পরিঘাত, বঙ্কিমতা ও সূচলতা
Moments, Skewness and Kurtosis

৭

ভূমিকা

গণসংখ্যা নিবেশনের কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও বিস্তার পরিমাপ সম্পর্কে পূর্বের অধ্যায়ে বিস্তারিত আলোচনা করেছি। এ ইউনিটে আমরা কোনো গণসংখ্যা নিবেশনের প্রকৃতি আরও জানার জন্য আরও ভালোভাবে কিছু বৈশিষ্ট্য যেমন– বঙ্কিমতা ও সূচলতা সম্বন্ধে আলোচনা করব। বঙ্কিমতা সূচলতার পরিমাপ নির্ণয়ের পরিঘাত নামক অপর একটি পরিমাপের সাহায্য নেয়া হয়।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় দুই সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৭.১: পরিঘাত
পাঠ-৭.২: পরিঘাত নির্ণয় পদ্ধতি
পাঠ-৭.৩: বঙ্কিমতা ও এর প্রকারভেদ
পাঠ-৭.৪ : বঙ্কিমতার পরিমাপ
পাঠ-৭.৫ : সূচলতা

পাঠ-৭.১ পরিঘাত (Moments)

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পরিঘাত এর সংজ্ঞা পারবেন;
- পরিঘাতের প্রকারভেদ সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার পরিঘাতের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

পরিঘাত (Moment)

কোন তথ্য সারির প্রতিটি মান হতে যে কোনো একটি ধ্রুবক বা গাণিতিক গড়ের ব্যবধান নেয়া হয়। প্রতিটি ব্যবধান একই ঘাত নিয়ে এদের সমষ্টিকে তথ্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকেই পরিঘাত বা Moment বলে।

নিম্নে পরিঘাতের সংজ্ঞার গাণিতিক রূপ এবং প্রকারভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা হলো এবং পরিসংখ্যানে সাধারণত প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় এবং চতুর্থ পরিঘাত বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়। পরবর্তী পরিঘাতগুলো (৫ম, ৬ষ্ঠ, ---) ব্যবহার হয় না বললেই চলে, এ অধ্যায়ে প্রথম চারটি পরিঘাতের মধ্যে আলোচনা সীমাবদ্ধ রাখা হয়েছে।

পরিঘাতের প্রকারভেদ (Types of Moment) :

বিন্যাসের বিভিন্ন বিন্দু হতে পরিঘাত নির্ণয় করা হয়। গাণিতিক গড় হতে সংজ্ঞায়িত পরিঘাতগুলিকে শোধিত বা কেন্দ্রীয় পরিঘাত বলে। গাণিতিক গড় ব্যতীত অন্য যে কোন বিন্দু হতে সংজ্ঞায়িত পরিঘাতগুলিকে অশোধিত পরিঘাত বলে। তাই কোন বিন্যাসের পরিঘাত সাধারণত: দুইভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

পরিঘাতের সংজ্ঞার উপর ভিত্তি করে একে প্রধানত দু'ভাগে ভাগ করা যায়। যথা: (১) অশোধিত বা কাঁচা পরিঘাত (Raw Moments); (২) শোধিত বা কেন্দ্রীয় পরিঘাত (Central Moments); গাণিতিক গড় হতে।

(১) অশোধিত বা কাঁচা পরিঘাত (Raw moments) : কোন তথ্য সারি বা সারণীর বিভিন্ন মান থেকে গাণিতিক গড় ব্যতীত অন্য কোনো ধ্রুবক হতে বিচ্যুতি নিয়ে পরিঘাত নির্ণয় করলে তাকে কাঁচা বা অশোধিত পরিঘাত বলে।

অশোধিত পরিঘাত গ্রীক অক্ষর μ'_r = [1,2,3.4] এবং উচ্চারণ (মিউ r প্রাইম বা ড্যাশ) দ্বারা প্রকাশ করা হয়] r এর মান 1 বসানো হলে μ'_1 হবে এবং ইহা প্রথম কাঁচা পঘিাত হবে। অনুরূপ ভাবে r = 2, 3, 4 বা অন্য কিছু হলে তত তম কাঁচা পরিঘাত বলা হবে।

যে কোন ধ্রুবক সংখ্যা (a) হতে,

i) অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে: ধরি কোন একটি চলক x এর n সংখ্যক মান যথাক্রমে $x_1, x_2, ----x_n$ এবং গড় ব্যতিত কোন একটি সংখ্যা a(x≠a) হলে- $\mu'_r = \frac{\sum (x_1 - a)^r}{n}$ -----------(i) [r = 1, 2, 3, 4]

এখন উপরের সূত্রটিতে r = 1, 2, 3 এবং 4 বসালে পাই-

r =1 হলে ১ম অশোধিত পরিঘাত, $\mu'_1 = \frac{\sum (x_1 - a)}{n}$;

r = 2 হলে ২য় অশোধিত পরিঘাত, $\mu'_2 = \frac{\sum (x_1 - a)^2}{n}$;

r = 3 হলে ৩য় অশোধিত পরিঘাত, $\mu_3' = \frac{\sum (x_1 - a)^3}{n}$;

$r = 4$ হলে ৪র্থ অশোধিত পরিঘাত $\mu_4' = \frac{\sum (x_1 - a)^4}{n}$;

উল্লেখ্য উপরের পরিঘাতগুলো কোন একটি সংখ্যা (গাণিতিক গড় ব্যতিত) a থেকে নির্ণীত হয় এজন্য উক্ত পরিঘাত গুলোকে a থেকে নির্ণীত বা 'a' থেকে মাপা বা 'a' এর সাপেক্ষে নির্ণীত পরিঘাত বলা হয়। যেমন a =5 হলে, 5 থেকে নির্ণীত বা মাপা পরিঘাত বলা হয়। a = 0 হলে, 0 থেকে নির্ণীত পরিঘাত বল হয়।

ii) **শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে :** ধরা যাক কোনো গণসংখ্যা নিবেশনের n সংখ্যক মান বা শ্রেণির মধ্যমান যথাক্রমে x_1, x_2, ...x_n এবং এদের সংশ্লিষ্ট গণসংখ্যা $f_1, f_2, ...,f_n$ ও এর গাণিতিক গড় $\bar{x}$ গাণিতিক গড় ব্যতিত যে কোন একটি সংখ্যা $a(\bar{x} \neq a)$ এবং $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$ হলে

$$\mu_r' = \frac{\sum f_i (x_i - a)^r}{N} \text{ -----------(ii)} \qquad [\ r = 1, 2, 3, 4]$$ এখন,

r =1 হলে প্রথম অশোধিত পরিঘাত, $\mu_1' = \frac{\sum f_i (x_i - a)}{N}$;

r = 2 হলে দ্বিতীয় অশোধিত পরিঘাত, $\mu_2' = \frac{\sum f_i (x_i - a)^2}{N}$;

r= 3 হলে চতুর্থক অশোধিত পরিঘাত, $\mu_3' = \frac{\sum f_i (x_i - a)^3}{N}$;

r= 4 হলে চতুর্থক অশোধিত পরিঘাত, $\mu_4' = \frac{\sum f_i (x_i - a)^4}{N}$;

