৮

সংশ্লেষ ও নির্ভরণ
Correlation & Regression

ভূমিকা

কোন সমগ্রকের দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় তা হল সংশ্লেষ। সম্পর্কের মাত্রা একমুখী হতে পারে আবার বিপরীত মুখী হতে পারে যেমন ভাল পড়াশুনা কর'লে ভাল ফলাফল আশা করা যায়। এরূপ সম্পর্ক এক মুখী সম্পর্ক। আবার অতিরিক্ত বৃষ্টিতে ফসল খারাপ হয়। এরূপ সম্পর্ককে বিপরীত মুখী সম্পর্ক বলা হয়। দুইটি চলকর মধ্যে সম্পর্ক আছে এটুকু জানলে চলবেনা তার জন্য প্রয়োজন চলকের সম্পর্কের মাত্রা কতটুকু তার পরিমাপ সম্পর্কে জানা। সম্পর্ক পরিমাপের জন্য কার্ল পিয়ার্সন একটি পরিমাপ পদ্ধতি বের করেছেন যাকে বলা হয় সংশ্লেষাঙ্ক বা Co-efficient of correlation। সংশ্লেষাঙ্কের মানের পরিমাণ দুইটি চলকের মধ্যকার সম্পর্কের মাত্রা নির্দেশ করে। আবার একটি চলকের গতিশীলতার পরিপ্রেক্ষিতে অপর চলকের কী ধরনের পরিবর্তন হয় তার পরিমাপ পদ্ধতিকে বলে নির্ভরণ (Regression)।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১ সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৮.১ সংশ্লেষের ধারণা
Concept of correlation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সংশ্লেষের সংজ্ঞা দিতে পারবেন;
- সংশ্লেষের ব্যবহার করতে পারবেন;
- সংশ্লেষের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

সংশ্লেষের ধারণা

সাধারণত দুটি চলকের মধ্যে একটি চলকের মানের পরিবর্তনে অন্য চলকের মানের পরিবর্তন হয় অথবা হয় না। অর্থাৎ এ ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি, চলক দুটির মধ্যে সম্পর্ক রয়েছে। যদি মানের পরিবর্তন না হয় তবে আমরা বলতে পারি তাদের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই। এ বিষয়গুলোকে সংজ্ঞায়িত করলে আমরা সংশ্লেষের ধারণা পাব।

সংশ্লেষণ: দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে পারস্পরিক সম্পর্ক বিদ্যমান থাকে তাকে সংশ্লেষণ বলে। যেমন, বাজারে কোন জিনিসের সরবরাহ বেড়ে গেলে দাম কমে যায় আবার বিপরীত দিকে সরবরাহ কমে গেলে দাম বেড়ে যায় অর্থাৎ চলো সরবরাহের উপর দাম বাড়ে বা কমে। এ সম্পর্ককে সংশ্লেষণ বলে।

সংশ্লেষণ প্রকারভেদ নিম্নরূপ:

১. সরল সংশ্লেষ
   ক. পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষ
   খ. আংশিক ধনাত্মক সংশ্লেষ
   গ. পূর্ণ ঋণাত্মক সংশ্লেষ
   ঘ. আংশিক ঋণাত্মক সংশ্লেষ
   ঙ. শূন্য সংশ্লেষ
২. বহুধা সংশ্লেষ
৩. আংশিক ও সম্পূর্ণ সংশ্লেষ
৪. রৈখিক ও বক্ররৈখিক সংশ্লেষ

১. সরল সংশ্লেষ

অর্থনৈতিক, বাণিজ্যিক, সামাজিক বা পরিসংখ্যানিক অনুসন্ধানের অনেক ক্ষেত্রে তথ্যবিশ্বের এককের বৈশিষ্ট্যগুলোকে দুটি সম্পর্কযুক্ত চলক দ্বারা পরিমাপ করা হয়। চলক দুটির মধ্যে কোন সম্পর্ক আছে কিনা তা তাদের পরিবর্তনের প্রকৃতি বিবেচনা করে পরিমাপ করা হয়। দুটি চলকের মধ্যে একটির মান পরিবর্তনের ফলে যদি অন্য চলকটির মানও পরিবর্তিত (বৃদ্ধি বা হ্রাস) হয় তবে বলা যায় যে, তাদের মধ্যে পরিবর্তনশীলতার সম্পর্ক আছে। দুটি চলকের তথ্য সারির মধ্যে এ পরিবর্তনশীলতা একমুখী বা বিপরীতমুখী হতে পারে। দুটি চলকের পারস্পরিক পরিবর্তনশীলতার এ সম্পর্ককে সংশ্লেষণ বা সরল সংশ্লেষ বলে।

ক. পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষণঃ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে একটি চলকের মান বৃদ্ধি বা হ্রাসের সাথে সাথে অন্যটির মানও যদি বৃদ্ধি বা হ্রাস পায় এবং একটি চলকের প্রতিটি মান বৃদ্ধির বা হ্রাসের অপর চলকের অনুষঙ্গী মানের বৃদ্ধির অনুপাত সমান থাকে তবে চলক দুটির এ সংশ্লেষকে পূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষণ বলে। এক্ষেত্রে সংশ্লেষাংকের মান $r=1$ হয়।

খ. অপূর্ণ ধনাত্মক সংশ্লেষণঃ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দুটি চলকের মধ্যে একটি চলকের মান বৃদ্ধি বা হ্রাসের সাথে সাথে অন্য চলকটির মান বৃদ্ধি বা হ্রাস পায় কিন্তু একটি চলকের মান বৃদ্ধি বা হ্রাসের সাথে অপর চলকের অনুষঙ্গী মানের বৃদ্ধি বা হ্রাসের অনুপাত সমান না থাকে তবে চলক দুটির সংশ্লেষকে অপূর্ণ ধনাত্মক বিশ্লেষণ বলে। এক্ষেত্রে সংশ্লেষাংকের মান 0 অপেক্ষা বেশি কিন্তু 1 অপেক্ষা কম হয়।

গ. পূর্ণ ঋণাত্মক সংশ্লেষণঃ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দু,টি চলকের মধ্যে একটি চালকের মান বাড়লে বা কমলে যদি অন্যটির মান কমে বা বাড়ে কিন্তু এ বাড়া বা কমার অনুপাত উভয় চলকে স্থির থাকে তবে চলক দু,টির এ সম্পর্ককে পূর্ণ ঋণাত্মক সংশ্লেষণ বলে। এক্ষেত্রে সংশ্লেষাংকের মান $r=-1$ হয়।

ঘ. অপূর্ণ ঋণাত্মক সংশ্লেষণঃ পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দু,টি চলকের মধ্যে একটি চলকের মান বৃদ্ধি বা হ্রাস পেলে যদি অন্য চলকটির মান হ্রাস বা বৃদ্ধি পায় কিন্তু এ পরিবর্তনের অনুপাত অসমান হয়। তবে চলক দুটির সংশ্লেষকে অপূর্ণ ঋণাত্মক সংশ্লেষণ বলে। এক্ষেত্রে সংশ্লেষাংকের মান -1 এর চেয়ে বড় এবং 0 এর ছোট হয়ে থাকে।

ঙ. শূণ্য সংশ্লেষ: যদি দুইটি চলকের মধ্যে কোনো ধরনের সরল রৈখিক সম্পর্ক না থাকে অর্থাৎ তাদের মধ্যে কোন সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় না তখন সেই চলকের সংশ্লেষকে শুন্য সংশ্লেষ বলে।

২। **বহুধা সংশ্লেষণ** তথ্যবিশ্ব এককের দুইয়ের বেশি সংখ্যক বৈশিষ্ট্য বা চলকের মধ্যে একটি বৈশিষ্ট্যের পরিবর্তনের ফলে অপর বৈশিষ্ট্যগুলোও যদি পরিবর্তিত হয় তবে তাদের মধ্যকার পরিবর্তনশীলতার এ সম্পর্ককে বহুধা সংশ্লেষণ বলে। অন্য কথায় তথ্যবিশ্বের দুইয়ের বেশি সংখ্যক চলকের পারস্পরিক পরিবর্তনশীলতার সম্পর্ককে বহুধা সংশ্লেষণ বলে। যেমনঃ ধানের একর প্রতি ফলন, বীজের মান, জমির উর্বরাশক্তি, সার প্রয়োগের পরিমাণ, কীটনাশক ব্যবহারের পরিমাণ, সূর্যকিরণ ইত্যাদি চলকগুলো পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। এ সম্পর্কই বহুধা সংশ্লেষণ।

