যাস (Permutation)। একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক বস্তুকে যত প্রকারে সাজানো সম্ভব সেটিই হল বিন্যাসের সংখ্যা। যেমন– a, b, cএই তিনটি বর্ণের বিন্যাসের সংখ্যা হবে নিম্নরূপঃ

(ক) প্রতিবার একটি করে বর্ণ নিলে বিন্যাসের সংখ্যা হবে তিন ঃ (a), (b) এবং(c)

(খ) প্রতিবার দুটি করে বর্ণ নিলে বিন্যাসের সংখ্যা হবে ছয় ঃ (a, b), (b, c), (a, c), (c, a), (b, a), (c, b) ইত্যাদি। এভাবে, n সংখ্যক বস্তু নিয়ে সাজালে বিন্যাসের সংখ্যা হবে-

$${}^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\text{অথবা} \quad {}^{n}p_{r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}} \right)$$

যেখানে,

${}^{n}p_{r}$ = বিন্যাসের সংখ্যা।

n = মোট বস্তুর সংখ্যা।

r = প্রতি গ্রুপে বস্তুর সংখ্যা।

$\underline{|}$ বা ! = Factorial নির্দেশক চিহ্ন।

উদাহরণ-ঃ4 টি ভিন্ন রঙ-এর বলকে 2টি করে সাজালে বিন্যাসের সংখ্যা কত হবে?

সমাধান ঃ

এক্ষেত্রে, n = 4

r = 2

$$\begin{aligned} {}^{n}p_{r} &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= \frac{4!}{(4-2)!} \\ &= \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} \\ &= 12 \end{aligned}$$

নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা 12

নোটঃ

(i) n সংখ্যক বস্তুকে প্রতি ক্ষেত্রে n টি করে সাজালে বিন্যাসের সংখ্যা হবে-

$$^{n}p_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

(ii) n সংখ্যক বস্তুর মধ্যে যদি ভিন্ন ধরনের বস্তু একাধিকবার থাকে এবং ভিন্ন ধরনের বস্তুর সংখ্যা যথাক্রমে p, q এবং r হয়, তাহলে বিন্যাসের সংখ্যা হবে–

$$^{n}p_{r} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

সমাবেশ (Combination) ঃ নির্দিষ্ট সংখ্যক কতগুলো বস্তু থেকে কয়েকটি করে একেবারে নিয়ে কিংবা সবকটিকে একবারে নিয়ে সম্ভব যত প্রকারে বাছাই করা যায় কিংবা যতগুলো সেট গঠন করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে একেকটি সমাবেশ বলা হয়। যেমন − a, b, c এই তিনটি বর্ণ থেকে প্রাপ্ত সমাবেশের সংখ্যা হবে নিম্নরূপ ঃ

(ক) প্রতিবার একটি করে বর্ণ নিয়ে গঠিত সমাবেশ হবে ঃ (a), (b) এবং(c)

(খ) প্রতিবার দুটি করে বর্ণ নিয়ে গঠিত সমাবেশ হবে ঃ (a, b), (b, c), (c, a)ইত্যাদি।

এভাবে, n সংখ্যক বস্তু থেকে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশের সংখ্যা হবে -

$$^{n}c_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\left[\text{অথবা } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\right] \quad \text{যেখানে, } r \le n$$

যেখানে,

$^{n}c_{r}$ = সমাবেশের সংখ্যা।

n = মোট বস্তুর সংখ্যা।

r = প্রতি গ্রুপে বস্তুর সংখ্যা।

! = Factorialনির্দেশক চিহ্ন।

সমাবেশের কয়েকটি সূত্রঃ

(1) $^{n}c_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

(2) $^{n}c_{0} = 1$

(3) $^{n}c_{1} = n$

(4) $^{n}c_{n} = 1$

উদাহরণ-ঃ $^{5}c_{2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

$$^{5}c_{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!}$$

$$= \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1}$$

$$= 10$$

সারসংক্ষেপ

কতকগুলো জিনিস হতে কয়েকটি বা সবকটি নিয়ে যদি তাদেরকে এমনভাবে সাজানো হয় যাতে তাদের অবস্থান পরিবর্তনের ফলে নতুন নতুন সজ্জার সৃষ্টি হয় তবে জিনিসগুলোর এই সজ্জাকে বিন্যাস বলে। আবার কতগুলো উপাদানের প্রত্যেকটিকে পৃথক হিসেবে গণ্য না করে উপাদানগুলির কয়েকটিকে এক্ষেত্রে পৃথক হিসেবে গণ্য করার ফলে যে নতুন সজ্জার সৃষ্টি হয়, তাকে সমাবেশ বলে।

পাঠ ১.৫ গাণিতিক প্রত্যাশা
Mathematical Expectation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা ও এর ধর্মসমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- গাণিতিক প্রত্যাশার যোগসূত্র লিখতে ও প্রমাণ করতে পারবেন।
- গাণিতিক প্রত্যাশার গুণনগসূত্র লিখতে ও প্রমাণ করতে পারবেন।
- গাণিতিক প্রত্যাশা সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

গাণিতিক প্রত্যাশা (Mathematical Expectation)

বিখ্যাত ডাচ গণিতবিদ Hygens বাজী খেলার উৎস হতে গাণিতিক প্রত্যাশার ধারণা দেন। উদাহরণ স্বরূপ: কোন বাজীকর কোন বাজীতে X_1 টাকা জিতার সম্ভাবনা P_1 এবং X_2 টাকা হারার সম্ভাবনা P_2 হলে উক্ত বাজীকরের বাজী জিতার গাণিতিক প্রত্যাশা হল– $X_1P_1 + (-X_2)P_2 = X_1P_1 - X_2P_2$ টাকা।

কোন বিচ্ছিন্ন দৈব চলকের প্রত্যেক মান এবং তাদের নিজ নিজ সম্ভাবনা গুণফলের সমষ্টিকে ঐ চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা বলে। ধরি কোন বিচ্ছিন্ন দৈব চলক X এবং n সংখ্যক মান সমূহ $X_1, X_2, \ldots \ldots, X_n$ এবং তাদের সম্ভাবনা যথাক্রমে $P(X_1), P(X_2) \ldots \ldots, P(X_n)$. সুতরাং X চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা,

$$E(X) = X_1P(X_1) + X_2P(X_2) + \ldots \ldots + X_nP(X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i P(X_i)$$

গাণিতিক প্রত্যাশার ধর্মাবলী (Properties of Mathematical Expectation)

দৈব চলকের গাণিতিক প্রত্যাশার গুরুত্বপূর্ণ ধর্মগুলো নিম্নে উল্লেখ করা হলো:

1. দুই বা ততোধিক দৈব চলকের যোগফলের গাণিতিক প্রত্যাশা তাদের নিজ নিজ গাণিতিক প্রত্যাশার যোগফলের সমান। অর্থাৎ x, y, z তিনটি দৈব চলক হলে $E(x+y+z) = E(x) + E(y) + E(z)$
2. দুই বা ততোধিক স্বাধীন দৈব চলকের গুণফলের গাণিতিক প্রত্যাশা তাদের নিজ নিজ গাণিতিক প্রত্যাশার গুণফলের সমান। অর্থাৎ x, y, z তিনটি স্বাধীন দৈব চলক হলে, $E(xyz) = E(x)\,E(y)\,E(z)$
3. কোন ধ্রুবকের গাণিতিক প্রত্যাশা ধ্রুবকটির সমান। অর্থাৎ a একটি ধ্রুবক হলে এর গাণিতিক প্রত্যাশা, $E(a) = a$.
4. কোন একটি দৈব চলক ও একটি ধ্রুবকের গুণফলের গাণিতিক প্রত্যাশা ঐ দৈব চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা ও ধ্রুবকটির গুণফলের সমান। অর্থাৎ x একটি দৈব চলক এবং c একটি ধ্রুবক হলে $E(cx) = cE(x)$
5. একটি দৈব চলক ও একটি ধ্রুবকের বিয়োগফলের গাণিতিক প্রত্যাশা, দৈব চলকটির গাণিতিক প্রত্যাশা ও ঐ ধ্রুবকটির বিয়োগফলের সমান। অর্থাৎ, x একটি দৈব চলক ও a একটি ধ্রুবক হলে, $E(x-a) = E(x)-a$
6. একটি দৈব চলক ও একটি ধ্রুবকের যোগফলের গাণিতিক প্রত্যাশা, দৈব চলকটির গাণিতিক প্রত্যাশা ও ঐ ধ্রুবকটির যোগফলের সমান। অর্থাৎ x একটি দৈব চলক ও a একটি ধ্রুবক হলে, $E(x+a) = E(x) + a$.
7. x একটি দৈব চলক এবং a ও b দুটি ধ্রুবক হলে, $E(ax + b) = aE(x) + b$.
8. কোন একটি দৈব চলক x হলে x এর বর্গের গাণিতিক প্রত্যাশা x এর গাণিতিক প্রত্যাশার বর্গের চেয়ে বড় বা সমান হবে। অর্থাৎ $E(X^2) \geq \{E(x)\}^2$
9. কোন একটি দৈব চলক x এর মানগুলো অশূন্য ধনাত্মক ও অসমান হলে $E(\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{E(x)}$

গাণিতিক প্রত্যাশার গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য (Important Theorems of Mathematical Expectation)
ক. গাণিতিক প্রত্যাশার যোগ সূত্র বা সমষ্টিকরণ উপপাদ্য (Additive Law of Mathematical Expectation)
বিচ্ছিন্ন চলক এর ক্ষেত্রেঃ

সূত্রের বা উপপাদ্যের বর্ণনা : দুটি স্বাধীন দৈবচলকের যোগফলের গাণিতিক প্রত্যাশা তাদের নিজ নিজ প্রত্যাশার যোগফলের সমান। অর্থাৎ X ও Y দু'টি স্বাধীন দৈব চলক হলে $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ হবে।

প্রমাণ: ধরি X ও Y দু'টি স্বাধীন চলক।

X এর m সংখ্যক মানসমূহ $X_1, X_2, \ldots \ldots, X_m$ এবং তাদের সম্ভাবনাসমূহ যথাক্রমে $P(X_1), P(X_2), \ldots \ldots, P(X_m)$। আবার Y এর n সংখ্যক মানসমূহ $Y_1, Y_2, \ldots \ldots, Y_m$ এবং তাদের সম্ভাবনা সমূহ যথাক্রমে $P(Y_1), P(Y_2), \ldots \ldots, P(Yn)$

আমরা জানি, X চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা $E(X) = \sum_{i=1}^{m} Xi\ P(Xi)$

এবং Y চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা $E(X) = \sum_{j=1}^{n} Yj\ P(Yj)$

এখন, দৈব চলক X এর m সংখ্যক মান, দৈব চলক Y এর n সংখ্যক মান এর সাথে স্বাধীনভাবে যুক্ত হয়ে mn সংখ্যক মান বিশিষ্ট একটি দৈব চলক (m+n) তৈরি করে।

ধরি, দৈব চলক X এর Xi ও দৈব চলক Y এর Yj এর মান গ্রহণ করার যুক্ত সম্ভাবনা অপেক্ষক হল $P(X_i, Y_j)$

এবং X ও Y দু'টি স্বাধীন দৈব চলক বলে সম্ভাবনার গুণন সূত্র অনুযায়ী $P(Xi, Yj) = P(Xi).P(Yj)$

এখন, $E(X+Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (Xi + Yj)\ P(Xi, Yj)$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (Xi + Yj)\ P\ (Xi)\ P(Yj)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Xi.\ P\ (Xi)\ P(Yj) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (Yj).\ P\ (Xi)\ P(Yj)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} Xi.\ P\ (Xi) \sum_{j=1}^{n} P(Yj) + \sum_{j=1}^{n} (Yj).\ P(Yj) \sum_{i=1}^{m} P\ (Xi)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} Xi.\ P\ (Xi)\ X\ 1 + \sum_{j=1}^{n} (Yj).\ P(Yj)\ X\ 1$$

$$= \sum_{i=1}^{m} Xi.\ P\ (Xi) + \sum_{j=1}^{n} (Yj).\ P(Yj)$$

$\therefore E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

খ. গাণিতিক প্রত্যাশার গুণনসূত্র বা যৌগিক উপপাদ্য
Multiplication Law of Mathematical Expectation

সূত্রের বা উপপাদ্যের বর্ণনা : দুটি স্বাধীন দৈবচলকের গুণফলের গাণিতিক প্রত্যাশা এদের নিজ নিজ প্রত্যাশার গুণফলের সমান। অর্থাৎ, X এবং Y দু'টি স্বাধীন দৈব চলক হলে $E(XY) = E(X)\ \ E(Y)$ হবে।

প্রমাণ: ধরি X ও Y দু'টি স্বাধীন চলক।

X এর m সংখ্যক মানসমূহ $X_1, X_2, \dots \dots, X_m$ এবং তাদের সম্ভাবনাসমূহ যথাক্রমে $P(X_1), P(X_2), \dots \dots, P(X_m)$। আবার Y এর n সংখ্যক মানসমূহ $Y_1, Y_2, \dots \dots, Y_m$এবং তাদের সম্ভাবনা সমূহ যথাক্রমে $P(Y_1), P(Y_2), \dots \dots, P(Yn)$

আমরা জানি, X চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা $E(X) = \sum_{i=1}^{m} Xi\, P(Xi)$

এবং Y চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা $E(X) = \sum_{j=1}^{n} Yj\, P(Yj)$

এখন, দৈব চলক X এর m সংখ্যক মান, দৈব চলক Y এর n সংখ্যক মান এর সাথে স্বাধীনভাবে যুক্ত হয়ে mn সংখ্যক মান বিশিষ্ট একটি দৈব চলক (m+n) তৈরি করে।

ধরি, দৈব চলক X এর Xi ও দৈব চলক Y এর Yj এর মান গ্রহণ করার যুক্ত সম্ভাবনা অপেক্ষক হল $P(X_i, Y_j)$
এবং X ও Y দু'টি স্বাধীন দৈব চলক বলে সম্ভাবনার গুণন সূত্র অনুযায়ী $P(Xi, Yj) = P(Xi).P(Yj)$

এখন গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞানুসারে –

$$E(X_iY_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (Xi)(Yj)\, P(Xi, Yj)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_iY_j\, P\,(Xi).P\,(Yj) \quad [P(Xi, Yj) = P(Xi).P(Yj)]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} X_i\, P(Xi).\sum_{j=1}^{n} Y_jP(Yj)$$

$$= E(Xi)E(Yj)$$

$\therefore E(XY) = E(X)\, E(Y)$

গাণিতিক প্রত্যাশা সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা এবং সেগুলোর সমাধান

Problems and Solutions Related to Mathematical Expectation

সমস্যা-১ ঃ একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে এর উপরের পিঠের সংখ্যাগুলোর গাণিতিক প্রত্যাশা কত?

সমাধান ঃ মনে করি, ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণের উপরের পিঠের সংখ্যাগুলোর মান x এবং x-এর সম্ভাব্য মান হল 1, 2, 3, 4, 5, 6 এবং এর প্রত্যেকটি মান উঠার সম্ভাবনা বা $P(x) = \frac{1}{6}$ এক্ষেত্রে সম্ভাবনা বিন্যাস হবে

x	1	2	3	4	5	6
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

সুতরাং $E(x) = \sum\{x_i.P(x_i)\}$

$$= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} \quad = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \quad = \frac{21}{6} \quad = \frac{7}{2}$$

সারসংক্ষেপ

যেকোনো বিচ্ছিন্ন দৈব চলকের প্রতিটি মান ও নিজ নিজ সম্ভাবনার গুণফলের সমষ্টিকে ঐ দৈব চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা বলে।দুটি (স্বাধীন/অধীন) দৈব চলকের যোগফলের প্রত্যাশ্যা তাদের নিজ নিজ প্রত্যাশার যোগফলের সমান এবং দুটি (স্বাধীন/অধীন) দৈব চলকের গুণফলের প্রত্যাশ্যা তাদের পৃথক পৃথক প্রত্যাশার গুণফলের সমান।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন

রচনামূলক প্রশ্ন

১। সম্ভাবনার সংজ্ঞা লিখুন। নিশ্চিত ঘটনা ও অনিশ্চিত ঘটনার পার্থক্য সহ সংজ্ঞা লিখুন।

২। শর্তাধীন সম্ভাবনা ব্যাখ্যা করুন। প্রমাণ করুন যে, কোন ঘটনার সম্ভাবনা শূন্য হতে একের মধ্যে থাকবে।

৩। A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হলে প্রমাণ করুন যে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

৪। A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হলে প্রমাণ করুন যে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

৫। দু'টি ঘটনা A ও B স্বাধীন হলে সম্ভাবনার গুণন সূত্রের ক্ষেত্রে প্রমান করুন $P[A \cap B] = P[A].P[B]$

৬। দু'টি ঘটনা A ও B অধীন হলে সম্ভাবনার গুণন সূত্রের ক্ষেত্রে প্রমান করুন $P[A \cap B] = P[A]\ P[\frac{B}{A}]$

৭। দু'টি মুদ্রা ও ১টি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্রটি লিখুন। নিম্নের ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় করুন- ক) দুইটি হেড ও জোড় সংখ্যা; খ) দুইটি লেজ ও ছক্কার তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা; গ) একটি হেড, একটি লেজ ও জোড় সংখ্যা

৮। বেইজের উপপাদ্য কাকে বলে।

৯। একটি কারখানায় B_1, B_2ওB_3 মেশিন তিনটি যথাক্রমে 45%, 30%এবং 25% বাল্ব উৎপাদন করে। তাদের দ্বারা উৎপাদিত বাল্বের 5%, 2% এবং 1% ত্রুটিপূর্ণ। উক্ত কারখানা হতে একটি বাল্ব দৈবভাবে চয়ন করে দেখা গেল তা ত্রুটিপূর্ণ। উক্ত বাল্বটি B_3 মেশিন দ্বারা উৎপাদিত সম্ভাবনা কত?

১০। গৌণিক, বিন্যাস এবং সমাবেশ এর সংজ্ঞা দিন।

১১। গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা দিন। গাণিতিক প্রত্যাশার ধর্মাবলী লিখুন।

১২। প্রমাণ করুন যে, দুটি স্বাধীন দৈবচলকের যোগফলের গাণিতিক প্রত্যাশা তাদের নিজ নিজ প্রত্যাশার যোগফলের সমান। অর্থাৎ X ও Y দু'টি স্বাধীন দৈব চলক হলে $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ হবে।

১৩। প্রমাণ করুন যে, দুটি স্বাধীন দৈবচলকের গুণফলের গাণিতিক প্রত্যাশা এদের নিজ নিজ প্রত্যাশার গুণফলের সমান। অর্থাৎ, X এবং Y দু'টি স্বাধীন দৈব চলক হলে $E(XY) = E(X)\ E(Y)$ হবে।

১৪। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে এর উপরের পিঠের সংখ্যাগুলোর গাণিতিক প্রত্যাশা কত?

১৫। একটি বাক্সে ১৫টি বল আছে, তম্মধ্যে ৪টি লাল, ৫টি কালো এবং ৬টি সাদা বল আছে। নির্বিচারে ৩টি বল বাক্স হতে তোলা হল। ক) তিনটি লাল হবে; খ) ২টি সাদা হবে; গ) সবগুলো একই রং এর বল হবে; ঘ) কমপক্ষে ২টি কালো হবে অথবা ঙ) প্রত্যেকটি ভিন্ন ভিন্ন রং এর বল হবে তার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন-

১৬। ৫২ খানা তাসের একটি প্যাকেট হতে ২টি তাস নির্বাচন করা হল। একটি তাসও টেক্কা না পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

রেফারেন্স (References)

1. S.P.Gupta and M.P.Gupta (2023), Business Statistics, S Chand & Sons, New Delhi, India.
2. Richard I. Levin and D. S. Rubin (2023), Business Statistics, Prentice Hall Inc. New Delhi, India.
3. খন্দকার মোঃ সাদেকুর রহমান কাজল (২০২৪), অর্থনীতির জন্য পরিসংখ্যান, সমন্বয় পাবলিকেশন্স, ঢাকা।
4. মোঃ আব্দুল আজিজ(২০২৪), অর্থনীতির জন্য পরিসংখ্যান, দি এনজেল পাবলিকেশন্স, ঢাকা।
5. ড. নুর ইসলাম, আবুল খায়ের (২০২৪), দি ইউনাইটেড পাবলিশার্স, ঢাকা।