৬

বিস্তার পরিমাপ
Measures of Dispersion

ভূমিকা

তথ্যমানসমূহে অথবা কোন গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে তথ্যমানগুলোর কেন্দ্রের দিকে কেন্দ্রীভূত হওয়ার প্রবণতা যেমন থাকে তেমনি মানগুলোর বিভিন্ন দিকে প্রসারিত হওয়ার প্রবণতাও থাকে। অর্থাৎ কোন চলকের মানের কেন্দ্রীয় প্রবণতাই একমাত্র বৈশিষ্ট্য নয় চলকটির মানের বিস্তারও অন্য একটা বৈশিষ্ট্য। চলকের মানগুলোর বিভিন্নতা হলো বিস্তার বলে। বিস্তারের পরিমাপ যার দ্বারা করা হয় তাকে বিস্তার পরিমাপক বলা হয়। এ অধ্যায়ে বিভিন্ন পাঠে বিস্তারের পরিমাপ, প্রয়োজনীয়তা, বিস্তার পরিমাপের সুবিধা অসুবিধা ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২ সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৬.১ বিস্তার ও বিস্তার পরিমাপ
Dispersion and Measures of Dispersion

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বিস্তারের সংজ্ঞা বলতে পারবেন;
- বিস্তারের পরিমাপক সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- বিস্তারের প্রকারভেদ সম্পর্কে লিখতে পারবেন;
- বিস্তারের পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

বিস্তার (Dispersion)

চলকের কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক যেমন– গড়, মধ্যমা, প্রচুরক এর সাহায্যে চলকের মানসমূহের বৈশিষ্ট্য সুষ্ঠুভাবে জানা সম্ভব নয়। উদাহরণস্বরূপ কেউ যদি মনে করে গ্রীষ্মকালে ছোট একটা নদীর পানির গভীরতা গড়ে ২ ফুট এবং সহজে এটা পার হওয়া যাবে এমন সিদ্ধান্ত নিলে বিপদে পড়বেন। কারণ নদীর পানির গভীরতা কোথায় কেমন বিস্তারিতভাবে তাকে জানতে হবে। অর্থাৎ পানির গভীরতার ব্যবধান কেমন জানতে হবে, কোন জায়গায় যদি ১ বা ২ ফুট আবার কোন জায়গায় যদি ৭ বা ৮ ফুট হয় তবেই বিপদের সম্মুখিন হতে হয়। সুতরাং তথ্যরাশির ব্যবধান বা বিস্তার কোন চলকের দ্বিতীয় বৈশিষ্ট্য।

বিস্তার দ্বারা চলকের তথ্যরাশির ব্যাপ্তি কিংবা নির্দিষ্ট কোন মান থেকে রাশিগুলোর বিচ্যুতি বা ব্যবধান বুঝানো হয়ে থাকে।

বিস্তার পরিমাপ ঃ তথ্যসেটের মানগুলোর ভিন্নতাকে বিশ্বাস এবং বিস্তারের পরিমাপ যে মানের দ্বারা করা হয় তাকে বিস্তারের পরিমাপক বলা হয়। কিভাবে চলকের তথ্যমানসমূহ বিক্ষিপ্ত হয়ে আছে তার বিভিন্ন মাত্রা বিস্তার পরিমাপকের দ্বারা জানা যায়।

বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ

বিস্তার পরিমাপ দুই প্রকার হতে পারে, যেমন–

১। পরম বিস্তার পরিমাপ (Absolute Measures of Dispersion)

২। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ (Relative Measures of Dispersion)

১। পরম বিস্তার পরিমাপ

পরম বিস্তার পরিমাপের ক্ষেত্রে চলকের তথ্যমান এবং বিস্তারের একক একই থাকবে। পরম বিস্তার চার ধরনের। যথা–

ক) পরিসর (Range)

খ) চতুর্থক ব্যবধান (Quartile deviation)

গ) গড় ব্যবধান (Mean deviation)

ঘ) পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক (Standard deviation and variance)

২। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ (Relative measures of dispersion)

যে পরিমাপ কোনো একটি বিস্তার পরিমাপ ও কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের সাথে তুলনা করে নির্ণয় করা হয় তাকে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ কলে। এটা একটা একক বিহীন সংখ্যা এবং একে শতকরা বা অনুপাত আকারে পরিমাপ করা হয়। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ চার প্রকার, যথা–

ক) পরিসরাংক (Co-efficient of Range)

খ) চতুর্থক ব্যবধানাংক (Co-efficient of Quartile deviation)

গ) গড় ব্যবধানাংক (Co-efficient of Mean deviation)

ঘ) পরিমিত ব্যবধানাংক ও বিভেদাংক (Co-efficient of standard deviation and Co-efficient of Variation)

বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা

১। গড়ের বিশ্বাসযোগ্যতা নির্ণয় ঃ তথ্যমান সমূহের বিস্তার পরিমাপের দ্বারা গড়ের অবস্থান এবং সঠিকতা নির্ণয় করা যায়। বিস্তার পরিমাপক যদি কম হয় তবে বুঝতে হবে চলকের তথ্য মানসমূহ এর কেন্দ্রবিন্দু বা গড়ের খুব কাছাকাছি অবস্থান করছে এবং এক্ষেত্রে গড় বিশ্বাসযোগ্য অর্থাৎ এ মান সকল মানের প্রতিনিধিত্ব করে। আবার বিস্তার পরিমাপের মান যদি বেশি হয় তবে বুঝতে হবে তথ্যমানসমূহ গড় থেকে বেশ দূরে বিস্তৃত। এক্ষেত্রে গড় তথ্যসমূহের সকল মানকে প্রতিনিধিত্ব করে না।

২। দুই বা ততোধিক চলকের তুলনামূলক আলোচনা ঃ বিস্তার পরিমাপকের দ্বারা দুই বা ততোধিক চলকের তথ্যমানসমূহের মধ্যে তুলনা করা যায়। যে চলকের বিস্তার মান কম হয় সেটিই ভাল।

সারসংক্ষেপ:

তথ্যসেটের মানগুলোর বিভিন্নতা হলো বিস্তার।

পাঠ-৬.২ পরিসর ও পরিসরাংক
Range and Co-efficient of Range

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পরিসর কিভাবে নির্ণয় করতে হয় বলতে পারবেন;
- পরিসর এর সুবিধা ও অসুবিধা সমূহ বলতে পারবেন।

পরিসর (Range)

পরিসর হল বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে সহজবোধ্য ও সহজভাবে নির্ণয়ের পরিমাপ। চলকের মানসমূহের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের বা সংখ্যার পার্থক্য বা ব্যবধানকে পরিসর বলে। অর্থাৎ পরিসর = বৃহত্তম সংখ্যা − ক্ষুদ্রতম সংখ্যা।

গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে উচ্চতর শ্রেণির উচ্চসীমা এবং নিম্নতর শ্রেণির নিম্নসীমার ব্যবধানকে পরিসরের পরিমাণ বলে।

অর্থাৎ পরিসর = উচ্চশ্রেণির উচ্চসীমা − নিম্নশ্রেণির নিম্নসীমা।

পরিসরের আপেক্ষিক পরিমাপ হলো পরিসরাংক। চলকের তথ্যমান সমূহের পরিসরকে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে পরিসরাংক পাওয়া যায়। অর্থাৎ−,

$$\text{পরিসরাংক} = \frac{\text{পরিসর}}{\text{বৃহত্তম সংখ্যা} + \text{ক্ষুদ্রতম সংখ্যা}} \times ১০০$$

ক. অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রেঃ

উদাহরণ-১ ঃ ১২ জন ব্যক্তির উচ্চতা হল যথাক্রমে ৬২, ৬৫, ৬৮, ৬৯, ৭১, ৬৯, ৬৭, ৭১, ৬৬, ৭৩, ৭২, ৬১ ইঞ্চি। পরিসর এবং পরিসরাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে বৃহত্তম সংখ্যা= ৭৩

ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = ৬১

$\therefore$ পরিসর = ৭৩−৬১

= ১২ ইঞ্চি।

$$\text{পরিসরাংক} = \frac{১২}{৭৩+৬১}$$

$$= \frac{১২}{১৩৪} \times ১০০$$

$$= ৮.৯৬\%$$

খ. শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রেঃ

উদাহরণ-২: নিম্নের গণসংখ্যা নিবেশন বিন্যাস হতে পরিসর ও পরিসরাঙ্ক নির্ণয় করুন।

শ্রেণি	৫-১০	১০-১৫	১৫-২০	২০-২৫	২৫-৩০	৩০-৩৫	৩৫-৪০	৪০-৪৫	৪৫-৫০	৫০-৫৫
গণসংখ্যা	৭	১১	১৪	১৯	২৭	৪৮	৪৩	২১	১৩	৯

সমাধান ঃ পরিসর = উচ্চশ্রেণির উচ্চসীমা − নিম্নশ্রেণির নিম্নসীমা

$$= ৫৫ - ৫$$

$$= ৫০$$

$$\therefore \text{ পরিসরাংক } = \frac{৫০}{৫৫+৫} \times ১০০$$

$$= \frac{৫০}{৬০} \times ১০০$$

$$= ৮৩.৩৩\%$$

পরিসরের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা ঃ

ক) পরিসর খুব সহজে বুঝা যায় এবং সহজে নির্ণয় করা যায়।

খ) পরিসর নির্ণয় করতে খুব কম সময় লাগে।

অসুবিধা ঃ

ক) পরিসর শুধুমাত্র তথ্যমান সমূহের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের উপর ভিত্তি করে করা হয়। সকল তথ্যমানের উপর নির্ভর করে করা হয় না বলে এটা ততটা নির্ভরযোগ্য বিস্তার পরিমাপ নয়।

খ) প্রাপ্তমানের প্রভাব পরিসরের উপর যথেষ্ট আছে।

গ) গাণিতিক প্রয়োজনের ক্ষেত্রে এটা উপযোগী নয়।

সারসংক্ষেপ:

পরিসর বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে সহজ ভাবে নির্ণয়ের পরিমাপ।

পাঠ-৬.৩ গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক

Mean deviation and Co-efficient of mean deviation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- গড় ব্যবধান সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- গড় ব্যবধান নিরূপণ করতে পারবেন;
- গড় ব্যবধানাংক সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- গড় ব্যবধানাংক নির্ণয় করতে পারবেন।

গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক

গড় ব্যবধানের ক্ষেত্রে তথ্যসেটের প্রতিটি মান হতে গাণিতিক গড় অথবা মধ্যমা এর ব্যবধান নেয়া হয়। সাধারণত গাণিতিক গড় থেকে প্রতিটি মানের ব্যবধানের যোগফল শূন্য বিধায় এই ব্যবধানগুলো শুধুমাত্র ধনাত্মক ধরে নেওয়া হয় অর্থাৎ পরম (absolute) মান নেয়া হয়। তারপর ঐ ব্যবধানগুলোর গাণিতিক গড় নির্ণয় করে গড় ব্যবধান পাওয়া যায়।

ক. অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে (সরাসরি পদ্ধতি)

যদি n সংখ্যক তথ্যমান বিশিষ্ট কোন চলকের মান $x_১, x_২, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ হয়

এবং $\bar{x} = \frac{১}{n}\sum_{i=১}^{n} x_i$

যদি ঐ চলকের মানসমূহের গড় $\bar{x}$ হয় তবে গড় ব্যবধান হবে–

$$MD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{x}| \quad i = ১, ২, \ldots\ldots\ldots.n.$$

গড় ব্যবধানাংক হল

$$\text{গড় ব্যবধানাংক} = \frac{\text{গড় ব্যবধান}}{\text{গাণিতিক গড়}} \times ১০০$$

উদাহরণ-১ ঃ

একটি কলেজের দশ জন ছাত্রের বয়স নিম্নে দেওয়া আছে। গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক বের করুন।

বয়স (বৎসরে) ঃ ১৬, ১৫, ১৭, ১৮, ১৪, ১৯, ২১, ১৬, ২০, ২৩

সমাধান ঃ

এক্ষেত্রে গাণিতিক গড় $\overline{X} = \frac{\Sigma Xi}{n}$

$$= \frac{১৭৯}{১০}$$

$$= ১৭.৯$$

গড় ব্যবধান বের করতে হলে নিম্নের সারণি ব্যবহার করতে হবে।

গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক নির্ণয় সারণী

বয়স Xi	$Xi = \overline{X}$	$\left\|Xi = \overline{X}\right\|$
১৬	-১.৯	১.৯
১৫	-২.৯	২.৯
১৭	-০.৯	০.৯
১৮	০.১	০.১
১৪	-৩.৯	৩.৯
১৯	১.১	১.১
২১	৩.১	৩.১
১৬	-১.৯	১.৯
২০	২.১	২.১
২৩	৫.১	৫.১
		$\Sigma\|Xi- \overline{X}\| = ২৩$

$\therefore$ গড় ব্যবধান MD $= \dfrac{\sum_{i=1}^{10} | xi - \bar{x} |}{n}$

$$= \frac{1}{10} \times 23$$

$$= 2.3$$

এবং গড় ব্যবধানাংক $= \dfrac{2.3}{17.9} \times 100$

$$= 12.849\%$$

খ. শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে (সরাসরি পদ্ধতি)

যদি n সংখ্যক মানকে k শ্রেণি বিশিষ্ট গণসংখ্যা নিবেশনে পরিণত করা যায় এবং Xi (i=১,২,........n) i তম শ্রেণির মধ্যমান হয় এবং f_i যদি উক্ত শ্রেণির গণসংখ্যা হয় তবে–

গড় ব্যবধান (MD) = $\sum_{i=১}^{k} f_i \left| x_i - \bar{x} \right|$

এখানে, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i Xi}{N}$; $[N = \sum_{i=১}^{n} f_i]$

গড় ব্যবধানাংক = $\frac{\text{গড় ব্যবধান}}{\text{গাণিতিক গড়}} \times ১০০$

শেণীকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে (সরাসরি পদ্ধতি)

উদাহরণ-২: নিম্নে সারণি থেকে গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধাঙ্ক নির্ণয় করুন।

শ্রেণি	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
গণসংখ্যা	2	3	15	37	23	13	5	2

সমাধান ঃ

গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক নির্ণয় সারণি

শ্রেণি	মধ্যমান Xi	গণসংখ্যা f_i	f_i Xi	f_i (Xi- $\bar{X}$)	f_i |Xi- $\bar{X}$ |
0-10	5	2	10	-69.0	69.0
10-20	15	3	45	-73.5	73.5
20-30	25	15	375	-217.5	217.5
30-40	35	37	1295	-166.5	166.5
40-50	45	23	1035	126.5	126.5
50-60	55	13	795	201.5	201.5
60-70	65	5	325	127.5	127.5
70-80	75	2	150	71.00	71.00
		$N=\Sigma f_i =100$	$\sum_{i=1}^{8} f_i Xi =3950$		$\Sigma f_i \|Xi- \bar{X}\| = 1053$

$$\bar{X} = \frac{3950}{100} = 39.5$$

অতএব, গড় ব্যবধান $MD = \frac{\sum_{i=1}^{8} fi \mid xi - \bar{x} \mid}{N}$

$$= \frac{1053}{100} \text{ , } n = 100$$

$$= 10.53$$

অতএব, গড় ব্যবধানাংক $= \frac{10.53}{39.5} \times 100$

$$= 26.658$$

গড় ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধা

সুবিধা ঃ

ক) গড় ব্যবধান সহজে পরিমাপ করা যায়।

খ) গাণিতিক হিসাব সহজে করা যায়।

গ) দুই বা ততোধিক নিবেশনের তুলনা করার জন্য এটা একটা নির্ভরযোগ্য পরিমাপক।

অসুবিধা ঃ

ক) গড় ব্যবধানের ক্ষেত্রে ঋনাত্মক মান অগ্রাহ্য করতে হয় ফলে এতে পরবর্তীতে বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া আরোপ করা যায় না।

সারসংক্ষেপ:

গড়ে ব্যবধান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রতিটি তথ্যমান হতে গাণিতিক গড় মধ্যমায় পরম ব্যবধান নেয়া হয়।

পাঠ-৬.৪ চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাংক
Quartile deviation and Co-efficient of Quartile deviation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- চতুর্থক ব্যবধান সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করতে পারবেন;
- চতুর্থক ব্যবধানাংক সম্বন্ধে বলতে পারবেন;
- চতুর্থক ব্যবধানাংক নির্ণয় করতে পারবেন;
- চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধা সম্পর্কে বলতে পারবেন।

চতুর্থক ব্যবধান (Quartile deviation)

পূর্বের পাঠে দেখা গেছে যে, পরিসর শুধুমাত্র চলকের ক্ষুদ্রতম মান এবং বৃহত্তম মানের উপর নির্ভরশীল। এখন চতুর্থক ব্যবধান চলকের প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থকের উপর নির্ভরশীল। এটি বিস্তারের দ্বিতীয় পরিমাপ এবং এর মান হল ৩য় ও ১ম চতুর্থক মানের ব্যবধানের অর্ধেক। অর্থাৎ Q_1 যদি ১ম চতুর্থক এবং Q_3 যদি ৩য় চতুর্থক হয় তাহলে–

চতুর্থক ব্যবধান $Q_D = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

ইউনিট-৬ এর পাঠ ৬.৪ এ Q_1, Q_2, Q_3 কিভাবে নির্ণয় করতে হয় এর সূত্র বিস্তারিতভাবে দেয়া আছে।

চতুর্থক ব্যবধান পরিমাপকের একক আছে। চতুর্থক ব্যবধানের আপেক্ষিক পরিমাপক হল চতুর্থক ব্যবধানাংক। চতুর্থক ব্যবধানকে ৩য় ও ১ম চতুর্থকের গাণিতিক গড় দ্বারা ভাগ করলে চতুর্থক ব্যবধানাংক পাওয়া যায়। এটা একটি একক বিহীন সংখ্যা।

চতুর্থক ব্যবধানাংক $$= \frac{(Q_3 - Q_1)/2}{(Q_3 + Q_1)/2} \times 100$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$$

অশ্রেণীকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে

উদাহরণ-১

নিম্নে দুটি তথ্যের মানসমূহ দেয়া আছে। প্রথম চতুর্থক (Q_1) এবং ৩য় চতুর্থক (Q_3) নির্ণয় করুন।

তথ্য-১ঃ 7, 4, 11, 15, 12, 21, 19, 16, 9, 8, 10, 14, 18, 13, 17।

তথ্য-২ঃ 16, 15, 21, 22, 26, 24, 29, 25, 17, 30, 25, 23, 28, 31, 34, 33।

সমাধান ঃ n যখন বিজোড়:

প্রথমটিতে 15টি মান আছে। এদেরকে উর্ধ্বক্রমানুসারে সাজালে পাওয়া যায়।

4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21

$$\therefore Q_1 = \frac{15+1}{4}$$

$= \frac{16}{4}$ তম মান।

= ৪র্থ মান।

= 9।

$\therefore Q_3 = \frac{3(15+1)}{4}$ তম মান

= 12 তম মান

= 17।

এখন, চতুর্থক ব্যবধান $Q_D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{47.826-31.351}{2}$

=

এবং চতুর্থক ব্যবধানাংক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

$= \frac{47.826 - 31.351}{47.826+31.351} \times 100$

$= \frac{16.475}{79.187} \times 100$

=

n যখন জোড়:

দ্বিতীয় তথ্যে ১৬টি সংখ্যামান আছে যাদেরকে ক্রমানুসারে সাজালে পাওয়া যায়।

15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 33, 34।

$\therefore Q_1 = \frac{16}{4}$ তম ও $\frac{16+4}{4}$ তম মানের গড়

$= \frac{21+22}{2}$

$= \frac{43}{2}$

= 21.5

$\therefore Q_3 = \frac{3 \times 16}{4}$ তম ও $\frac{3 \times 16 + 4}{4}$ তম

= 12তম মান ও 13তম মানের গাণিতিক গড়

$$= \frac{29+30}{2}$$

$$= 29.5$$

এখন, চতুর্থক ব্যবধান $Q_D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{47.826-31.351}{2}$$

$$=$$

এবং চতুর্থক ব্যবধানাংক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

$$= \frac{47.826 - 31.351}{47.826+31.351} \times 100$$

$$= \frac{16.475}{79.187} \times 100$$

শ্রেণীকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে

উদাহরণ-২ : ইউনিট ৫ এর পাঠ ৫.৪ এর উদাহরণ-২ এ বর্ণিত তথ্যসূহ থেকে চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধাংক নির্ণয় করুন।

নিম্নলিখিত গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাংক নির্ণয় করুন।

শ্রেণি	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
গণসংখ্যা	2	3	15	37	23	13	5	2

সমাধান ঃ

চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় সারণি

শ্রেণি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
0-10	2	2
10-20	3	5
20-30	15	$20 = Fc_1$
30-40	37	$57 = Fc_3$
40-50	23	80
50-60	13	93
60-70	5	98
70-80	2	100

এখানে $\frac{n}{4} = \frac{100}{4} = 25$ এখানে Q_1 অবস্থান করে 30-40 শ্রেণিতে।

□ $Q_1 = L_1 + \dfrac{\frac{n}{8} - F_1}{fQ_1} \times C$

এখানে $L_1 = 30$, $n= 100$, $Fc_1 = 20$, $fQ_1=37$, $C=10$

□ $Q_1 = 30 + \dfrac{\frac{100}{4} - 20}{37} \times 10$

$= 30 + \dfrac{5}{37} \times 10 = 31.351$

আবার $\dfrac{3n}{4} = \dfrac{300}{4} = 75$ যার চেয়ে বড় ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হচ্ছে 80, অর্থাৎ 40-50 শ্রেণিতে Q_3 অবস্থিত।

□ $Q_3 = L_3 + \dfrac{\frac{3n}{4} - Fc_3}{fQ_3} \times C$

এখানে $L_3 = 40$, $Fc_3 = 57$, $fQ_3=23$, $C=10$

সুতরাং $Q_3 = 40 + \dfrac{\frac{300}{4} - 57}{23} \times 10$

$= 40+\dfrac{18}{23} \times 10$

$= 47.826$

এখন, চতুর্থক ব্যবধান $Q_D = \dfrac{Q_3-Q_1}{2}$

$= \dfrac{47.826-31.351}{2}$

$= 16.475$

এবং চতুর্থক ব্যবধানাংক $= \dfrac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} \times 100$

$= \dfrac{47.826 - 31.351}{47.826+31.351} \times 100$

$= \dfrac{16.475}{79.187} \times 100$

$= 20.805\%$

চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধা:

ক) বিস্তার পরিমাপের জন্য চতুর্থক ব্যবধান পরিসরের চেয়ে বেশি উত্তম।

খ) চতুর্থক ব্যবধান সহজে নির্ণয় করা যায় এবং এটা বেশ সহজবোধ্য।

গ) এটা প্রান্তীয় মান দ্বারা প্রভাবিত হয় না।

সারসংক্ষেপ:

চতুর্থক ব্যবধানের আপেক্ষিক পরিমাপ হল চতুর্থক ব্যবধানাংক

পাঠ-৬.৫ পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক এবং পরিমিত ব্যবধানাংক ও বিভেদাংক

Standard Deviation & Variance and Co-efficient of Standard Deviation & Co-efficient of Variation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভেদাংক সম্পর্কে ব্যাখ্যা এবং এটা নির্ণয় করতে পারবেন।

পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক

(Standard deviation and Variance)

পরিমিত ব্যবধান একটি গুরুত্বপূর্ণ ও বহুল প্রচলিত বিস্তার পরিমাপ। গড় ব্যবধানের পদ্ধতি গ্রহণ করা হয় এবং সংখ্যামান থেকে গড়ের ব্যবধানগুলোকে এক্ষেত্রে বর্গ করা হয় ফলে সমস্ত বর্গফলগুলোই ধনাত্মক হয়ে যায়।

কোন চলক বা নিবেশনের সকল তথ্যমান থেকে এদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানসমূহের বর্গের গড় হল ভেদাংক এবং ভেদাংক এর ধনাত্মক বর্গমূল হল পরিমিত ব্যবধান।

ক. অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে :

যদি n সংখ্যক তথ্যমান বিশিষ্ট চলকের মান $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots X_n$ হয় এবং এর গাণিতিক গড় $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi$ হয়, তবে

ভেদাংক $S^2 = \frac{1}{n}\Sigma\left(Xi - \bar{X}\right)^2$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{(\Sigma Xi)^2}{n}}{n}$$

এবং পরিমিত ব্যবধান $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} Xi^2 - \frac{(\Sigma Xi)^2}{n}}{n}}$

খ. শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে :

গণসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে যেখানে $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\, X_n$ হল মধ্যমান এবং $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\, f_n$ হলো যথাক্রমে তাদের গণসংখ্যা।

ভেদাংক $S^২$ $= \dfrac{\Sigma f_i \ (Xi-\bar{X})^2}{n}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} fixi^2 - \frac{(\Sigma fixi)^2}{N}}{N}$$

এবং পরিমিতি ব্যবধান $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} fixi^2 - \frac{(\Sigma fixi)^2}{N}}{N}}$

পরিমিত ব্যবধানাংক ও বিভেদাংক : পরিমিত ব্যবধান ও গড়ের অনুপাতকে 100 দ্বারা গুণ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকেই পরিমিত ব্যবধানাংক বলে।অর্থাৎ,

$$\text{পরিমিত ব্যবধানাংক} = \frac{\text{পরিমিত ব্যবধান}}{\text{গড়}} \times 100 \text{ বা, } \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

$$\therefore \text{ বিভেদাংক} = \frac{\text{ভেদাংক}}{\text{গড়}} \times 100 \text{ বা } \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

উদাহরণ-১

এই ইউনিটের পাঠ-৬.৩ এ উদাহরণ-১ এ বর্ণিত 10 জন ছাত্রের বয়সের পরিমিত ব্যবধান, ভেদাংক এবং পরিমিত ব্যবধানাংক ও বিভেদাংক বের করুন।

বয়স (বৎসরে) ঃ 16, 15, 17, 18, 14, 19, 21, 16, 20, 23

সমাধান ঃ

এখানে n = 10

$$\therefore S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} Xi^2 - \frac{(SXi)^2}{n}}{N}}$$

এখন, $\sum_{i=1}^{10} Xi^2$ = 162+152+172+ .... +232 = 3277

এবং $\sum_{i=1}^{10} Xi$ =16+15+17+ .... + 23 = 179

$$\therefore S = \sqrt{\frac{3277 - \frac{(179)^2}{10}}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10} \times 72.9}$$

$$= 2.7$$

$\therefore$ সুতরাং পরিমিত ব্যবধান = 2.7

$\therefore$ ভেদাংক = $\sigma = (2.7)^2 = 7.29$

পরিমিত ব্যবধানাংক = $\frac{S}{\overline{X}} \times 100$

$$= \frac{2.7}{17.9} \times 100$$

$$= 15.084\%$$

$\therefore$ বিভেদাংক = $\frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100 = \frac{7.29}{17.9} = 40.72\%$

উদাহরণ-২ ঃ পাঠ ৬.৩ এ উদাহরণ-২ এ বর্ণিত গণসংখ্যা নিবেশনের জন্য পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাংক এবং পরিমিত ব্যবধানাংক ও বিভেদাংক নির্ণয় করুন।

নিম্নে সারণী থেকে গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধাঙ্ক নির্ণয় করুন।

শ্রেণি	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
গণসংখ্যা	2	3	15	37	23	13	5	2

সমাধান ঃ

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় সারণি

শ্রেণি	মধ্যমান Xi	গণসংখ্যা f_i	f_i Xi	f_i Xi২
0-10	5	2	10	50
10-20	15	3	45	675
20-30	25	15	375	9375
30-40	35	37	1295	45325
40-50	45	23	1035	46575
50-60	55	13	715	39325
60-70	65	5	325	21125
70-80	75	2	150	11250
		$\Sigma f_i = 100$	Σf_i Xi= 3950	Σf_i Xi^2= 173700

পরিমিত ব্যবধান $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{100} fixi^2 - \dfrac{(\Sigma fixi)^2}{100}}{100}}$

$$= \sqrt{\frac{173700 - \frac{(3950)^2}{100}}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{17675}{100}}$$

$$= \sqrt{176.75}$$

$$= 13.295$$

$\therefore$ ভেদাংক $= (13.295)^2 = 176.5$

এবং পরিমিত ব্যবধানাংক $= \dfrac{S}{\bar{X}} \times$ ১০০

$$= \frac{13.295}{39.5} \times 100$$

$$= 33.657$$

এবং বিভেদাংক $= \dfrac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$

$$= \frac{176.75}{39.5} \times 100$$

$$= 447.48$$

পরিমিত ব্যবধানের সুবিধা

ক) পরিমিত ব্যবধান বিস্তার পরিমাপের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ও বহুল ব্যবহৃত পরিমাপ।

খ) পরিমিত ব্যবধানে গাণিতিক সংজ্ঞা স্পষ্ট এবং এটা সমস্ত তথ্যমানের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়।

গ) দুই বা বেশি গ্রুপের তথ্যমানের জন্য সংযুক্ত পরিমিত ব্যবধান বের করা যায় কিন্তু অন্য পরিমাপের ক্ষেত্রে সম্ভব নয়।

ঘ) দুই বা ততোধিক বিন্যাসের তুলনা করার জন্য পরিমিত বিভেদাংক সবচেয়ে বেশি উপযোগী।

পরিমিত ব্যবধানের অসুবিধা

ক) অন্যান্য পরিমাপের চেয়ে এটা নির্ণয় করা একটু কঠিন।

খ) পরিমিত ব্যবধান প্রান্তীয় মান দ্বারা প্রভাবিত হয়।

সারসংক্ষেপ:

কোন চলক বা নিবেশনের সকল তথ্যমান থেকে এদের গাণিতিক গড়ের ব্যবধানসমুহের বর্গের গড় হল ভেদাংক এবং ভেদাংকের বর্গমূল হল পরিমিত ব্যবধান।

ইউনিট মূল্যায়নঃ

১। বিস্তার ও বিস্তার পরিমাপ বলতে কী বুঝায় উদাহরণসহ লিখুন।

২। বিভিন্ন বিস্তার পরিমাপগুলো কি কি? বর্ণনা করুন। কোন পরিমাপটি ভাল, যুক্তি সহকারে উল্লেখ করুন।

৩। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ ও পরম বিস্তার পরিমাপ বলতে কী বুঝায়? এদের মধ্যে পার্থক্য কী?

৪। বিস্তার পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা সম্পর্কে আলোচনা করুন।

৫। পরিসর বলতে কী বোঝায়? এটা কিভাবে নির্ণয় করতে হয়? পরিসরাংক কী? পরিসরের সুবিধা ও অসুবিধাসমূহ লিখুন। নিম্নলিখিত তথ্যমান থেকে পরিসর এবং পরিসরাংক বের করুন।

19, 16, 15, 14, 13, 17, 21, 22, 28, 15, 16, 19

৬। চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাংক বলতে কী বুঝায়? এগুলো নির্ণয় করার পদ্ধতি বর্ণনা করুন। চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা ও অসুবিধাসমূহ লিখুন।

৭। নিম্নলিখিত গণসংখ্যা নিবেশন থেকে চতুর্থক ব্যবধান ও চতুর্থক ব্যবধানাংক নির্ণয় করুন।

X	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	12	19	5	10	9	6

৮। পরিমিত ব্যবধান ও পরিমিত বিভেদাংক বলতে কী বুঝায়? কিভাবে এগুলো নির্ণয় করতে হয়? এর সুবিধা ও অসুবিধাসমূহ লিখুন। পরিমিত ব্যবধান ও গড় ব্যবধানের মধ্যে পার্থক্য কী?

৯। নিম্নে প্রদত্ত কিছুসংখ্যক লোকের উচ্চতার নিবেশনের সারণি থেকে পরিমিত ব্যবধান ও পরিমিত বিভেদাংক নির্ণয় করুন।

উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	লোকের সংখ্যা
60-65	20
65-70	180
70-75	31
75-80	09

১০। দুটি সংখ্যার গাণিতিক গড় 6 এবং ভেদাংক 9। সংখ্যা দুটি কি কি?