একটি বিষয় উল্লেখ করা প্রয়োজন যে যদি উপরের অশোধিত পরিঘাতে যে কোন একটি সংখ্যা a এর স্থলে শূন্য ধরা হয় তবে তাকে মূল বিন্দুর সাপেক্ষে পরিঘাত বলা হয়।

(২) শোধিত বা কেন্দ্রীয় পরিঘাত (Central Moments): কোন নিবেশনের বা সারির বিভিন্ন মান থেকে গাণিতিক গড়ের বিচ্যুতি নিয়ে পরিঘাত নির্ণয় করতে হলে তাকে কেন্দ্রীয় বা শোধিত পরিঘাত বলে।

কেন্দ্রীয় পরিঘাত অন্যান্য পরিঘাতের ন্যায় প্রথম চারটি বিশেষ ভাবে ব্যবহৃত হয় এবং $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ দ্বারা যথাক্রমে প্রথম চারটি কেন্দ্রীয় পরিঘাত প্রকাশ করা হয়।

i) অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে: ধরা যাক কোন একটি চলক x এর n সংখ্যক মান যথাক্রমে x_1, x_2, ----, x_n এবং এর গাণিতিক গড় $\bar{x}$ হলে–

'r' তম কেন্দ্রীয় পরিঘাত $\mu_r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^r}{n}$ -----------(iii) [r = 1, 2, 3,4]

এখন r = 1 হলে প্রথম কেন্দ্রীয় পরিঘাত, $\mu_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n} = 0$

r = 2 হলে দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় পরিঘাত, $\mu_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ = ভেদাংক

r = 3 হলে তৃতীয় কেন্দ্রীয় পরিঘাত, $\mu_3 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n}$

r = 4 হলে চতুর্থ কেন্দ্রীয় পরিঘাত, $\mu_4 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n}$

ii) শ্রেণিকৃত (বিচ্ছিন্ন বা অবিচ্ছিন্ন গণসংখ্যা সারণী) তথ্যের ক্ষেত্রে : ধরা যাক, কোনো একটি গণসংখ্যা সারণীর শ্রেণীর মধ্যমান হলো x_1, x_2, x_3, -----x_n এবং এদের সংশ্লিষ্ট গণসংখ্যা যথাক্রমে f_1, f_2, ..., f_n ও এর গাণিতিক গড় $\bar{x}$ যেখানে $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$ হলে–

'r' তম কেন্দ্রীয় পরিঘাত $\mu_r = \dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^r}{N}$ -----------(iv) [r = 1, 2, 3,4]

এখন r = 1 হলে প্রথম কেন্দ্রীয় পরিঘাত, $\mu_1 = \dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})}{N} = 0$

r = 2 হলে দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় পরিঘাত, $\mu_2 = \dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$ = ভেদাংক

r = 3 হলে তৃতীয় কেন্দ্রীয় পরিঘাত, $\mu_3 = \dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{N}$

r = 4 হলে চতুর্থ কেন্দ্রীয় পরিঘাত, $\mu_4 = \dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{N}$

শোধিত বা কেন্দ্রীয় পরিঘাত ও অশোধিত পরিঘাতের মধ্যে সম্পর্ক

(Relation between Central moments and Raw moments):

প্রথম চারটি শোধিত বা কেন্দ্রীয় পরিঘাতকে অশোধিত বা কাঁচা পরিঘাতের মাধ্যমে প্রকাশ

নিম্নে প্রথম চারটি শোধিত বা কেন্দ্রীয় পরিঘাতকে অশোধিত বা কাঁচা পরিঘাতের মাধ্যমে প্রকাশ করা হল:

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1' + 2\mu_1'^3$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3' .\mu_1' + 6\mu_2' .\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$

পাঠ-৭.২ পরিঘাত নির্ণয় পদ্ধতি (Determining Procedure of Moment's)

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পরিঘাত নির্ণয় পদ্ধতি সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- পরিঘাতের সংশোধনী করতে পারবেন;
- মূল ও স্কেলের উপর পরিঘাতের প্রভাব সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

পরিঘাত নির্ণয় পদ্ধতি ঃ

কোন চলকের কিংবা চলকের গণসংখ্যা নিবেশনে সাধারণত: চারটি পরিঘাত ঃ μ'_1 , μ_2 , μ_3 এবং μ_4 বেশি ব্যবহৃত হয়ে থাকে। $\mu'_১$ (চলকের গড়) এবং $\mu_২$ (চলকের ভেদাংক) এর নির্ণয় পদ্ধতি আগে আলোচিত হয়েছে।

প্রথমে অশোধিত পরিঘাত μ'_1, μ'_2, μ'_3 এবং μ'_4 (সূত্রসমূহ পূর্বে দেওয়া আছে) নির্ণয় করতে হবে।

অশোধিত পরিঘাতের সাহায্যে পাঠ-৭.১ এর সূত্রের সাহায্যে কেন্দ্রীয় পরিঘাত μ_1 ,μ_2 , μ_3 এবং μ_4 নির্ণয় করা যায়।

পরিঘাতের সংশোধনী ঃ

শ্রেণিকৃত গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে পরিঘাত নির্ণয়ের সময় শ্রেণির মানগুলোকে ঐ শ্রেণির মধ্যমানের সমান অনুমান করা হয় কারণ হিসেবে মনে করা হয় যে মধ্যবিন্দুতে ঐ শ্রেণীর সকল গণসংখ্যা কেন্দ্রীভূত থাকে। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে এই অনুমান সকল সময় সঠিক নয় যার ফলে প্রতি শ্রেণির মধ্যমানের সাথে গড়ের ব্যবধানের মানের বর্গ, ঘনত্ব ইত্যাদি নেয়ার ফলে পরিঘাত নির্ণয়ে কিছুটা ভুল ফল দেয় পরিঘাত নির্ণয়ে এ ভুলকে শ্রেণিকরণ ভুল বলা হয়। এ ভুল বা ত্রুটির সংশোধন করা প্রয়োজন। উচ্চতর পরিঘাত নির্ণয়ের ক্ষেত্রে এই ত্রুটি আরও প্রকট। তবে বিজোড় সংখ্যা পরিঘাতের ক্ষেত্রে এই ভুল সংশোধনের প্রয়োজন হয় না কারণ ত্রুটির ঋনাত্মক ও ধনাত্মক মানসমূহ পরস্পর একত্রীকরণের ফলে ত্রুটির পরিমাণ সাধারনত থাকে না। কিন্তু জোড় সংখ্যক পরিঘাতের ক্ষেত্রে সমস্ত মানগুলো ধনাত্মক হওয়ার ফলে ত্রুটি সংশোধন করতে হবেই। W.F. Seffered এ ধরণের ত্রুটি সংশোধনের জন্য নিম্নলিখিত সূত্র দিয়েছেন এবং তাঁর নামানুসারে একে সেফার্ড সংশোধনী বলা হয়।

ত্রুটিমুক্ত $\mu_2 = \mu_2 - \frac{d^2}{12}$

ত্রুটিমুক্ত $\mu_3 = \mu_3$

ত্রুটিমুক্ত $\mu_4 = \mu_4 - \frac{\mu_২ d^২}{২} + \frac{7}{240} d^4$

এখানে d হলো শ্রেণি ব্যবধান।

পরিঘাতের উপর মূল ও মাপনী পরিবর্তনের প্রভাব

(Effect of change of origin and scale on Moments)

ধরা যাক, কোন একটি চলক x এর n সংখ্যক মান বা শ্রেণির মধ্যমানগুলো যথাক্রমে $x_1, x_2, \ldots, x_n$ এবং এদের সংশ্লিষ্ট গণসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ও এর গাণিতিক গড় $\bar{x}, a$ যে কোন একটি এবং $\sum f_i = N$

আমরা জানি, r অশোধিত পরিঘাত, $\mu'_r(x) = \dfrac{\sum f_i (x_i - a)^r}{N}$ ....(i)   r =1, 2, 3, 4

আবার ধরি, $u_i = \dfrac{x_i - a}{c}$ একটি নতুন চলক। যেখানে, a মূলবিন্দু ও c মাপনী, (c>0)

এখন, $u_i = \dfrac{x_i - a}{c}$

বা, $x_i - a = cu_i$ ....(ii)

এখন, সমীকরণ (ii) এর মান সমীকরণ (i) এ বসাই– $\mu'_r(x) = \dfrac{\sum f_i (cu_i)^r}{N}$

$$= c^r \frac{\sum f_i u_i^r}{N}$$

যেহেতু, উপরের সমীকরণটিকে 'a' এর কোন অস্তিত্ব নেই। কিন্তু c এর অস্তিত্ব বিদ্যমান। সুতরাং অশোধিত পরিঘাত মূল বিন্দু হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রেঃ

উদাহরণ-১

5, 8, 12, 17, 18, 21, 24 এই তথ্যমানের জন্য (১) অশোধিত পরিঘাত সমূহ (২) কেন্দ্রীয় পরিঘাত সমূহ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

পরিঘাত নির্ণয় সারণী

x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4
5	25	125	625
8	64	512	4096
12	144	1728	20736
17	289	4913	83521
18	324	5832	104976
21	441	9261	194481
24	576	138224	331776
$\Sigma x_i = 105$	$\Sigma x_i^2 = 1863$	$\Sigma x_i^3 = 36195$	$\Sigma x_i^4 = 740211$

এখন অশোধিত পরিঘাতসমূহ

i) <u>সরাসরি পদ্ধতিঃ</u>

$$\mu'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_1}{n} = \frac{105}{7} = 15$$

$$\mu'_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \frac{1863}{7} = 266.143$$

$$\mu'_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{n} = \frac{36195}{7} = 5170.714$$

$$\mu'_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}{n} = \frac{740211}{7} = 105744.429$$

ii) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিঃ

x_i	(xi-A) A=17	$(xi-A)^2$	$(xi-A)^3$	$(xi-A)^4$
5	-12	144	-1728	20736
8	-9	81	-729	6561
12	-5	25	-125	625
17=A	0	0	0	0
18	1	1	1	1
21	4	16	64	256
24	7	49	343	2401
Σx_i =105	Σ(xi-A) =-14	$\Sigma(xi-A)^2$ =316	$\Sigma(xi-A)^3$ =-2174	$\Sigma(xi-A)^4$ =30580

$$\mu'_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)}{n} = \frac{-14}{7} = -2$$

$$\mu'_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^2}{n} = \frac{316}{7} = 45.143$$

$$\mu'_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^3}{n} = \frac{-2174}{7} = -310.57$$

$$\mu'_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^4}{n} = \frac{30580}{7} = 4368.57$$

কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

i) সরাসরি পদ্ধতি :

x_i	(xi-x) x=15	$(xi-x)^2$	$(xi-x)^3$	$(xi-x)^4$
5	-10	100	-1000	10000
8	-7	49	-343	2401
12	-3	9	-27	81
17	2	4	8	16
18	3	9	27	81
21	6	36	216	1296
24	9	81	729	6561
$\Sigma x_i = 105$	Σ(xi-x) =0	$\Sigma(xi-x)^2 = 288$	$\Sigma(xi-x)^3 = 390$	$\Sigma(xi-x)^4 = 20436$

এখানে ৭টি তথ্যমানের গাণিতিক গড় $= \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{105}{7} = 15$

কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

$\mu_1 = 0$

$$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{288}{7} = 41.14$$

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n} = \frac{-390}{7} = -55.714$$

$$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{n} = \frac{20436}{7} = 2919.428$$

অন্যভাবে, অশোধিত পরিঘাতের সাহায্যে কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$

$= 266.143 - (15)^2$

$= 266.143 - 225$

$= 41.143$

$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu'^3_1$

$= 5170.714 - 3 \times 266.143 \times 15 + 2 \times (15)^2$

$= 5170.714-11976.435+6750.00$

$= -55.714$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\,\mu'^{2}_{1} + 6\mu'_2\mu'^{2}_1\ 3\mu'^{4}_1$$

$= 105744.429 - 4\times5170.714\times15+6\times266.143\times(15)^2-3\times(15)^4$

$= 2919.428$

<u>শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রেঃ</u>

i) সরাসরি পদ্ধতি :

উদাহরণ-২ঃ নিম্নে প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশন থেকে ১) অশোধিত পরিঘাত সমূহ (২) কেন্দ্রীয় পরিঘাত সমূহ নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
গণসংখ্যা	3	14	17	32	15	7

সমাধান ঃ

শ্রেণী	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা fi	$f$xi	$f_i x_i^2$	$f_i x_i^3$	$f_i x_i^4$
40-45	42.5	7	297.5	12643.75	537359.4	22837773.44
45-50	47.5	12	570	27075	1286063	61087968.75
50-55	52.5	19	997.5	52368.75	2749359	144341367.2
55-60	57.5	18	1035	59512.5	3421969	196763203.1
60-65	62.5	13	812.5	50781.25	3173828	198364257.8
65-70	67.5	1	67.5	4556.25	307546.9	20759414.06
		N=□fi= 70	$f$xi =3780	$f_i x_i^2$ = 206937.5	$f_i x_i^3$ = 11476125	$f_i x_i^4$ = 644153984.4

এখন অশোধিত পরিঘাতসমূহ

i) সরাসরি পদ্ধতি :

এখন, $\mu'_1 = \frac{\sum fixi}{N} = \frac{3780}{70} = 54$

$\mu'_2 = \frac{\sum fixi^2}{N} = \frac{206937.5}{70} = 2956.25$

$\mu'_3 = \frac{\sum fixi^3}{N} = \frac{11476125}{70} = 163944.64$

$\mu'_4 = \frac{\sum fixi^4}{N} = \frac{644153984.4}{70} = 9202199.77$

ii) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি :

শ্রেণী	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা fi	$di=\frac{x_i - A}{c}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$	$f_i d_i^3$	$f_i d_i^4$
40-45	42.5	7	-3	-21	63	-189	567
45-50	47.5	12	-2	-24	48	-96	192
50-55	52.5	19	-1	-19	19	-19	19
55-60	57.5=A	18	0	0	0	0	0
60-65	62.5	13	-1	-13	13	-13	13
65-70	67.5	1	-2	-2	4	-8	16
		$N=\Sigma fi=70$		$\sum f_i d_i$=-79	$\sum f_i d_i^2$ =147	$\sum f_i d_i^3$=-325	$\sum f_i d_i^4$=807

$\mu'_1 = \frac{\sum fidi}{N}$ x C = $\frac{-79}{70}$ x5 = 54

$\mu'_2 = \frac{\sum fidi^2}{N}$ x C^2 = $\frac{147}{70}$ x5^2 = 2956.25

$\mu'_3 = \frac{\sum fidi^3}{N}$ x C^3 = $\frac{-325}{70}$ x5^3 = 163944.64

$\mu'_4 = \frac{\sum fidi^4}{N}$ x C^4 = $\frac{807}{70}$ x5^4 = 9202199.77

কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

i) সরাসরি পদ্ধতি :

শ্রেণী	মধ্যমান x_i	fi	fixi	$fi\,(x_i\text{-}x)$	$fi\,(x_i\text{-}x)^2$	$fi\,(x_i\text{-}x)^3$	$fi\,(x_i\text{-}x)^4$
40-45	42.5	7	297.5	-80.5	925.75	-10646.125	122430.4375
45-50	47.5	12	570	-78	507	-3295.5	21420.75
50-55	52.5	19	997.5	-28.5	42.75	-64.125	96.1875
55-60	57.5	18	1035	63	220.5	771.75	2701.125
60-65	62.5	13	812.5	110.5	939.25	7983.625	67860.8125
65-70	67.5	1	67.5	13.5	182.25	2460.375	33215.0625
	Σx_i =330	N=Σfi =70	$fixi$ =3780	$\Sigma fi\,(x_i\text{-}x)$ = 0	$\Sigma fi(x_i\text{-}x)^2$ =2817.5	$\Sigma fi\,(x_i\text{-}x)^3$ =-2790	$\Sigma fi\,(x_i\text{-}x)^4$ =247724.375

এখানে ৭টি তথ্যমানের গাণিতিক গড় $=\frac{\Sigma fixi}{N} = \frac{3780}{70} = 54$

কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

$\mu_1 = 0$

$$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi(x_i - \bar{x})^{২}}{N} = \frac{2817.5}{70} = 40.25$$

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi(x_i - \bar{x})^{৩}}{N} = \frac{-2790}{70} = -39.85$$

$$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi(x_i - \bar{x})^{৪}}{N} = \frac{247724.375}{70} = 3538.91$$

অন্যভাবে, অশোধিত পরিঘাতের সাহায্যে কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

$\mu_1 \quad = ০$

$\mu_2 \quad = \mu'_2 - \mu'^2_1 = 15291.97 - (54)^2 = 174.425$

$\mu_3 \quad = \mu'_3 - 3\mu'_2\,\mu'_1 + 2\mu'^3_1$

$= 898565.84 - 3 \times 898565.84 \times 54 + 2(54)^3$

$= 898565.84 - 145567666.1 + 314928$

$= -144354172.3$

$\mu_4 \quad = \mu'_4 - 4\mu'_3\,\mu'_1 + 6\mu'_2\,\mu'^2_1 - 3\mu'^4_1$

$= 53754090.44 - 4 \times 898565.84 \times 54 + 6 \times 12375.97\,(54)^2 - 3(54)^4$

$= 53754090.44 - 194090221.4 + 216529971.1 - 25509168$

$= 225374672.1$

সারসংক্ষেপ:

শ্রেণিতে গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে পরিঘাত নির্ণয়ের সময় শ্রেণির মানগুলোকে ঐ শ্রেণির মধ্যমানের সমান অনুমান করা হয়।

পাঠ-৭.৩ বঙ্কিমতা ও এর প্রকারভেদ
(Skewness and Types of Skewness)

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

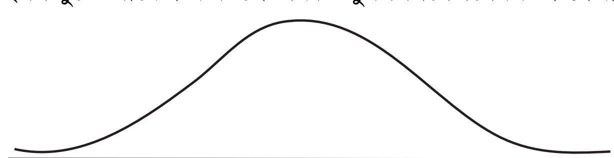
- বঙ্কিমতা সম্বন্ধে বলতে পারবেন;
- বঙ্কিমতার প্রকারভেদ সম্বন্ধে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

বঙ্কিমতা

(Skewness)

পূর্বের ইউনিটে আমরা গণসংখ্যা নিবেশনের কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও বিস্তার সম্পর্কে আলোচনা করেছি এবং এগুলো কিভাবে পরিমাপ করা যায় বর্ণনা করেছি। কেন্দ্রীয় প্রবণতা এবং বিস্তার কোনো গণসংখ্যা নিবেশনের দুটি বৈশিষ্ট্য। দুটি বিন্যাসের গঠন বৈশিষ্ট্য গড় ও বিস্তার পরিমাপ অভিন্ন হলেও তাদের ভিন্ন হতে পারে। বিনাসের গঠন দুটি বৈশিষ্ট্যের দ্বারা ব্যাখ্যা করা হয় এদের বলা হয় বঙ্কিমতা ও সূচলতা।

কোন গণসংখ্যা নিবেশনের বঙ্কিমতা বলতে বোঝায় ইহা একটি সুষম নিবেশন (Symmetrical distribution) থেকে কতটা এবং কিভাবে বঙ্কিম। পরিমিত নিবেশন (Normal distribution) একটি সুষম নিবেশন বা বিন্যাস যার গড়, প্রচুরক এবং মধ্যমা সমান এবং এগুলো একই বিন্দুতে থাকে। ক চিত্রে একটি সুষম নিবেশনের চিত্র দেখান হল।

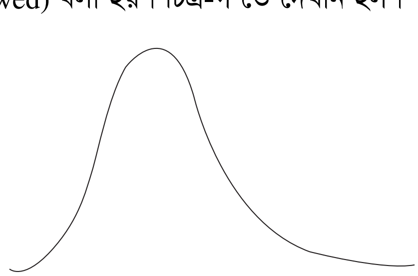


চিত্র: ক

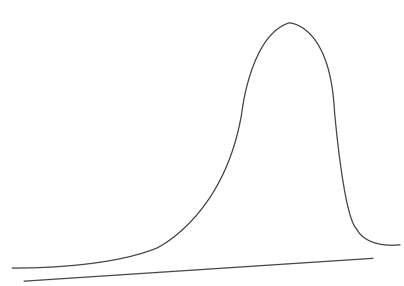
কোন নিবেশনের সুষম অবস্থা থেকে বিচ্যুতি মাত্রাই হল নিবেশনটির বঙ্কিমতা। নিবেশনের বঙ্কিমতা বলতে বুঝায় ঐ নিবেশনের রেখা সুষম রেখার তুলনায় হয় ডানে অথবা বামে কতটুকু ঝুঁকে আছে।

যদি গণসংখ্যা নিবেশনের রেখার লেজ ডান দিকে বেশি হয় তাকে ডানদিকে বঙ্কিম বা ধনাত্মক বঙ্কিম (Positively Skewed) বলা হয়। চিত্র-খ তে দেখান হল।

আবার যদি গণসংখ্যা নিবেশনের রেখার লেজ বাম দিকে বেশি লম্বা হয় তবে তাকে বামদিকে বঙ্কিম বা ঋনাত্মক বঙ্কিম (Negetively Skewed) বলা হয়। চিত্র-গ তে দেখান হল।



চিত্র-খ, ধনাত্মক বঙ্কিম বিন্যাস



চিত্র-গ, ঋনাত্মক বঙ্কিম বিন্যাস

বঙ্কিমতা পরীক্ষা ঃ

নিম্নলিখিত উপায়ে কোন গণসংখ্যা নিবেশনের বঙ্কিমতা পরীক্ষা করা যায়।

(ক) যখন গড়, প্রচুরক এবং মধ্যমার মান এক হয় না।

(খ) যখন তথ্যসমূহ ছক কাগজে প্লট করা হয় তখন তারা সুষম রেখা দিবে না অর্থাৎ রেখার কেন্দ্র থেকে দু'ভাগ করলে প্রতিটি ভাগ সমান হবে না।

(গ) মধ্যমা থেকে তথ্যসমূহের ধনাত্মক বিচ্যুতির সমষ্টি ঋণাত্মক বিচ্যুতির পরম সমষ্টির সমান হবে না।

(ঘ) মধ্যমা থেকে চতুর্থকসমূহ একই দূরত্বে থাকবে না।

সারসংক্ষেপঃ

কোন নিবেশনের সুষম অবস্থা থেকে বিচ্যুতির মাত্রাই হল নিবেশনটির বঙ্কিমতা।

পাঠ-৭.৪ বঙ্কিমতার পরিমাপ (Measures of Skewness)

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বঙ্কিমতার পরিমাপ নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার বঙ্কিমতার পরিমাপ সম্পর্কে লিখতে পারবেন;
- ভাল বঙ্কিমতা পরিমাপের ধর্ম সম্পর্কে বলতে পারবেন।

বঙ্কিমতা পরিমাপ (Relative measures of Skewness)

বঙ্কিমতা পরিমাপের জন্য সাধারনত তিন ধরনের পরিমাপ ব্যবহৃত হয়। যেমন−

(১) কার্ল পেয়ারসনের বঙ্কিমতা পরিমাপ

(২) বাউলির বঙ্কিমতা পরিমাপ

(৩) পরিঘাত ভিত্তিক বঙ্কিমতা পরিমাপ।

(১) কার্ল পেয়ারসনের বঙ্কিমতা পরিমাপ

কার্ল পেয়ারসন (১৮৫৭-১৯৩৬) নামক একজন ব্রিটিশ পরিসংখ্যানবিদ বঙ্কিমতা পরিমাপের জন্য নিম্নের সূত্র তৈরি করেন−

$$\text{বঙ্কিমতাংক } (S_{kp}) = \frac{\text{গাণিতিক গড়} - \text{প্রচুরক}}{\text{পরিমিত ব্যবধান}} = \frac{\bar{x}-Mo}{\sigma}$$

যে সকল ক্ষেত্রে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় না, কিংবা জটিল, সেক্ষেত্রে

$$\text{বঙ্কিমতাংক } (S_{kp}) = \frac{3(\text{গাণিতিক গড়} - \text{মধ্যমা})}{\text{পরিমিত ব্যবধান}} = \frac{\bar{x}-Me}{\sigma}$$

S_{kp} এর মান - ১ থেকে +১ এর মধ্যে থাকে।

এখানে S_{kp} = ০ হলে সুষম নিবেশন হবে অর্থাৎ বঙ্কিমতা শূন্য।

S_{kp} >০ হলে ধনাত্মক বঙ্কিম

S_{kp} <০ হলে ঋণাত্মক বঙ্কিম

(২) বাউলীর বঙ্কিমতা পরিমাপের সূত্র হল−

চলকের তথ্যমানসমূহের বা কোন গণসংখ্যা নিবেশনের চতুর্থক এর উপর ভিত্তি করে অধ্যাপক বাউলী বঙ্কিমতা নির্ণয়ের জন্য আরও একটি পরিমাপ প্রস্তুত করেন।

$$\text{বঙ্কিমতাংক} = \frac{(Q_3\text{-মধ্যমা}) - (\text{মধ্যমা-}Q_1)}{(Q_3\text{-মধ্যমা}) + (\text{মধ্যমা-}Q_1)}$$

$$S_{kp} = \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$$

এখানে S_{kp} = বাউলীর বঙ্কিমতা পরিমাপ

Q_1 = প্রথম চতুর্থক

Q_3 = ৩য় চতুর্থক

Me = মধ্যমা।

S_{kp} এর মান ± 1 এর মধ্যে থাকে।

(৩) পরিঘাত ভিত্তিক বঙ্কিমতার পরিমাপ

চলকের তথ্যমানসমূহের বা কোন গণসংখ্যা নিবেশনের ২য় এবং ৩য় পরিঘাতের সাহায্যে ঐ নিবেশনের বঙ্কিমতার পরিমাপ করা যায়। β_1 কে বঙ্কিমতার আপেক্ষিক পরিমাপ হিসেবে চিহ্নিত করা হয় এবং এর সূত্র হল−

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

যদি β_1 =০ হয় তবে নিবেশনটি সুষম হবে। সাধারণত বঙ্কিমতা পরিমাপের জন্য−

$$r_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}} = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}$$ ব্যবহৃত হয়।

যদি r_1 = ০ হয় তবে সুষম নিবেশন হবে।

যদি r_1 > ০ হয় তবে ধনাত্মক বঙ্কিম।

r_1 < ০ হয় তবে ঋণাত্মক বঙ্কিম।

অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রেঃ

উদাহরণ-১

পাঠ-৭.২ এ উদাহরণ-১ এ বর্ণিত তথ্যমান সমূহের (১) কার্ল পেয়ারসনের (২)বাউলির (৩)পরিঘাত ভিত্তিক বঙ্কিমতা পরিমাপ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ তথ্যমানসমূহকে মানের উর্ধ্বক্রমানুসারে সাজালে হয়−

5, 8, 12, 17, 18, 21, 24

(১) কার্ল পেয়ারসনের বঙ্কিমতা পরিমাপ

এখানে গাণিতিক গড় = $\bar{x} = \frac{105}{7} = 15$

i) **সরাসরি পদ্ধতি :**

x_i	$(xi-\bar{x})$ $\bar{x}=15$	$(xi-\bar{x})^2$	$(xi-\bar{x})^3$	$(xi-\bar{x})^4$
5	-10	100	-1000	10000
8	-7	49	-343	2401
12	-3	9	-27	81
17	2	4	8	16
18	3	9	27	81
21	6	36	216	1296
24	9	81	729	6561
$\Sigma x_i=105$	$\Sigma(xi-x)=0$	$\Sigma(xi-\bar{x})^2=288$	$\Sigma(xi-\bar{x})^3=-390$	$\Sigma(xi-\bar{x})^4=20436$

কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

$\mu_1 = 0$

$$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{288}{7} = 41.143$$

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{n} = \frac{-390}{7} = -55.714$$

$$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{n} = \frac{20436}{7} = 2919.428$$

মধ্যমা $= \frac{n}{2}$ তম $= \frac{7}{2} = 3.5$ এবং এর পরবর্তী পূর্ণসংখ্যা ৪র্থ তম রাশির মান

$= 17$

পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\text{ভেদাংক}} = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{41.143} = 6.414$

যে সকল ক্ষেত্রে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় না, সেক্ষেত্রে

বঙ্কিমতাংক $= \frac{3(\text{গাণিতিক গড়} - \text{মধ্যমা})}{\text{পরিমিত ব্যবধান}} \quad \frac{3(15-17)}{6.414} = \frac{3(-2)}{6.414} = -0.9354$

(২) বাউলির বঙ্কিমতা পরিমাপ:

$\therefore$ বাউলীর বঙ্কিমতাংক $= \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

$= \frac{21+8-2\times17}{21-8}$

$= \frac{-5}{13}$

$= -0.385$ ঋণাত্মক বঙ্কিম।

এখানে, ১ম চতুর্থক $Q_1 = \frac{n+1}{4}$ তম $= \frac{7+1}{4}$ = ২য় রাশির মান= 8

৩য় চতুর্থক $Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$ = ৬ষ্ঠ রাশির মান = 21

(৩) পরিঘাত ভিত্তিক বঙ্কিমতা পরিমাপ:

আবার, পরিঘাত ভিত্তিক বঙ্কিমতাংক $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$

$$= \frac{-55.714}{41.143\sqrt{41.143}}$$

$$= \frac{-55.714}{263.903}$$
$$= -0211$$

এখানে, ৩য় পরিঘাত μ_3 = -55.714

২য় পরিঘাত $\mu_2 = 41.143$

শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রেঃ

i) সরাসরি পদ্ধতিঃ

পাঠ-৭.২ এ উদাহরণ-২ এ বর্ণিত তথ্যমান সমূহের (১) কার্ল পেয়ারসনের (২)বাউলির (৩)পরিঘাত ভিত্তিক বঙ্কিমতা পরিমাপ নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
গণসংখ্যা	7	12	19	18	13	1

সমাধান ঃ বঙ্কিমতা ও সূচলতা নির্ণয়

i) সরাসরি পদ্ধতিঃ

শ্রেণী	মধ্যমান x_i	fi	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	$fi\,(xi-\overline{x})$	$fi\,(xi-\overline{x})^2$	$fi\,(xi-\overline{x})^3$	$fi\,(xi-\overline{x})^4$
40-45	42.5	7	7= pcf(Q_1)	-80.5	925.75	-10646.125	122430.4375
45-50	47.5	12=F(Q_1)	19= pcf(Me)	-78	507	-3295.5	21420.75
50-55	52.5	19=F(Me)	38= pcf(Q_3)	-28.5	42.75	-64.125	96.1875
55-60	57.5	18=F(Q_3)	56	63	220.5	771.75	2701.125
60-65	62.5	13	69	110.5	939.25	7983.625	67860.8125
65-70	67.5	1	70	13.5	182.25	2460.375	33215.0625
	Σx_i =330	N=Σfi =70		$\Sigma fi\,(xi-\overline{x})$= 0	$\Sigma fi(xi-\overline{x})^2$ =2817.5	$\Sigma fi\,(xi-\overline{x})^3$=-2790	$\Sigma fi\,(xi-\overline{x})^4$ =247724.375

(১) কার্ল পেয়ারসনের বঙ্কিমতা পরিমাপ

এখানে গাণিতিক গড় $= \bar{x} = \frac{105}{7} = 15$

$$\text{বঙ্কিমতাংক} = \frac{\text{গাণিতিক গড়} - \text{প্রচুরক}}{\text{পরিমিত ব্যবধান}}$$

যে সকল ক্ষেত্রে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় না, কিংবা জটিল, সেক্ষেত্রে

$$\text{বঙ্কিমতাংক} = \frac{\text{গাণিতিক গড়} - \text{প্রচুরক}}{\text{পরিমিত ব্যবধান}}$$

মধ্যমা

এখানে $\frac{n}{2} = \frac{70}{2} = 35$, যার চেয়ে বড় ক্রমযোজিত সংখ্যা হল 38।সুতরাং মধ্যমা 50-55 শ্রেণির মধ্যে অবস্থান করে।

অতএব, সূত্রানুসারে মধ্যমা

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - pcf}{f(Me)} \times h$$

$$\therefore M = 50 + \frac{\frac{70}{2} - 19}{19} \times 5$$ [এখানে $L = 50$, $F(Me) = 19$, $pcf = 19$, $h = 5$]

$$= 50 + \frac{35 - 19}{19} \times 5$$

$$= 50 + 4.210$$

$$= 54.210$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= 54.210$

প্রচুরক

এখানে দেখা যাচ্ছে 50 থেকে 55 নম্বরের মধ্যে ছাত্রসংখ্যা অধিক অর্থাৎ 19 জন। সুতরাং প্রচুরক শ্রেণি হল 50-55।

সূত্রানুযায়ী, প্রচুরক $Mo = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h$

এখানে, $L = 50$

$\Delta_1 = 19-12=7$

$\Delta_2 = 19-18 = 1$

$h = 55-50 = 5$

$$\therefore Mo = 50 + \frac{7}{7+1} \times 5$$

$$= 50 + 4.375$$

$$= 54.375$$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রচুরক $= 54.375$

পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\text{ভেদাংক}} = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{41.143} = 6.414$

বঙ্কিমতাংক $= \frac{\text{গাণিতিক গড়} - \text{প্রচুরক}}{\text{পরিমিত ব্যবধান}} \quad \frac{15 - 54.375}{6.414} = -6.1389$

যে সকল ক্ষেত্রে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় না, কিংবা জটিল, সেক্ষেত্রে

বঙ্কিমতাংক $= \frac{3(\text{গাণিতিক গড়} - \text{মধ্যমা})}{\text{পরিমিত ব্যবধান}} \quad \frac{3(15 - 54.210)}{6.414} = -6.1131$

(২) বাউলির বঙ্কিমতা পরিমাপঃ

$\therefore$ বাউলীর বঙ্কিমতাংক $= \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

১ম চতুর্থক

এখানে $\frac{n}{4} = \frac{70}{4} = 17.5$, 17.5 এর চেয়ে বড় ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হচ্ছে 19। অর্থাৎ 45-50 শ্রেণিতে Q_1 অবস্থিত।

$$\therefore Q_1 = L1 + \frac{\frac{n}{4} - pcf(Q_1)}{F(Q_1)} \times h$$

$$\therefore Q_1 = 45 + \frac{\frac{70}{4} - 7}{12} \times 5$$ এখানে, $L1 = 45,\ n = 70,\ pcf(Q_1) = 7,\ F(Q_1) = 12,\ h = 5$

$$= 45 + \frac{10.5}{12} \times 5$$
$$= 45 + 8.75$$
$$= 53.75$$

<u>৩য় চতুর্থক</u>

আবার, $\frac{3n}{4} = \frac{3\times70}{4} = 52.5$, 52.5 এর চেয়ে বড় ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হচ্ছে 56, অর্থাৎ 55-60 শ্রেণিতে Q_3 অবস্থিত।

$$\therefore Q_3 = L_3 + \frac{\frac{n}{4} - pcf(Q_3)}{F(Q_3)} \times h$$

$$\therefore Q_3 = 55 + \frac{\frac{3\times70}{4} - 38}{18} \times 5$$ [এখানে, $L_3 = 55,\ pcf(Q_3) = 38,\ F(Q_3) = 18,\ h = 5$]

$$= 55 + \frac{52.5 - 38}{18} \times 5$$
$$= 55 + \frac{-3.5}{18} \times 5$$
$$= 55 - 0.9722$$
$$= 54.0278$$
$$\therefore Q_3 = 54.0278$$

১ম চতুর্থক $Q_1 = 53.75$

৩য় চতুর্থক $Q_3 = 54.0278$

বাউলীর বঙ্কিমতাংক $= \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

$$= \frac{54.0278+53.75-2(54.210)}{54.0278-53.75} = \frac{107.778-108.42}{.2778} = -2.311$$ ঋনাত্মক বঙ্কিম।

(৩) পরিঘাত ভিত্তিক বঙ্কিমতা পরিমাপঃ

আবার, পরিঘাত ভিত্তিক বঙ্কিমতাংক $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(35405.568)^2}{(174.425)^3} = \frac{1253554245.4026}{236.22}$

সারসংক্ষেপঃ

একটি সুষম বিন্যাসের গড়, প্রচুরক এবং মধ্যমা একই বিন্দুতে থাকে। কিন্তু একটি বঙ্কিম বিন্যাসের গড়, প্রচুরক এবং মধ্যমা একই বিন্দুতে থাকে না।

পাঠ-৭.৫ সূচলতা (Kurtosis)

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সূচলতা কি তা বলতে পারবেন;
- সূচলতার প্রকারভেদ লিখতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার সূচলতার পরিমাপ করতে পারবেন।

সূচলতা (Kurtosis)

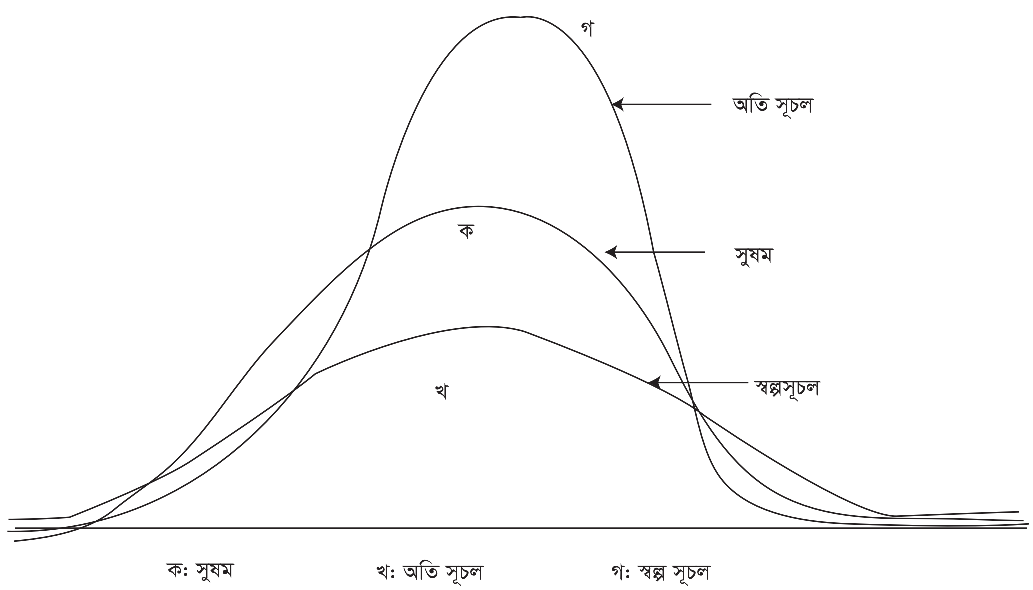
পূর্বের পাঠে আমরা জেনেছি যে কোন গণসংখ্যা নিবেশনের রেখা একটি সুষম রেখার চাইতে ডানে অথবা বামে ঝুঁকে থাকলে বঙ্কিমতা নির্দেশ করে। গণসংখ্যা নিবেশন রেখার আর একটি বৈশিষ্ট্য হল এটা একটি পরিমিত রেখার তুলনায় বেশি অথবা কম সূচল হতে পারে। সুতরাং সূচলতা তিন প্রকার হতে পারে। যেমন– মধ্যমসূচল (mesokurtic), অতিসূচল (Platykurtic) এবং অনতিসূচল (Leptokurtic).

(ক) মধ্যম সূচল ঃ এক্ষেত্রে সূচলতার মাত্রা স্বাভাবিক বা সুষম রেখার সমতুল্য।

(খ) অতিসূচল ঃ এক্ষেত্রে কোনো গণসংখ্যা নিবেশনের সূচলতায় মাত্রা পরিমিত রেখা অপেক্ষা অধিক সূচল।

(গ) অনতিসূচল ঃ এক্ষেত্রে কোনো গণসংখ্যা নিবেশনের সূচলতার মাত্রা পরিমিত রেখা অপেক্ষা কম সূচল।

নিচের চিত্রে একই গড় এবং একই ভেদাংক সম্পন্ন তিনটি রেখা ক, খ এবং গ দেখানো হল যাদের সূচলতা এক রকম নয়।



চিত্রে ক রেখাটির বক্রতা পরিমিত রেখায় বক্রতার সমতুল্য এবং এটি সমসূচল বা মধ্যসূচল রেখা। গ-রেখাটি পরিমিত রেখা ক অপেক্ষা অধিক সূচল সুতরাং এটি অতি সূচল রেখা। খ-রেখাটি স্বল্পসূচল রেখা কারণ এটি পরিমিত রেখা অপেক্ষা কম সূচল। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, গণসংখ্যা নিবেশন সমূহের রেখা তিনটির একই গড় এবং একই ভেদাংক থাকা সত্ত্বেও রেখাগুলোর সূচলতা এক নয়।

সূচলতার পরিমাপ (Measure of Kurtosis)

২য় এবং ৪র্থ পরিঘাতের উপর ভিত্তি করে সূচলতা পরিমাপের জন্য নিম্নলিখিত সূত্র ব্যবহার করা হয়।

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

এখানে, μ_4 = ৪র্থ কেন্দ্রীয় পরিঘাত

μ_2 = ২য় কেন্দ্রীয় পরিঘাত

সুষম রেখার জন্য β_2 এর মান হয় 3। যখন β_2 এর মান 3 এর চেয়ে বড় তখন রেখাটি পরিমিত রেখার চেয়ে অধিক সূচল অর্থাৎ রেখাটি অতিসূচল। আবার β_2 এর মান 3 এর চেয়ে কম হলে রেখাটি পরিমিত রেখার চেয়ে কম সূচল অর্থাৎ রেখাটি স্বল্পসূচল। β_2 এর মান 3 হলে রেখাটি মধ্যসূচল এবং এ সূচলতা পরিমিত রেখার সূচলতার সমতুল্য।

অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রেঃ

উদাহরণ-১

পাঠ-৭.২ এ বর্ণিত উদাহরণ-১ এ বর্ণিত তথ্যমানসমূহের সূচলতা নির্ণয় করুন।

5, 8, 12, 17, 18, 21, 24

সমাধান ঃ

x_i	$(x_i - \bar{x})_{\bar{x}=15}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$
5	-10	100	-1000	10000
8	-7	49	-343	2401
12	-3	9	-27	81
17	0	4	8	16
18	1	9	27	81
21	6	36	216	1296
24	9	81	729	6561
$\Sigma x_i = 105$	$\Sigma(x_i - \bar{x}) = 0$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 288$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^3 = 390$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^4 = 20436$

কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{288}{7} = 41.143$$

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n} = \frac{-390}{7} = -55.714$$

$$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{n} = \frac{20436}{7} = 2919.428$$

সূচলতার পরিমাণ

$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ এখানে, μ_4 = ৪র্থ পরিঘাত = 2919.428, μ_2 = ২য় পরিঘাত = 41.143

অতএব, $\beta_2 = \frac{2919.428}{(41.143)^2}$

$= \frac{2919.428}{1692.746}$

$= 1.725$

এখানে দেখা যায় β_2 -এর মান 3 এর চেয়ে কম। অর্থাৎ বিন্যাসটি অনতিসূচল।

শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রেঃ

উদাহরণ-২ঃ

পাঠ-৭.২ এ বর্ণিত উদাহরণ-২ এ বর্ণিত তথ্যমানসমূহের সূচলতা নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
গণসংখ্যা	7	12	19	18	13	1

কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

i) সরাসরি পদ্ধতিঃ

শ্রেণী	মধ্যমান x_i	fi	$fi\left(x_i-\bar{x}\right)$	$fi\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$fi\left(x_i-\bar{x}\right)^3$	$fi\left(x_i-\bar{x}\right)^4$
40-45	42.5	7	-80.5	925.75	-10646.125	122430.4375
45-50	47.5	12	-78	507	-3295.5	21420.75
50-55	52.5	19	-28.5	42.75	-64.125	96.1875
55-60	57.5	18	63	220.5	771.75	2701.125
60-65	62.5	13	110.5	939.25	7983.625	67860.8125
65-70	67.5	1	13.5	182.25	2460.375	33215.0625
	$\Sigma x_i = 330$	$N = \Sigma fi = 70$	$\Sigma fi\left(x_i-\bar{x}\right) = 0$	$\Sigma fi\left(x_i-\bar{x}\right)^2 = 2817.5$	$\Sigma fi\left(x_i-\bar{x}\right)^3 = -2790$	$\Sigma fi\left(x_i-\bar{x}\right)^4 = 247724.375$

কেন্দ্রীয় পরিঘাতসমূহ

$\mu_1 = 0$

$$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi(x_i-\bar{x})^2}{N} = \frac{2817.5}{70} = 40.25$$

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi(x_i-\bar{x})^3}{N} = \frac{-2790}{70} = -55.714$$

$$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi(x_i - \bar{x})^4}{N} = \frac{247724.375}{70} = 3538.91$$

সূচলতার পরিমাণ

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}}$$ এখানে, μ_4 = ৪র্থ পরিঘাত = 2919.428, μ_2 = ২য় পরিঘাত = 41.143

এবং $$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}} = \frac{82620.946}{(1256.111)^2} = 0.0524$$

এখানে দেখা যায় β_2-এর মান 3 এর চেয়ে কম।

সুতরাং এটা স্বল্পসূচল নির্দেশ করে।

সারসংক্ষেপ:

গণসংখ্যা নিবেশনের আর একটি বৈশিষ্ট্য হল একটি পরিমিত রেখার তুলনায় কম বা বেশী সূচল। এই সুচল বৈশিষ্ট্যকে সুচলতা বলে।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-৭

রচনামূলক প্রশ্ন:

১। পরিঘাতের সংজ্ঞা লিখুন: ২য় ও ৪র্থ কেন্দ্রিয় পরিঘাত কিভাবে নির্ণয় করা যায়? লিখুন।

২। পরিঘাতের সংশোধনী কে প্রবর্তন করেন? পরিঘাতের উপর মূল ও স্কেলের প্রভাব কিভাবে নির্ণয় করবেন, লিখুন।

৩। বঙ্কিমতার সংজ্ঞা লিখুন? বঙ্কিমতার পরিমাপগুলো বর্ণনা করুন।

৪। বঙ্কিমতার পরম পরিমাপ সম্পর্কে লিখুন। কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতার পরিমাপ পদ্ধতি বর্ণনা করুন।

৫। সূচলতার সংজ্ঞা লিখুন। কেন্দ্রিয় পরিঘাত ব্যবহার করে সূচলতা নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা করুন।

৬। বঙ্কিমতা ও সূচলতার পার্থক্যগুলো লিখুন। ব্যাখ্যা করুন যখন-

ক) $\beta_2 = 3$

খ) $\beta_2 > 3$ যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা

গ) $\beta_2 < 3$ যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা