৫

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ
Measures of Central Tendency

ভূমিকা

পূর্ব ইউনিট থেকে আমরা তথ্য উপস্থাপন কৌশল সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছি। তথ্যসমূহের তথ্য উপস্থাপন ছাড়াও সংখ্যাত্মক বিশ্লেষণ জানা প্রয়োজন। সংখ্যাগত বিশ্লেষণ জানতে তথ্যরাশির একটি প্রতিনিধিত্বকারী সংখ্যা জানা দরকার প্রতিনিধিত্বকারী সংখ্যা বের করার জন্য বিভিন্ন পদ্ধতি রয়েছে। যেমন, গড়, মধ্যক ও প্রচুরক ইত্যাদি প্রতিনিধিত্বকারী তথ্যমান। এ অধ্যায়ে আমরা প্রতিনিধিত্বকারী সংখ্যা নির্ণয় পদ্ধতি অর্থাৎ কেন্দ্রীয় প্রবণতা নির্ণয় পদ্ধতিসমূহ নিয়ে আলোচনা করবো।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২ সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৫.১ : কেন্দ্রীয় প্রবণতা এবং এর পরিমাপ
পাঠ-৫.২ : মধ্যমা ও এর পরিমাপ
পাঠ-৫.৩ : প্রচুরক ও এর পরিমাপ
পাঠ-৫.৪ : চতুর্থক, দশমক ও শতমক

পাঠ-৫.১ কেন্দ্রীয় প্রবণতা এবং এর পরিমাপ
Mean and its measurements

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- গড়ের সংজ্ঞা বলতে পারবেন;
- গড়ের প্রকারভেদ লিখতে পারবেন;
- গড়ের সুবিধা ও প্রয়োজনীয়তা বর্ণনা করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

গড়: গড় বলতে আমরা এমন একটি প্রতিনিধিত্বকারী সংখ্যাকে বুঝি যা সংগৃহীত তথ্যের মোটামুটি মধ্যবিন্দু বা কেন্দ্র বিন্দুতে অবস্থান করে। গড় তিন প্রকার-

১। গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean)
২। গুণিতক গড় (Geometric Mean)
৩। তরঙ্গ গড় (Harmonic mean)

১। গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean)**:** গণিতের সূত্র ব্যবহার করে গড় পরিমাপ করাকে গাণিতিক গড় বলে। এক্ষেত্রে গড় নির্ণয়ে প্রাপ্ত তথ্যকে সংখ্যা বানিয়ে গাণিতিক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। ধরা যাক x_1, x_2 ...... x_n; n টি তথ্য রয়েছে। অতএব গড়ের সংজ্ঞানুসারে তথ্য সমূহের যোগফলকে তথ্যসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে গড় বলে।

ক. অশ্রেণীকৃত তথ্য থেকে গড় নির্ণয়:

i) **সরাসরি পদ্ধতি :**

$$\text{তথ্যসমূহের গড়} = \frac{\text{তথ্যসমূহের সমষ্টি}}{\text{তথ্য সংখ্যা}}$$

এখন, গাণিতিক গড়কে আমরা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করতে পারি-

গাণিতিক গড়, $AM = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$

গাণিতিক গড়কে $\bar{x}$ দ্বারা প্রকাশ করলে গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

অতএব, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$; $\sum_{i=1}^{n} x_i$; [i=1, 2 ,......, n]

এখানে, $\sum$ (সামেশন) একটি গ্রীক বর্ণ, যা যোগফল প্রকাশ করে।

<u>অশ্রেণিকৃত তথ্যের গাণিতিক গড়।</u>

উদাহরণ-১

নিচে ১০ জন ছাত্র-ছাত্রীর পরিসংখ্যান বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বর দেয়া হল। গাণিতিক গড় নির্ণয় করুন।

ছাত্র-ছাত্রীদের প্রাপ্ত নম্বর (X) ঃ 20,30,35,37,47, 50, 55, 32, 26, 25

সমাধান ঃ গাণিতিক গড়ের সংজ্ঞা অনুযায়ী $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$$\bar{x} = \frac{20+30+35+37+47+50+55+32+26+25}{10}$$

$$= \frac{320}{10}$$

$$= 35.7$$

অতএব, গাণিতিক গড় হল 35.7

ii) **সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি:**

যদি তথ্যমালায় তথ্যসংখ্যা অনেক বেশি হয় অথবা সংখ্যা গুলো অনেক বড় হয় সেসব ক্ষেত্রে গড় নির্ণয় বেশ জটিল হয় এবং সময় ও বেশি লাগে। এসব ক্ষেত্রে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হয়।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়:

১। প্রথমে একটি আনুমানিক সংখ্যা বা আনুমানিক গড় বা তথ্য সারির মধ্যস্থানে যে সংখ্যাটি অবস্থান করে সেটাকে কল্পনায় আনতে হবে।

২। প্রতি তথ্যসংখ্যা থেকে উক্ত সংখ্যাটি বিয়োগ করে পার্থক্য নির্ণয় করতে হবে।

৩। প্রাপ্ত তথ্যগুলি যোগ করে মোট তথ্য সংখ্যা সংখ্যা দিয়ে ভাগ করতে হবে।

৪। এর পর প্রাপ্ত তথ্যের সাথে কল্পিত গড় বা আনুমানিক গড় যোগ করলে গড় পাওয়া যাবে।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাণিতিক গড়ের সুত্রটি হল $\bar{x} = \mathrm{A} + \frac{\sum (x_i - A)}{n}$; $[i = 1, 2, \ldots.., n]$

যেখানে A = আনুমানিক গড়

x_i = তথ্য সারির মান

n = মোট তথ্য সংখ্যা

উদাহরণ-২: নিচে 10 জন ছাত্র-ছাত্রীর পরিসংখ্যান বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বর দেয়া হল। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয় করুন।

ছাত্র-ছাত্রীদের প্রাপ্ত নম্বর (X) ঃ 20,30,35,37,47, 50, 55, 32, 26, 25

সমাধানঃ আমরা সংক্ষিপ্ত গড়ের সূত্রটি থেকে পাই, $\bar{x} = A + \frac{\sum(x_i - A)}{n}$; [i= 1,2,……,10]

X_i	X_i - A (50)
20	-30
30	-20
35	-15
37	-13
47	-3
50(A)	0
55	5
32	-18
26	-24
25	-25
	$\sum(X_i - A) = -143$

গড়, $\bar{x} = A + \frac{\sum(x_i - A)}{n}$

$=50+\frac{-143}{10}$

$=50-14.3$

$=35.7$

$\therefore$ নির্ণেয় গড় = 35.7

খ. শ্রেণিকৃত বা ঘটনসংখ্যা নিবেশন তথ্য থেকে গড় নির্ণয়ঃ

i) **সরাসরি পদ্ধতিঃ**

তথ্যসমূহ যদি অনেক হয় অর্থাৎ ৩০ এর উপরে হয় তখন সরাসরি গড় নির্ণয় করা কঠিন এসব ক্ষেত্রে ঘটন সংখ্যাবিন্যাস আকারে তথ্যকে সন্নিবেশিত করা হয়। এই সন্নিবেশিত তথ্যকে শ্রেণিকৃত তথ্য বলা হয়।

শ্রেণিকৃত তথ্য থেকে গড় নির্ণয়ের সূত্রটি হল, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N}$; $[\, i = 1,2,.....,n \,]$, $N = \sum_{i=1}^{n} fi$

যেখানে f_i=ঘটনসংখ্যা

x_i= তথ্যসংখ্যা

N= মোট তথ্যসংখ্যা

উদাহরণ-৩

কোন পরীক্ষায় 60 জন ছাত্র-ছাত্রীর পরিসংখ্যান বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন নিম্নে দেয়া হলো– গাণিতিক গড় নির্ণয় করুন।

নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	গণসংখ্যা
10-20	2
20-30	5
30-40	9
40-50	19
50-60	15
60-70	7
70-80	2
80-90	1

সমাধান

গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণী

শ্রেণি ব্যবধান	মধ্যমান (X)	ছাত্র-ছাত্রী সংখ্যা (f_i)	$f_i x_i$
10-20	15	2	30
20-30	25	5	125
30-40	35	9	325
40-50	45	19	855
50-60	55	15	825
60-70	65	7	455
70-80	75	2	150
80-90	85	1	85
		$N=\Sigma fi = 60$	$\Sigma f_i x_i = 2840$

গাণিতিক গড় $\bar{X} = \frac{\Sigma f_i X_i}{N} = \frac{2840}{60}$ $\quad \therefore N=\Sigma f_i$

$= 47.33$

নির্ণেয় গড় $= 47.33$

ii) **সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি**

শ্রেণিকৃত তথ্য থেকে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের সূত্রটি হ‘ল,

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{N} \times c; \quad [i = 1, 2, ..., N]$$

যেখানে, $\bar{x}$ = যোজিত গড়

A= আনুমানিক গড়

c= শ্রেণি ব্যাপ্তি

$d = \frac{x_i - A}{c}$

f= প্রতি শ্রেণির ঘটনসংখ্যা

N= $\sum fi$ =ঘটন সংখ্যার যোগফল

উদাহরণ-8: কোন পরীক্ষায় 60 জন ছাত্র-ছাত্রীর পরিসংখ্যান বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন নিম্নে দেয়া হলো– সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয় করুন।

শ্রেণী ব্যবধান	ছাত্র-ছাত্রী সংখ্যা (f_i)
10-20	2
20-30	5
30-40	9
40-50	19
50-60	15
60-70	7
70-80	2
80-90	1

সমাধান: তথ্যটি শ্রেণিকৃত। গড় নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিতভাবে মানগুলো বের করতে হবে:

শ্রেণী ব্যবধান	মধ্যমান (xi)	ছাত্র-ছাত্রী সংখ্যা (f_i)	$di = \frac{x_i - A}{c}$	$f_i d_i$
10-20	15	2	-4	-8
20-30	25	5	-3	-15
30-40	35	9	-2	-18
40-50	45	19	-1	-19
50-60	55=A	15	0	0
60-70	65	7	1	7
70-80	75	2	2	4
80-90	85	1	3	3
		$N=\Sigma f_i = 60$		$\sum f_i d_i$=-46

$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fidi}{N} \times C$

$\bar{x} = 55 + \frac{-46}{60} \times 10$

$= 55 + (-7.67)$

$= 55 - 7.67$

$= 47.33$

$\therefore$ নির্ণেয় গড় $= 47.33$

গাণিতিক গড়ের বৈশিষ্ট্য : গাণিতিক গড়ের বৈশিষ্ট্যগুলি নিম্নে দেওয়া হল:

i) প্রতিটি তথ্য থেকে তথ্যের গড়ের বিচ্যুতির যোগফল "শুণ্য" সূত্রের সাহায্যে দেখালে আমরা পাই-

$\sum_{i=1}^{n}(xi - \bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ =তথ্যসমূহের গড়।

ii) গাণিতিক গড় মূল বিন্দু ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

যদি $X_1, X_2, ...X_n$; n টি তথ্য হয় এবং প্রতিটি তথ্য থেকে মূল বিন্দু বিয়োগ এবং মাপনী দিয়ে ভাগ করলে নতুন যে তথ্য আমরা পাই সেই তথ্যের গড় মূলও মাপনীর উপর নির্ভরশীল এ ক্ষেত্রে গড় $\bar{x} = a + \bar{u}h$; a=মুল

h= মাপনী এবং $\bar{u}$ = নতুন তথ্যর গড়

iii) ধ্রুবক সংখ্যার গড় সর্বদা ধ্রুবক। n টি k সংখ্যার গড় $= \frac{k + k + ... + k}{n} = \frac{nk}{n} = k$

গাণিতিক গড়ের সুবিধা:

- গাণিতিক গড় সহজ পরিমাপক।
- অশ্রেণিকৃত তথ্য থেকে সহজে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা যায়।
- গাণিতিক গড় বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া আরোপের উপযোগী।
- গাণিতিক গড়ের ব্যবহার সর্বাধিক।
- নমুনার তারতম্য হলেও গাণিতিক গড় কম প্রভাবিত হয়।

অসুবিধা:

- তথ্যসেটে প্রান্তীয় মান থাকলে গাণিতিক গড় প্রতিনিধিত্বকারী হয় না।
- প্রান্ত খোলা বিন্যাসের গাণিতিক গড় নির্ণয় করা সম্ভব নয়
- গ্রাফের মাধ্যমে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা যায় না।

ব্যবহার:

ব্যবহারিক জীবনে গাণিতিক গড়ের ব্যবহার বিস্তৃত। তাছাড়া ব্যবহারিক প্রয়োজনে প্রতি ক্ষেত্রেই গাণিতিক গড়ের ব্যবহার অনস্বীকার্য। যেমন, মাসিক গড় আয়, গড় লেনদেন, কোম্পানির হিসাব-নিকাশ, কোন পণ্যের গড় আমদানী রপ্তানীর ও পণ্যের চাহিদা ইত্যাদিতে গাণিতিক গড় ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করা যায়।

২। গুণিতক বা জ্যামিতিক গড় (Geometric Mean): গুণিতক গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি বিশেষ পরিমাপক। সাধারণত আনুপাতিক হিসাব, শতকরা হিসাব এবং পরিবর্তনের হারের ক্ষেত্রে গুণিতক গড় ব্যবহার উপযোগী। তাছাড়া

অর্থনৈতিক ও বাণিজ্যিক তথ্য বিশ্লেষণ যেমন সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে গুণিতক গড় ব্যবহার করা হয়। গুণিতক গড়ের সংজ্ঞা অনুসারে আমরা পাই:

ক. অশ্রেণিকৃত তথ্য থেকে গুণিতক গড় নির্ণয়:

অশূণ্য ধনাত্মক n সংখ্যক তথ্যের গুণফলের n তম মূলকে ঐ তথ্যের গুণিতক গড় বলে অর্থাৎ গুণিতক গড়

$$GM = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3........x_n}$$

$$= (x_1.x_2.x_3........x_n)^{\frac{1}{n}}$$

উভয় পার্শ্বে log নিলে পাই-

$$\log(G.M) = \frac{\log(x_1.x_2......x_n)}{n}$$

$$= \frac{\log x_1 + \log x_2 + ... + \log x_n}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{x} \log x_i;}{n} \qquad [i = 1,2.........n]$$

$$GM = \text{Antilog} \frac{\sum_{i=1}^{x} \log x_i;}{n} \qquad [i = ১,২,.........n]$$

উদাহরণ-৫ : এই পাঠের উদাহরণ-১ এর উল্লেখিত 10 জন ছাত্র-ছাত্রীর পরিসংখ্যান বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বর থেকে জ্যামিতিক গড় নির্ণয় করুন।

ছাত্র-ছাত্রীদের প্রাপ্ত নম্বর (X) ঃ 20,30,35,37,47, 50, 55, 32, 26, 25

সমাধান ঃ

X	log X
20	1.301
30	1.477
35	1.544
37	1.568
47	1.672
50	1.699
55	1.740
32	1.505
26	1.415
25	1.398
N=10	Σlogxi=15.319

$$\therefore \text{GM.} = \text{Antilog}\left(\frac{\Sigma \log x}{n}\right)$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{15.319}{10}$$

$= \text{Anti log } (1.5319)$

$= 34.033$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যামিতিক গড় $= 34.033$

খ. শ্রেণিকৃত তথ্যসমূহের গুণিতক গড় নির্ণয়: যদি কোনো চলক $x_1, x_2, ..., x_n$ এর গণসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, ..., f_n$ হয়, তবে তাদের জ্যামিতিক গড় হবে.... ।

যদি x_i, i-তম শ্রেণির মধ্যবিন্দু এবং ঘটনসংখ্যা f_i হয় তাহলে গুণিতক গড়কে নিম্নভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়,

গুণিতক গড় (শ্রেণিকৃত তথ্যের), $GM = \left[x_1^{f_1}\, x_2^{f_2}\, x_3^{f_3} ...... x_n^{f_n} \right]^{\frac{1}{N}}$; $\quad N = \sum_{i=1}^{n} fi; [\ i = 1,2,.....n\ ]$

$$\therefore \log GM = \frac{\log\left(x_1^{f_1}\, x_2^{f_2}\, x_3^{f_3} ...... x_n^{f_n} \right)}{N} \quad \text{[উভয় পক্ষের logarithm নিয়ে]}$$

$$= \frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + ... + f_n \log x_n}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} fi \log x_i;}{N} \quad [\ i = 1,2,........., N\ ]$$

$$GM = \text{Antilog} \frac{\sum_{i=1}^{n} fi \log x_i}{N} \quad [\ i = 1,2,........., N\ ]$$

উদাহরণ-৬ : এই পাঠের উদাহরণ-৩ এর উল্লেখিত 60 জন ছাত্রীর প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি থেকে জ্যামিতিক গড় নির্ণয় করুন।

নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	গণসংখ্যা
10-20	2
20-30	5
30-40	9
40-50	19
50-60	15
60-70	7
70-80	2
80-90	1

সমাধান

জামিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি

শ্রেণি ব্যবধান	মধ্যমান xi	গণসংখ্যা fi	log xi	$fi \log xi$
10-20	15	2	1.1761	2.3522
20-30	25	5	1.3979	6.9895
30-40	35	9	1.5441	13.8965
40-50	45	19	1.6532	31.4108
50-60	55	15	1.7404	26.1060
60-70	65	7	1.8129	12.6903
70-80	75	2	1.8751	3.7502
80-90	85	1	1.9294	1.9294
		$\Sigma fi = 60$		$\Sigma fi \log xi$=99.1253

জ্যামিতিক গড় GM. $= \text{Anti log}\left(\frac{\sum fi \log xi}{\text{N}}\right)$

$$= \text{Anti log}\left(\frac{99.1253}{60}\right)$$

$$= \text{Anti log}\,(1.652088)$$

$$= 44.883$$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যামিতিক গড় $= 44.883$

গুণিতক গড়ের সুবিধাঃ

গুণিতক গড়ের সুবিধা গুলি নিম্নে আলোচনা করা হল:

- গুণিতক গড়ের সংজ্ঞা যথেষ্ট স্পষ্ট
- তথ্যসমূহের শতকরা হার, অনুপাত ইত্যাদির ক্ষেত্রে গুণিতক গড় ব্যবহার সহজবোধ্য
- গুণিতক গড় নমুনা তারতম্য দ্বারা তেমন প্রভাবিত নয়
- সুচক সংখ্যা তৈরিতে গুণিতক গড় ব্যবহার হয়

গুণিতক গড়ের অসুবিধাঃ

গুণিতক গড়ের অসুবিধাগুলি নিম্নে আলোচনা করা হল:

- গাণিতিক বিষয়ে জ্ঞান না থাকলে গুনিতক গড় নির্ণয় করা কঠিন
- তথ্য মানের মধ্যে শুণ্য ও ঋণাত্মক মান থাকলে গুনিতক গড় নির্ণয় করা যায় না।

৩। তরঙ্গ গড় (Harmonic Mean): তরঙ্গ গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের আর একটি বিশেষ পরিমাপক। কতকগুলো বিশেষ ক্ষেত্র যেমন, শেয়ার প্রতি আয়, টাকা প্রতি পণ্য ক্রয়ের পরিমান, প্রতি ঘন্টায় দুরত্ব অতিক্রম ইত্যাদি ধরনের তথ্যের গড় নির্ণয়ে তরঙ্গ গড় বিশেষভাবে উপযোগী। তরঙ্গ গড়ের সংজ্ঞা নিম্নে দেওয়া হল:

ক. অশ্রেণীকৃত তথ্যের তরঙ্গগড় নির্ণয়ঃ

তথ্য মান সমূহের উল্টন মানগুলোর গাণিতিক গড়ের উল্টনকে তরঙ্গ গড় বলে। যদি $x_1, x_2, ...x_n$; n টি অশুন্য তথ্য হয় তাহলে তরঙ্গ গড়ের সংজ্ঞানুযায়ী পাই-

তথ্যসমূহের উল্টন মান, $\frac{1}{x_১}, \frac{1}{x_২}, ...\frac{1}{x_n}$ এর গাণিতিক গড়= $\dfrac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+........+\frac{1}{x_n}}{n}$ এর উল্টন ফলকে তরঙ্গ গড় বলে।

অর্থাৎ $HM = \dfrac{n}{\left[\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+....+\frac{1}{x_n}\right]} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$; $[i = 1,2,.....n]$

$\therefore$ তরঙ্গ গড়, HM $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$; $[\ i = 1,2,.....n\ ]$

উদাহরণ-৭

এই পাঠের উদাহরণ-১ এ বর্ণিত 10 জন ছাত্র-ছাত্রীর পরিসংখ্যান বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বর থেকে তরঙ্গ গড় বের করুন।

ছাত্র-ছাত্রীদের প্রাপ্ত নম্বর (X) ঃ 20, 30,35,37,47, 50, 55, 32, 26, 25

সমধান ঃ

সংজ্ঞানুযায়ী তরঙ্গ গড়

$$H.M = \frac{10}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{35}+\frac{1}{37}+\frac{1}{47}+\frac{1}{50}+\frac{1}{55}+\frac{1}{32}+\frac{1}{26}+\frac{1}{25}}$$

$$= \frac{10}{0.3077}$$

$$= 32.49$$

$\therefore$ নির্ণেয় তরঙ্গ গড় = 32.49

খ. শ্রেণিকৃত তথ্যের তরঙ্গ গড় নির্ণয়ঃ

শ্রেণিকৃত নিবেশনের ক্ষেত্রে অর্থাৎ n সংখ্যক মানকে যদি n শ্রেণি বিশিষ্ট ঘটনসংখ্যা নিবেশনে রূপান্তরিত করা যায় অর্থাৎ যদি i তম শ্রেণির মধ্যমান x_i এবং তার ঘটনসংখ্যা f_i হয়, তাহলে তরঙ্গ গড়ের সংজ্ঞানুসারে পাই-

$$HM = \frac{N}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+.....+\frac{f_n}{x_n}}$$

$$= \frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{x_i}}; \qquad N=\sum_{i=1}^{k} fi; \qquad [\ i = 1,2.........N\ ]$$

উদাহরণ-৮ এই পাঠের উদাহরণ-৩ এর বর্ণিত 60 জন ছাত্র-ছাত্রী প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি থেকে তরঙ্গ গড় বের করুন।

নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	গণসংখ্যা
10-20	2
20-30	5
30-40	9
40-50	19
50-60	15
60-70	7
70-80	2
80-90	1

সমাধান ঃ তরঙ্গ গড় নির্ণয়ের সারণী

শ্রেণী ব্যবধান	মধ্যমান Xi	গণসংখ্যা fi	$\frac{fi}{Xi}$
10-20	15	2	0.13333
20-30	25	5	0.20000
30-40	35	9	0.25714
40-50	45	19	0.42222
50-60	55	15	0.27272
60-70	65	7	0.10769
70-80	75	2	0.02666
80-90	85	1	0.01176
		$N=\Sigma fi = 60$	$\Sigma \frac{fi}{Xi} = 1.43155$

$$\therefore \text{HM} = \frac{60}{1.43155} = 41.913$$

$\therefore$ নির্ণেয় তরঙ্গ গড় $= 41.913$

তরঙ্গ গড়ের সুবিধাঃ

তরঙ্গ গড়ের সুবিধাগুলি নিম্নে দেওয়া হলঃ

- তরঙ্গ গড় সকল তথ্যমানের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়।
- এটি নমুনা তারতম্য দ্বারা তেমন প্রভাবিত হয় না।
- শেয়ার প্রতি আয়, টাকা প্রতি পণ্য ক্রয়ের পরিমাপ, প্রতি ঘন্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব প্রভৃতি ক্ষেত্রে তরঙ্গ গড় ব্যবহার সুবিধা জনক।
- তরঙ্গ গড় গাণিতিক পরিগণনায় উপযোগী।

অসুবিধা: তরঙ্গ গড়ের অসুবিধা:

- তথ্যসেটের কোনো মান শূন্য হলে এ গড় নির্ণয় করা যায় না।
- তরঙ্গ গড়ের সুত্র বুঝতে অসুবিধা হয়।
- অর্থনেতিক বিশ্লেষণে তরঙ্গ গড় এর ব্যবহার সীমিত।

ভার আরোপিত গড় (Weighted mean): তথ্যসেটের মানগুলোর প্রধান্যের তারতম্য থাকলে প্রতিটি মানকে উপর্যুক্ত ভার দেয়া হয়। তারতম্যমুক্ত প্রতিনিধিত্বমূলক গড় পেতে হলে প্রতিটি তথ্যমানকে তার ভার দিয়ে গুণ করা হয়। অতপর তাদের সমষ্টিকে গুরুত্ব সমূহের সমষ্টি দিয়ে ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ভার আরোপিত গড় বলা হয়। ভার আরোপিত গড় নির্ণয়ের জন্য একটি সূত্র সংজ্ঞানুযায়ী লিখতে পারি-

ভার আরোপিত গড় কে $\bar{x}_w$ দ্বারা প্রকাশ করলে $\bar{x}_w = \dfrac{\sum (w \times x)}{\sum w}$

যেখানে w = প্রতিটি তথ্যের গুরুত্বের মান

x = প্রতিটি তথ্যের মান

উদাহরণ-৯: ধরা যাক তিন ধরনের শ্রমিক দুই ধরনের উৎপাদন সম্পাদন করেছে। উৎপাদনের তথ্য নিম্নে দেওয়া হল:

শ্রমিকের ধরন	ঘন্টায় আয় (টাকায়)	উৎপাদন	
		উৎপাদন-১	উৎপাদন-২
অদক্ষ	40	1	4
অর্ধদক্ষ	60	2	3
দক্ষ	90	5	3

সমাধান: তথ্যগুলিকে সাজিয়ে লিখলে পাই

শ্রমিকের ধরণ	ঘন্টায় আয়	উৎপাদনের প্রয়োজন		
		উৎপাদন-১	উৎপাদন-২	
অদক্ষ	40	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{10}$	$\bar{x}_{1w} = \dfrac{(40\times\frac{1}{8}+60\times\frac{2}{8}+90\times\frac{5}{8}}{(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{5}{8})} = \dfrac{76.25}{1} = 76.25$
অর্দদক্ষ	60	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{10}$	
দক্ষ	90	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\bar{x}_{2w} = \dfrac{(40\times\frac{4}{10}+60\times\frac{3}{10}+90\times\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}} = \dfrac{61}{1} = 61$

$\therefore$ শ্রমিকের প্রতি ঘন্টায় উৎপাদন-১ এর ভার আরোপিত গড়, $\bar{x}_{১w}$ =76.25 টাকা এবং উৎপাদন-২ এর ক্ষেত্রে ভার আরোপিত গড় $\bar{x}_{2w}$ =61 টাকা।

সারসংক্ষেপ:

তথ্য বিশ্ব থেকে প্রাপ্ত তথ্যসমূহ কেন্দ্রের কোন একটি মানের দিকে যাওয়ার প্রবণতা থাকে। তাই তথ্যের এ প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। এ পাঠে শুধুমাত্র AM.; GM.; HM এবং WM নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

পাঠ-৫.২

মধ্যমা ও এর পরিমাপ
Median and its Measurement

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- মধ্যমার সংজ্ঞা বলতে পারবেন;
- মধ্যমার পরিমাপ পদ্ধতি/বর্ণনা করতে পারবেন;
- শ্রেণিকৃত তথ্য থেকে মধ্যমার পরিমাপ নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন গ্রাফ থেকে মধ্যমার পরিমাপ করতে পারবেন;
- মধ্যমার সুবিধা, অসুবিধা ও ব্যবহার লিখতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মধ্যমা (Median)

মধ্যমা বলতে তথ্যসারির সর্ব মধ্যস্থানে অবস্থানকৃত তথ্যমানকে বুঝায়। তথ্যসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে সবচেয়ে মধ্য স্থানে যে তথ্যমানটি থাকে তাকে মধ্যমা বলে। অর্থাৎ দেখা যাচ্ছে মধ্যমা তথ্য সংখ্যার উপর নির্ভর করে। যদি তথ্যমান সংখ্যা বিজোড় হয় তাহলে-

মধ্যমা $= \frac{n+1}{2}$ তম মান। এখানে তথ্যসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজাতে হবে আবার যদি তথ্য সংখ্যা জোড় হয় তাহলে একইভাবে তথ্য মানকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে মধ্যমানের অবস্থান নির্ণয় করতে হবে। মধ্যমা $= \frac{n}{2}$ তম এবং $(\frac{n}{2}+1)$ তম মানদ্বয়ের গাণিতিক গড় মান।

ক. অশ্রেণিকৃত তথ্য থেকে মধ্যমা নির্ণয়ঃ

উদাহরণ দ্বারা আলোচনা করা হল:

<u>যখন n বিজোড় সংখ্যা:</u>

উদাহরণ-১ : কোন কারখানায় ৭ জন শ্রমিকের প্রতি ঘন্টার মুজুরী নিম্নে দেওয়া হল।

মধ্যমা নির্ণয় করুন।

তথ্য:	12, 10, 15, 14, 17, 20, 19

সমাধান: তথ্য সংখ্যা বিজোড়। তথ্যগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে পাই: 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20।

মধ্যমা $= \frac{n+1}{2}$ তম মান $= \frac{7+1}{2}$ তম মানটি $= \frac{8}{2} = 4$ তম সংখ্যা $=15$।

<u>n যখন জোড় সংখ্যা:</u>

উদাহরণ-২: 8 জন শ্রমিকের মজুরীর প্রতি ঘন্টার তথ্য দেওয়া হল:

তথ্য:	12, 10, 15, 14, 17, 20, 19, 13

মধ্যমা নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ এখানে তথ্য সংখ্যা n জোড়। তথ্যমানসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে পাওয়া যায়ঃ

10, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20

জোড় সংখ্যার ক্ষেত্রে মধ্যমা

$$=\frac{\frac{n}{2}\text{তম পদ}+\left(\frac{n}{2}+1\right)\text{তম পদ}}{2}$$

$$=\frac{\frac{8}{2}\text{তম পদ}+\left(\frac{8}{2}+1\right)\text{তম পদ}}{2}$$

$$=\frac{4\text{ তম পদ}+5\text{তম পদ}}{2}$$

$$=\frac{14+15}{2}$$

$$=\frac{29}{2}$$

$$=14.5$$

খ. শ্রেণিকৃত তথ্য থেকে মধ্যমা নির্ণয়ঃ

শ্রেণিকৃত তথ্য বিন্যাস থেকে মধ্যমা নির্ণয়ের সুত্রটি হল

$$Me = L+\frac{\frac{N}{2}-Fc}{fm}\times h$$ যেখানে

L = মধ্যমা শ্রেণির নিম্নসীমা

N = তথ্য সংখ্যা

F_c = মধ্যমা শ্রেণির পূর্ব শ্রেণির যোজিত ঘটন সংখ্যা

F_m = মধ্যমা শ্রেণির ঘটন সংখ্যা

h = শ্রেণি ব্যবধান

$\frac{n}{2}\leq$ যোজিত ঘটন সংখ্যা, কে মধ্যমা শ্রেণি বলা হবে।

উদাহরণ-২ ঃ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ে 70 জন ছাত্রের পরিসংখ্যান বিষয়ের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন নিচে দেয়া হল।

ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যমা নির্ণয় করুন।

নম্বরের শ্রেণি	ছাত্র সংখ্যা f
40-45	7
45-50	12
50-55	19
55-60	18
60-65	13
65-70	1

সমাধান: ৭০ জন ছাত্রের ক্রমোযোজিত বিন্যাস নিম্নে দেওয়া হল

নম্বরের শ্রেণি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
40-45	7	7
45-50	12	19= pcf
50-55	$19 = F_m$	38
55-60	18	56
60-65	13	69
65-70	1	70
	n = 70	

<u>মধ্যমা</u>

এখানে $\frac{n}{2} = \frac{70}{2} = 35$, যার চেয়ে বড় ক্রমযোজিত সংখ্যা হল 38।সুতরাং মধ্যমা 50-55 শ্রেণির মধ্যে অবস্থান করে।

অতএব, সূত্রানুসারে মধ্যমা

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - pcf}{f(Me)} \times h$$

$$\therefore M = 50 + \frac{\frac{70}{2} - 19}{19} \times 5 \qquad \text{[এখানে } L = 50,\ F(Me) = 19,\ pcf = 19,\ h = 5\text{]}$$

$$= 50 + \frac{35 - 19}{19} \times 5$$

$$= 50 + 4.210$$

$$= 54.210$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $= 54.210$

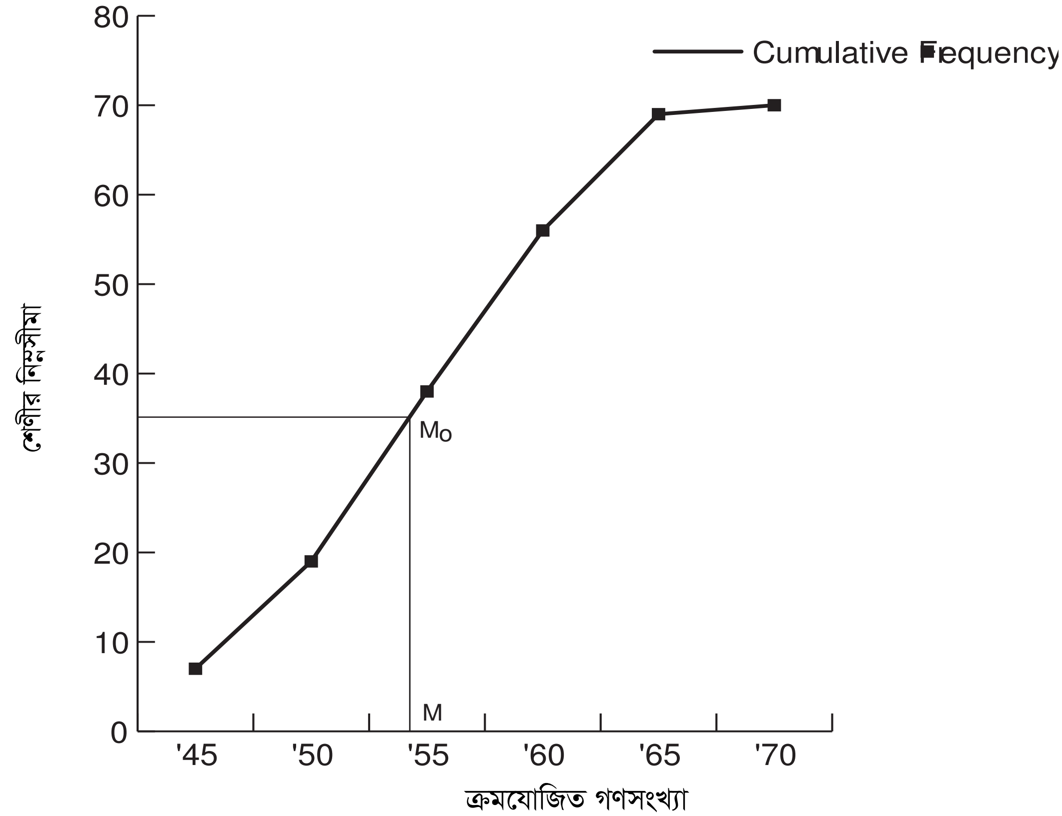
লেখচিত্রের মাধ্যমে মধ্যমা নির্ণয় ঃ

লেখচিত্রের মাধ্যমে কোনো গণসংখ্যা নিবেশন থেকে মধ্যমা নির্ণয় করা যায়। গণসংখ্যা নিবেশন থেকে অজিভ রেখা অংকন করে সেখান থেকে মধ্যমা নির্ণয় করা যায়। আপনারা পাঠ-৪.৭-এ কিভাবে অজিভ রেখা বা যোজিত গণসংখ্যা রেখা অংকন করতে হয় জেনেছেন। অজিভ রেখার মাধ্যমে মধ্যমা নির্ণয় করতে হলে নিম্নলিখিত পদক্ষেপ নিতে হবে–

(ক) অজিভ রেখার X অক্ষে থাকে চলকের উচ্চসীমা এবং Y অক্ষে থাকে যোজিত গণসংখ্যা। কোন গণসংখ্যা নিবেশনের মোট গণসংখ্যা n হলে n/2 এর অবস্থান প্রথমে Y অক্ষে চিহ্নিত করুন।

(খ) Y অক্ষের n/2 বিন্দু থেকে X অক্ষ এর সমান্তরাল একটি রেখা অংকন করুন এবং এই রেখা অজিভ রেখার একটি বিন্দুতে Mo (চিত্রে) ছেদ করবে।

(গ) অজিভ রেখার ছেদ বিন্দু (Mo) থেকে X অক্ষ রেখার উপর একটি লম্ব অংকন করুন যা চিত্র অনুযায়ী X অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করবে। এই ছেদ বিন্দুর মানই হবে মধ্যমা।



চিত্র-৫.২: মধ্যমা

সারসংক্ষেপ:

প্রচুরক কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপক। প্রচুরক লেখচিত্রের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়। ব্যবসায়িক ক্ষেত্রে যেমন কোন কোম্পানীর উৎপাদিত দ্রব্যের ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্যের সংখ্যা কতটা বেশী তা সহজে প্রচুরকের সাহায্য ধরা যায়।

পাঠ-৫.৩ প্রচুরক ও এর পরিমাপ
Mode and its measurement

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- প্রচুরকের সংজ্ঞা বলতে পারবেন;
- প্রচুরকের ব্যবহার লিখতে পারবেন;
- শ্রেণিকৃত বিন্যাস থেকে প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবেন;
- প্রচুরকের পরিমাপ পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন;
- লেখ চিত্রের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

প্রচুরক Mode

তথ্যসেটে যে তথ্য তথ্যটি সর্বাধিক বার পুনরাবৃত্তি হয় সে তথ্যটিকে প্রচুরক বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় কোন গার্মেন্টস এ বিভিন্ন সাইজের শার্ট বাজারে এসেছে। দেখা গেল ক্রেতা একটি নির্দিষ্ট কাটিং এর শার্ট পছন্দের তালিকায় রেখেছে অর্থাৎ ঐ নির্দিষ্ট কাটিং এর শার্ট ক্রয় হল প্রচুরক। প্রচুরকের সংজ্ঞাটি নিম্নরূপে দেওয়া যায়-

ক. অশ্রেণিকৃত তথ্য থেকে প্রচুরক নির্ণয়:

তথ্যসেটে যে মানটি সর্বাধিকবার পুনরাবৃত্তি হয়েছে তাকে প্রচুরক বলে।

উদাহরণ: মোল্লাহাট থানার কাহাদপুর গ্রামে কয়েকটি পরিবারে সন্তানের সংখ্যা জরিপের একটি তথ্য নিম্নে দিওয়া হল। প্রচুরক নির্ণয় করুন।

সন্তানের সংখ্যা	0	1	2	3	4	5	6
পরিবারের সংখ্যা	5	11	23	32	17	8	3

সমাধান: উপরের তথ্য থেকে দেখা, যাচ্ছে যে 3 জন সন্তান সর্বাধিক পরিবারে রয়েছে তাই এখানে পরিবারের সন্তান সংখ্যার প্রচুরক হল 3।

খ. শ্রেণিকৃত তথ্য থেকে প্রচুরক নির্ণয়:

প্রচুরক নির্ণয়ে শ্রেণিকৃত তথ্য বিন্যাসের ক্ষেত্রে ব্যবহৃত সূত্রটি নিম্নে দেওয়া হল।

প্রচুরক $= L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h$; যেখানে সবচেয়ে বেশি ঘটন সংখ্যাযুক্ত শ্রেণিকে প্রচুরক শ্রেণি বলা হয়।

L = প্রচুরক শ্রেণির নিম্ন সীমা

Δ_1 = প্রচুরক শ্রেণির ঘটনসংখ্যা ও প্রচুরক শ্রেণির পূর্বের ঘরের ঘটনসংখ্যার পার্থক্য।

Δ_2 = প্রচুরক শ্রেণির ঘটনসংখ্যা ও প্রচুরক শ্রেণির পরের ঘরের ঘটনসংখ্যার পার্থক্য

h = শ্রেণি ব্যবধান

উদাহরণ-২ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ে 70 জন ছাত্রের পরিসংখ্যান বিষয়ের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন নিচে দেয়া হল। প্রচুরক নির্ণয় করুন।

নম্বরের শ্রেণি	ছাত্র সংখ্যা f
40-45	7
45-50	12
50-55	19
55-60	18
60-65	13
65-70	1

সমাধান ঃ : ৭০ জন ছাত্রের ক্রমোযোজিত বিন্যাস নিম্নে দেওয়া হল

নম্বরের শ্রেণি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
40-45	7	7
45-50	12	19
50-55	$19 = F_{(MO)}$	38
55-60	18	56
60-65	13	69
65-70	1	70
	n = 70	

প্রচুরক

এখানে দেখা যাচ্ছে 50 থেকে 55 নম্বরের মধ্যে ছাত্রসংখ্যা অধিক অর্থাৎ 19 জন। সুতরাং প্রচুরক শ্রেণি হল 50-55।

সূত্রানুযায়ী, প্রচুরক $Mo = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times h$

এখানে, $L = 50$

$\Delta_1 = 19-12=7$

$\Delta_2 = 19-18 = 1$

$h = 55-50 = 5$

$$\therefore Mo = 50 + \frac{7}{7+1} \times 5$$
$$= 50 + 4.375$$
$$= 54.375$$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রচুরক = 54.375

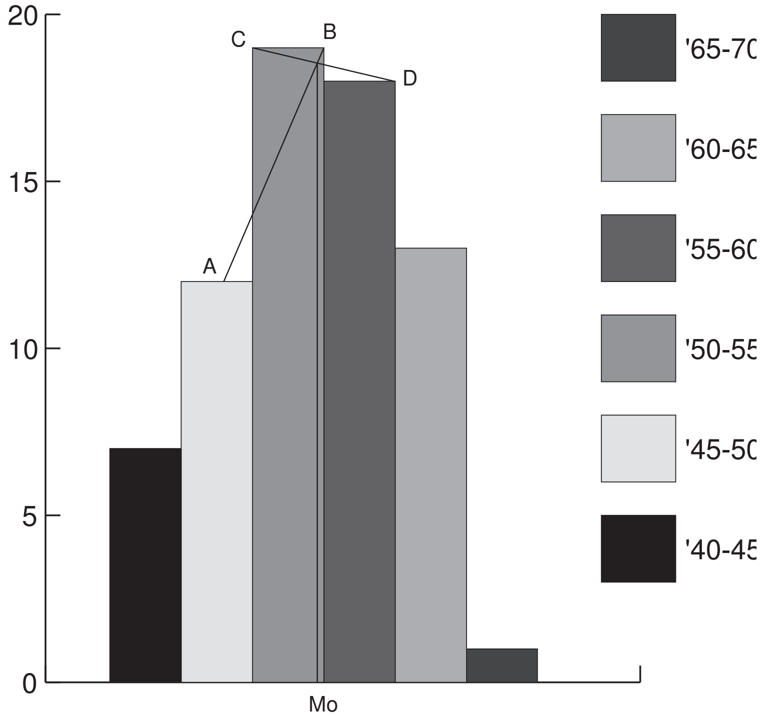
লেখচিত্রের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় ঃ

লেখচিত্রের মাধ্যমে নিম্ন উপায়ে প্রচুরক নির্ণয় করা যায়।

(ক) প্রথমে গণসংখ্যা নিবেশনের একটি আয়তলেখ তৈরি করতে হবে। এখানে X অক্ষের দিকে শ্রেণির মান এবং Y অক্ষের দিকে গণসংখ্যার মান দেখাতে হবে।

(খ) আয়তলেখের সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্রটি নির্বাচিত করতে হবে এবং এটিই হচ্ছে সর্বাধিক গণসংখ্যার প্রতীক এবং এখানেই প্রচুরক অবস্থান করবে।

(গ) সর্বোচ্চ আয়তলেখ অর্থাৎ প্রচুরক শ্রেণি আয়তলেখের বাম পাশের এবং ডান পাশের আরও দুটি আয়তলেখ বিবেচনা করতে হবে।



চিত্র-৫.১: প্রচুরক

(ঘ) উপরের চিত্রে প্রদর্শিত উপায়ে প্রচুরক শ্রেণির বামপাশের আয়তক্ষেত্রের ডান শীর্ষ বিন্দু A এর সহিত প্রচুরক শ্রেণির উচ্চসীমায় অবস্থিত আয়তক্ষেত্রের ডান শীর্ষ বিন্দু B কে একটি সরলরেখা AB দ্বারা যোগ করতে হবে। আবার প্রচুরক শ্রেণির আয়তক্ষেত্রের বাম শীর্ষবিন্দু C এর সহিত ডান পাশের আয়তক্ষেত্রের বাম শীর্ষ বিন্দু D কে একটি সরলরেখা CD দ্বারা যোগ করতে হবে। AB এবং CD রেখা M বিন্দুতে ছেদ করবে।

(ঙ) M থেকে X অক্ষ বরাবর লম্ব টানলে X রেখায় Mo বিন্দুতে মিলিত হবে। এই Mo বিন্দুতে X এর মানই হবে প্রচুরক।

প্রচুরকের সুবিধা: প্রচুরকের সুবিধাগুলি নিম্নে দেওয়া হলো:

- প্রচুরক নির্ণয় খুবই সহজ
- লেখচিত্রের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় করা যায়
- শ্রেণি সীমা খোলা থাকলেও প্রচুরক নির্ণয় করা যায়।
- ব্যবসায়িক ক্ষেত্র প্রচুরকের বেশি ব্যবহার হয়।
- গুণবাচক বৈশিষ্ট্যের বর্ণনা করতে প্রচুরকের মাধ্যমে জানা সহজ হয়।

প্রচুরকের অসুবিধা: প্রচুরকের অসুবিধা সমূহ নিম্নে দেওয়া হল:

- সর্বাধিক সংঘঠিত সংখ্যা একাধিক হলে প্রচুরক নির্ণয় সহজ হয় না
- প্রচুরক বীজগানিতিক গণনায় ব্যবহার করা যায় না।
- শ্রেণীবদ্ধকরনের প্রকৃতির উপর প্রচুরকের মানের প্রভাব থাকে।
-

সারসংক্ষেপ:

প্রচুরক লেখচিত্রের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়।

পাঠ-৫.৪ চতুর্থক, দশমক ও শতমক
(Quartile, Decile and percentile)

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

চতুর্থক (Quartile): নাম থেকেই বোঝা যায় যে, চতুর্থক এমন একটি মান যা তথ্যমানসমূহকে (ঊর্দ্ব ক্রমানুসারে) সাজালে সমান চারভাগে বিভক্ত করে। যেহেতু চতুর্থক তথ্যমান সমূহকে সমান চার ভাগে বিভক্ত করে, সেজন্য মোট ৩টি চতুর্থক আছে। এগুলো যথাক্রমে Q_1, Q_2 এবং Q_3 দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। দ্বিতীয় চতুর্থক Q_2 মধ্যমা এর সমান যার পরিমাপ নির্ণয় পাঠ ৫.২-এ আলোচনা করা হয়েছে।

ধরা যাক, কোন তথ্যসারির মানের ক্রমানুসারে সাজানো n সংখ্যক তথ্যমান নিম্নরূপ– $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n$

অশ্রেণীকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে:

এক্ষেত্রে যদি **n বিজোড় সংখ্যা হয়,**

$$Q_1 = \frac{n}{4} \text{ তম মান, এবং } Q_3 = \frac{3n+1}{4} \text{ তম মান।}$$

আবার যদি **n জোড় সংখ্যা হয়** তবে–

$$Q_1 = \frac{n}{4} \text{ ও } \frac{n+4}{4} \text{ তম মানের গাণিতিক গড়ের সমান।}$$

এবং $$Q_3 = \frac{3n}{4} \text{ ও } \frac{3n+4}{4} \text{ তম মানের গাণিতিক গড়ের সমান।}$$

শ্রেণীকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে:

কোন গণসংখ্যা নিবেশন থেকে Q_1 এবং Q_3 পরিমাপ করার পদ্ধতি মধ্যমা নির্ণয় করার অনুরূপ। মধ্যমা এর অনুরূপ এক্ষেত্রেও Q_1 এবং Q_3 থাকতে পারে এমন শ্রেণি প্রথমে নির্বাচিত করতে হবে। Q_1 এবং Q_3 নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়।

$$Q1 = L1 + \frac{\frac{n}{4} - Fc_1}{fq_1} \times h$$

এখানে n = মোট গণসংখ্যা।

$L_1 = Q_1$ থাকতে পারে এমন শ্রেণির নিম্নসীমা।

$F(Q_1) = Q_1$ থাকতে পারে এমন শ্রেণির গণসংখ্যা

pcf $(Q_1) = Q_1$ শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা

$h = Q_1$ শ্রেণির ব্যবধান।

$\frac{n}{4}$ এর চেয়ে বড় যোজিত গণসংখ্যার শ্রেণিই হচ্ছে Q_1 শ্রেণি।

$$Q_3 = L_3 + \frac{\frac{3n}{4} - Fc_3}{fq_3} \times h$$

এখানে n = মোট গণসংখ্যা।

$L_3 = Q_3$ থাকতে পারে এমন শ্রেণির নিম্নসীমা।

$F(Q_3)$ = Q_3 থাকতে পারে এমন শ্রেণির গণসংখ্যা

pcf (Q_3) = Q_3 শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা

$h = Q_3$ শ্রেণির ব্যবধান।

$\frac{3n}{4}$ এর চেয়ে বড় যোজিত গণসংখ্যার শ্রেণিই হচ্ছে Q_3 শ্রেণি।

অশ্রেণীকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে

উদাহরণ-১

নিম্নে দুটি তথ্যের মানসমূহ দেয়া আছে। প্রথম চতুর্থক (Q_1) এবং ৩য় চতুর্থক (Q_3) নির্ণয় করুন।

তথ্য-১ঃ 7, 4, 11, 15, 12, 21, 19, 16, 9, 8, 10, 14, 18, 13, 17।

তথ্য-২ঃ 16, 15, 21, 22, 26, 24, 29, 25, 17, 30, 25, 23, 28, 31, 34, 33।

সমাধান ঃ n যখন বিজোড়ঃ

প্রথমটিতে 15টি মান আছে। এদেরকে উর্ধ্বক্রমানুসারে সাজালে পাওয়া যায়।

4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21

$\therefore Q_1 = \frac{15+1}{4} = \frac{16}{4}$ তম মান।

= ৪র্থ মান।

$= 9$।

$\therefore Q_3 = \frac{3(15+1)}{4}$ তম মান

$= 12$ তম মান

$= 17$।

n যখন জোড়ঃ

দ্বিতীয় তথ্যে ১৬টি সংখ্যামান আছে যাদেরকে ক্রমানুসারে সাজালে পাওয়া যায়।

15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 33, 34।

$\therefore Q_1 = \frac{16}{4}$ তম ও $\frac{16+4}{4}$ তম মানের গড়

$= \frac{21+22}{2}$

$= \frac{43}{2}$

$= 21.5$

$\therefore Q_3 = \frac{3\times 16}{4}$ তম ও $\frac{3\times 16+4}{4}$ তম

$= 12$ তম মান ও 13 তম মানের গাণিতিক গড়

$= \frac{29+30}{2}$

$= 29.5$

শ্রেণীকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে

উদাহরণ-২

নিম্নলিখিত গণসংখ্যা নিবেশনের Q_1 এবং Q_3 নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
গণসংখ্যা	7	12	19	18	13	1

সমাধান ঃ চতুর্থক নির্ণয় সারণী

শ্রেণী	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
40-45	7	7= pcf (Q_1)
45-50	12 = $F(Q_1)$	19
50-55	19	38 = pcf (Q_3)
55-60	18 = $F(Q_3)$	56
60-65	13	69
65-70	1	70
	n = 70	

১ম চতুর্থক

এখানে $\frac{n}{4} = \frac{70}{4} = 17.5$, 17.5 এর চেয়ে বড় ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হচ্ছে 19। অর্থাৎ 45-50 শ্রেণিতে Q_1 অবস্থিত।

$$\therefore Q_1 = L1 + \frac{\frac{n}{4} - pcf(Q_1)}{F(Q_1)} \times h$$

$$\therefore Q_1 = 45 + \frac{\frac{70}{4} - 7}{12} \times 5$$ এখানে, $L1 = 45$, $n = 70$, $pcf(Q_1) = 7$, $F(Q_1) = 12$, $h = 5$

$$= 45 + \frac{10.5}{12} \times 5$$

$$= 45 + 8.75$$

$$= 53.75$$

৩য় চতুর্থক

আবার, $\frac{3n}{4} = \frac{3\times70}{4} = 52.5$, 52.5 এর চেয়ে বড় ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হচ্ছে 56, অর্থাৎ 55-60 শ্রেণিতে Q_3 অবস্থিত।

$$\therefore Q_3 = L_3 + \frac{\frac{n}{4} - pcf(Q_3)}{F(Q_3)} \times h$$

$$\therefore Q_3 = 55 + \frac{\frac{3\times70}{4} - 38}{18} \times 5$$ [এখানে, $L_3 = 55$, $pcf(Q_3) = 38$, $F(Q_3) = 18$, $h = 5$]

$$= 55 + \frac{52.5 - 38}{18} \times 5$$

$$= 55 + \frac{-3.5}{18} \times 5$$

$= 55 - 0.9722$

$= 54.0278$

$\therefore Q_3 = 54.0278$

১ম চতুর্থক $Q_1 = 53.75$

৩য় চতুর্থক $Q_3 = 54.0278$

দশমক (Decile)

দশমক তথ্যমানসমূহকে ক্রমানুযায়ী সাজানো রাশিমালাকে সমান দশভাগে ভাগ করে। সেজন্য দশমকের সংখ্যা ৯। এগুলো যথাক্রমে− D1, D2 .... D9 দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। এদের সম্পর্ক হচ্ছে $D1 \le D2 \le D3 \le D4 \le$ .... $\le D9$

স্বভাবতই মধ্যমা এবং D5 সমান মান বিশিষ্ট।

ধরাযাক, X1, X2, ...Xn কোন তথ্যমানসমূহের উর্ধ্বক্রমানুসারে সাজানো n সংখ্যক মান।

অশ্রেণীকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে

যদি n বিজোড় সংখ্যা হয় তাহলে

$Di = \frac{n}{4}$ তম মান, এবং $[\, i = 1, 2, \text{-------}9]$

যদি n জোড় সংখ্যা হয় তবে

$Di = \frac{in}{10}$ তম ও $\frac{in+10}{10}$ তম মানের গাণিতিক গড়।

শ্রেণীকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে

কোন গণসংখ্যা নিবেশন থেকে দশমক নির্ণয়ের সূত্র নিম্নরূপ।

$$D_1 = L_1 + \frac{\frac{n}{10} - Fc_1}{fd_1} \times h$$

এখানে n = মোট গণসংখ্যা।

$L_1 = D_1$ থাকতে পারে এমন শ্রেণির নিম্নসীমা।

$Fc_1 = D_1$ থাকতে পারে এমন শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা।

$fd_1 = D_1$ থাকতে পারে এমন শ্রেণির গণসংখ্যা।

$h = D_1$ শ্রেণির ব্যবধান।

$\frac{n}{10}$ এর চেয়ে বড় ক্রমযোজিত সংখ্যার শ্রেণি হচ্ছে D_1 এর শ্রেণি।

শতমক (Percentile)

শতমক তথ্যমানসমূহের ক্রমানুযায়ী সাজানো রাশিমালাকে সমান একশত ভাগে ভাগ করে। সেজন্য শতমকের সংখ্যা ৯৯। এদেরকে $P_1, P_2,$ .... P_{99} দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। $P_1 \le P_2 \le P_3 \le$ .... $\le P_{99}$

ধরা যাক, $X_1, X_2,$ .... X_n কোন তথ্যমান সমূহের উর্ধ্ব ক্রমানুসারে সাজালে

অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে:

যদি n বিজোড় সংখ্যা হয় তবে

$P_i = \frac{n}{4}$ তম মান, [i =1, 2, ..., 99]

যদি n জোড় সংখ্যা হয় তবে,

$P_i = \frac{in}{100}$ তম ও $\frac{in + 100}{100}$ তম মানের গাণিতিক গড়।

শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে:

গণসংখ্যা নিবেশন থেকে Pi নির্ণয়ের সূত্র নিম্নরূপ−

$$\therefore\ Pi = Li + \frac{\frac{in}{100} - Fc_i}{fp_i} \times h$$

এখানে n = মোট গণসংখ্যা

Li = Pi থাকতে পারে এমন শ্রেণির নিম্নসীমা

fPi = Pi থাকতে পারে এমন শ্রেণির গণসংখ্যা

Fci = Pi থাকতে পারে এমন শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণি ক্রমযোজিত গণসংখ্যা

h = Pi শ্রেণির ব্যবধান।

$\frac{in}{100}$ এর চেয়ে বড় ক্রমযোজিত গণসংখ্যা শ্রেণি হচ্ছে Pi এর শ্রেণি।

এই পাঠের উদাহরণ ১ ও ২-এ বর্ণিত তথ্য থেকে অতি সহজেই সূত্রের সাহায্যে বিভিন্ন দশমক ও শতমক নির্ণয় করা যাবে। লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে,

$P_{25} = Q_1$, $P_{50} = D_5 = Q_2 =$ মধ্যমা, $P_{75} = Q_3$

সারসংক্ষেপ:

তথ্য বিশ্ব থেকে প্রাপ্ত তথ্যসমূহ কেন্দ্রের কোন একটি মানের দিকে যাওয়ার প্রবণতা থাকে। তাই তথ্যের এ প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। এ পাঠে শুধুমাত্র AM; GM.; HM এবং WM নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

ইউনিট মূল্যায়ন

১। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ বলতে কী বুঝায়? ব্যাখ্যা করুন।

২। গাণিতিক গড়ের সংজ্ঞা লিখুন। গাণিতিক গড়ের সুবিধা ও অসুবিধা আলোচনা করুন।

৩। গাণিতিক গড়, গুণিতক গড় ও তরঙ্গ গড়ের সংজ্ঞা লিখুন এবং উহাদের মধ্যে সম্পর্ক আলোচনা করুন।

৪। মধ্যমার সংজ্ঞা লিখুন। গ্রাফের সাহায্যে কিভাবে মধ্যমা নির্ণয় করা যায় আলোচনা করুন।

৫। প্রচুরকের সংজ্ঞা লিখুন। গ্রাফের সাহায্যে কিভাবে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় আলোচনা করুন।