৩। **আংশিক ও সম্পূর্ণ:** দু,য়ের অধিক চলক পরস্পর সম্পর্কযুক্ত হলেও অন্যান্য চলকসমূহকে বিবেচনার বাইরে সহ-সম্বন্ধ রেখে শুধুমাত্র দুটি চলকের সহ-সম্বন্ধ নির্ণয় করা হলে তাকে আংশিক সহ সম্বন্ধ বলে। যেমনঃ মূল্য, যোগান ও চাহিদা পরস্পর সম্পর্ক যুক্ত হলেও যখন যোগানকে বিবেচনার বাইরে রেখে শুধুমাত্র মূল্য ও চাহিদার সহ সম্বন্ধ নির্ণয় করা হয় তখন তাকে আংশিক সহ সম্বন্ধ বলা হয়। পক্ষান্তরে, সহ সম্বন্ধ নির্ণয় করার সময় পরস্পর সম্পর্কিত সকল চলককে বিবেচনা করা হলে তখন তাকে সম্পূর্ণ সহ সম্বন্ধ বলা হয়।

৪। **রৈখিক ও বক্র রৈখিক:** রৈখিক এবং বক্ররৈখিক সহ-সম্বন্ধ নির্ভর করে চলকসমূহের পরিবর্তনের হারের ধারাবাহিকতার উপর। যদি দুটি চলকের পরিবর্তনের হার একটি স্থির অনুপাতে হয় তবে তাদের মধ্যে বিদ্যমান সহ সম্বন্ধকে রৈখিক সহ-সম্বন্ধ বলে। এক্ষেত্রেসমূহের পরিবর্তনের হারকে ছক কাগজে উপস্থাপন করা হলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। নিম্নের নিবেশনটি লক্ষ্য করা যাকঃ

X:	5	10	15	20
Y:	4	8	12	16

উপরোক্ত নিবেশনটিতে দুটো চলকের মানই সমান হারে বৃদ্ধি পেয়েছে। যদি এমন গুলোকে কাগজে উপস্থাপন করা হয় তাহলে একটি সরলরেখা পাওয়া যাবে

পক্ষান্তরে যদি দুটি চলকের পরিবর্তন স্থির অনুপাতে বা সমানুপাতিক ভাবে না হয় তবে তাদের মধ্যে যে সহ-সম্বন্ধ ঘটে তাকে বক্র রৈখিক সহ সম্বন্ধ বলে এক্ষেত্রে চলকের মানসমূহকে ছক কাগজে উপস্থাপন করলে বক্ররেখা পাওয়া যায়। নিম্নের নিবেশনটি লক্ষ্য করা যাকঃ

X:	10	16	23	36	30
Y:	5	7	10	14	28

উপরোক্ত নিবেশনে চলকের মানগুলো সমান হারে বৃদ্ধি পায়নি। তাই নিবেশনের মানগুলোকে ছক কাগজে উপস্থাপন করলে একটি বক্ররেখা পাওয়া যাবে।

সারসংক্ষেপ:

কোন সমগ্রকের দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় তা হল সংশ্লেষ। সংশ্লেষ দুই ধরণের; **১**। ধনাত্মক সংশ্লেষ ২। ঋনাত্মক সংশ্লেষ। চিত্রের সাহায্যে দুইটি চলকের মধ্যেকার পারস্পরিক সম্পর্ক প্রকাশ করা যায়।

পাঠ-৮.২ সংশ্লেষ পরিমাপ
Measures of Correlation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সংশ্লেষের মাত্রা পরিমাপ করতে পারবেন;

ভূমিকা

দু'টি চলকের মধ্যে সংশ্লেষ আছে এ জ্ঞানটুকু আমাদের উদ্দেশ্যের জন্য যথেষ্ট নয়। চলক দুইটির মধ্যে সংশ্লেষের পরিমাণ জানা দরকার অর্থাৎ চলক দু'টির মধ্যে সম্পর্কের মাত্রা পরিমাপ দরকার। এ পাঠে সংশ্লেষ এর পরিমাপ পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

সংশ্লেষের মাত্রা বলতে দু'টি চলকের মধ্যকার সম্পর্কের পরিমাণকে বুঝায়। অর্থাৎ ধানের উৎপাদন বৃদ্ধিতে সার ও বৃষ্টির সম্পর্ক খুব গভীর। আবার অতিবৃষ্টি ফসলের ক্ষতির কারণ।

পরস্পর সম্পর্ক যুক্ত দু'টি চলকের পরিবর্তনের প্রকৃতি এবং উহাদের মধ্যে বিদ্যমান সরলরৈখিক সম্পর্কের মাত্রাকে সংশ্লেষাঙ্ক বা Co-efficient of correlation বলে।

সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় পদ্ধতি

দুটো চলকের মধ্যে সহ-সম্বন্ধ নির্ণয় করার বিভিন্ন পদ্ধতিগুলো হচ্ছে–

ক. লৈখিক পদ্ধতি

১. বিক্ষেপ চিত্র

২. সহজ রেখাচিত্র

খ. গাণিতিক পদ্ধতি

১. কার্ল পিয়ারসনের সহ-সম্বন্ধ পদ্ধতি

২. স্পিয়ারম্যানের শ্রেণিক্রম বা র‍্যাংক সহ-সম্বন্ধ পদ্ধতি

৩. সহগামী ব্যতিক্রমী পদ্ধতি

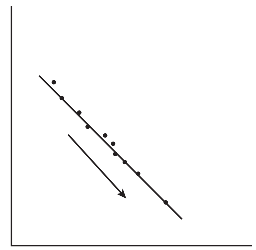
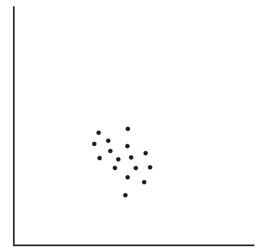
৪. ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি

ক. লৈখিক পদ্ধতি

১. বিক্ষেপ চিত্র

বিক্ষেপ চিত্র: দু'টি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ককে লেখের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে দ্বিচলক বিশিষ্ট তথ্যকে লেখ এর মাধ্যমে উপস্থাপন করাকে বলা হয় বিক্ষেপচিত্র। বিক্ষেপচিত্রের মাধ্যমে সংশ্লেষ সম্পর্কে নিম্নলিখিত মন্তব্য করা হয়।

১। বিক্ষেপ চিত্রের বিন্দুগুলি যদি উর্দ্ধগামী বা নিম্নগামী হয় তাহলে চলকদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক আছে বলে প্রতিয়মান হয় এবং যদি বিন্দুগুলির বিশেষ কোন গতিপথ না থাকে তবে চলক দ্বয়ের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।
চিত্র দেখুন:

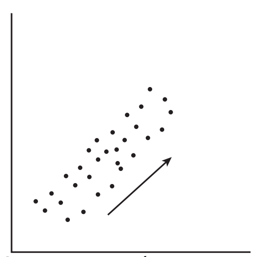
ক. চিত্রঃ উর্ধ্বমূখী খ. চিত্রঃ নিম্নমূখী গ. চিত্রঃ কোন সম্পর্ক নেই

২। যদি চলকদ্বয়ের অবস্থানের গতি ডানদিকে উর্ধ্বগামী হয় অর্থাৎ চিত্রের বাম দিকে নিচ হতে বিন্দুগুলো উপরের দিকে উঠতে থাকে তখন চলকদ্বয়ের মধ্যে ধনাত্মক সংশ্লেষ বিদ্যমান বুঝতে হবে। চিত্র ক. দেখুন:

৩। যদি চলকদ্বয়ের অবস্থানের গতি ডানদিকে নিম্নমুখী হয় অর্থাৎ চিত্রের বাম দিক থেকে ডান দিকে নিম্নগামী হয়, তখন চলকগুলোর মধ্যে ঋণাত্মক সংশ্লেষ বিদ্যামান বুঝতে হবে। (চিত্র খ. দেখুন)।

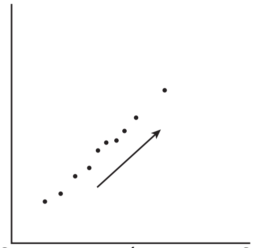
৪। যদি চলকদ্বয়ের মধ্যে কোন সম্পর্ক না থাকে তবে বিন্দুগুলো বিক্ষিপ্তভাবে লেখ কাগজে অবস্থান করবে।
চিত্র গ. দেখুন:

৫। বিক্ষেপ চিত্রের বিন্দুগুলোর সরলরেখা থেকে খুব বেশি বিচ্যুত থাকে তখন বুঝতে হবে চলকদ্বয়ের সংশ্লেষের মাত্রা খুব কম। চিত্রে দেখুন:



চিত্র ঃ সম্পর্কের মাত্রা কম

যদি চলকদ্বয়ের মধ্য সম্পর্কের মাত্রা খুব বেশী হয় তবে বিন্দুগুলোর সরল রেখার খুবই কাছাকাছি হবে। চিত্র দেখুন:



চিত্রঃ সম্পর্কের মাত্রা বেশি

২. সহজ রেখাচিত্র

যে রেখাচিত্র দুটি নিবেশনের রাশিগুলো গ্রাফে উপস্থাপন করে তাদের গতি নৈকট্য বা প্রবণতা পর্যবেক্ষণ করে সহ-সম্বন্ধ সম্পর্কে একটি ধারণা দিয়ে থাকে তাকে সহজ রেখা-চিত্র বলে। এ পদ্ধতিতে চলকের মানগুলো দিয়ে গ্রাফ কাগজে রেখা অংকন করলে দু'টি রেখা পাওয়া যায়, যার একটি x চলকের জন্য অপরটি y চলকের জন্য। এই দু'টো রেখা দ্বারা চলকদ্বয়ের গতি এবং প্রকৃতি বুঝা যায় এবং তাদের মধ্যে সহসম্পর্ক আছে কিনা তাও বুঝা যায়। যদি দুটো রেখা একই

দিকে উর্ধ্বমুখে বা নিম্নমুখে চলে অর্থাৎ দু'টি রেখা যদি একে অপরের সমান্তরাল হয় তাহলে বুঝতে হবে তাদের মধ্যে ধনাত্মক সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান। আর যদি রেখা দুটি বিপরীত মুখে চলে তাহলে বুঝতে হবে তাদের মধ্যে ঋণাত্মক সহ-সম্বন্ধ বিদ্যমান। এই পদ্ধতিতে সহ সম্বন্ধ সহগকে সংখ্যায় প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ-১: নিম্নোক্ত তথ্য থেকে সহ-সম্বন্ধ লেখ অংকন করুন। (Draw a correlation graph from the follwing data)

Period	Jan.	Feb.	Mar	April	May	June
Variable 1	15	18	22	20	25	20
bariable 2	30	35	43	41	51	40

Picture

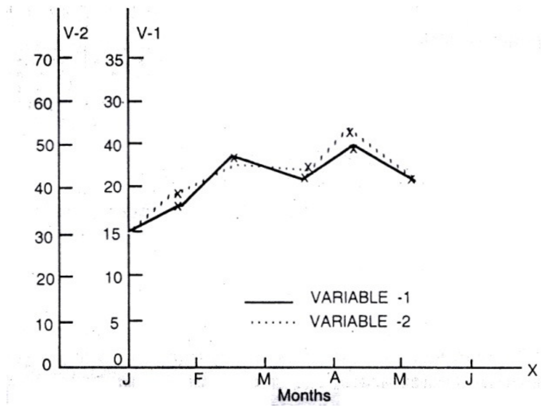


FIGURE: CORRELATION GRAPH

এই পদ্ধতি কালিন সারির ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়। বিক্ষেপ চিত্রের মতো এই পদ্ধতিতেও সহ-সম্বন্ধের সংখ্যাত্মক মান পাওয়া যায় না।

খ. গাণিতিক পদ্ধতি

১. কার্ল পিয়ারসনের সহ-সম্বন্ধ পদ্ধতি

সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়:

সংশ্লেষাঙ্ক দ্বারা দু'টি চলকের সরল রৈখিক সম্পর্কের শক্তির মাত্রা ও পরিবর্তনের দিক পরিমাপ করা হয়। Karl pearson সর্বপ্রথম সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের সুত্র প্রদান করেন। Karl pearson এর সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের সুত্রটি নিম্নরূপ-

Karl Pearson এর সুত্র নিম্নলিখিত অনুমানের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়:

১। চলক দ্বয়ের মধ্যে রৈখিক সম্পর্ক বিদ্যমান

২। চলক দ্বয়ের মধ্যে সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিদ্যমান

৩। স্বাধীন চলকের একটি মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের একাধিক মান বিদ্যমান হতে পারে।

তাহলে, আমরা Karl Person-এর সহ-সম্বন্ধ অংকটির সূত্রকে নিম্নোক্ত রূপে প্রকাশ করতে পারি:

এক নজরে সংশ্লেষাঙ্কের সূত্রাবলি:

ক) অশ্রেণিকৃত তথ্যের সহ-সম্বন্ধ

i)সরাসরি পদ্ধতিঃ

- যখন $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ -এর মান জানা ও পূর্ণসংখ্যা।

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

বা, $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2(y-\bar{y})^2}}$ এখানে, $x = X - \bar{X}$ $y = Y - \bar{Y}$

অথবা

$$r = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x \Sigma y}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}\right\}\left\{\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{N}\right\}}}$$

বা, $r = \frac{N\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\}\{N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2\}}}$

- যখন সহভেদাংক, ভেদাংক বা পরিমিত ব্যবধান দেয়া থাকে।

বা, $r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$

বা, $r = \frac{Cov(xy)}{\sigma_x\sigma_y}$

যেখানে, Cov (xy) = xy-এর সহ-ভেদাংক (convarience of xy)

σ_x= X চলকের পরিমিত ব্যবধান (Standard devialion of X variable)

σ_y = Y চলকের পরিমিত ব্যবধান (Standard deviation of Y variable)

$x = X - \bar{X}$

$y = Y - \bar{Y}$

ii) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি :

- x ও y-এর মান গুলো বড় হলে $d_x = x_i - A_x$ এবং $d_y = y_i - A_y$ যখন কল্পিত গড় বা অনুমিত গড় থেকে বিচ্যুতি নেয়া হয়।

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{\Sigma d_x \Sigma d_y}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{N}\right\}\left\{\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{N}\right\}}}$$

বা, $r = \frac{N\Sigma d_x d_y - \Sigma d_x d_y}{\sqrt{N\Sigma d_x^2 - (\Sigma d_x)^2}\sqrt{N\Sigma d_y^2 - (\Sigma d_y)^2}}$

খ) শ্রেণিকৃত/ দ্বিচলক তথ্যের সহ-সম্বন্ধ

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y - \frac{\Sigma f d_x \Sigma f d_y}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma f d_x^2 - \frac{(\Sigma f d_x)^2}{N}\right\}\left\{\Sigma f d_y^2 - \frac{(\Sigma f d_y)^2}{N}\right\}}}$$

উদাহরণ:

ক) অশ্রেণিকৃত তথ্যের সহ-সম্বন্ধ

i) সরাসরি পদ্ধতিঃ

- যখন $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ -এর মান জানা ও পূর্ণসংখ্যা।

উদা-১ : নিম্নের দুটি চলক হতে (ক) সরাসরি নিয়মে (খ) মূল ও মাপনীর পরিবর্তন করে সংশ্লেষাংক নির্ণয় করঃ

মজুরী (টাকায়)	110	125	130	131	150	161	155
জীবনযাত্রার ব্যয় সূচক	91	90	95	88	85	81	75

সমাধানঃ ধরি মজুরী চলক x_i এবং জীবন যাত্রার ব্যয় সূচক চলক y_i

(ক) সরাসরি নিয়মে সংশ্লেষাংক নির্ণয়ের তালিকাঃ

x_i	y_i	$(X-\bar{X})$	$(Y-\bar{Y})$	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$	$(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$
110	91	-28.86	4.57	832.73	20.90	-131.92
125	90	-13.86	3.57	192.02	12.76	-49.49
130	95	-8.86	8.57	78.45	73.47	-75.92
131	88	-7.86	1.57	61.73	2.47	-12.35
150	85	11.14	-1.43	124.16	2.04	-15.92
161	81	22.14	-5.43	490.31	29.47	-120.20
155	75	26.14	-11.43	683.45	130.61	-298.78
Σx_i =962	Σx_i =605	$\Sigma(X-\bar{X}) = 0$	$\Sigma(Y-\bar{Y})=0$	$\Sigma(X-\bar{X})^2$ =2462.86	$\Sigma(Y-\bar{Y})^2$ =271.71	$\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$ = -704.57

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

বা, $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2(y-\bar{y})^2}}$ **এখানে,** $x = X-\bar{X}$ $y = Y-\bar{Y}$

$$= \frac{-704.57}{\sqrt{2462.86x271.71}}$$

$$= \frac{-704.57}{\sqrt{669183.69}}$$

$$= \frac{-704.57}{818.03}$$

$= -0.80$ (প্রায়) (উ:)

অথবা, সরাসরি নিয়মে সংশ্লেষাংক নির্ণয়ের তালিকাঃ

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
110	91	12100	8281	10010
125	90	15625	8100	11250
130	95	16900	9025	12350
131	88	17161	7744	11528
150	85	22500	7225	12750
161	81	25921	6561	13041
155	75	24025	5625	11625
$\Sigma x_i = 962$	$\Sigma y_i = 605$	$\Sigma x_i^2 = 134232$	$\Sigma y_i^2 = 52561$	$\Sigma x_i y_i = 82554$

আমরা জানি, K. P.-এর সূত্র = $\dfrac{\Sigma x_i y_i - \dfrac{\Sigma x_i y_i}{n}}{\sqrt{\left\{\Sigma x_i^2 - \dfrac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right\}\left\{\Sigma y_i^2 - \dfrac{(\Sigma y_i)^2}{n}\right\}}}$

$$= \frac{82554 - \dfrac{(962)(605)}{7}}{\sqrt{\left\{134232 - \dfrac{(962)^2}{7}\right\}\left\{52561 - \dfrac{(605)^2}{7}\right\}}} = \frac{-590.29}{\sqrt{2025.71 \times 271.71}}$$

$= \dfrac{-590.29}{\sqrt{550405.66}} = \dfrac{-590.29}{741.89} = -0.7956 = -0.80$ (প্রায়) .... (i)

ii) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি :

- x ও y-এর মান গুলো বড় হলে $d_x = x_i - A_x$ এবং $d_y = y_i - A_y$ যখন কল্পিত গড় বা অনুমিত গড় থেকে বিচ্যুতি নেয়া হয়।

x_i	y_i	$d_x = x_i - A_x(131)$	$d_y = y_i - A_y(81)$	$d_x d_y$	d^2_x	d^2_y
110	91	-21	10	-210	441	100
125	90	-6	9	-54	36	81
130	95	-1	14	-14	7	196
131(A_x)	88	0	7	0	0	49
150	85	19	4	76	361	16
161	81(A_y)	30	0	0	900	0
165	75	24	-6	-144	576	36
		$\Sigma d_x = 45$	$\Sigma d_y = 38$	$\Sigma d_x d_y = -346$	$\Sigma d^2_x = 2315$	$\Sigma d^2_y = 478$

$$r = \frac{\Sigma d_x d_y - \frac{\Sigma d_x \Sigma d_y}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma d_x^2 - \frac{(\Sigma d_x)^2}{N}\right\}\left\{\Sigma d_y^2 - \frac{(\Sigma d_y)^2}{N}\right\}}}$$

$$= \frac{-346 - 244.28}{\sqrt{\left\{2315 - \frac{(45)^2}{7}\right\}\left\{478 - \frac{(38)^2}{7}\right\}}}$$

$$= \frac{-590.28}{\sqrt{\{2315 - 289.28\}\{478 - 206.28\}}}$$

$$= \frac{-590.28}{\sqrt{2025.72 x 271.72}}$$

$$= \frac{-590.28}{\sqrt{550428.63}}$$

$$= \frac{-590.28}{741.90}$$

$= -0.80$ (প্রায়) (উঃ)

২. ক্রমিক সংশ্লেষাঙ্কঃ C.E. Spearmar (১৯০৪) ক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক পরিমাপ পদ্ধতি আবিস্কার করেন। তিনি ছিলেন একজন বৃটিশ মনোবিজ্ঞানী তিনি প্রথমে ক্রমিক চলকগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে quantify করেন। অতপর আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ে যে সুত্রটি বের করেন তা নিম্নরূপঃ

$$R = ১ - \frac{৬\Sigma d^{২}}{N(N^{২} - 1)}$$

এখানে

R = আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক

d = দুইটি দলের/গ্রুপের ক্রমের পার্থক্য

N = তথ্য সংখ্যা

নির্ণয় পদ্ধতিঃ

১। প্রতি জোড়া বা গ্রুপে প্রাপ্ত বৈশিষ্ট্যের মানের ক্রম অনুসারে সাজাতে হবে।

২। প্রতি জোড়ায় ক্রমের পার্থক্য নির্ণয় করতে হবে।

৩। বড় মানের ক্রমিক ১, অতপর ২, ৩ .... রাশিগুলিকে মানের মাত্রায় প্রকাশ করাকে rank প্রদান বলা হয়। একই মানের ক্রমগুলির গড় বের করে গড় মানকে উক্ত ক্রম স্থানে স্থাপন করতে হবে।

৪। অতপর Spearman এর আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্কের সুত্র ব্যবহার করে সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ: কোন একটি কোম্পানিতে শ্রমিকদের দক্ষতার তথ্য ক্রমানুসারে নিম্নে দেওয়া হল। গুণানুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্কের মান নির্ণয় করুন।

শ্রমিকের দক্ষতা	1	2	5	4	3
সুপারভাইজারে দক্ষতা	1	3	4	5	2

সমাধান: আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করতে নিম্নোক্ত টেবিলটি ব্যবহার করবো।

x_i শ্রমিকের দক্ষতা	y_i সুপারভাইজারের দক্ষতা	d=x-y	d^2
1	1	0	0
2	3	-1	1
5	4	1	1
4	5	-1	1
3	2	1	1
মোট			$\sum d^2=4$

$$\therefore R = ১-\frac{৬\Sigma d^{২}}{N(N^{২}-1)}$$

এখানে

$\Sigma d^{২}=8$

N=৫

$$\therefore R = ১-\frac{৬\times ৪}{৫(৫^{২}-১)}$$

$$= ১-\frac{১}{৫} = .৮০$$

$\therefore$ নির্ণেয় দক্ষতার আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক R =.৮০

৩. কনকারেন্ট ব্যবধান পদ্ধতি (Concurrent deviation method) : এ পদ্ধতিটি পরিসংখ্যানে খুব কম ব্যবহৃত হয়। নিম্নে সূত্রটি দেওয়া হলো:

ধরা যাক, দুটি চলক x ও y এর N জোড়া মান যথাক্রমে (x_1, y_1) , (x_2, y_2), ----, $(x_N.y_N)$ এবং কনকারেন্ট সংশ্লেষাংক r_c হলে– $rc = \pm\sqrt{\frac{\pm 2c\text{-}n}{n}}$

৪. ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি (Method of Least squares) : এ পদ্ধতিটি আলোচনার পূর্বে নির্ভরণ সম্পর্কে ধারণা থাকা দরকার। যা এই অধ্যায়ে : শেষে আলোচনা করা হয়েছে। যদি x এর উপর y নির্ভরাংক b_{yx} এবং y-এর উপর x এর নির্ভরাংক b_{xy} হলে- $r = \sqrt{b_{yx}.b_{xy}}$

সংশ্লেষাঙ্কের ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য : সংশ্লেষাঙ্কের প্রধান ধর্মগুলো নিম্নরূপ:

১। সংশ্লেষাংক মূলবিন্দু ও মাপনী হতে স্বাধীন

২। সংশ্লেষাঙ্কের মান সর্বদা -১ থেকে +১ এর মধ্য অবস্থিত

৩। চলক দু'টি স্বাধীন হলে $r_{xy} = o$

৪। সংশ্লেষাঙ্ক প্রতি সম অর্থাৎ $r_{xy} = r_{yx}$

৫। সংশ্লেষাঙ্ক একটি একক মুক্ত সংখ্যা

সংশ্লেষাঙ্ক, r_{xy} মানের ব্যাখ্যা :

১) r = +১ হলে, চলক দ্বয়ের মধ্যে পূর্ণধনাত্মক সম্পর্ক বিদ্যামান

২) r = -১ হলে, চলকের মধ্যে পূর্ণ ঋণাত্মক সম্পর্ক বিদ্যমান

৩) r = ০ হলে, চলকের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।

সংশ্লেষাঙ্কের সীমাবদ্ধতা: সংশ্লেষাঙ্ককের সীমাবদ্ধতাগুলো নিম্নে দেওয়া হল:

১। সংশ্লেষাঙ্ক শুধুমাত্র রৈখিক সম্পর্কের মাত্রা ও পরিবর্তনের দিক নির্ণয় করতে পারে কিন্তু বক্র রৈখিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারে না।

২। সংশ্লেষাঙ্ক প্রান্তীয় মান দ্বারা প্রভাবিত হয়।

৩। সংশ্লেষাঙ্ক গণনার জন্য তথ্যগুলি যদি সমগুন সম্পন্ন না হয় তবে চলক দ্বয়ের সম্পর্কের প্রকৃত চিত্র নাও দিতে পারে।

সম্ভাব্য বিচ্যুতি: সংশ্লেষাঙ্কের সম্পর্কে ব্যাখ্যা দানের সম্ভাব্য বিচ্যুতি একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখে। কোন তথ্য বিশ্ব হতে বিভিন্ন আকারের নমুনা সংগ্রহ করে সংশ্লেষাঙ্কের মান r নির্ণয় করলে r এর বিভিন্ন মান পাওয়া যাবে এবং এদের বিন্যাসটির একটি ভেদাঙ্ক মান পাওয়া যাবে যার পরিমিত ব্যবধান মানকে SE (r) দ্বারা সূচিত করলে,

$SE_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{(n-2)}}$ । সম্ভাব্য বিচ্যুতি $P.E(r) = .6745\sqrt{\frac{1-r2}{n-2}}$; এ ক্ষেত্রে .6745 হল পরিমিত বিন্যাসের শতকরা ৫০% তথ্য মান $p \pm .6745x$ এর ভিতর বিদ্যমান থাকে। সম্ভাব্য বিচ্যুতি PE(r) এর উপর নির্ভর করে r এর মানের ব্যাখ্যা :

১। r এর মান যখন P.E.(r) এর থেকে ছোট হয়. তখন সংশ্লেষাঙ্ক মোটেই যথার্থ নয়

২। যদি r> ৬ P.E(r) তখন সংশ্লেষাঙ্ক নিশ্চিতভাবে যথার্থ

৩। যদি r এর মান P.E(r) এর চেয়ে বড় তখন সংশ্লেষাঙ্ক যথার্থভাবে বিদ্যমান।

সারসংক্ষেপ:

সংশ্লেষাঙ্কের মাত্রা সংশ্লেষের পরিমাণ কে বুঝায়। দু'টি স্বাধীন চলকের সংশ্লেষাঙ্ক r=o, সম্ভাব্য বিচ্যুতি, সংশ্লেষাঙ্কের পরিমান সম্পর্কে ব্যাখ্যা প্রদান করে।

পাঠ-৮.৩ নির্ভরণ
Regression

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

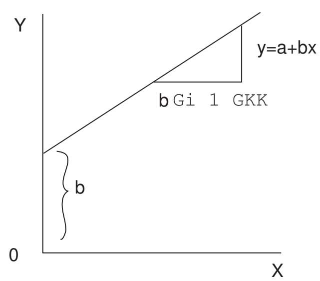
- নির্ভরণ ও সংশ্লেষ এর পার্থক্য কি তা বলতে পারবেন;
- নির্ভরণের ধর্মাবলী ও তার প্রমাণ করতে পারবেন।
- নির্ভরণের সহিত সংশ্লেষের সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

নির্ভরণ

নির্ভরণ প্রক্রিয়াটি সর্ব প্রথম প্রখ্যাত জীবতত্ত্ববিদ স্যার ফেন্সিস গেলটন (১৮২২-১৯১১) প্রদান করেন। র্নিভরণ বিশ্লেষণে স্বাধীন চলকের পরিবর্তনে অধীন চলকের যে গড় পরিবর্তন পরিলক্ষিত হয় তাহা বিশ্লেষণ করা হয়। নির্ভরণের শব্দগত অর্থ হচ্ছে "গড় মানের দিকে আসা" অর্থাৎ নির্ভরণ, সম্পর্ক যুক্ত দু'টি চলকের একটির নির্দিষ্ট মানের জন্য অন্য চলকের গড় মান নির্ণয় করে। এ ভাবে সম্পর্কের সমীকরণের মাধ্যমে স্বাধীন চলকের কোনো একটি মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের মান প্রাক্কলন করে।

নির্ভরণ রেখা

বিক্ষেপ চিত্রের ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, দু'টি চলকের মধ্যে সম্পর্ক থাকলে চলক দু'টির বিভিন্ন মান লেখ কাগজে স্থাপন করলে বিন্দুগুলি একটি পথ নির্দেশ করে। নির্ভরণ রেখা একটি চলকের মানগুলোর বিপরীতে অন্য একটি চলকের যথার্থ গড় মান প্রকাশ করে। যদি x ও y দুইটি চলক হয়, তাহলে দু'টি নির্ভরণ রেখা পাওয়া যাবে-



চিত্রঃ নির্ভরণ রেখা

১। একটি রেখা x চলকের মানগুলির বিপরীতে y চলকের গড় মান প্রদর্শন করে।
২। অন্য রেখাটি y চলকের মানগুলির বিপরীতে x চলকের গড় মান প্রদর্শন করে।

১ম টিকে x চলকের উপর y চলকের নির্ভরণ রেখা এর ২য় টিকে y চলকের উপর x এর নির্ভরণ রেখা বলে।

নির্ভরণ সমীকরণ

প্রাপ্ত নির্ভরণ রেখাকে সমীকরণের সাহায্যে দেখানো হল:

১। $y=a_1+b_1x$; x এর উপর y এর নির্ভরণ রেখা

২। $x=a_2+b_2y$; y এর উপর x এর নির্ভরণ রেখা

উপরোক্ত সমীকরণ দু'টিতে a_1, b_1 এবং a_2, b_2 কে বলা হয় ধ্রুবক। এখানে b_1, b_2 কে নির্ভরাঙ্ক বলা হয়।

নির্ভরাঙ্ক

Coefficient of Regression

স্বাধীন চলকের প্রতি একক পরিবর্তনে অধীন চলকের গড় পরিবর্তনের পরিমাণকে নির্ভরাঙ্ক বলে। নির্ভরণ সমীকরণের b_1 ও b_2 এর মান নির্ভরাঙ্ক বলা হয়। x চলকের উপর y চলকের নির্ভরাঙ্ককে b_1 (b_{yx}) দ্বারা এবং y চলকের উপর x চলকের নির্ভরাঙ্ককে bb$b_2(b_{xy})$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1. x-এর উপর y-এর নির্ভরাঙ্কঃ $b_1 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$ অথবা, $b_1 = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x.\Sigma y}{N}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}}$ বা, $b_1 = \frac{N.\Sigma xy - \Sigma x.\Sigma y}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$	2. y-এর উপর x-এর নির্ভরাঙ্কঃ $b_2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$ অথবা, $b_2 = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x.\Sigma y}{N}}{\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{N}}$ বা, $b_2 = \frac{N.\Sigma xy - \Sigma x.\Sigma y}{N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$

নির্ভরাঙ্কের প্রকারভেদ

নির্ভরাঙ্কের সাহায্যে দুটি চলকের মধ্যে বিরাজমান সম্বন্ধ অঙ্ক নির্ণয় করা যায়। নির্ভরাংক বিভিন্ন প্রকার হয়ে থাকে অর্থাৎ কয়েকটি পদ্ধতিতে নির্ভরাঙ্ক নির্ণয় করা যায়। নির্ভরাংকের এ পদ্ধতিকে প্রধানত দুটি ভাগে ভাগ করা যায়। যথা– (ক) x-এর উপর y-এর নির্ভরাঙ্ক (খ) y-এর উপর x-এর নির্ভরাঙ্ক।

নির্ভরাঙ্কের বৈশিষ্ট্য বা ধর্ম

নির্ভরাঙ্কের বৈশিষ্ট্য বা ধর্ম নিম্নে দেওয়া হল

১। নির্ভরাংক মূলবিন্দুর উপর স্বাধীন ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

২। $r_{xy} = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$

৩। দু'টি নির্ভরাঙ্কের গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে বড় বা সমান।

দ্বিচলক নির্ভরণ রেখা নির্ণয়ের পদ্ধতি

সাধারণত দুটি পদ্ধতিতে বিচলক নির্ভরণ রেখা নির্ণয় করা হয়।

১. বিক্ষেপ্ত চিত্র
২. ন্যূনতম বর্গ প্রক্রিয়া

আমরা এখানে শুধু ন্যূনতম বর্গপ্রক্রিয়া আলোচনা করব। কেননা সহ-সমন্ধ অংশে বিক্ষিপ্ত চিত্র সম্পর্কে বলা হয়েছে।

ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি: উনবিংশ শতাব্দীতে ফরাসি গণিতবিদ এনড্রিন লেগনড্রি সর্বপ্রথম ন্যূনতম বর্গ প্রক্রিয়া ব্যবহার করেন। ন্যূনতম বর্গ প্রক্রিয়ার মূল বিষয় হল, "অঙ্কিত নির্ভরণ রেখা হতে প্রতিটি বিন্দুর বিচ্যুতির বর্গের যোগফল হবে ন্যূনতম" নির্ভরণ রেখা নির্ণয়ের জন্য a ও b ধ্রুবক প্রাক্কলন করতে হয় ন্যূনতম বিচ্যুতির বর্গের মাধ্যমে।

ক) x- এর উপর y -এর নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয় ও মূল্যায়ণ:

যে কোন প্রদত্ত উপাত্ত থেকে ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতিতে x-এর উপর y-এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণটি নিম্নরূপঃ

$y = a_1 + b_1x$ যেখানে, y = অধীন চলক x = স্বাধীন চলক

$a_1 = \bar{y} - b_1\bar{x}$ (ধ্রুবক)

$$b_1 = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x . \Sigma y}{N}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}} \text{ (ধ্রুবক)}$$

বা, $b_1 = \frac{N.\Sigma xy - \Sigma x.\Sigma y}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$ $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{N}$ $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$

মূল্যায়ন ঃ

$y = a_1 + b_1x$ .... (1)

$\Sigma y = Na_1 + b_1\Sigma x$ .... (2)

$\Sigma xy = a_1\Sigma x + b_1\Sigma x^2$ .... (3)

2 নং সমীকরণকে N দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়:

$$\frac{\Sigma y}{N} = \frac{Na_1}{N} + \frac{b_1\Sigma x}{N}$$

অর্থাৎ $\bar{y} = a_1 + b_1\bar{x}$ .... (4)

$\therefore a_1 = \bar{y} - b_1\bar{x}$

আবার 2 নং সমীকরণের উভয় পার্শ্বে Σx দ্বারা গুণ করে পাই,

$\Sigma x \, \Sigma y = Na_1 \, \Sigma x + b_1\Sigma x^2$ .... (5)

এবং 3 নং সমীকরকে N দ্বারা গুণ করে পাই,

$N\Sigma xy = Na_1\Sigma x + Nb_1\Sigma x^2$ .... (6)

এখন 6 নং সমীকরণ থেকে 5 নং সমীকণ বিয়োগ করে পাই,

$N\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y = b_1 \, [N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2]$

$$\therefore b_1 = \frac{N\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x.\Sigma y}{N}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}}$$

(খ) y-এর উপর x-এর নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয় ও মূল্যায়ন ঃ

ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতিতে y-এর উপর x-এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণটি নিম্নরূপ ঃ

$x = a_2 + b_2x$ যেখানে, y = স্বাধীন চলক x = অধীন চলক

$a_2 = \bar{x} - b_2\bar{y}$ (ধ্রুবক)

$$b_2 = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x.\Sigma y}{N}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}} \text{ (ধ্রুবক)}$$

বা, $b_2 = \frac{N.\Sigma xy - \Sigma x.\Sigma y}{N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$ $\quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$ $\quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{N}$

মূল্যায়ন ঃ

$x = a_2 + b_2y$ .... (1)

$\Sigma x = Na_2 + b_2\Sigma y$ .... (2)

$\Sigma xy = a_2\Sigma y + b_2\Sigma y^2$ .... (3)

পূর্বের পদ্ধতিতে সমাধান করে পাই,

যেখানে, $b_2 = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x.\Sigma y}{N}}{\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{N}}$

অথবা, $b_2 = \frac{N.\Sigma xy - \Sigma x.\Sigma y}{N\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$

$a_2 = \bar{x} - b_2\bar{y}$ (ধ্রুবক)

<u>বিচ্যুতি গ্রহণের মাধ্যমে b_1 ও b_2 -এর মান নির্ণয়ঃ</u>

যখন x ও y চলকের মান অত্যন্ত বড় হয় তখন চলকসমূহের যে কোন একটি মানকে কাল্পনিক গড় ধরে তা থেকে প্রতিটি চলকের বিচ্যুতি গ্রহণের মাধ্যমে b_1 ও b_2 এর মান নির্ণয় করা হয। সে ক্ষেত্রে সূত্র দু'টি নিম্নরূপে লিখতে হবে-

(i) $b_1 = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx\Sigma dy}{N}}{\Sigma dx^2 - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}}$ অথবা, $b_1 = \frac{N.\Sigma dxdy - \Sigma dx\Sigma dy}{N\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}$	(ii) $b_2 = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx\Sigma dy}{N}}{\Sigma dy^2 - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}$ অথবা, $b_2 = \frac{N.\Sigma dy - N.\Sigma dx\Sigma dy}{N.\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}$

যেখানে,

dx = x-চলকের কাল্পনিক গড় থেকে মানসমূহের পার্থক্য

dy = y-চলকের কাল্পনিক গড় থেকে মানসমূহের পার্থক্য

N = মোট দফার সংখ্যা।

সহ-সম্বন্ধ অংক ও পরিমিত ব্যবধানের সাহায্যে নির্ভরাঙ্ক নির্ণয়

Calculation of Coefficient of Regression with the help of Correlation Coefficient and Standard Deviation

যখন দুটো চলকে পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation) ও সহ-সম্বন্ধ অংক দেয়া থাকে তখন নিম্নলিখিত সূত্রের মাধ্যমে নির্ভরাঙ্ক নির্ণয় করা হয় ঃ

১। x-এর উপর y-এর নির্ভরাঙ্ক ঃ $b_1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_y}$

২। y-এর উপর x-এর নির্ভরাঙ্ক ঃ $b_2 = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

যেখানে r = x ও y চলকের সহ-সম্বন্ধ অংক

σ_x = x চলকের পরিমিত ব্যবধান

σ_y = y চলকের পরিমিত ব্যবধান

গাণিতিক গড়, সহ সম্বন্ধ অংক ও পরিমিত ব্যবধানের সাহায্যে নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয়:

Calculation of Regression Equation with the help of Mean, standard Deviation and Coefficient of correlation

যদি কোন সমস্যাতে $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x, \sigma_y$ ও r-এর মান জ্ঞাত থাকে তবে তা থেকে নির্ভরণ সমীকরণদ্বয় সহজেই নির্ণয় করা যায়। এ ক্ষেত্রে সমীকরণ দু'টির প্রাথমিক আকার হবে নিম্নরূপ ঃ

১। x-এর উপর y-এর নির্ভরণ সমীকরণ ঃ $(y-\bar{y}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$

২। y-এর উপর x-এর নির্ভরণ সমীকরণ ঃ $(x-\bar{x}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})$

নির্ভরাঙ্কের সাহায্যে সহ-সম্বন্ধ অংক নির্ণয়

Calculation of Coefficient of Correlation with the help of Coefficient of Regression

যখন b_1 ও b_2 এর মান পাওয়া যায় তাহলে তা দ্বারা সহ-সম্বন্ধ অংক (r) নির্ণয় করা যায়। এ ক্ষেত্রে সমীকরণ হবে নিম্নরূপ ঃ $r = \sqrt{b_1 \times b_2}$

যেখানে, r = সহ-সম্বন্ধ অংক

b_1 = x-এর উপর y-এর নির্ভরাঙ্ক

b_2 = y-এর উপর x-এর নির্ভরাঙ্ক।

সংশ্লেষণ ও নির্ভরণের মধ্যে পার্থক্য

সংশ্লেষ ও নির্ভরণের মধ্যে কোন কোন ক্ষেত্রে মিল আছে আবার কোন কোন ক্ষেত্রে অনেক পার্থক্য বিদ্যমান। নিম্নে সংশ্লেষণ ও নির্ভরণের মধ্যে পার্থক্যের তুলনামূলক আলোচনা দেওয়া হল:

সংশ্লেষণ	নির্ভরণ
১। সংশ্লেষণ-এর মাধ্যমে দুই বা ততোধিক চলকের কোন সম্পর্ক আছে কিনা তাকে বুঝায়।	১। দুই বা ততোধিক স্বাধীন চলকের জন্য নির্ভরশীল চলকের গড় মান নির্ণয় করা বুঝায়।
২। সংশ্লেষণ-এ চলক সমূহের সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিশ্লেষণ করা যায় না।	২। নির্ভরণের প্রধান কাজ হল সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিশ্লেষণ করা।
৩। সংশ্লেষণ-এ স্বাধীন চলক ও নির্ভরশীল চলকের ধারণা	৩। নির্ভরণে যে চলক প্রভাবিত হয় তাকে নির্ভরশীল চলক

নেই।	বলে। বাকি চলকগুলো স্বাধীন চলক।
৪। r_{xy} ও r_{yx} নির্ণয় করলে একই মান পাওয়া যায়।	৪। র্নিভরণের ক্ষেত্রে নির্ভরাংক $bxy \neq byx$
৫। সংশ্লেষাঙ্কের মান সর্বদা-১ ও +১ এর মধ্যে অবস্থিত।	৫। নির্ভরাঙ্কের মান- α থেকে $+\alpha$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।
৬। সংশ্লেষণ-এর ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি চলকই দৈব বিবেচনা করা হয়।	৬। নির্ভরনের ক্ষেত্রে শুধু মাত্র নির্ভরশীল চলক দৈব চলক হিসাবে বিবেচিত।

এক নজরে নির্ভরাঙ্কের সূত্রাবলী

ক) অশ্রেণিকৃত তথ্যের নির্ভরাঙ্ক

i)সরাসরি পদ্ধতিঃ

- যখন $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ -এর মান জানা ও পূর্ণসংখ্যা।

x এর উপর y এর নির্ভর রেখা ঃ

আমরা জানি, x এর উপর y এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $y = a_1+b_1x$ .... (i)

আবার, $b_1 = \dfrac{\Sigma x_i y_i - \dfrac{\Sigma x_i y_i}{n}}{\Sigma x_i^2 - \dfrac{(\Sigma x_i)^2}{n}}$ [এখানে, $b_1 = b_{yx}$]

এবং $a_1 = \bar{y} - b_1\bar{x}$

y এর উপর x এর নির্ভরণ রেখা ঃ

আমরা জানি, y এর উপর x এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $x = a_2+b_2y$ .... (ii)

আবার, $b_2 = \dfrac{\Sigma x_i y_i - \dfrac{\Sigma x_i y_i}{n}}{\Sigma y_i^2 - \dfrac{(\Sigma y_i)^2}{n}}$ [এখানে, $b_2=b_{xy}$]

এবং $a_2 = \bar{x} - b_2\bar{y}$

ii) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি :

- x ও y-এর মান গুলো বড় হলে $d_x= x_i - A_x$ এবং $d_y= y_i - A_y$ যখন কল্পিত গড় বা অনুমিত গড় থেকে বিচ্যুতি নেয়া হয়।

x এর উপর y এর নির্ভরণ সমীকরণ ঃ

আমরা জানি, x এর উপর y এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $y = a_1+b_1x$ .... (i)

আবার, $b_1 = \dfrac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{\Sigma d_x . \Sigma d_y}{N}}{\Sigma d_x^2 - \dfrac{(\Sigma d_x)^2}{N}}$ [এখানে, $b_1 = b_{yx}$]

এবং $a_1 = \bar{y} - b_1\bar{x}$

y এর উপর x এর সমীকরণ ঃ

আমরা জানি, y এর উপর x এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $x = a_2+b_2y$ .... (ii)

আবার, $b_2 = \dfrac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{\Sigma d_x . \Sigma d_y}{N}}{\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_y)^2}{N}}$ [এখানে, $b_2=b_{xy}$]

এবং $a_2 = \bar{x} - b_2 \bar{y}$

ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি:

ক) x- এর উপর y -এর নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয় ও মূল্যায়ণ:

আমরা জানি, x এর উপর y এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $y = a_1+b_1x$

$y = a_1 + b_1x$ .... (1)

$\Sigma y = Na_1 + b_1\Sigma x$ .... (2)

$\Sigma xy = a_1\Sigma x + b_1\Sigma x^2$ .... (3)

(খ) y-এর উপর x-এর নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয় ও মূল্যায়ন ঃ

আমরা জানি, y এর উপর x এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $x = a_2 + b_2y$

$x = a_2 + b_2y$ .... (1)

$\Sigma x = Na_2 + b_2\Sigma y$ .... (2)

$\Sigma xy = a_2\Sigma y + b_2\Sigma y^2$ .... (3)

খ) শ্রেণিকৃত/ দ্বিচলক তথ্যের নির্ভরাঙ্ক

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y - \dfrac{\Sigma f d_x \Sigma f d_y}{N}}{\sqrt{\left\{\Sigma f d_x^2 - \dfrac{(\Sigma f d_x)^2}{N}\right\}\left\{\Sigma f d_y^2 - \dfrac{(\Sigma f d_y)^2}{N}\right\}}}$$

উদাহরণ:

ক) অশ্রেণিকৃত তথ্যের সহ-সম্বন্ধ

i)সরাসরি পদ্ধতিঃ

- যখন $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ -এর মান জানা ও পূর্ণসংখ্যা।

নিম্নে ভিকারুন নিসা নুন কলেজের সাত জন ছাত্রীর পরিসংখ্যান ও যুক্তিবিদ্যারর নম্বর দেয়া হলঃ

পরিসংখ্যানের নম্বর	42	50	55	62	70	73	78
যুক্তিবিদ্যার নম্বর	40	57	51	60	65	67	70

নির্ভরণরেখাদ্বয় নির্ণয় কর এবং একজন ছাত্রীর পরিসংখ্যানের নম্বর ৫২ হলে যুক্তি বিদ্যার নম্বর এবং যুক্তি বিদ্যার নম্বর ৫৮ হলে পরিসংখ্যানের নম্বর নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরা যাক, পরিসংখ্যানের নম্বর চলক, x_i এবং যুক্তিবিদ্যার নম্বর চলক y_i

নির্ভরাংকদ্বয় নির্ণয়ের তালিকা

x_i	y_i	xy	x^2	y^2
42	40	1680	1764	1600
50	57	2850	2500	3249
55	51	2805	3025	2601
62	60	3720	3844	3600
70	65	4550	4900	4225
73	67	4891	5329	4489
78	70	5460	6084	4900
x_i =430	y_i =410	xy = 25956	x^2 =27446	y^2 = 24664

x এর উপর y এর নির্ভর রেখা ঃ

আমরা জানি, x এর উপর y এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $y = a_1+b_1x$ .... (i)

আবার, $b_1 = \dfrac{\Sigma x_i y_i - \dfrac{\Sigma x_i y_i}{n}}{\Sigma x_i^2 - \dfrac{(\Sigma x_i)^2}{n}}$ [এখানে, $b_1 = b_{yx}$]

$$= \frac{25696 - \dfrac{(430)(410)}{7}}{27446 - \dfrac{(430)^2}{7}} = \frac{25956 - 25185.71}{27446 - 26414.29} = \frac{770.29}{1031.71} = 0.75$$

আবার, $a_1 = \bar{y} - b_1\bar{x} = \dfrac{\Sigma y}{n} - (0.75)\dfrac{\Sigma xi}{n} = \dfrac{410}{7} - (0.75)\dfrac{430}{7}$ = 58.57-46.07=12.50

এখন a_2 এবং b_2 এর মান সমীঃ (i) বসাই- x = 12.50+0.75x

ইহাই নির্ণেয় x এর উপর y এর নির্ভরণ সমীকরণ।

এখন, পরিসংখ্যাণের নম্বর 52 (x=52) হলে যুক্তিবিদ্যার নম্বর (y) নিম্নরূপ হবে-

y_e বা y = 12.50+(0.75)(52) = 51.5 (উঃ)

y এর উপর x এর নির্ভরণ রেখা ঃ

আমরা জানি, y এর উপর x এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $x = a_2+b_2y$ .... (ii)

আবার, $b_2 = \dfrac{\Sigma x_i y_i - \dfrac{\Sigma x_i y_i}{n}}{\Sigma y_i^2 - \dfrac{(\Sigma y_i)^2}{n}}$ [এখানে, $b_2=b_{xy}$]

$$= \frac{25956 - \dfrac{(430)(410)}{7}}{24664 - \dfrac{(410)^2}{7}} = \frac{25956 - 25185.71}{24664 - 24014.29} = \frac{770.29}{649.71} = 1.19$$

আবার, $a_2 = \bar{x} - b_2\bar{y} = \frac{\Sigma x}{n}$ - (1.19) $\frac{\Sigma y}{n} = \frac{430}{7}$ - (1.19) $\frac{410}{7}$ = 61.43-69.7=-8.27

এখন a_2 এবং b_2 এর মান সমীঃ (ii) বসাই- x = -8.27+1.19y

ইহাই নির্ণেয় y-এর উপর x এর নির্ভরণ সমীকরণ।

এখন, যুক্তিবিদ্যার নম্বর 58 (y=58) হলে পরিসংখ্যানের নম্বর নিম্নরূপ হবে-

x = -8.27+(1.19) 58 =60.75 (উঃ)

ii) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি :

- x ও y-এর মান গুলো বড় হলে $d_x = x_i - A_x$ এবং $d_y = y_i - A_y$ যখন কল্পিত গড় বা অনুমিত গড় থেকে বিচ্যুতি নেয়া হয়।

x_i	y_i	$d_x = x_i - A_x(55)$	$d_y = y_i - A_y(57)$	$d_x d_y$	d^2_x	d^2_y
42	40	-13	-17	2.21	1.69	2.89
50	57	-5	0	0	0.25	0
55	51	0	-6	0	0	0.36
62	60	7	3	0.21	0.49	0.09
70	65	15	8	1.2	2.25	0.64
73	67	18	10	1.8	3.24	1
78	70	23	13	2.99	5.29	1.69
		$\Sigma d_x = 45$	$\Sigma d_y = 11$	$\Sigma d_x d_y$ =841	Σd^2_x =1321	Σd^2_y = 667

x এর উপর y এর নির্ভরণ সমীকরণ ঃ

আমরা জানি, x এর উপর y এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $y = a_1 + b_1 x$ .... (i)

আবার, $b_1 = \dfrac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{\Sigma d_x . \Sigma d_y}{N}}{\Sigma d_x^2 - \dfrac{(\Sigma d_x)^2}{N}}$ [এখানে, $b_1 = b_{yx}$]

$$= \frac{841 - \frac{(45)(11)}{7}}{1321 - \frac{(45)^2}{7}}$$

$$= \frac{841 - 70.71}{1321 - 289} = \frac{770.3}{1032} = 0.75$$

এবং $a_1 = \bar{y} - b_1\bar{x}$ = 58.57-(0.75)(61.43) = *12.50*

এখানে, $\bar{x} = Ax + dx = 55 + \frac{45}{7} = 61.43$

এবং $\bar{y} = Ay + dy = 57 + \frac{11}{7} = 58.57$

এখন a_1 এবং b_1 এর মান সমীঃ (i) বসাই- $y = 12.50+(0.75)x$

ইহাই নির্ণেয় x এর উপর y এর নির্ভর রেখার সমীকরণ।

এখন, পরিসংখ্যাণের নম্বর 52 (x=52) হলে যুক্তিবিদ্যার নম্বর নিম্নরূপ হবে-

$y = 12.50+(0.75)\ 52 = 51.5$ (উঃ)

y এর উপর x এর সমীকরণ ঃ

আমরা জানি, y এর উপর x এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $x = a_2+b_2y$ .... (ii)

আবার, $b_2 = \dfrac{\Sigma d_x d_y - \dfrac{\Sigma d_x . \Sigma d_y}{N}}{\Sigma d_y^2 - \dfrac{(\Sigma d_y)^2}{N}}$ [এখানে, $b_2=b_{xy}$]

$$= \frac{8.41 - \dfrac{(4.5)(1.1)}{7}}{6.67 - \dfrac{(1.1)^2}{7}}$$

$$= \frac{8.41 - 0.71}{6.67 - 0.173}$$

$$= \frac{7.7}{6.497} = 1.19$$

আবার, $a_2 = \bar{x} - b_2\bar{y} = 61.43 - (1.19)(58.57) = 61.43 - 69.698 = -8.27$

এখন a_2 এবং b_2 এর মান সমীঃ (ii) বসাই- $x = -8.27+(1.19)y$

ইহাই নির্ণেয় y-এর উপর x এর নির্ভরণ সমীকরণ।

এখন, যুক্তিবিদ্যার নম্বর 58 (x=58) হলে পরিসংখ্যানের নম্বর নিম্নরূপ হবে ঃ

$x_e = -8.27+(1.19)\ (58) = 60.75$ (উঃ)

ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি:

সমাধান: ধরা যাক, পরিসংখ্যানের নম্বর চলক, x_i এবং যুক্তিবিদ্যার নম্বর চলক y_i

নির্ভরাংকদ্বয় নির্ণয়ের তালিকা

x_i	y_i	xy	x^2	y^2
42	40	1680	1764	1600
50	57	2850	2500	3249
55	51	2805	3025	2601
62	60	3720	3844	3600
70	65	4550	4900	4225
73	67	4891	5329	4489
78	70	5460	6084	4900
x_i =430	y_i =410	xy = 25956	x^2 =27446	y^2 = 24664

ক) x- এর উপর y -এর নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয় ও মূল্যায়নঃ

আমরা জানি, x এর উপর y এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $y = a_1+b_1x$

$y = a_1 + b_1x$ .... (1)
$\Sigma y = Na_1 + b_1\Sigma x$ .... (2)
$\Sigma xy = a_1\Sigma x + b_1\Sigma x^2$ .... (3)

(2) ও (3) সমীকরণ এ মান বসিয়ে পাই
410=7a+430b .... (4)
25956=430a+27446b...........(5)
(4)নং কে 430 দ্বারা এবং (5) কে 7 দ্বারা গুন করে এবং
(4)নং থেকে (5)নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই
176300=3010a+184900b
181692=3010a +192122b
-5392 = -7222b

$\frac{-5392}{-7222} = b$

b = 0.75

b এর মান (4) সমীকরণ এ মান বসিয়ে পাই
410=7a+430b
410=7a+430(0.75)
410-322.5= 7a
87.5 = 7a

$\frac{87.5}{7} = a$

a = 12.50

এখন a_1 এবং b_1 এর মান সমীঃ (i) বসাই- $y = 12.50+(0.75)x$
ইহাই নির্ণেয় x এর উপর y এর নির্ভর রেখার সমীকরণ।
এখন, পরিসংখ্যাণের নম্বর 52 (x=52) হলে যুক্তিবিদ্যার নম্বর নিম্নরূপ হবে-
$y = 12.50+(0.75)\ 52 = 51.5$ (উঃ)

(খ) y-এর উপর x-এর নির্ভরণ সমীকরণ নির্ণয় ও মূল্যায়ন ঃ

আমরা জানি, y এর উপর x এ নির্ভরণ রেখার সমীকরণ- $x = a_2 + b_2y$
$x = a_2 + b_2y$ .... (1)
$\Sigma x = Na_2 + b_2\Sigma y$ .... (2)
$\Sigma xy = a_2\Sigma y + b_2\Sigma y^2$ .... (3)

(2) ও (3) সমীকরণ এ মান বসিয়ে পাই
430=7a+410b .... (4)
25956=410a+24664b ....(5)
(4)নং কে 410 দ্বারা এবং (5) কে 7 দ্বারা গুন করে এবং
(4)নং থেকে (5)নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই

$176300 = 2870a + 168100b$

$\underline{181692 = 2870a + 172648b}$

$-5392 = -4548b$

$\frac{-5392}{-4548} = b$

$b = 1.19$

b এর মান (4)সমীকরণ এ মান বসিয়ে পাই

$430 = 7a + 410b$

$430 = 7a + 410(1.19)$

$430 - 487.9 = 7a$

$57.9 = 7a$

$\frac{57.9}{7} = a$

$a = - 8.27$

এখন a_2 এবং b_2 এর মান সমীঃ (ii) বসাই- $x = -8.27 + (1.19)y$

ইহাই নির্ণেয় y-এর উপর x এর নির্ভরণ সমীকরণ।

এখন, যুক্তিবিদ্যার নম্বর 58 ($x=58$) হলে পরিসংখ্যানের নম্বর নিম্নরূপ হবে ঃ

$x_e = -8.27 + (1.19)(58) = 60.75$ (উঃ)

সারসংক্ষেপ:

নির্ভরন হচ্ছে একটি স্বাধীন চলকের উপর আর একটি নির্ভরশীল চলকের নির্ভরণ। বিচ্যুতি সমূহের বর্গের সমষ্টি ন্যূনতম করে যে পদ্ধতির মাধ্যমে নির্ভরাঙ্কের মান বের করা হয় তাকে ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি বলে নির্ভরাঙ্ককে সাধারণ। byx দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$b_{yx} = \frac{\frac{\Sigma x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-৮

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। সংশ্লেষের সংজ্ঞা লিখুন। পিয়ারসনের সংশ্লেষাঙ্ক r এর সূত্র লিখুন।

২। সংশ্লেষাঙ্কে সংজ্ঞা লিখুন। সংশ্লেষাঙ্কের ধর্মগুলো লিখুন।

৩। সংশ্লেষ কত প্রকার লিখুন। বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে কি ভাবে সংশ্লেষের ব্যাখ্যা করা যায় লিখুন।

৪। সংশ্লেষের সূত্রটি লিখুন? প্রমাণ করুন যে সংশ্লেষাংকের মান সর্বদা - ১ ও + ১ এর মধ্যে অবস্থান করে।

৫। শূন্য সংশ্লেষের সংজ্ঞা লিখুন। প্রমান করুন দুইটি স্বাধীন চলকের ক্ষেত্রে সংশ্লেষাঙ্ক $r = ০$।

৬। নিম্নলিখিত মানগুলোর অর্থ ব্যাখ্যা করুন

১. $r = ০$ ২ $r = -১$ ৩. $r \leq +১$

৭। সম্ভাব্য বিচ্যুতির সংজ্ঞা লিখুন। সম্ভাব্য বিচ্যুতির সাহায্যে সংশ্লেষাঙ্কের ব্যাখ্যা কিভাবে দেওয়া যায় লিখুন।

৮। নির্ভরণ রেখার সংজ্ঞা লিখুন। ন্যূনতম পদ্ধতির ধারণা লিখুন?

৯। নির্ভরণ রেখার পরিমান কিভাবে নির্ণয় করা যায় লিখুন? প্রাককলিত রেখা নির্ণয় করুন

১০। নির্ভরাঙ্কের সংজ্ঞা লিখুন। নির্ভরাঙ্কের সাথে সংশ্লেষণের পার্থক্য নির্ণয় করুন।

১১। প্রমাণ করুন সংশ্লেষাঙ্ক নির্ভরাঙ্কদ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান।