অন্তরীকরণ এবং যোগজীকরণ
Differentiation and Integration

৯

ভূমিকা
Introduction

Latin Calculary শব্দ হতে Calculus শব্দের উৎপত্তি হয়েছে। Calculus শব্দের অর্থ ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র নুড়ি বা পাথর। সপ্তদশ শতকের শেষে ইংরেজ বিজ্ঞানী Sir Isaac Newton(1643-1727) ও জার্মান বিজ্ঞানী Gottfried Wilheim Leibniz (1646-1716) স্বাধীনভাবে ক্যালকুলাস আবিস্কার করেন। অন্তরীকরণ (Diffetentiation) প্রক্রিয়াটিতে স্বাধীন চলকের ক্ষুদ্র পরিবর্তনে অধীন চলকের ক্ষুদ্র পরিবর্তন ধরে অধীন ও স্বাধীন চলকের ক্ষুদ্র পরিবর্তন দুটির অনুপাতের সীমাস্থ মানের মূল্যায়ন করা হয়, যেখানে স্বাধীন চলকের পরিবর্তনের সংখ্যা মান যে কোন ধনাত্মকপূর্ণ সংখ্যা মান (তা যতই ক্ষুদ্র হোক না কেন) অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর হবে। অন্তরকলনের সাহায্যে প্রকৃতপক্ষে স্বাধীন চলকের সাপেক্ষে অধীন চলকের পরিবর্তনের হার নির্ণয় করা হয়। উদাহরণস্বরূপ, সময়ের সাথে সাথে গাড়ীর অবস্থানের পরিবর্তনের হার অথবা গাড়ীর বেগ বৃদ্ধির হার অথবা চাহিদা বৃদ্ধির সাথে কোনো জিনিসের মূল্য বৃদ্ধির হার অথবা কোনো পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী শিক্ষার্থী ও পাশের হার অন্তরীকরণের উদাহরণ।

Integration শব্দের আভিধানিক অর্থ হলো একাঙ্গীকরণ বা সমষ্টিকরণ। গাণিতিকভাবে Integration কে যোগজীকরণ বা যোগজীকরণ বলা হয়। যোগজীকরণ অর্থ হলো কোন বস্তুর অসংখ্য অতিক্ষুদ্র ক্ষেত্রফলের সমষ্টি। যোগজীকরণ হলো সরলরেখা বা বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতলকে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশে বিভক্তিকরণের মাধ্যমে এদের সমষ্টি দ্বারা সামগ্রিক ভাবে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার পদ্ধতি। সর্বপ্রথম প্রাচীন গ্রীক জ্যোতির্বিদ এক্সোডাস যোগজীকরণের কলাকৌশল নিয়ে আলোচনা ও গবেষণা করেন। এক্সোডাস জানা বস্তুর ক্ষেত্রফল বা আয়তনকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অসংখ্য খণ্ডে বিভক্ত করে যোগজীকরণের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল বা আয়তন নির্ণয় করেন। পরবর্তীতে গ্রীক বিজ্ঞানী আর্কিমিডিস (287B.C-212B.C) তা সংস্কার করে বৃত্তের ও উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করেন। এ অধ্যায়ে অন্তরজ, যোগজীকরণ নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৯.১: মূল নিয়মে অন্তরজ বা অন্তরক সহগ
পাঠ-৯.২: বিভিন্ন ফাংশনের অন্তরজ বা অন্তরক সহগ
পাঠ-৯.৩: পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ ও ম্যাকলরিনের উপপাদ্য
পাঠ-৯.৪: অন্তরক সহগের ব্যাখ্যা এবং ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন
পাঠ-৯.৫: মোট আয়-ব্যয়, গড় আয়-ব্যয়, প্রান্তিক আয়-ব্যয়
পাঠ-৯.৬: সমাকলন বা যোগজীকরণ ও তার সূত্রাবলী
পাঠ-৯.৭: প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজীকরণ
পাঠ-৯.৮: আংশিক ভগ্নাংশের সমাকলন
পাঠ-৯.৯: নির্দিষ্ট যোগজীকরণ
পাঠ-৯.১০: ব্যবসায়িক সিদ্ধান্ত গ্রহণে যোগজীকরণের প্রয়োগ

পাঠ-৯.১ মূল নিয়মে অন্তরজ বা অন্তরক সহগ
Differentiation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অন্তরক সহগ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- মূল নিয়মে কোন ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে পারবেন;
- দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন;
- দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন;
- অন্তরজের গুণফলের ও ভাগফলের সূত্র ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

চলকের বৃদ্ধি
Increment of variables

মনে করুন, x যে কোনো একটি চলক, যার মান x_0 থেকে পরিবর্তীত হয়ে x_1 হয়; তাহলে x_0 কে x চলকের প্রারম্ভিক মান (Initial Value) ও x_1 কে x চলকের অন্তিম মান (Final Value) বলা হয়। অতএব, চলকের বৃদ্ধি $(x_1 - x_0)$ হবে। কোনো চলকের বৃদ্ধি মান ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুই-ই হতে পারে। অন্তিম চলকের মান প্রারম্ভিক চলকের মানের চেয়ে বেশি হলে বৃদ্ধির মান ধনাত্মক হবে এবং অন্তিম চলকের মান প্রারম্ভিক চলকের মানের চেয়ে কম হলে বৃদ্ধির মান ঋণাত্মক হবে। x চলকের বৃদ্ধিকে সাধারণত Δx (Delta x) বা h দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অন্তরজ বা অন্তরক সহগ (Derivative or Differential Co-efficient): মনে করুন, $y = f(x)$, x এর যেকোনো একমান বিশিষ্ট ফাংশন যা $[a,b]$ যেকোনো একটি নির্দিষ্ট সীমায় অবিচ্ছিন্ন। যদি প্রদত্ত সীমায় স্বাধীন চলক x এর ক্ষুদ্রতম বৃদ্ধি Δx এর জন্য, অধীন চলক y এর বৃদ্ধি Δy হয় তবে, $\Delta y = y + \Delta y - y = f(x+\Delta x) - f(x)$

সুতরাং, x বিন্দুতে অধীন চলক ও স্বাধীন চলকের বৃদ্ধির অনুপাত: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

এখানে, $\Delta x \to 0$ হলে $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ অনুপাতের একটি সসীম মান পাওয়া যাবে। যার সীমাস্থ মানকে x বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনের x এর সাপেক্ষে অন্তরজ বা অন্তরক সহগ বলা হয়। একে সাধারণত $\dfrac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ বা y_1 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, x বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনের x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ হলো–

$$\frac{dy}{dx} \text{ বা } \frac{d}{dx}\{f(x)\} \text{ বা } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

এখন, $\Delta x = h$ হলে, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

আবার, $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনের অন্তরজ বা অন্তরক সহগকে $f'(a)$ বা $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=a}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং এর মান $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

মূল নিয়মে কতগুলো আদর্শ ফাংশনের অন্তরজ বা অন্তরক সহগ নির্ণয়

(i) $\frac{d(c)}{dx}=0$ **যেখানে, ধ্রুবক ফাংশন।**

প্রমাণ: মনে করুন, $f(x)=c \therefore f(x+h)=c$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$

$$\therefore \frac{d(c)}{dx}=0, \text{ যেমন, } \frac{d(5)}{dx}=0$$

(ii) মূল নিয়মে x^n এর অন্তরজ নির্ণয়।

প্রমাণ: মনে করুন, $f(x)=x^n$ সুতরাং $f(x+h)=(x+h)^n$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{X^n-x^n}{X-x} \quad \text{যেখানে, } x+h=X, \therefore h\to 0, X\to x\,]$$

$$=nx^{n-1}\left[\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}\right]$$

যেমন: $\frac{dx^{10}}{dx}=10x^9$

(iii) মূল নিয়মে e^{mx} এর অন্তরজ নির্ণয়

প্রমাণ: মনে করুন, $f(x)=e^{mx}$. $\therefore f(x+h)=e^{m(x+h)}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $f'(x)=\frac{d}{dx}(e^{mx})=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{m(x+h)}-e^{mx}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{mx}(e^{mh}-1)}{h}=e^{mx}\lim_{h\to 0}\frac{(e^{mh}-1)}{h}$$

$$=e^{mx}\lim_{h\to 0}\frac{(e^{mh}-1)}{mh}.m=m.e^{mx}\lim_{h\to 0}\frac{(e^{mh}-1)}{mh}=m.e^{mx}.1=m.e^{mx}$$

$\therefore \frac{d}{dx}(e^{mx})=m.e^{mx}$ একইভাবে, $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$, যেমন, $\frac{d}{dx}(e^{3x})=3e^x$ এবং $\frac{d}{dx}(e^{-2x})=-2e^{-2x}$

(iv) মূল নিয়মে a^{mx} এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

প্রমাণ: মনে করুন, $f(x)=a^{mx}$. $\therefore f(x+h)=a^{m(x+h)}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\therefore \frac{d}{dx}(a^{mx})=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^{m(x+h)} - a^{mx}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{mx}(a^{mh}-1)}{h} = a^{mx}.\lim_{h\to 0} \frac{(a^{mh}-1)}{mh}.m = m.a^{mx}.\lim_{h\to 0} \frac{(a^{mh}-1)}{mh}$$

$$= m.a^{mx}.\log_e a,\ [\because \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \log_e a]$$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(a^{mx}\right) = m.a^{mx}.\log_e a$,যেমন, $\frac{d}{dx}\left(2^{3x}\right) = 3.2^{3x}\log_e 2 = 3.2^{3x}\ln 2$

(v) $\frac{d}{dx}\log_e mx = \frac{1}{x}; (mx > 0, m \in R)$

প্রমাণঃ মনে করুন, $f(x) = \log_e mx$ এবং $f(x+h) = \log_e m(x+h) = \log_e(mx+mh)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(mx+mh) - \log_e mx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(\frac{mx+mh}{mx}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\log_e\left(\frac{1+\frac{h}{x}}{h}\right) = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_e\left(\frac{1+h/x}{h/x}\right) = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}$$

অতএব, $\frac{d}{dx}(\log_e mx) = \frac{1}{x}$, যেমন, $\frac{d}{dx}(\log_e 3x) = \frac{1}{x}$

(vi) $\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx\ (m \in IR)$

প্রমাণঃ মনে করুন, $f(x) = \sin mx$ এবং $f(x+h) = \sin m(x+h) = \sin(mx+mh)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(mx+mh)-\sin mx}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2mx+mh}{2}\right)\sin\left(\frac{mx+mh-mx}{2}\right)}{h}\left[\because \sin C - \sin D = 2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right).cox\left(\frac{C+D}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(mx+\frac{mh}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{mh}{2}\right)}{\frac{mh}{2}}.m = \lim_{h\to 0}\cos\left(mx+\frac{mh}{2}\right).1.m = m\cos mx$$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx$, সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

যেমন, $\frac{d}{dx}(\sin 4x) = 4\cos 4x$

(vii) মূল নিয়মে $\cos x$ এর অন্তরজ নির্ণয়

প্রমাণঃ মনে করুন, $f(x) = \cos x$. $\therefore f(x+h) = \cos(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right).\sin\left(\frac{x-(x+h)}{2}\right)}{h} \qquad \left[\because \cos C-\cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h} \qquad = -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h/2\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(vii) মূল নিয়মে $\tan x$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

প্রমাণ: মনে করুন, $f(x)=\tan x$. $\therefore f(x+h)=\tan(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x-\sin x\cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x}\right] \qquad [\because \sin A\cos B-\cos A\sin B = \sin(A-B)]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos x.\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$, সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\tan mx) = m\sec^2 mx$

যেমন, $\frac{d}{dx}(\tan 6x) = 6\sec^2 6x$

উদাহরণ 1: মূল নিয়মে $\sqrt{x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $f(x)=\sqrt{x}$ $\therefore f(x+h)=\sqrt{x+h}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $f' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

অন্তরজের ধর্মাবলী (Properties of Derivative)

(ক) যদি u অন্তরীকরণযোগ্য যেকোনো একটি ফাংশন এবং c ধ্রুবক হয়; তবে $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

(খ) যদি u ও v উভয়েই অন্তরীকরণযোগ্য যেকোনো দুইটি ফাংশন হয়; তবে

(i) $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u)+\frac{d}{dx}(v)$ (ii) $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}(u)-\frac{d}{dx}(v)$

উদাহরণ 2: x এর সাপেক্ষে $e^{2x}+\log_a x$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(e^{2x}+\log_a x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right)+\frac{d}{dx}(\log_a x) = e^{2x}\frac{d}{dx}(2x)+\frac{1}{x}\log_a e = 2e^{2x}+\frac{1}{x}\log_a e$

উদাহরণ 4: t এর সাপেক্ষে $\ln t - \sec t + 7\sin t$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dt}(\ln t - \sec t + 7\sin t)$.

$$= \frac{d}{dt}(\ln t)-\frac{d}{dt}(\sec t)+7\frac{d}{dt}(\sin t) = \frac{1}{t}-\sec t\ \tan t + 7\cos t$$

দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ

যদি u এবং v উভয়ই x এর ফাংশন হয়, তবে $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$

প্রমাণ: মনে করুন, $u = f(x)$ এবং $v = g(x)$ এবং $uv = F(x)$

$\therefore F(x) = f(x)g(x)$ এবং $\therefore F(x+h) = f(x+h)g(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}[F(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

বা, $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[uv] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h).\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0} g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]+g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$= u\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u) \qquad \therefore \frac{d}{dx}[uv] = u\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$$

সুতরাং, দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ = ১ম ফাংশন × ২য় ফাংশনের অন্তরজ + ২য় ফাংশন × ১ম ফাংশনের অন্তরজ।

দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ: যদি u এবং v উভয় x এর ফাংশন হয়, তবে $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

প্রমাণ: মনে করুন, $u = f(x)$ এবং $v = g(x)$ এবং $\frac{u}{v} = F(x)$

$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ এবং $F(x+h)=\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}[F(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}-\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x).\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]-f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]-f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}=\frac{v\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{v\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

সুতরাং, দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ $=\dfrac{\text{হর}\times\text{লবের অন্তরজ - লব}\times\text{হরের অন্তরজ}}{(\text{হর})^2}$

উদাহরণ 3: x এর সাপেক্ষে $\dfrac{d}{dx}\left(e^x\sin x\right)$এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}\left(e^x\sin x\right)$

$$=e^x\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin x\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x(\cos x)+\sin xe^x=e^x\cos x+\sin xe^x=e^x(\cos x+\sin x)$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\dfrac{d}{dx}\left(e^x\sin x\right)=e^x(\cos x+\sin x)$

উদাহরণ 4: x এর সাপেক্ষে $\dfrac{d}{dx}\left(10^x\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}\left(10^x\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=10^x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{d}{dx}\left(10^x\right)=10^x\left(-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}.10^x.\ln 10$

$$=\frac{10^x}{\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2x}+\ln 10\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\dfrac{d}{dx}\left(10^x\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{10^x}{\sqrt{x}}\left(-\dfrac{1}{2x}+\ln 10\right)$

উদাহরণ 5: x এর সাপেক্ষে $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$=\frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x-1)-(x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1).(1-0)-(x-1).(1+0)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{2}{(x+1)^2}$

উদাহরণ 6: x এর সাপেক্ষে $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)=\frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$

$$=\frac{(1+\cos x)(0+\cos x)-(1+\sin x)(0-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(1+\cos x)\cos x+(1+\sin x)\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{cos\, x+cos^2\, x+sin\, x+sin^2\, x}{(1+cos\, x)^2}$$

$$=\frac{cos\, x+sin\, x+1}{(1+cos\, x)^2}\,[\because cos^2\, x+sin^2\, x=1]$$

সারসংক্ষেপ:

- x বিন্দুতে $y=f(x)$ ফাংশনের x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ হলো– $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$, $\frac{d}{dx}(\tan mx)=m\sec^2 mx$
- দুইটি ফাংশনের গুণফলের ও ভাগফলের অন্তরজ $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$ এবং $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{v\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

পাঠ-৯.২ বিভিন্ন ফাংশনের অন্তরজ বা অন্তরক সহগ
Derivativesof different functions

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সংযোজিত ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে পারবেন;
- লগারিদমের সাহায্যে অন্তরক সহগ বা অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন;
- অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে পারবেন।

সংযোজিত ফাংশনের অন্তরজ
Derivatives of composite functions

মনে করুন, $y = f(z)$ এবং $z = g(x)$ চলক x, y, z ক্ষুদ্রতম পরিবর্তন $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ হলে, $\Delta x \to 0$ এর জন্য $\Delta z \to 0$ হবে।

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \times \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, অনুরূপভাবে, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ ইত্যাদি।

একে অন্তরীকরণে রাশি কলনিয়ম ও বলা হয়। অনেক সময় একে ফাংশনের অন্তরীকরণ ও বলা হয়।

উদাহরণ 1: x এর সাপেক্ষে $\ln(\tan 5x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y = \ln(\tan 5x)$, $u = \tan 5x$ এবং $v = 5x$

$y = \ln u$, $u = \tan v$

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$, $\frac{du}{dv} = \sec^2 v$, $\frac{dv}{dx} = 5$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{u} . \sec^2 v . 5 = 5\frac{\sec^2 5x}{\tan 5x}$

উদাহরণ 2: x এর সাপেক্ষে (ক) $\sin\sqrt{x}$ (খ) $\sqrt{\sin x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান:(ক) $\sin\sqrt{x}$

মনে করুন, $y = \sin\sqrt{x}$

$\Rightarrow y = \sin z$, যেখানে, $z = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dz} = \cos z$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= \cos z . \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos\sqrt{x} . \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(খ) $\sqrt{\sin x}$

মনে করুন, $y = \sqrt{\sin x}$

$\Rightarrow y = \sqrt{z}$, যেখানে, $z = \sin x$

$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ $\therefore \frac{dz}{dx} = \cos x$

এখন, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= \frac{1}{2\sqrt{z}} . \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

বিপরীতবৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরজ (Derivatives of Inverse Circular Function): মনে করুন, $f: A \to B$ এবং যদি $y \in B$ হয় তাহলে y এর বিপরীত ফাংশনকে $f^{-1}(y)$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং $f^{-1}(y)$ হলো A সেটের ঐ উপাদানগুলো যার Im*age* y.

অর্থাৎ যদি $f: A \to B$ হয় তবে $f^{-1}(y) = \{x : x \in A$ এবং $f(x) = y\}$

প্রতিজ্ঞা: যদি $y = f(x)$ যেকোনো ফাংশন হয় এবং $f^{-1}(y) = x$ পাওয়া যায় তবে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \left(\frac{dx}{dy} \neq 0, \frac{dy}{dx} \neq 0 \right)$

প্রমাণ: মনে করুন, $y = f(x)$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $x = g(y)$ এবং $y = f(x)$ ফাংশনটির x বিন্দুতে অশূন্য অন্তরজ বিদ্যমান এবং $x = g(y)$ ফাংশনটির y বিন্দুতে অশূন্য অন্তরজ আছে। তাহলে, x এর অতিক্ষুদ্র বৃদ্ধি Δx এবং y এর ক্ষুদ্রতম বৃদ্ধি Δy হবে।

এখন, $\Delta x \to 0, \therefore \Delta y \to 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ এবং $\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$

এখন $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3: বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনগুলোর অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন: (ক) $\sin^{-1} x$ (খ) $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

সমাধান: (ক) মনে করুন, $y = \sin^{-1} x \therefore x = \sin y$

তাহলে, $\frac{dx}{dy} = \cos y$

এখন $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore \frac{d(\sin^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(খ) মনে করুন,

$y = \cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ আবার, $x = \sin\theta$

$\therefore \theta = \sin^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \cos^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$= \cos^{-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right\} = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

বা, $y = \frac{\pi}{2} - 2\theta \therefore y = \frac{\pi}{2} - 2\sin^{-2} x$

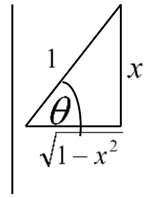
তাহলে, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - 2\sin^{-2} x\right)$

$$= 0 - 2\frac{d}{dx}\left(\sin^{-2} x\right) = -2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

উদাহরণ 4: x সাপেক্ষে $\tan\left(\sin^{-1} x\right)$এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y = \tan\left(\sin^{-1} x\right)$ আবার, $\sin^{-1} x = \theta$

$\Rightarrow y = \tan\theta$ $\Rightarrow \sin\theta = x$



$$\Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}.1 - x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{\left(1-x^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(1-x^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(1-x^2\right)\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$ r

লগারিদমের সাহায্যে অন্তরক সহগ বা অন্তরজ নির্ণয় (Derivative using Logarithmic function): যদি কোনো একটি ফাংশনের সূচক নিজেই চলক সম্বলিত ফাংশন বা দুই বা ততোধিক ফাংশনের গুণ বা ভাগ আকারে থাকে, তবে সেই সমস্ত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে লগারিদম ব্যবহার করতে হয়। এখানে লগারিদম বলতে প্রাকৃতিক লগারিদমকে বোঝানো হয়েছে।

উদাহরণ 5: x সাপেক্ষে x^x এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y = x^x$ $\therefore \ln y = \ln x^x$ $\Rightarrow \ln y = x\ln x$

x সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln x.1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$$

অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় (Derivative of Implicit function): যদি কোনো ফাংশন $f(x, y) = 0$ আকারে থাকে অর্থাৎ ফাংশনটিকে $y = f(x)$ অথবা $x = f(y)$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, তবে এ ধরণের ফাংশনকে অব্যক্ত ফাংশন বলা হয়। যেমন: $x^3 + y^3 + 4xy = 0,\ x^y + y^x + 2x = 0$ ইত্যাদি অব্যক্ত ফাংশন। অব্যক্ত ফাংশন সমূহের অন্তরক

সহগ নির্ণয় করতে x কে পরিবর্তনশীল এবং y কে x এর ফাংশন বিবেচনা করে প্রত্যেক পদকে আলাদা আলাদা ভাবে অন্তরীকরণ করে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হয়।

উদাহরণ 6: $\sqrt{x}+\sin y = x^2$ সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন, $\sqrt{x}+\sin y = x^2$

x সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\cos y\frac{dy}{dx} = 2x$

বা, $\cos y\frac{dy}{dx} = 2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos y}$

পরামিতি সমীকরণের সাহায্যে অন্তরক সহগ নির্ণয় (Derivative using Parametric Equation): অনেক সময় সমীকরণে x ও y এর সরাসরি সম্পর্ক বিদ্যামান না থাকলে তাদেরকে সম্পর্কিতকরার জন্য সমীকরণে তৃতীয় চলক নেয়া হয় এবং তৃতীয় চলক দ্বারা x ও y কে সম্পর্কিত করা হয়। এই চলককে পরামিতি (Parameter) এবং সমীকরণটিকে পরামিতিক সমীকরণ বলা হয়। পরামিতিক সমীকরণ থেকে অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে সাধারণত পরামিতির সাপেক্ষে অন্তরক নির্ণয় করতে হয়। এক্ষেত্রে পরামিতি অপসরণের প্রয়োজন হয় না।

উদাহরণ 7: $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $x = a\cos^3\theta$

$\therefore \frac{dx}{d\theta} = 3a\cos^2\theta\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)$

$= 3a\cos^2\theta(-\sin\theta) = -3a\cos^2\theta\sin\theta$

এবং $y = a\sin^3\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)$

$= 3a\sin^2\theta\cos\theta$

তাহলে, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\tan\theta$

সারসংক্ষেপ:

- সংযোজিত ফাংশনের অন্তরজ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$
- বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরজ যদি $f:A\to B$ হয় তবে $f^{-1}(y) = \{x : x\in A$ এবং $f(x) = y\}$

পাঠ-৯.৩ পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ ও ম্যাকলরিনের উপপাদ্য

Successive Differentiation and Maclaurins Theorem

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- ম্যাকলরিনের উপপাদ্য বর্ণনা করতে পারবেন;
- ম্যাকলরিনের উপপাদ্য ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ

Successive Derivatives

মনে করুন, $y = f(x)$, x এর যেকোন একটি ফাংশন যা অবিচ্ছিন্ন ও যেকোনো সংখ্যক বার অন্তরীকরণ যোগ্য। তাহলে $y=f(x)$ ফাংশনের n তম অন্তরীকরণে ব্যবহৃত প্রতীক সমূহ হবে নিম্নরূপ:

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x) = D_1(x) = D'(x) = D_y = y_1$ ...ইত্যাদি x এর সাপেক্ষে y এর প্রথম অন্তরীকরণ।

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)= f''(x) =D_2(x) == D''(x) = D^2_y = D''(x) = y_2$ ইত্যাদি x এর সাপেক্ষে দ্বিতীয় y এর অন্তরীকরণ।

$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = f'''(x) = D_3(x) = D'''(x) =D^3_y =D^3(x) =y_3$ ইত্যাদি x এর সাপেক্ষে তৃতীয় y এর অন্তরীকরণ।

$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{d}\right)=f^n(x)= D_n(x) = D^n_y = D^n(x) =y_{n...}$ ইত্যাদি x এর সাপেক্ষে y এর n তম অন্তরীকরণ নিদের্শ করে।

এখানে, ২য় বার অন্তরীকরণ হলো প্রাথম অন্তরীকরণকে x এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরীকরণ করা। তেমনি তৃতীয় বার অন্তরীকরণ হলো ২য় বারে প্রাপ্ত মানকে পুনরায় x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করা। অনুরূপভাবে n-তম অন্তরীকরণ নির্ণয়ে $(n-1)$ তম বার প্রাপ্ত অন্তরীকরণে প্রাপ্ত ফলাফলকে পুরনরায় অন্তরীকরণ করা।

যদি $y = f(x)$, x এর যেকোনো ফাংশন হয় যা অবিচ্ছিন্ন ও যেকোনো সংখ্যক বার অন্তরীকরণযোগ্য হলে ফাংশনটির n তম অন্তরীকরণ নির্ণয় করতে ফাংশনটিকে ১ম বার, ২য় বার, ৩য় বার -----$(n-1)$তম বার অন্তররীকরণ করার পর তার n তম অন্তরীকরণ y_n নির্ণয় করতে হয়। অন্তরীকরণের এই পর্যায়ক্রমিক কাজটিকেই পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ বলা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, $=\frac{d}{dx}$কে Differential Openator বলা হয়।

উদাহরণ 1: $y =x^m$, $m>n$ হলে y_n নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন $y =x^n$ এবং x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx} = y_1 =mx^{m-1}$

$\frac{d^2y}{dx^2} =y_2 =m(m-1)x^{m-2}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = y_3 =m(m-1)(m-2)x^{m-3}$

$\frac{d^ny}{dx^n}= y_n =m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots (m-m+1)x^{m-n}$

$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3).....(m-n+1)(m-n)(m-n-1)....3.2.1}{(m-n)(m-n-1)......3.2.1}x^{m-n}$

$= \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} y_n = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$

উদাহরণ 2: $y = x^n$ হলে y_n নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে $y = x^n$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই $\frac{dy}{dx} = y_1 = nx^{m-1}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = y_2 = n(n-1)xn^{-2}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = y_3 = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$\frac{d^ny}{dx^n} = y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 3.2.1\ x^{n-n}$

$= n(n-1)(n-2)x^{n-3}(n-3)\ldots\ldots 3.2.1$

সুতরাং, $y_n = n!$

উদাহরণ 3: $y=e^{ax}$ হলে y_n নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে $y=e^{ax}$, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$\frac{dy}{dx} = y_1 = ae^{ax}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = y_2 = a^2e^{ax}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = y_3 = a^3e^{ax}$

$\frac{d^ny}{dx^n} = y_n = a^ne^{ax}$

সুতরাং, $y_n = a^ne^{ax}$

উদাহরণ 4: (ক) $y=e^{ax}\sin bx$ হলে y_n নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ (ক) $y=e^{ax}\sin bx$ ….. (i)

(i) x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$

$= e^{ax(}\sin bx + b\cos bx)$

মনে করুন, $a = r\cos\theta$ ও $b = r\sin\theta$

তাহলে $a^2+b^2 = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2$

$\therefore r = \sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(b/a)$

$\therefore y_1 = re^{ax}(\cos\theta\sin bx + \sin\theta\cos bx)$

$y_1 = re^{ax}\sin(bx+\theta)$

পুনরায় অন্তরীকরণ করে

$y_2 = r[ae^{ax}\sin(bx+\theta) + be^{ax}\cos(bx+\theta)]$

$= r^2e^{ax}[\cos\theta\sin(bx+\theta) + \sin\theta.\cos(bx+\theta)]$

$y_2 = r^2e^{ax}\sin(bx+2\theta)$

$y_3 = r^3e^{ax}\sin(bx+2\theta)$

$y_n = r^ne^{ax}\sin(bx+n\theta)$

$\therefore y_n = (\sqrt{a^2+b^2})^ne^{ax}\sin(bx+n\tan^{-1}b/a)$

(খ) $y=e^{ax}\cos bx$ হলে y_n নির্ণয় করুন।

(খ) $y=e^{ax}\cos bx$……….. (i)

(i) x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y_1 = ae^{ax}\cos bx - be^{an}\sin bx$

$= e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)$

মনে করুন, $a = r\cos\theta$ ও $b = r\sin\theta$

তাহলে $a^2+b^2 = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2$

$\therefore r = \sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\tan\theta = b/a$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(b/a)$

$\therefore y_1 = re^{ax}(\cos\theta\cos bx - \sin\theta\sin bx)$

$= re^{ax}\cos(bx+\theta)$

পুনরায় অন্তরীকরণ করে

$y_2 = r[ae^{ax}\cos(bx+\theta) - be^{ax}\sin(bx+\theta)]$

$= r^2e^{ax}[\cos\theta\cos(bx+\theta) - \sin\theta.\sin(bx+\theta)]$

$y_2 = r^2e^{ax}\cos(bx+2\theta)$

$y_3 = r^3e^{ax}\cos(bx+3\theta)$

$y_n = r^ne^{ax}\cos(bx+n\theta)$

$\therefore y_n = (\sqrt{a^2+b^2})^ne^{ax}\cos(bx+n\tan^{-1}b/a)$

উদাহরণ 5: যদি $y = a\sin nx + b\cos nx$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $y = a\sin nx + b\cos nx$

$\frac{dy}{dx} = an\cos nx - bn\sin nx$

পুনরায় x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d^2y}{dx^2} = -an^2\sin nx - bn^2\cos nx = -n^2(a\sin nx - b\cos nx)$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$ (প্রমাণিত)

ম্যাক্লরিনের উপপাদ্য (Maclaurins Theorem): যদি $y = f(x)$, x এর যেকোনো একটি ফাংশন হয় যা যোকোনো সংখ্যকবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণযোগ্য এবং $f(x)$ কে x এর ক্রমবর্ধমান শক্তির একটি অসীম ধারায় বিস্তার করা যায়। তবে $f(x)$ ফাংশনটিকে নিম্নরূপে লেখাযায়-

$f(x) = f(0) + xf'(x) + \frac{x^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(x) + \ldots\ldots \infty$ একে ম্যকলরিনের উপপাদ্য বলা হয়।

প্রমাণ: যেহেতু $f(x)$ ফাংশনকে x এর ক্রমবর্ধমান শক্তির একটি অসীম ধারায় বিস্তৃত করা যায় কাজেই;

মনে করুন, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots\ldots$(i)

(i)নং কে x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots$ (ii)

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots\ldots\ldots$(iii)

$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4x + \ldots\ldots\ldots\ldots$ (iv)

এখন $x=0$ বসিয়ে পাই,

$f(0) = a_0$ $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2a_2 = 2!a_2$

$f'''(0) = 6a_3 = 3!a_3 \ldots\ldots f^n(0) = n!\, a_n$

এখন $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0)) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) +$

উদাহরণ 6: মাকলরিনের উপপাদ্যের সাহায্যে e^{mx} কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত করুন।

সমাধান: মনে করুন, $f(x) = e^{mx}$

$f'(x) = me^{mx}$ $\quad f'(0) = m$

$f''(x) = m^2e^{mx}$ $\quad f''(0) = m^2$

$f'''(x) = m^3e^{mx}$ $\quad f'''(0) = m^3$

ম্যকলরিনের উপপাদ্য থেকে পাই

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots$

$e^{mx} = 1 + mx + \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^3x^3}{3!} + \ldots$

উদাহরণ 7: ম্যাকলরিনের ধারার সাহয্যে $\cos x$ কে x এর ক্রম উচ্চ শক্তির অনন্তধারায় বিস্তৃত করুন।

সমাধান: মনে করুন,

$f(x) = \cos x$ $\quad \therefore f(0) = 1$

$f'(x) = \sin x$ $\quad \therefore f(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\therefore f''(x) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ $\quad \therefore f'''(0) = 0$

$f^{iv}(x) = -\cos x$ $\therefore f^{iv}(0) = -1$

ম্যাকলরিনের উপপাদ্য থেকে পাই,

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{iv}(0) + \ldots\ldots\infty$

$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots \infty$

উদাহরণ 8: ম্যাকলরিনের ধারার সাহয্যে $\tan^{-1} x$ অনন্ত ধারায় বিস্তৃত করুন।

সমাধান: মনে করুন, $f(x) = \tan^{-1}(x)$ $\therefore f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \therefore f'(0) = 1$

$= (1+x^2)^{-1}$

$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$

$f''(x) = -2x + 4x^3 - 6x^5 \ldots\ldots\ldots \therefore f''(0) = 0$

$f'''(x) = -2 + 12x^2 - 30x^4 + \ldots \therefore f'''(0) = -2$

ম্যাকলরিনের উপপাদ্য থেকে পাই,

$f(x) = f(0) + x f'(x) + \frac{x^2}{2!} f''(x) + \frac{x^3}{3!} f'''(x) + \ldots$

$\therefore \tan^{-1}(x) = 0 + x.1 + \frac{x^2}{2!} 0 + \frac{x^3}{3!} (-2) + \ldots$

$\Rightarrow \tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

পাঠ-৯.৪ অন্তরক সহগের ব্যাখ্যা এবং ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন
Significance of Derivative and Increasing and Decreasing functions

উদ্দেশ্য

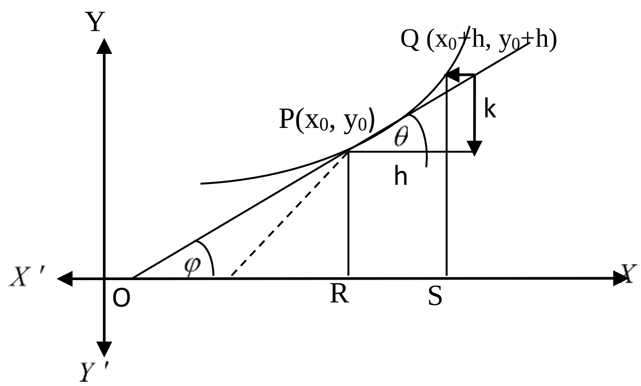
এ পাঠ শেষে আপনি-

- কোনো ফাংশনের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অন্তরক সহগের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- কোনো ফাংশনের গরিষ্ট্য ও লঘিষ্ঠ্য মান নির্ণয় করতে পারবেন।

অন্তরক সহগের ব্যাখ্যা
Significance of Derivative

কোনো ফাংশনের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অন্তরক সহগের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: মনে করুন, $y=f(x)$ যে কোনো ফাংশন যা (a,b) ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য এবং $x\in(a,b)$। ধরুন, $y=f(x)$ বক্ররেখার উপর $P(x_0,y_0)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং $Q(x_0+h,y_0+k)$ হলো বক্ররেখার উপর P এর নিকটবর্তী অপর বিন্দু।

$\therefore y_0=f(x_0)$ এবং $y_0+k=f(x_0+h)$.



মনে করুন, P,Q রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মকদিকের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করে এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি x অক্ষের ধনাত্মকদিকের সাথে φ কোণ উৎপন্ন করে। P ও Q বিন্দু থেকে x অক্ষের উপর দুটি লম্ব অঙ্কন করা হলো। লম্বদ্বয় x-অক্ষকে যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে। P থেকে QS এর উপর লম্ব অঙ্কন করি যার পাদ বিন্দু T. এখন চিত্র থেকে পাই, $\tan\theta = \frac{QT}{PT} = \frac{k}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

এখন বক্ররেখার উপর দিয়ে Q বিন্দুকে ক্রমাগত ভাবে P বিন্দুর দিকে নিয়ে আসলে অর্থাৎ $Q\to P$ হলে Q,P রেখাটি ক্রমশই $y=f(x)$ বক্ররেখার P বিন্দুতে স্পর্শকের নিকটবর্তী হয়। ফলে $\theta\to\varphi$ পরিণত হয়। আবার $Q\to 0$ হলে, $h\to 0$ হয়।

$$\therefore \lim_{\theta\to\varphi}\tan\theta = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\therefore \tan\varphi = f'(x_0)$$

সুতরাং, $f'(x_0)$ হলো $y=f(x)$ বক্ররেখার $x=x_0$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল।

উদাহরণ 1: $y=x^3+2x^2-3$ বক্ররেখার $(0,-3)$বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $y=x^3+2x^2-3 \therefore \frac{dy}{dx}=3x^2+4x-0$

এখন $(0,-3)$ বিন্দুতে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,-3)} = 3.0^2+4.0-0=0$

অর্থাৎ, ঢাল $=0$

উদাহরণ 2: প্রমাণ করুন x^2-5x+6 বক্রারেখার $(2,0)$ এবং $(3,0)$ বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখা $y = x^2 - 5x + 6$, $\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 5$

এখন (2,0) বিন্দুতে ঢাল $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,0)} = 2.2 - 5 = -1$

এবং (3,0) বিন্দুতে ঢাল $\frac{dy}{dx} = 2.3 - 5 = 1$

তাহলে ঢালদ্বয়ের গুণফল $= (-1) \times 1 = -1$

অর্থাৎ, (2,0) এবং(3,0) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

হার পরিমাপক হিসেবে অন্তরক সহগ (Derivative as a Rate Measure): মনে করুন, $y = f(x)$ একটি Real valued ফাংশন। চলরাশি x-এর একটি ক্ষুদ্রতম বৃদ্ধি Δx এর জন্য অধীন চলক y এর ক্ষুদ্রতম বৃদ্ধি Δy

$\therefore y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

তাহলে $\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$

সুতরাং বলা যাবে Δx এর জন্য y এর বৃদ্ধি Δy

$\therefore 1$ এর জন্য y-এর বৃদ্ধি $\frac{\Delta x}{\Delta y}$

এখানে $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ কে x-এর সাপেক্ষে y এর গড় পরিবর্তনের হার বলে।

এখন $\Delta x \to 0$ হলে $\Delta y \to 0$ হয়।

$\therefore$ যে কোনো মুহূর্তে x-এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ [ধরাযাক, $\Delta x = h$]

$= \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{dy}{dx}$

উদাহরণ 3: একটি বৃত্তাকার কালির ফোঁটার ক্ষেত্রফল সেকেন্ডে $2\pi cm^2$ হারে বৃদ্ধি পায়। যখন ব্যাসার্ধ 4cm হবে তখন ফোঁটার ব্যাসার্ধ কিহারে বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান: মনে করুন, t সেকেন্ডে কালির ফোঁটার ব্যাসার্ধ r তম এবং ক্ষেত্রফল A বর্গ সে.মি

তাহলে $A = \pi r^2$

$\therefore \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

$\Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dA}{dt}}{2\pi r} = \frac{2\pi}{2\pi r} = \frac{1}{r}$

এখন ব্যাসার্ধ $r = 4$ হলে

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4} = 0.25$

$\therefore$নির্ণেয় ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার $= 0.25$

উদাহরণ 4: যদি কোনো একটি গতিশীল বস্তুকণার গতির সমীকরণ t সেকেন্ড পরে $f(x) = 3t + t^3$ হয় তবে t সেকেন্ড পরে বস্তুকণাটির বেগ ও সরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(s) = 3t + t^3$

$\therefore \frac{d}{dt}[f(s)] = \frac{d}{dt}(3t + t^3)$

$v = 3+3t^2$

আবার, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3+3t^2) = 6t$

এখন $t = 2$ সেকেন্ড হলে বেগ $v = 3 + 3\times2 = 15$

$t=2$ সেকেন্ড হলে ত্বরণ $a = 6\times2 = 12$

ফাংশনের প্রকৃতি নির্ণয় (Determination of Nature of function):

(1) মনে করুন, $y=f(x)$ যেকোনো একট ফাংশন; যা ক্রমবর্ধমান।

যদি x এর ক্ষুদ্রতমবৃদ্ধি Δx হলে যদি $\Delta x > 0$

$\Rightarrow x + \Delta x > x$

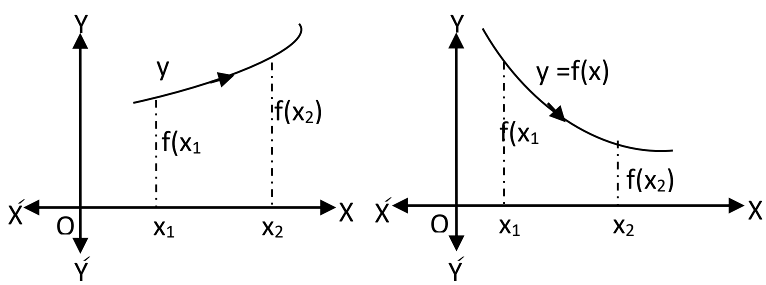
$\therefore f(x + \Delta x) > f(x)$ [ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান হবে]

$\Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) > 0$

$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$

বা, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{h} > 0$ [ধরুন, $\Delta x = h$]

$\therefore f'(x) > 0$ অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} > 0$



সুতরাং কোনো একটি ফাংশন ক্রমবর্ধমান হলে ফাংশনটির কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে $f(x) > 0$ অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} > 0$ হবে। অর্থাৎ ক্রমবর্ধমান ফাংশনের লেখচিত্রের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত সম্পর্ক অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

উদাহরণ 5: দেখান যে, $f(x) = 3x^2 + 18x + 15$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 + 18x + 15$

$\therefore f'(x) = 6x + 18$

$= 6(x+3)$

এখানে x এর মান ক্রমাগতভাবে বৃদ্ধির ফলে $f'(x)$ এর ক্রমগতভাবে বৃদ্ধি পায়।

মনেক রুন, $y=f(x)$ ফাংশন, যা ক্রমহ্রাসমান।

এখন x স্বাধীন চলকের ক্ষুদ্রতম বৃদ্ধি Δx এর জন্য যদি $\Delta x > 0$হয়, তবে $x + \Delta x > x$হবে।

বা, $f(x+ \Delta x) < f(x)$ [ফাংশনটি ক্রম হ্রাসমান বলে]

বা, $f(x+ \Delta x) - f(x) < 0$

বা, $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$

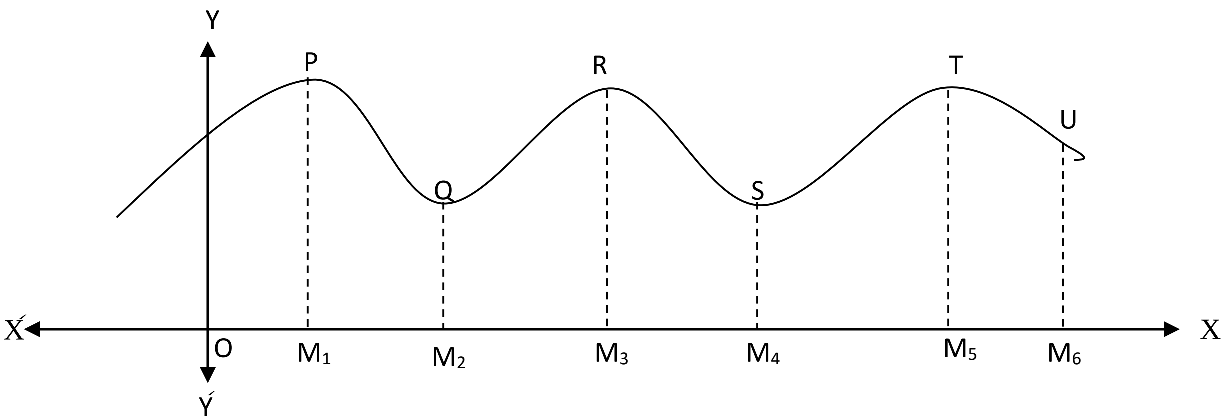
বা, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$

বা, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0$ [ধরা যাক, $\Delta x = h$]

$\therefore f'(x) < 0$ অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} < 0$

সুতরাং, $y=f(x)$ ফাংশনটি ক্রমহ্রসামান হলে ফাংশনের লেখাচিত্রের কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের সাথে স্থুলকোণ তৈরি করবে। ফলে স্পর্শকের ঢালের মান ঋণাত্মক হবে।

ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশনের ধারণা: কোনো ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করলে তা থেকে ফাংশনের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন বিন্দুর ধারণা পাওয়া যায়। এই সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন বিন্দুর মানই হলো ফাংশনের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান। একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের লেখচিত্রে অসংখ্য সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্নমান থাকতে পারে। তবে একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে ফাংশনটির একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন থাকে। নিচের লেখচিত্র পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যায় যে, $x=M_1$ ও $x=M_6$ এর মধ্যে ফাংশনটির P,R



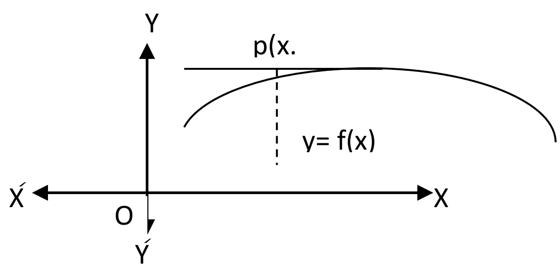
ও T তিনটি সর্বোচ্চ বিন্দু এবং Q, S ও U সর্বোনিম্ন বিন্দু আছে। এখানে এই ছয়টি বিন্দুতে ফাংশনের লেখচিত্র ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান নয়। অর্থাৎ স্থির এই বিন্দুগুলোই ফাংশনের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্নবিন্দু। যদি এই স্থির বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করা হয় তবে ঐ স্পর্শকগুলো X- অক্ষের সমান্তরাল হবে। ফলে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢালের মান শূন্য (0) পাওয়া যাবে।

আবার, লেখচিত্র থেকে এটি স্পষ্ট যেসর্বোচ্চ বিন্দুর পর লেখচিত্র আর উর্ধ্বমূখী হয় না, ফলে লেখচিত্র ক্রমহ্রাসমান হয়। পুনরায় সর্বনিম্ন বিন্দুর পর ফাংশনের লেখচিত্র আর নিম্নমুখী হয় না। ফলে লেখাচিত্রটি উর্ধ্বমুখী বা ক্রমবর্ধমান হয়। লেখচিত্রে যে সবোর্চ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দু পাওয়া যায়, তাদেরকে স্থানীয় সর্বোচ্চ বা স্থানীয় সর্বনিম্ন (local minimum or minimum point) বলা হয়। ঐ ফাংশনের সর্বোচ্চ বিন্দু নয়। কোনো ফাংশনের লেখ চিত্র যদি এমন বিন্দু পাওয়া যায় যে যা ঐ লেখচিত্র সকল বিন্দুর মধ্যে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন,তবে ঐ বিন্দুটিকে ফাংশনের যথাক্রমে (Maxzmum/Global maximum or minim/ minmum) বিন্দুবলে ; যা বাস্তবে প্রায় অসম্ভব।

সর্বোচ্চকরণ ও সর্বনিম্নকরণের শর্ত (Condition of Maximization & Minimization): যদি কোনো ফাংশনের একটি মাত্র চলক থাকে ঐ সমস্ত ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নকরণ নির্ণয় নিচে দেখানো হলো: সর্বোচ্চকরণের শর্ত

মনে করুন, $y=f(x)$ যেকোনো একটি ফাংশন। সর্বোচ্চকরণের জন্য ফাংশনটির লেখচিত্র concave down বা নিম্ন চন্দ্রাকৃতির হবে। চিত্রে p বিন্দুটি সবোর্চ্চ বিন্দু। এ ক্ষেত্রে ফাংশনটির দুইটি শর্ত পাওয়া যায়

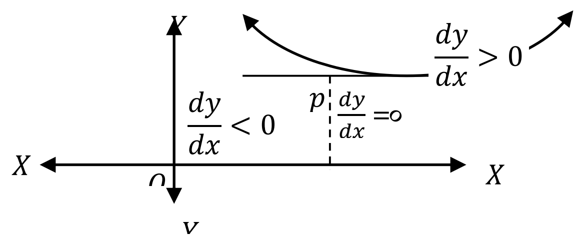
(ক) প্রাথমিক শর্ত ও (খ) পর্যাপ্ত শর্ত



(ক) প্রাথমিক শর্ত: p বিন্দুতে বক্র রেখার অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল=0। অর্থাৎ p বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে।

(খ) পর্যাপ্তশর্ত: এক্ষেত্রে p বিন্দুতে দ্বিতীয় অন্তরীকরণের মান 0 অপেক্ষা কম হতে হয়। অর্থাৎ, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হলে p বিন্দুতে প্রাপ্ত মানটি সর্বোচ্চ হবে।

সর্বনিম্নকরণ শর্ত (Conditions of Minimization): মনে করুন, $y=f(x)$ বক্র রেখার যে অংশে x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ এর মান ও বৃদ্ধি পায়। বক্ররেখা ঐ অংশকে concave up বা উর্ধ্ব চন্দ্রাকৃতি বলা হয়। এতে ফাংশনের সর্বনিম্ন বিন্দু পাওয়া যায়। p বিন্দুটি $y=f(x)$ এর সবনিম্ন বিন্দু। এর জন্য দুইটি শর্ত প্রযোজ্য:



ক) প্রাথমিক শর্ত: p বিন্দুতে বক্র রেখার অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হয়। অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}=0$

খ) পর্যাপ্ত শর্ত: সর্বনিম্ন মানের জন্য p বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করতে হবে। যদি $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হয়, তবে p বিন্দুতে ফাংশনের সর্বনিম্ন মান থাকবে।

উদাহরণ 6: $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+6$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+6$.

সুতরাং, $f'(x)=3x^2+9x+6$ এবং

$f''(x)=6x+9$

আমরা জানি, চরম বিন্দুতে, $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+9x+6=0$

বা $x^2+3x+2=0$

বা $(x+2)(x+1)=0$

অর্থাৎ $x=-1,-2$

এখন, $x=-1$ বিন্দুতে $f''(-1)=6(-1)+9=3>0$ এবং

$x=-2$ বিন্দুতে $f''(-2)=6(-2)+9=-3<0$.

সুতরাং $x=-1$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান সর্বনিম্ন এবং সর্বনিম্ন মান

$$f(-1)=(-1)^3+\frac{9}{2}(-1)^2+6(-1)+6=-1+\frac{9}{2}-6+6=\frac{7}{2}$$

এবং $x=-2$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান সর্বোচ্চ এবং সর্বোচ্চ মান

$$f(-2)=(-2)^3+\frac{9}{2}(-2)^2+6(-2)+6=-8+18-12+6=4$$

উদাহরণ 7: $f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$.

সুতরাং $f'(x)=6x^2-42x+36$

এবং $f''(x)=12x-42$.

আমরা জানি, সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য $f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-42x+36=0$

বা, $x^2-7x+6=0$

বা, $(x\text{-}1)(x\text{-}6)=0$

বা, $x=1,6$

এখন $f''(1)=12(1)-42=-30<0$

সুতরাং $x=1$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান সর্বোচ্চ

এবং সর্বোচ্চ মান $f(1)=2.1^3-21.1^2+36.1-20=2-21+36-20=-3$

আবার, $f''(6)=12(6)-42=72-42=30>0$

সুতরাং $x=6$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান সর্বনিম্ন এবং সর্বনিম্ন মান

$f(1)=2\times 6^3-21\times 6^2+36\times 6-20$

$=432-756+216-20=-128$

উদাহরণ ৪: প্রমাণ করুন যে, $f(x)=x^3-3x^2+6x+3$ ফাংশনের কোনো লঘুমান বা গুরুমান নাই।

প্রমাণ: মনে করুন, $f(x)=x^3-3x^2+6x+3$

$\therefore f'(x)=3x^2-6x+6$

$=3(x^2-2x+2)$

$=3\{(x^2-2x+1)+1\}$

$=3\{(x-1)^2+1\}$

যা সর্বদাই একটি ধনাত্বক সংখ্যা। সুতরাং x এর কোনো বাস্তব মানের জন্য $f'(x)$ শূন্য হতে পারে না। কিন্তু লঘুমান বা গুরুমান এর জন্য $f'(x)$ শূন্য হতে হবে।

সুতরাং, ফাংশনটির কোনো লঘুমান বা গুরুমান নাই।

সারসংক্ষেপ:

- স্পর্শকের ঢাল $\tan\varphi=f'(x_0)$ ।
- যদি $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ হয়, তাহলে কোন বিন্দুতে ফাংশনের মান সর্বোচ্চ হবে।
- যদি $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ হয়, তবে কোন বিন্দুতে ফাংশনের মান সর্বনিম্ন হবে।

পাঠ-৯.৫ মোট আয়-ব্যয়, গড় আয়-ব্যয় এবং প্রান্তিক আয়-ব্যয়
Total revenue-cost, Average revenue-cost, Marginal revenue-cost

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- কোন শিল্প প্রতিষ্ঠান বা ফার্ম এর উৎপাদনের মোট আয়-ব্যয় নির্ণয় করতে পারবেন;
- কোন প্রতিষ্ঠানের প্রান্তিক আয়-ব্যয় নির্ণয় করতে পারবেন;
- কোন প্রতিষ্ঠানের গড় আয়-ব্যয় নির্ণয় করতে পারবেন।

মোট আয়
Total Revenue

কোনো শিল্প প্রতিষ্ঠান বা ফার্ম বা উৎপাদক তার উৎপাদিত পন্য বিক্রয়ের মাধ্যমে মোট যে পরিমাণ অর্থ আয় করে তাকে মোট আয় (Total Revenue) বা TR বলা হয়।

যদি উৎপাদক q একক পন্য বিক্রয় করে ও প্রতি এককের মূল্য q টাকা হলে TR = pq.

গড় আয় (Average Revenue): কোনো উৎপাদকের মোট আয়কে উৎপাদিত দ্রব্যের পরিমান (সংখ্যা) দ্বারা ভাগ করলে গড় আয় বা Average Revenue পাওয়া যায়। একে সংক্ষেপে AR বলা হয়।

যদি মোট আয় TR = pq হয়, AR = $\frac{TR}{q} = p$ টাকা হবে।

$\therefore AR = p$ টাকা হবে।

প্রান্তিক আয় (Marginal Revenue): পন্য বিক্রয়ের পরিমাণ এক একক (বা অতি সামান্য পরিমাণ) হ্রাস বা বৃদ্ধিজনিত কারণে মোট আয় এর যে পরিবর্তন হয় তাকে প্রান্তিক আয় বলা হয়। একে MR দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, MR নির্ণয় করার জন্য মোট আয়কে দ্রব্যের পরিমাণ q এর প্রেক্ষিতে অন্তরকলণ করলে MR পাওয়া যায়।

অর্থাৎ, MR= $\frac{d}{dq}(TR) = \frac{d}{dq}(pq) = p.\frac{d}{dq}(q) + q.\frac{d}{dq}(p)$

$$\therefore MR = \frac{d}{dq}(pq) = p + q\frac{dp}{dq}$$

পূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক বাজারে $\frac{dp}{dq} = 0$ হয় ফলে $MR = p$ হয়।

কিন্তু বাজার পূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক না হলে $\frac{dp}{dq} < 0$ হয়; ফলে $MR < p$ হয়।

মোট ব্যয় (Total Cost): কোনো উৎপাদক কোন দ্রব্য তৈরি করার জন্য মোট যে পরিমাণ অর্থ ব্যয় করেন তাকেই মোট ব্যয় (Total Cost) বা TC বলা হয়। যথা−

(i) মোট স্থির খরচ (Total Fixed Cost) বা TFC

(ii) মোট পরিবর্তনশীল খরচ (Total variable Cost) বা TVC

মোট স্থির খরচ (Total Fixed Cost): মোট খরচের যে অংশ উৎপাদনের উপর নির্ভর করে সেই খরচ মোট স্থির খরচ।

মোট পরিবর্তনশীল খরচ (Total variable Cost): মোট খরচের যে অংশ পুরোপুরিভাবে উৎপাদনের পরিমাণের উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ, পরিমানের হ্রাস বা বৃদ্ধিতে খরচের হ্রাস বা বৃদ্ধি হয় সেই খরচকে পরিবর্তনশীল খরচ বলা হয়।

সুতরাং, TC = TFC+TVC

সাধারণভাবে, TC = f(a)+b, এখানে, f(a)= Variable Cost, b = Fixed Cost

গড় আয় (Average Cost): মোট খরচকে উৎপাদিত দ্রব্যের পরিমান (সংখ্যা) বা একক দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগফল পাওয়া যায় তাকে গড় আয় (AC) বলা হয়।

গড় আয়, $AC = \frac{TC}{q}$ ।

Average Variable Cost (AVC) $= \frac{TVC}{q}$

Average Fixed Cost (AFC) $= \frac{TFC}{q}$

প্রান্তিক ব্যয় বা Marginal Cost (MC): মোট ব্যয় ফাংশনকে মোট পরিমানের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে প্রান্তিক ব্যয় পাওয়া যায়। যেমন– $C = 8q^2 + 12q + 10$

C কে q -এর প্রেক্ষিতে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dC}{dq} = 16q + 12$,

$$\therefore MC = \frac{dC}{dq} = 16q + 12$$

উল্লেখ্য যে, MC স্থির ব্যয়ের উপর নির্ভরশীল নয়।

স্থিতিস্থাপকতা (Elasticity): মনে করুন, y=f(x), x এর প্রতি একক আনুপাতিক পরিবর্তনের ফলে y এর যে আনুপাতিক পরিবর্তন হয় তার হারকে x বিন্দুতে উক্ত ফাংশনের স্থিতিস্থাপকতা বলা হয়।

(i) **চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতা (Price Elasticity of Demand):** কোনো পণ্যের দামের আপেক্ষিক পরিবর্তনের ফলে ঐ পণ্যের চাহিদার যে আপেক্ষিক পরিবর্তন হয় তার অনুপাতকে চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতা বা η_{pd} বলা হয়।

$$\therefore \eta_{pd} = \left|\frac{\text{চাহিদার আপেক্ষিক পরিবর্তন}}{\text{দামের আপেক্ষিক পরিবর্তন}}\right| = \left|\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}}\right| = \left|\frac{p}{x} \times \frac{dx}{dp}\right|$$

যেখানে, x = চাহিদা
dx = চাহিদার পরিবর্তনের পরিমাণ
p = দাম
dp= দাম পরিবর্তনের পরিমাণ।

উদাহরণ 1: এর সাপেক্ষে চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় করুন, যেখানে উৎপাদকের চাহিদা বিধি $p = \frac{10}{(x+1)^2}$ দ্বারা নির্ধারিত হয়।

সমাধান: আমরা জানি, চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা $|\eta_{pd}| = \left|\frac{p}{x} \times \frac{dx}{dp}\right|$

এখানে, $p = \frac{10}{(x+1)^2} = 10(x+1)^{-2}$

$$\therefore \frac{dp}{dx} = \frac{10}{(x+1)^2} = -20(x+1)^{-3}\frac{d}{dx}(x+1) = -20(x+1)^{-3}.1 = -20(x+1)^{-3}$$

$$\therefore |\eta_{pd}| = \left|\frac{10}{(x+1)^2} \times \frac{1}{x} \times \left\{-\frac{(x+1)^3}{20}\right\}\right| = \left|-\frac{10}{(x+1)^2} \times \frac{1}{x} \times \frac{(x+1)^3}{20}\right| = \left|-\frac{x+1}{2x}\right| = \frac{x+1}{2x}$$

(ii) **চাহিদার বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা (Point Elasticity of Demand):** চাহিদা রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্থিতিস্থাপকতার পরিমাণই হলো চাহিদা বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা। এক্ষেত্রে চাহিদার পরিবর্তনের ফলে দামের যে পরিমাণ পরিবর্তন হয় তারা খুবই সামান্যতম পরিবর্তিত হয়। ফলে প্রাথমিক বিন্দু ও পরিবর্তিত বিন্দুর মধ্যে খুব বেশি পার্থক্য পরিলক্ষিত হয় না, ফলে দুটি বিন্দুকে একই বিন্দু মনে হয়। যেমন– $|\eta_d| = \lim_{\delta p \to 0}\left(\frac{\delta x}{\delta p}\right).\frac{p}{x} = \left|\frac{dx}{dp}.\frac{p}{x}\right|$

(iii) **চাহিদার আয় স্থিতিস্থাপকতা (Income Elasticity of Demand):** অন্যান্য অবস্থা পরিবর্তিত না হলে ভোক্তার আয়ের পরিবর্তনের ফলে চাহিদার যে পরিবর্তন হয় তার অনুপাতকে চাহিদার আয় স্থিতিস্থাপকতা বলে।

$\therefore$ চাহিদার আয় স্থিতিস্থাপকতা $|\eta_y| = \frac{y}{x}.\frac{dx}{dy}$, যেখানে, $x =$ চাহিদার পরিমান, $y =$ ভোক্তার মাথাপিছু আয়।

যদি $\eta_y > 1$ দ্রব্যটি বিলাস দ্রব্য, $0 < \eta_y < 1$ দ্রব্যটি অত্যাবশ্যকীয় দ্রব্য, $\eta_y < 0$ দ্রব্যটি নিকৃষ্টতর দ্রব্য

(iv) **যোগানের দাম স্থিতিস্থাপকতা (Price Elasticity of Supply):** অন্যান্য অবস্থার পরিবর্তিত না হলে দামের আপেক্ষিক পরিবর্তনের ফলে যোগানের আপেক্ষিক পরিবর্তনের হারকে যোগানের দাম স্থিতিস্থাপকতা বলা হয়।

$\therefore$ **যোগানের দাম স্থিতিস্থাপকতা** $((\eta_s) = \frac{\text{সরবরাহের আপেক্ষিক পরিবর্তন}}{\text{দামের আপেক্ষিক পরিবর্তন}} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = \frac{p}{x}.\frac{dx}{dp}$ যেখানে, $x =$ যোগান, $dx =$ যোগানের পরিবর্তনের পরিমান $p =$ দাম, $dp =$ দামের পরিবর্তনের পরিমান

উল্লেখ্য যে, যোগান রেখার ঢাল ধনাত্মক। সুতরাং, η_s ও ধনাত্মক।

উদাহরণ 2: $f(p,y) = 20 - 2p + 4y$ চাহিদা ফাংশন হতে চাহিদার আয় স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় করুন; যখন, $p = 2$ এবং $y = 15$ এবং $y =$ আয় ও $p =$ দাম নির্দেশ করে।

সমাধান: আমরা জানি, চাহিদার আয় স্থিতিস্থাপকতা, $\eta_y = \frac{dD}{dy}.\frac{y}{D}$

এখানে, $D = 20 - 2p + 4y$, $\therefore \frac{dD}{dy} = 4$

সুতরাং, চাহিদার আয় স্থিতিস্থাপকতা, $\eta_y = 4.\frac{y}{D} = 4.\frac{y}{20 - 2p + 4y}$

$= 4.\frac{15}{20 - 2 \times 2 + 4 \times 15} = \frac{60}{76} = 0.79$

উদাহরণ 3: কোনো একটি উৎপাদন প্রতিষ্ঠানের উৎপাদিত পণ্যের মোট ব্যয় ফাংশন $C = 15q - 6q^2 + q^3$ হলে,

(i) গড় ব্যয় বা Average Cost (AC)

(ii) প্রান্তিক ব্যয় বা Marginal Cost (MC)

(iii) প্রান্তিক ব্যয়ের পরিবর্তনের হার বা Change of rate of Marginal Cost এবং

(iv) মোট ব্যয় রেখার ঢাল বা Slope of Total Cost নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $C = 15q - 6q^2 + q^3$

(i) Average Cost (গড় ব্যয়): $AC = \frac{C}{q} = \frac{15q - 6q^2 + q^3}{q} = 15 - 6q + q^2$

(ii) Marginal Cost (প্রান্তিক ব্যয়): $MC = \frac{dC}{dq} = \frac{d}{dq}(15q - 6q^2 + q^3) = 15 - 12q + 3q^2$

(iii) Change of Rate of Marginal Cost (গড় ব্যয়): $\frac{d(MC)}{dq} = \frac{d}{dq}(15 - 12q + 3q^2) = 6q - 12$

(iv) Slope of Total Cost (মোট ব্যয় রেখার ঢাল): Slope of TC Line- $\frac{dC}{dq} = \frac{d}{dq}(15q - 6q^2 + q^3) = 15 - 12q + 3q^2$

উদাহরণ 4: একটি ফার্মের উৎপাদিত দ্রব্যের চাহিদা অপেক্ষক $q = 100 - 2p$ তাহলে−

(ক) (i) মোট আয় (Total Revenue) বা TR

(ii) গড় আয় (Average Revenue) বা AR

(iii) প্রান্তিক আয় (Marginal Revenue) বা MR এবং

(খ) q = 10 একক হলে TR, AR ও MR কত টাকা হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, চাহিদা অপেক্ষক $q = 100 - 2p$

বা, $q = 100 - 2p$

বা, $p = 50 - \frac{q}{2}$

এখানে, p = পণ্যের দাম , q = পণ্যের পরিমাণ

(i) মোট আয় (Total Revenue) বা TR = pq $= \left(50 - \frac{q}{2}\right) \times q \quad = 50q - \frac{q^2}{2}$

(ii) গড় আয় (Average Revenue) AR $= \frac{TR}{q} = \frac{50q - \frac{q^2}{2}}{q} = 50 - \frac{q}{2}$

(iii) প্রান্তিক আয় (Marginal Revenue) $MR = \frac{d}{dq}(TR) = \frac{d}{dq}\left(50q - \frac{q^2}{2}\right) = 50 - \frac{1}{2}.2q = 50 - q$

(খ) যখন, q = 10 একক

(i) TR = $\left(50 - \frac{10}{2}\right) \times 10 = 45 \times 10 = 450$ টাকা।

(ii) AR $= 50 - \frac{10}{2} = 50 - 5 = 45$ টাকা।

(iii) $MR = 50 - 10 = 40$ টাকা।

উদাহরণ 5: একটি প্রতিষ্ঠানের খরচের ফাংশন $C = 5 + \frac{48}{x} + 3x^2$ যেখানে x উৎপাদনের একক এবং C মোট খরচের পরিমাণ এবং সর্বাধিক খরচের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $C = 5 + \frac{48}{x} + 3x^2$

বা, $\frac{dC}{dx} = 0 + \frac{48}{x^2} + 6x$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dC}{dx} = 0$

বা, $-\frac{48}{x^2} + 6x = 0$

বা, $6x^3 - 48 = 0$

বা, $x^3 - 8 = 0$

বা, $x^3 = 2^3$

$\therefore x = 2$

এখন, $\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{96}{x^3} + 6$, যখন, $x = 2$ তখন $\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{96}{8} + 6 = 18 > 0$

সুতরাং, $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনের সর্বনিম্ন মান থাকবে এবং

সর্বনিম্ন মান = $5 + \frac{48}{2} + 3.2^2 = 5 + 24 + 18 = 41$

সারসংক্ষেপ:

- মোট আয় TR = pq হলে, AR = $\frac{TR}{q} = p$
- গড় আয় (AC) = $AC = \frac{TC}{q}$ ।
- যোগানের দাম স্থিতিস্থাপকতা ($(\eta_s) = \frac{\text{সরবরাহের আপেক্ষিক পরিবতন}}{\text{দামের আপেক্ষিক পরিবতন}} = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

পাঠ-৯.৬ সমাকলন বা যোগজীকরণ ও তার সূত্রবলী

Integral and it's formulae

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অনির্দিষ্ট সমাকলন কী তা বলতে পারবেন,
- সমাকলনের সাধারণ নিয়মের ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সমাকলনের নিয়ম ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

প্রতি অন্তরজ

Anti-derivative

একটি অপেক্ষক F কে কোনো নির্দিষ্ট ব্যবধি I তে f(x) এর প্রতি অন্তরজ বলা হবে যদি $F'(x)=f(x)$ হয় ; যেখানে $x \in I$ যেহেতু $F'(x)= f(x)$ তাই f(x) কে যেমন বলা হয় F(x) এর x এর সাপেক্ষে অন্তরজ/অন্তরক সহগ . তেমন F(x) কে বলা হয় x এর সাপেক্ষে f(x) এর প্রতি অন্তরজ (Anti-derivative) বা আদিরূপ (Primitive)। সাধারণভাবে ফাংশন প্রতি-অন্তরজকে F(x) দ্বারা g(x) ফাংশনের প্রতি অন্তরজকে G(x) ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ স্বরূপঃ $f(x)=3x^2$ এর প্রতি-অন্তরজকে F(x) হলে x^3 বা $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ একইভাবে $g(x)= \cos x$ এর প্রতি-অন্তরজ G(x) হল $\sin x$ কারণ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ আবার, লক্ষ্য করলে দেখা যায়, $F(x)=x^3$ ফাংশনটি কেবল মাত্র $f(x)=3x^2$ এর প্রতি-অন্তরজ নয়, কারণ $\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2$, যেখানে c হল যে কোনো ধ্রুবক। সুতরাং $f(x)=3x^2$ এর সকল প্রতি অন্তরজ এর সেটকে আমরা $x^3 + c$ আকারে প্রকাশ করতে পারি, যেখানে c হলো একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক (arbitrary constant)।
সুতরাং বলা যায় যে, যদি কোনো ব্যবধি I তে f(x) ফাংশনের একটি প্রতি-অন্তরজ F(x) হয়, তাহলে f(x)এর সব থেকে সাধারণ প্রতি অন্তরজটি হবে $F(x) + c$, যেখানে c একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।
সুতরাং, I ব্যবধিতে f(x) ফাংশনের সব থেকে সাধারণ প্রতি-অন্তরজ $F(x) + c$(c ইচ্ছামূলক ধ্রুবক) হলে কতগুলো ফাংশনের সেট যাদের একটির উল্লম্ব চলনের ফলে অন্যটিকে পাওয়া যায়।
ধরা যাক, $f(x)=2x$ ফাংশনের প্রতি-অন্তরজ F(x)

এখন, $\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$

$\therefore f(x)=x^2 + c$, যেখানে, c ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

এখন, $c = 0$ হলে $F(x) = x^2$

$c = 1$ হলে $F(x) = x^2 + 1$

$c = 2$ হলে $F(x) = x^2 + 2$

$c = -1$ হলে $F(x) = x^2 - 1$ ইত্যাদি

আবার, $F(x) = 3x^2$ এর প্রতি-অন্তরজ $F(x) = x^3 + c$

হলে, $\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2$

এখন, $c = 0$ হলে $F(x) = x^3$

$c = 1$ হলে $F(x) = x^3 + 1$

$c = 2$ হলে $F(x) = x^3 + 2$

....

অনির্দিষ্ট সমাকলন (Indefinite integrals): কোনো ফাংশন f(x) এর সকল প্রতি-অন্তরজ এর সেটকে x এর সাপেক্ষে f(x) এর অনির্দিষ্ট সমাকলন (Indefinite Integrals) বলা হয় এবং একে $\int f(x)dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\int$ চিহ্নটিকে সমাকলন চিহ্ন (Integral sing), f(x) কে সমাকলিত ফাংশন (Integrand) এবং x কে সমাকলনের চলক (Variable of Integration) বলা হয়।

NB: সমাকলনের ধারণাটির সূত্রপাত ঘটেছিল বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতির বস্তুর দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল, আয়তন ইত্যাদির পরিমাপের জন্য অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পরিমানের যোগফলের (Sum) সীমা (Limit) ধারণা থেকে, তাই সমীকরণের চিহ্নটিকে Summation কথাটির আদ্যক্ষর 'S' এর বিস্তৃত আকার (Clongated form) এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

সমাকলনের সাধারণ নিয়মাবলী (Genaral laws of Integrals)

(i) যদি A, x উপর নির্ভরশীল নয় এরূপ যে কোনো ধ্রুবক হয়, তবে $\int \mathrm{Af(x)\,dx} = \mathrm{A}\int \mathrm{f(x)\,dx}$.

প্রমাণ: মনে করুন, $\int \mathrm{f(x)\,dx} = F(x)$; যেখানে $c =$ সমাকলন ধ্রুবক

সুতরাং, সমাকলনের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}[F(x)+c] = f(x)$.

$$\therefore \frac{d}{dx}[A\{F(x)+c\}] = A\frac{d}{dx}[F(x)+c]Af(x)$$

$$= \ Af(x)$$

সুতরাং $\int A\,f(x)\,dx = \mathrm{A\{f(x)+c\}}$

$$\therefore \int \mathrm{A\,f(x)\,dx} = \mathrm{A}\int \mathrm{f(x)\,dx}$$

(ii) যে কোনো দুটি ফাংশন f(x) ও $\varphi(x)$ এর জন্য $\int\{f(x)\pm\varphi(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$

প্রমাণ: মনে করুন, $\int f\,(x)\,dx = p(x)$ এবং $\int \varphi(x)\,dx = q(x)$

তাহলে, $\frac{d}{dx}\big(p(x)\big) = f(x)$ এবং $\frac{d}{dx}\big(q(x)\big) = \varphi(x)$ হবে।

এখন, $\frac{d}{dx}[P(x)\pm q(x)] = \frac{d}{dx}p(x) \pm \frac{d}{dx}q(x) = \ f(x)\pm\varphi(x)$.

$\therefore$সমাকলনের সংজ্ঞা হতে পাই, $\int[f(x)\pm\emptyset(x)]\,dx = p(x)+q(x) = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$.

উপরোক্ত সূত্রটিকে n সংখ্যা ফাংশনের জন্যও বিস্তৃত করা যায়। যেমন:

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm\cdots\cdots\cdots \pm f_n(x)]\,dx$$

$$= \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \int f_3(x)\,dx \pm \cdots\cdots\cdots \pm \int f_n(x)\,dx$$

কতগুলো মৌলিক সমাকলন সমূহ (Some Fundamental Integrals)

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = x + c$
$\frac{d}{dx}(mx) = \frac{1}{x};\ x > 0,$	$\int \frac{dx}{x} \ln x + c$
$\frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$	$\int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x.lna,$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

$\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx$	$\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx + c$
$\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m\sin mx$	$\int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m}\cos mx + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 x$	$\int \cos ec^2 x dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(\cos ecx) = -\cos ecx . \cot x$	$\int \cos ecx . \cot x\, dx = -\cos ec\, x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(cosec^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\cos^{-1} ec\, x + c$
$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x + c}$

উদাহরণ 1: $\int 5x^9\, dx$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int 5x^9\, dx$

$= 5\int x^9\, dx = 5\frac{x^{9+1}}{9+1} + c$

$= \frac{5}{10}x^{10} + c = \frac{1}{2}x^{10} + c$

উদাহরণ 2: $\int(4\text{sinx} + 3\cos x)\, dx$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int(4\text{sinx} + 3\cos x)\, dx$

$= 4\int \text{sinx} + 3\int \cos x\, dx = \ 4(-\cos x) + 3sinx + c$

$= -4\cos x + 3sinx + c$

উদাহরণ 3: $\int(1 + x^{-1} + x^{-2})\, dx$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int(1 + x^{-1} + x^{-2})\, dx$

$= \int 1dx + \int x^{-1}\, dx + \int x^{-2}\, dx$

$= x + \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-2}\, dx$

$= x + \text{lnx} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$

$= x + \text{lnx} - \frac{1}{x} + c$

সারসংক্ষেপ:

- যদি A, x উপর নির্ভরশীল নয় এরূপ যে কোনো ধ্রুবক হয়, তবে $\int Af(x)\, dx = A\int f(x)\, dx$
- যে কোনো দুটি ফাংশন f(x) ও $\varphi(x)$ এর জন্য $\int[f(x) \pm \varphi(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int \varphi(x)\, dx$.

পাঠ-৯.৭ প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাকলন
Integration by using Method of Substitution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাকলন কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- প্রতিস্থাপন পদ্ধতি ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাকলন নির্ণয়
Integration by using Method of Substitution

মনে করুন, $\int \mathrm{f(x)\,dx}$ নির্ণয় করতে হবে; যেখানে f(x) যোজ্য রাশিটি মৌলিক আকারের নয়। প্রতিস্থাপন পদ্ধতির লক্ষ্য হলো চলকের পরিবর্তনের মাধ্যমে যোজ্য ফাংশন (Integrand) টিকে পরিচিত মৌলিক আকারে রূপান্তর করা।

মনে করুন, $\int f(x)\,dx = I$

তাহলে সংজ্ঞানুসারে, $\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{f(x)}$

এখন $\mathrm{x} = \varphi(\mathrm{z})$ হলে $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dz}} = \varphi'(\mathrm{z})$

সুতরাং, $\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dz}} = \frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dx}}.\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{f(x)}.\varphi(\mathrm{z})$

বা, $\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{f}(\varphi(\mathrm{z}))\varphi'(\mathrm{z})\ [\because \mathrm{x} = \varphi(\mathrm{z})]$

সংজ্ঞানুসারে, $\mathrm{I} = \int \mathrm{f}\left(\varphi(\mathrm{x})\right)\varphi'(\mathrm{z})\,\mathrm{dz}$

$\therefore \int \mathrm{f(x)\,dx} = \int \mathrm{f}\left(\varphi(\mathrm{z})\right)\varphi'(\mathrm{z}).\mathrm{dz}$

উদাহরণ 1: $\int \cos(2\mathrm{x}+3)\,\mathrm{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \cos(2\mathrm{x}+3)\,\mathrm{dx}$

$\therefore \int \cos \mathrm{z}\frac{1}{2}\mathrm{dz}$

মনে করুন, $2x+3 = z$

$2\,dx = dz,\ \therefore dx = \frac{1}{2}dz$

$= \frac{1}{2}\int \cos \mathrm{z}\,\mathrm{dz}$

$= \frac{1}{2}\sin \mathrm{z} + \mathrm{c}$

$= \frac{1}{2}\sin(2\mathrm{x}+3) + \mathrm{c}$

উদাহরণ 2: $\int sin\, x.\cos x\, dx$ এর সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int sin^3 x.\cos x\, dx$

$= \int z^3.dz$

মনে করুন, sinx=z

$\therefore \cos x\, dx = dz$

$= \frac{z^4}{4} + c.$

$= \frac{1}{4}\sin^4 x + c$

উদাহরণ 3: $\int \sec^2 \mathrm{x}.\tan^2 \mathrm{x}\,\mathrm{dx}$ এর সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \sec^2 \mathrm{x}.\tan^2 \mathrm{x}\,\mathrm{dx}$

$= \int \mathrm{z}^2\,\mathrm{dz}$

মনে করুন, $\tan x = z$

$\sec^2 x\, dx = dz$

$= \frac{\mathrm{z}^3}{3} + \mathrm{c}$

$= \frac{1}{3}\tan^3 \mathrm{x} + \mathrm{c}$

উদাহরণ 4: $\int \tan xdx$ এর সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \tan xdx = \int \frac{sinx}{\cos s}dx$

$= -\int \frac{-sinx}{\cos x}dx$

$= -ln|\cos x| + c$

$= ln|(\cos x)^{-1}| + c$

$\therefore \int \tan x\, dx = ln|\sec x| + c$

উদাহরণ 5: $\int \sec x\, dx$ এর সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রথম পদ্ধতি: $\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x}$

$= \int \frac{dx}{\sin(\pi/2 + x)}$

$= \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x/2\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x/2\right)}$ $[\because \sin 2A = 2\sin A.\cos A]$

$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\tan(\pi/4 + x/2)} dx$ [হর ও লবকে $\sec^2(\pi/4 + x/2)$ দ্বারা গুন করে]

$\therefore \sec x\, dx = ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + x/2\right)\right| + c$

২য় পদ্ধতি: $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$ [হর ও লবকে $(\sec x + \tan x)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x . \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

$\therefore \int \text{cosec}\, x\, dx = ln|\text{cosec}\, x - \cot x| + c$

আদর্শ সমাকলন (Standard Integrals):

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ [x=atan θ ধরে]
2. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a+x}\right| + c$ [আংশিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন করে]
3. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ [আংশিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন করে]
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + c$ [x = atan θ ধরে]
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$ [x=asec θ ধরে]
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} x/a + c$ [x = asin θ ধরে]
7. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ [x=asin θ ধরে]

উদাহরণ 6: $\int x\, e^{x^2}\, dx$ এর সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int x\, e^{x^2}\, dx$

মনে করুন, $x^2 = 2$

$\therefore 2xdx = dz$

$\rightarrow zdx = \frac{1}{2}dz$

$= \int e^z \frac{1}{2} dz$

$= \frac{1}{2}\int e^z dz$

$= \frac{1}{2}e^z + c = \frac{1}{2}e^{x^z} + c$

উদাহরণ 7: $\int \sin^2 x\; e^{\tan x}\, dx$ এর সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \sin^2 x\; e^{\tan x}\, dx$

মনে করুন, $\tan x = z$

$\therefore \sec^2 x\, dx = dz$

$= \int e^z\, dz$

$= e^z + c$

$= e^{\tan x} + c$

উদাহরণ 8: $\int \frac{x^2\, dx}{1-x^6}$ এর সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \frac{x^2\, dx}{1-(x^3)^2}$

মনে করুন, $x^3 = z$

$\therefore 3x^2dx = dz, \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dz$

$= \frac{\frac{1}{3}dz}{1-z^2}$

$= \int \frac{dz}{1-z^2}$

$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2.1}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right| + c$

উদাহরণ 9: $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ এর সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

মনে করুন, $e^x = z$

$\therefore e^x dx = dz$

$= \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

$= \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx$

$= \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x) + c$

উদাহরণ **10:** নিচের ফাংশনগুলোর সমাকলন নির্ণয় করুন।

$(i) \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

সমাধান: (i) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= \int z\, dz$ মনে করুন, $\sin^{-1} x = z$

$= \frac{z^2}{2} + c$ বা, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dz$

$= (\sin^{-1} x)^2 + c$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}$

$= \sin^{-1} \frac{x}{5} + c$

উদাহরণ 11: $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3+2x-4x^2}} dx$ এর সমাকলন নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: $3x - 2 = m \frac{d}{dx}(3 + 2x - 4x^2) + n$

বা, $3x - 2 = m(2 - 8x) + n$

বা $3x - 2 = 2m - 8mx + n$

বা, $3x - 2 = -8mx - 2m + n$

সহগ সমীকৃত করে পাই, $-8m = 3 , 2m + n = -2$

বা, $m = {}^{-3}/_{8}$

বা, $2.{}^{-3}/_{8} + n = -2$

বা, $\frac{-3}{4} + n = -2$

বা, $n = -2 + \frac{3}{4} = \frac{-8+3}{4}$

$\therefore n = \frac{-5}{4}$

$$\therefore \int \frac{3x-2}{\sqrt{3+2x-4x^2}}\, dx = \int \frac{\frac{-3}{8}\frac{d}{dx}(3+2x-4x^2)-\frac{5}{4}}{\sqrt{3+2x-4x^2}} dx$$

$$= -\frac{3}{8}\int \frac{2-8x}{\sqrt{3+2x-4x^2}}\, dx - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-4x^2}}$$

$$= \frac{-3}{8} .2\sqrt{3 + 2x - 4x^2} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{-4(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4})}}$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt{3 + 2x - 4x^2} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{-4(x^2-2x.\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{3}{4})}}$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt{3 + 2x - 4x^2} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}+3}}$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt{3+2x-4x^2} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{13}{4}-4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}}$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt{3+2x-4x^2} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{4.\left\{\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2\right\}}}$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt{3+2x-4x^2} - \frac{5}{8}\sin^{-1}\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\frac{\sqrt{13}}{4}} = -\frac{3}{4}\sqrt{3+2x-4x^2} - \frac{5}{8}\sin^{-1}\frac{(4x-1)}{\sqrt{13}} + c$$

উদাহরণ 12: $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$

$= \int \frac{-(1-x)+1}{\sqrt{1-x}} dx$

$= \int \frac{-(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$= -\int \sqrt{1-x}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

$= -\int (1-x)^{1/2}\, dx + \frac{2\sqrt{1-x}}{-1}$

$= -\frac{(1-x)^{1/2+1}}{1/2+1} \cdot \frac{1}{-1} - 2\sqrt{1-x} + c$

$= \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2\sqrt{1-x} + c$

উদাহরণ 13: $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$

$= \int \frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{\cos x}\,.\, sinx\,.\, \cos x} dx$

$= \int \sin^{-1/2} x \cos^{-3/2} x \; dx$

$= \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} \left(\sin^{-1/2} x \cos^{-3/2} x\right) dx$

$= \int \frac{\sec^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x} sin^{1/2}x \,.\cos^{3/2} x} dx$

$= \int \frac{\sec^2 x}{\frac{1}{\cos^{\frac{1}{2}} x.\cos^{\frac{3}{2}} x.} sin^{\frac{1}{2}}x \,.\cos^{3/2} x} dx$

মনে করুন, $\tan x = z$

$= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{tan^{\frac{1}{2}} x} = \int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ $\qquad \therefore \sec^2 x\, dx = dz$

$= 2\sqrt{z} + c = 2\sqrt{\tan x} + c$

উদাহরণ 14: $\int \frac{1}{1+\tan x} dx$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \frac{1}{1+\tan x} dx$

$= \int \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} dx$

মনে করুন, $\cos x = l(\sin x + \cos x) + m \frac{d}{dx}(\sin x + \cos x)$

$\Rightarrow \cos x = l(\sin x + \cos x) + m(\cos x - \sin x)$

$\therefore 0 . \sin x + 1 . \cos x = (l-m)\sin x + (l+m)\cos x$

$\sin x$ ও $\cos x$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $l - m = 0$ বা, $l = m$

এবং, $l + m = 1$

বা, $2l = 1$, $\therefore l = 1/2 = m$.

তাহলে, $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} dx$

$= \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x} dx$

$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x+\cos x} dx$

$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + c$

সারসংক্ষেপ:

- $\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(z))\, \varphi'(z).\, dz$
- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} x/a + c$

পাঠ-৯.৮ আংশিক ভগ্নাংশের সমাকলন
Integration by Parts

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে বিভিন্ন আকারের ফাংশনের সমাকলন নির্ণয় করতে পারবেন;
- অংশায়ন সূত্র ব্যবহার করে সমাকলন করতে পারবেন;
- বিভিন্ন নিয়ম ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন বা যোগজীকরণ
Integration by using Partial fraction

যদি সমাকলনের আকার $\int \frac{px+q}{(ax+b)(lx+m)}\,dx$ আকারের থাকে তবে সমাকলন করতে $\frac{px+q}{(ax+b)(lx+m)}$ কে দুটি ভগ্নাংশ এর সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ $\frac{px+q}{(ax+b)(lx+m)} \equiv \frac{A}{ax+b} + \frac{\boldsymbol{B}}{(lx+m)}$ ....(i)

বা, $px+q = A(ax+b) + B(lx+m)$.........................(ii)

যেহেতু (ii) একটি অভেদ, সুতরাং x এর সুবিধাজনক মান বসিয়ে কিংবা উভয়পক্ষের xএর সহগ ও ধ্রুবক পদের মান সমান করে) A ও B এর মান নির্ণয় করা যাবে। ফলে (i) নং এর সাহায্য সহজেই প্রদত্ত সমাকলন নির্ণয় করা যাবে। যখন সমাকলনটি –

- একটি বীজগাণিতিক মূলদ ভগ্নাংশের আকারে দেয়া থাকে।
- ভগ্নাংশের হরে চলকের ঘাত লবে চলকের ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর হয় এবং
- হরের রাশিটিকে চলকের কয়েকটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, তখন সমাকলনটিকে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করে সমাকলন নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1: $\int \frac{x-22}{3x^2-2x-8}\,dx$ নির্ণয় করুন।

সমাধান:$\int \frac{x-22}{3x^2-2x-8}\,dx = \int \frac{(x-22)}{(3x+4)(x-2)}\,dx$

মনে করুন, $\int \frac{x-22}{(3x+4)(x-2)} \equiv \frac{A}{(3x+4)} + \frac{B}{(x-2)}$

তাহলে, $x-22 = A(x-2) + B(3x+4)$

এখন, (ii) নং এর উভয় পক্ষে $x=2$ বসিয়ে পাই

$-20 = 10B \qquad \therefore B = -2$

আবার, (ii) নং এর উভয় পক্ষ থেকে x এর সহগের মান সমান করে পাই

$1 = A + 3B$

বা, $1 = A + 3(-2)$

$\therefore\ A = 7$

(i) নং হতে পাই, $\frac{x-22}{(3x+4)(x-2)} = \frac{7}{(3x+4)} - \frac{2}{(x-2)}$

$$\therefore \int \frac{x-22}{(3x+4)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{7}{(3x+4)} - \frac{2}{(x-2)}\right) dx$$

$= 7\int \frac{dx}{3x+4} - 2\int \frac{dx}{x-2}$

$= 7\frac{\ln|3x+4|}{3} - 2\ln|x-2| + c$

$= \frac{7}{3}\ln|3x+4| - 2\ln|x-2| + c$

উদাহরণ 2: $\int \frac{\mathbf{2x-1}}{x(x-1)(x-2)}\, dx$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: $\int \frac{\mathbf{2x-1}}{x(x-1)(x-2)}\, dx$

মনে করুন, $\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1)$

বা, $2x - 1 = A(x-1)(x-2) + 3x(x-2) + cx(x-1) \ldots.\ldots\ldots.(2)$

এখন, (2) নং এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 - 1 = A(0-1)(0-2)$

বা , $A = -\frac{1}{2}$

আবার, (2) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$2.1 - 1 = -B$

$\Rightarrow 1 = -B$

$\therefore \mathrm{B} = -1$

এবং (2) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই $2.2 - 1 = C.2.(2-1)$

বা, $3 = 2c$

$\therefore C = \frac{3}{2}$

(1) সমীকরণে A, B, C এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3/2}{x-2}$

$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}.\frac{1}{x-2}$

$\therefore \int \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2}\, dx = \int \left(-\frac{1}{2}.\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}.\frac{1}{x-2}\right)$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-2}$

$= -\frac{1}{2}|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + c$

উদাহরণ 3: $\int \frac{\mathbf{5x^2+1}}{(x+1)^2(2x-1)}\, dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int \frac{5x^2+1}{(x+1)^2(2x-1)}\, dx$

মনে করুন, $\frac{\mathbf{5x^2+1}}{(x+1)^2(2x-1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{\boldsymbol{B}}{(x+1)^2} + \frac{C}{(2x-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

তাহলে, $5x^2 + 1 = A(x+1)(2x-1) + B(2x-1) + c(x+1)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

এখন (2) নং এর উভয় পক্ষে $x = -1$ ও $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$5(-1)^2 + 1 = B(-2-1)$ বা, $B = -2$

এবং $5 \times \frac{1}{4} + 1 = c\,(\frac{1}{2} + 1)$ বা, $C = 1$

আবার,(2) নং এর উভয় পক্ষে ধ্রুবক পদ সমান করে পাই,

$1 = -A - B + C$ বা,$2 + 1 - 1 = 2$

$$\therefore \int \frac{5x^2+1}{(x+1)^2(2x-1)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x-1}\right)dx$$
$$= 2\int\frac{dx}{x+1} - 2\int\frac{dx}{(x+1)^2} + \int\frac{dx}{2x-1}$$
$$= 2\ln|x+1| + 2\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$
$$= 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$

উদাহরণ 4: $\int \frac{dx}{1+x^3}$এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান:$\int \frac{dx}{1+x^3} = \int \frac{dx}{(1+x)(1-x+x^2)}$

মনে করতে হবে, $\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} \equiv \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+c}{1-x+x^2}$ ……………………. (i)

তাহলে, $1 = A(1-x+x^2) + (3x+c)(1+x)$ ………………….. (ii)

এখন (ii) নং অভেদ এর উভয় পক্ষে যথাক্রমে $x = -1$ ও $n = 0$ বসিয়ে পাই,

$1 = A(1+1+1)\quad \therefore A = \frac{1}{3}$ এবং$1 = A + c$

$\therefore c = 1 - A = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

আবার, (2) নং এর উভয় পক্ষে x^2 এর সহগ সমান করে পাই, $\mathrm{A + B = 0}$

বা, $\mathrm{B} = -\mathrm{A} = -\frac{1}{3}$

এখন (1) নং এ A, B, C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{\frac{1}{3}}{1+x} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{1-x+x^2}$$
$$= \frac{1}{3}\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}$$
$$\therefore \int\frac{dx}{1+x^3} = \int\left(\frac{1}{3}\frac{1}{1+x} - \frac{1}{6}\int\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+x} - \frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}/_2} + c$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ (Integration by Parts): অংশায়ন পদ্ধতিতে যোগজীকরণ ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ নির্ণয়ের উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত। এই পদ্ধতিতে ফাংশনের গুণফলের যোগজ নির্ণয় যায়।

অংশায়ন সূত্র: যদি u এবং v উভয়েই x ফাংশন হয়, তবে $\int uvdx = u\int vdx - \int\left(\frac{du}{dx}\int vdx\right)dx.$

প্রমাণ: যদি u ও w উভয়েই x এর ফাংশন হয়, তবে $\frac{d}{dx}(uw) = u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}$; যেখানে u এবং v উভয়েই x এর ফাংশন এবং অন্তরীকরণ যোগ্য। তাহলে x এর সাপেক্ষে উভয়কে যোগজীকরণ করে পাই,

$$uw = \int\left(u\,\frac{dw}{dx}\right)dx + \int\left(w.\frac{du}{dx}\right)dx$$

বা,$\int\left(u\,\frac{dw}{dx}\right)dx = uw - \int\left(w.\frac{du}{dx}\right)dx$ ………………………………. (i)

মনে করুন, $\frac{dw}{dx} = v$

$\Rightarrow w = \int v dx$. এখন (i) নং w ও $\frac{dw}{dx}$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$uv\, dx = u \int v dx - \int \left\{ \frac{du}{dx} \int v dx \right\} dx$$

এখানে, উল্লেখ্য u ও v ফাংশনদ্বয়ের মধ্যে যে ফাংশনটি সহজে যোগজীকরণযোগ্য ঐ ফাংশনটি ১ম ফাংশন বিবেচনা করতে হবে। আবার যদি uও v উভয় যোগজীকরণযাগ্য হয় অর্থাৎ সহজ সূত্রের সাহায্যে যোগজ নির্ণয় করা যায় তাহলে x^n আকারে ফাংশটিকে ১ম ফাংশন ধরতে হয়।

উদাহরণ 5: $\int x e^{x}\, dx$ নির্ণয় করুন।

সমাধান:$\int x e^{x}\, dx$

$= x \int e^x\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}(x) \int e^x\, dx \right) dx$

$= xe^2 - \int 1. e^x dx$

$= xe^x - e^x + c$

$= (x-1)e^x + c$

উদাহরণ 6: $\int x^2 \sin x\, dx$ নির্ণয় করুন।

সমাধান:$\int x^2 \sin x\, dx$

$= x^2 \int \sin x\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}(x^2) \int \sin x\, dx \right) dx$

$= -x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x) dx$

$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx$

$= -x^2 \cos x + 2 \Big[x \int \cos x\, dx -$

$\int \left(\frac{d}{dx}(x) \int \cos x \right) dx \Big]$

$= -x^2 \cos x + 2 \quad [x \sin x - \int 1. \sin x\, dx]$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$

নিয়ম 1: যদি যোগজটি $\int ln\, x\, dx$, $\int \sin^{-1} x\, dx, \int \tan^{-1} x \ldots \ldots ..$ ইত্যাদি আকারে থাকে তবে যোগজীকরণের জন্য 1 কে দ্বিতীয় ফাংশন বিবেচনা করতে হয়। অতঃপর Integration by parts এর সূত্র ব্যবহার করতে হয়।

উদাহরণ 7: $\int lnx\, dx$; $x > 0$ এর সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান:$\int lnx\, dx$

$= lnx \int 1. dx - \int (\frac{d}{dx}(ln\, x) \int 1. dx)\, dx$

$= ln\, x. x. - \int \left(\frac{1}{x}. x \right) dx$

$= x\, ln\, x - \int 1. dx$

$= x\, lnx - x + c$

নিয়ম 2: যদি কোনো সমাকলন $\int e^{ax} \sin bx\, dx$, $\int e^{ax} \cos bx\, dx$, আকারের থাকে, তবে তাদের সমাকলন করতে I ধরে নিতে হয়। অতঃপর Integration by parts এর সূত্র ব্যবহার করতে হয়।

উদাহরণ 8: $e^{ax} \sin bx$ এর সমাকলন নির্নয়ের জন্য নিম্নোক্ত পদ্ধতি ব্যবহার করুন।

সমাধান: মনে করুন, $I = \int e^{ax} \sin bx\, dx$

$= \sin bx \int e^{ax}\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\sin bx) \int e^{ax} dx \right) dx$

$= \sin bx\, \frac{e^{ax}}{a} - \int b \cos bx . \frac{e^{ax}}{a}\, dx$

$= \sin bx\, \frac{e^{ax}}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$

$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left[\cos bx \int e^{ax} dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\cos bx) \int e^{ax}\, dx \right) dx \right]$

$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left[\cos bx. \frac{e^{ax}}{a} + \int b \sin bx. \frac{e^{ax}}{a}\, dx \right]$

$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx \; dx$

বা, $I = \frac{1}{a^2} (e^{ax} \sin bx - be^{ax} . \cos bx) - \frac{b^2}{a^2} I$

বা, $\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{1}{a^2} e^{ax} \, (a \sin bx - b \cos bx) + c'$

বা, $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right) I = \frac{1}{a^2} e^{ax} \, (a \sin bx - b \cos bx) + c'$

বা, $I = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + c'$

$\therefore \; e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c'$

অনুরূপভাবে, $e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c$

নিয়ম 3: যদি কোনো সমাকলন $\int e^{ax}\{a \, f(x) + f'(x)\}dx$ আকারে থাকে তবে $e^{ax} f(x) + c$ ঐ সমাকলিত ফল হয়। অথাৎ $\int e^{ax}\{a \, f(x) + f'(x)\}dx = e^{ax} f(x) + c$

প্রমাণ: $\int e^{ax}\{a \, f(x) + f'(x)\}dx$

$= \int e^{ax} . a . f(x) \, dx + \int e^{ax} \, f'(x) \, dx.$

$= a[\int e^{ax} \, f(x) \, dx] + \int e^{ax} \, f'(x) \, dx$

$= a \left[[f(x) \int e^{ax} \; dx] - \int \left(\frac{d}{dx} f(x) \int e^{ax} dx \right) dx \right] + \int e^{ax} f'(x) dx$

$= a \left[f(x) . \frac{e^{ax}}{a} - \int f'(x) \frac{e^{ax}}{a} dx \right] + \int e^{ax} f'(x) dx$

$= e^{ax} \, f(x) - \int e^{ax} f'(x) \; dx + \int e^{ax} f'(x) dx$

$= \; e^{ax} \, f(x) + c$

উদাহরণ 9: $\int e^x \sec x (1 + \tan x) dx$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $I = \int e^x (\sec x + \sec x \tan x) \, dx$

মনে করুন, $f(x) = \sec x.$

$\therefore f'(x) = sec \; x \; tan \; x$

$\therefore I = \int e^x (\sec x + \sec x \tan x) \, dx$

$= \int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx$

$= e^x \, f(x) + c$

$= e^x sec \; x + c$

সারসংক্ষেপ:

- যদি u এবং v উভয়েই x ফাংশন হয়, তবে $\int uvdx = u \int vdx - \int \left(\frac{du}{dx} \int vdx \right) dx.$

পাঠ-৯.৯ নির্দিষ্ট সমাকলন
Definite Integral

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- প্রতিস্থাপন পদ্ধতি কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- প্রতিস্থাপন পদ্ধতি ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

নির্দিষ্ট সমাকলন বা যোগজীকরণ
Definite Integral

প্রাচীন জ্যামিতির আবিস্কারগুলোর মধ্যে অন্যতম হলো ত্রিভুজ, চতুর্ভূজ, বৃত্ত, গোলক, চোং, কোণক ইত্যাদি নিয়মিত ক্ষেত্রফল , ঘনফল নির্ণয়ের সূত্র নির্ণয় করা। কিন্তু তারা অনিয়মিত যেমন বিভিন্ন বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করতে পারেন নি। আর এই সমস্ত অনিয়মিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল যে পদ্ধতিতে পরবর্তীতে নির্ণীত হয়েছিল তাই হলো নির্দিষ্ট সমাকলন। এ ক্ষেত্রে অনিয়মিত আকারটিকে ভেঙ্গে ছোট ছোট অনেকগুলো নিয়মিত জ্যামিতিক টুকরায় পরিণত করা হয়। অতঃপর এই সকল জ্যামিতিক টুকরাগুলো প্রত্যেকটির আলাদা মান নির্ণয় করে তাদের যোগফল দ্বারা সর্ম্পূন অনিয়মিত ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

যোগফলের সীমারূপ নির্দিষ্ট সমাকলনের সংজ্ঞা: মনে করুন, $a \le x \le b$ সীমার মধ্যে $f(x)$ একটি সংজ্ঞায়িত একমান বিশিষ্ট ও সীমাবদ্ধ ফাংশন। এখন $a, a+h, a+2h \ldots \ldots \ldots$

$\{a+(n-1)h\}, a+nh$ বিন্দুগুলো দ্বারা $a \le x \le b$ বিস্তারকে h দৈর্ঘ্যের n সংখ্যক উপবিস্তারে বিভক্ত করি। যেমন:

$a + nh = b$

বা, $nh = b - a$ হবে।

তাহলে,

$$\lim_{h\to 0} h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h+ \ldots\ldots\ldots\ldots.. + f\{a+(n-1)h\}] = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$$

সীমাকে a ও b এর মধ্যে x এর সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের নির্দিষ্ট সমাকলন বলা হয় এবং একে $\int_a^b f(x)\,dx$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে b কে সমাকলনের উর্ধ্ব সীমা (Upper limit) এবং a কে সমাকলরেন নিম্নসীমা (Lower limit) বলা হয়। সুতরাং $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$. যেখানে $nh = b - a$

সমাকলনের মৌলিক উপপাদ্য: বিবৃতি : যদি$a \le x \le b$ ব্যবধিতে $f(x)$ যে কোনো সমাকলনযোগ্য ফাংশন হয় এবং প্রদত্ত ব্যবধিতে অপর একটি ফাংশন $\varphi\,(x)$ পাওয়া যায় যেন ব্যবধির সর্বত্র $f(x) = \varphi'(x)$ হয় তবে $\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$ হবে।

একে সমাকলন বিদ্যার মৌলিক উপপাদ্য বলা হয়।

বি: দ্র: নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয়ের সময় অনুরূপ অনির্দিষ্ট সমাকলনের সঙ্গে কোনো অনির্দিষ্ট ধ্রবুক (arbitrary constant) যোগ করার প্রয়োজন হয় না।

কারণ: $\int f(x)dx = \varphi(x) + k$; (যেখানে $k =$ অনির্দিষ্ট ধ্রুবক)

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = [\varphi(x) + k]_a^b$$

$= [\varphi(b) + k] - [\varphi(b) + k] = \varphi(b) - \varphi(a)$

সুতরাং, নির্দিষ্ট সমাকলনে কোনো সমাকলন ধ্রুবক থাকে না।

নির্দিষ্ট সমাকলনের ধর্ম সমূহ: নির্দিষ্ট সমাকলনের গুরুত্বপূর্ণ ধর্মাবলী নিচে দেয়া হলো –

(i) $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(z)dz$

(ii) $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

(iv) $\int_0^a f(x)\ dx = \int_0^{-a} f(a-x)\ dx$

(vi) $\int_0^{2a} f(x)\ dx = \int_0^a [f(x) + f(2a - x)]\ dx$

(iii) যদি $a \le x \le b$ হয়,
তবে $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

(v) যদি $f(a + x) = f(x)$ হয়, তবে $\int_0^{na} f(x)\ dx = \int_0^a f(x)\ dx$

(vii) $\int_{-a}^a f(x)\ dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\ dx$

(viii) $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(a + b - x)\ dx$

উদাহরণ 1: নিচের ফাংশনগুলোরসমাকলন নির্ণয় করুন:

$(i) \int_1^2 \frac{(x^2+1)^2}{x^2} dx \quad (ii) \int_0^{\pi 2} (sin\ 2x.cos\ x)dx \quad (iii) \int_0^2 (4x^2 - 8x)dx \quad (iv) \int_{-1}^{-2} (2 + 3y + 5y^2)\ dy$

সমাধান: (i) $\int_1^2 \frac{(x^2+1)^2}{x^2} dx$

$= \int_1^2 \frac{x^4 - 2x^2.1 + 1}{x^2} dx$

$= \int_1^2 \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

$= \int_1^2 (x^2 - 2 + x^{-2})\ dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^{-2}}{-1}\right]_1^2$

$= \left(\frac{2^3}{3} - 2.2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 2.1 - 1\right)$

$= \left(\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 - 1\right)$

$= \left(\frac{16-24-3}{6}\right) - \left(\frac{1-9}{3}\right)$

$= \frac{-11}{6} - \frac{-8}{3} = \frac{-11+16}{6} = \frac{5}{6}$

(ii) $\int_0^{\pi 2} (sin\ 2x.cos\ x)dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi 2} 2\ \sin 2x.\cos x\ dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi 2} (\sin 3x + \sin x)dx$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 3x}{3} + \cos x\right]_0^{\pi 2}$

$= \left\{\left(\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2} + \cos x\pi 2\right)\right\} - \left(\frac{1}{3}\cos 0 + \cos 0\right)$

$= \frac{1}{2}\left(0 + 0 - \frac{1}{3} - 1\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(-{}^{4}/_{3}\right)$

$= {}^{2}/_{3}$

(iii) $\int_0^2 (4x^2 - 8x)dx$

$= \left[4.\frac{x^3}{3} - 8.\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

$= \left(\frac{4}{3}.2^3 - 4.2^2\right) - \left(\frac{4}{3}.0 - 4.0\right)$

$= \frac{32}{3} - 16$

$= \frac{32-48}{3}$

$= \frac{-16}{3}$

(iv) $\int_{-1}^{-2} (2 + 3y + 5y^2)\ dy$

$= \left[2y + 3.\frac{y^2}{2} + 5.\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{-2}$

$= \left\{2(-2) + \frac{3}{2}.(-2)^2 + \frac{5}{3}.(-2)^3\right\} - \left\{2.(-1) + \frac{3}{2}.(-1)^2 + \frac{5}{3}(-1)^3\right\}$

$= \left(-4 + 6 - \frac{40}{3}\right) - \left(-2 + \frac{3}{2} - \frac{5}{3}\right)$

$= \frac{-34}{3} + \frac{13}{6}$

$= \frac{-55}{6}$

উদাহরণ 2: $\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

মনে করুন, $x = a\tan\theta$

$\therefore\ dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

সীমা:

x	0	a
θ	0	$\pi/4$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{a\sec^2\theta d\theta}{(a^2+a^2\tan^2\theta)^{3/2}}$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^3\sec^3\theta}$

$= \frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/4}\cos\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{a^2}[\sin\theta]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{a^2}[\sin\pi/4 - \sin 0]$

$= \frac{1}{a^2}.\left(\frac{1}{\sqrt2}-0\right) = \frac{1}{\sqrt2\, a^2}$

উদাহরণ 3: $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$ নির্দিষ্ট সমাকলন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$

মনে করুন, $\tan x/2 = t$

$\therefore\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

সীমা:

x	0	π
t	0	∞

$= \int_0^{\infty} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{11-t^2}{21+t^2}}$

$= \int_0^{\infty} \frac{4dt}{2+2t^2+1-t^2}$

$= \int_0^{\infty} \frac{4dt}{t^2+3}$

$= 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+(\sqrt3)^2}$

$= 4.\frac{1}{\sqrt3}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)\right]_0^{\infty}$

$= \frac{4}{\sqrt3}[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}(0)]$

$= \frac{4}{\sqrt3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{2\pi}{\sqrt3}$

উদাহরণ 4: নিচের নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয় করুন :

(i) $\int_0^{\pi 2}\cos x\, dx$ = (ii) $\int_2^3 e^{2x}\, dx$ (iii) $\int_0^{\pi 2}\sqrt{1+\sin x\, dx}$ (iv) $\int_0^{\pi 3}\frac{\cos x\, dx}{3+4\sin x}$

সমাধান: (i) $\int_0^{\pi 2}\cos x\, dx = [\sin x]_0^{\pi/2}$

$= \sin\pi/2 - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

(ii) $\int_2^3 e^{2x}\, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_2^3 = \frac12(e^6-e^4)$

$= \frac12 e^4(e^2-1)$

(iii) $\int_0^{\pi 2}\sqrt{1+\sin x\, dx}$

$= \int_0^{\pi 2}\sqrt{\cos x^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}\ dx}$

$= \int_0^{\pi 2}\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2\ dx}$

$= \int_0^{\pi 2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\ dx$

$= \left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac12} + \frac{-\cos\frac{x}{2}}{\frac12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\left[\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi/2}$

$= 2\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0-\cos 0)\right\}$

$= 2\left\{\left(\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\right)-(0-1)\right\} = 2.$

(iv) $\int_0^{\pi 3}\frac{\cos x\, dx}{3+4\sin x}$

মনে করুন,

$z = 3+4\sin x$

$dz = 4\cos x\, dx$

$\therefore\ \frac{dz}{4} = \cos x\, dx$

সীমা:

X	0	$\pi/3$
z	3	$3+2\sqrt3$

$= \int_3^{3+2\sqrt3}\frac{\frac{dz}{4}}{z}$

$= \frac14\int_3^{3+2\sqrt3}\frac{dz}{z}$

$= \frac14[\ln|z|]_3^{3+2\sqrt3}$

$= \frac14[\ln(3+2+\sqrt3)-\ln 3]$

$= \frac14\ln\left(\frac{3+2+\sqrt3}{3}\right) = \frac14\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt3}\right)$

উদাহরণ 5: নিচের নির্দিষ্ট সমাকলনসমূহ নির্ণয় করতে হবে :

(i) $\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\sin x}dx$ (ii) $\int_0^1\frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\ dx$ (iii) $\int_0^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)^2}x$

সমাধান: (i): $\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\sin x}dx$

$= \int_0^{\pi/4}\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\ dx$

$= \int_0^{\pi/4}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\ dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$$
$$= [\tan x - \sec x]_0^{\pi/4}$$
$$= \left(\tan{}^{\pi}/_4 - \sec{}^{\pi}/_4\right) - (\tan 0 - \sec 0)$$
$$= (1-\sqrt{2}) - (0-1) = 2-\sqrt{2}$$

(ii) $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx$

মনে করুন, $\tan^{-1} x = z$

$\therefore \frac{1}{1+x^2} dx = dz$

সীমা:

X	0	1
z	0	$\pi/4$

$$= \int_0^{\pi/4} z^2\, dz$$
$$= \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{1}{3}\left[\left({}^{\pi}/_4\right)^3 - 0^3\right]$$
$$= \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{64} = \frac{\pi^3}{192}$$

(iii) $\int_0^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$

মনে করুন, $1 + \ln x = z$

$\therefore \frac{1}{x} dx = dz$

সীমা:

X	0	z^2
z	1	3

$$= \int_0^3 \frac{dz}{z^2}$$
$$= \int_1^3 z^{-2}\, dz$$
$$= \left[\frac{z^{-1}}{-1}\right]_1^3$$
$$= -\left[\frac{1}{z}\right]_1^3$$
$$= -\left[\frac{1}{3} - 1\right] = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{-1+3}{3} = {}^2/_3$$

সারসংক্ষেপ:

যদি $a \le x \le b$ ব্যবধিতে $f(x)$ যে কোনো সমাকলনযোগ্য ফাংশন হয় এবং প্রদত্ত ব্যবধিতে অপর একটি ফাংশন $\varphi\,(x)$ পাওয়া যায় যেন ব্যবধির সবর্ত্র $f(x) = \varphi'(x)$ হয় তবে $\int_a^b f(x)\, dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$ হবে।

পাঠ-৯.১০ ব্যবসায়িক সিদ্ধান্ত গ্রহণে সমাকলনের প্রয়োগ
Applications of Integration in Business Decisions

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- মোট আয় দেওয়া থাকলে প্রান্তিক আয় নির্ণয় করতে পারবেন।
- প্রান্তিক ব্যয় দেওয়া থাকলে মোট ব্যয় নির্ণয় করতে পারবেন।

ব্যবসায়িক সিদ্ধান্ত গ্রহণে সমাকলনের প্রয়োগ
Applications of Integration in Business Decisions

সমাকলন বা যোগজীকরণ হলো অন্তরীকরণ বা Differentiation এর একটি বিপরীত প্রক্রিয়া। তাই ব্যবসায় গণিত এর ক্ষেত্রে অন্তরীকরণের সাহায্যে যা কিছু নির্ধারণ করা সম্ভব তাদের সাথে সম্পর্কযুক্ত সকল বিষয়ে মান নির্ধারণের সমাকলন ও প্রয়োগ গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ন বিষয় হল সমাকলন।

উদাহরণ স্বরূপ: কোন ব্যবসা প্রতিষ্ঠানের মোট আয় যদি **R** হয় এবং **R** যদি x এর ফাংশন হয় অর্থাৎ $R = f(x)$ হলে প্রান্তিক আয় $MR = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$.

বিপরীতক্রমে, প্রাপ্তিক আয় $MR = \psi(x)$ জানা থাকলে মোট আয়, $R = \int(MR)dx + c$

বা, $R = \int \psi(x)dx + c$. যেখানে, c একটি ধ্রুবক।

আবার মোট আয় $R = px$ যেখানে একক প্রতি মূল্য P, $\therefore px = \int(MR)\, dx + c$.

একইভাবে, প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় $MC = \frac{dc}{dx}$ হলে মোট উৎপাদন ব্যয়, $C = \int(MC)dx + k$ যেখানে, k ধ্রুবক এখানে থেকে গড়ে উৎপাদন ব্যয় হবে, $AC = \frac{c}{x}$. $\therefore$ $AC = \frac{c}{x} = \frac{\int(MC)dx+k}{x}$

আবার, মোট ভোগ c মোট জাতীয় আয় y এর ফাংশন হলে $c = f(y)$ এবং প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা $MPC = \frac{dc}{dy}$ এবং মোট ভোগ হবে $c = \int(MPC)dy + k$ ইত্যাদি।

উদাহরণ 1: কোনো কারখানার প্রান্তিক ব্যয় ফাংশন $MC = 39 + 22q + 3q^2$ এবং $FC = 25$ টাকা হলে মোট খরচ (TC) ফাংশন নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $MC = 39 + 22q + 3q^2$

$\therefore$ মোট খরচ ফাংশন $(TC) = \int(MC)dq$

$\therefore TC = \int(39 + 22q + 3q^2)\ dq$

$= 39\int dq - 22\int qdq + 3\int q^2dq = 39q - 22\frac{q^2}{2} + 3.\frac{q^3}{3} + c = 39q - 11q^2 + q^3 + c$

এখানে $FC = 25$ টাকা হলে $TC = 39q - 11q^2 + q^3 + c$

উদাহরণ 2: একটি দ্রব্যের প্রান্তিক আয়, $MR = 16 - x^2$ দেয়া আছে। যেখানে, x উৎপাদনের পরিমাণ হলে,

(ক) সর্বোচ্চ মোট আয়ের পরিমাণ নির্ণয় করুন। (খ) মোট ও গড় আয় ফাংশন এবং চাহিদা ফাংশন নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে $MR = 16 - x^2$

মোট আয়ের পরিমাণ সর্বোচ্চ হবে যদি $MR = 0$ হয়।

$\therefore\ 16 - x^2 = 0$

বা, $x^2 = 16$, $\therefore\ x = \pm 4$

(খ) আমরা জানি, $TR = \int MR.dx$

$\therefore TR = \int(16 - x^2)dx$

$= 16x - \frac{x^3}{3} + c$

এখানে উৎপাদনের পরিমাণ ঋনাত্মক হতে পারে না,

$\therefore x = 4$

তাহলে $x = 4$ হলে সর্বোচ্চ মোট আয় পাওয়া যাবে।

$\therefore\ TR = \int_0^4 MR.dx$

$= \int_0^4 (16 + x^2)dx\ = \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$

$= \left[16.4 - \frac{4^3}{3}\right] - \left[16.0 - \frac{0^3}{3}\right]$

$=\ 64 - \frac{64}{3} = \frac{192-64}{3}\ = \frac{128}{3}$

তাহলে সর্বোচ্চ মোট আয় $\frac{128}{3}$.

যখন উৎপাদন $x = 0$ তখন $TR = 0$

$\therefore\ \ C = 0$

তাহলে মোট আয় ফাংশন $= 16x - \frac{x^3}{3}$.

আবার, $AR = \frac{TR}{x}$

$\therefore\ AR = \frac{16x - \frac{x^3}{3}}{x}$

$= 16 - \frac{x^2}{3}$

যেহেতু $AR = P$ এবং $AR = 16 - \frac{x^3}{3}$

অতএব, চাহিদা অপেক্ষক $(P) = 16 - \frac{x^3}{3}$

উদাহরণ 3: একজন ভোক্তার চাহিদা ফাংশন $P = 1600 - q^2$; যদি সে 20 একক দ্রব্য ক্রয় করে তবে ভোক্তার উদ্বৃত্ত কত হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $q = 20$ হলে $P = 1600 - (20)^2$

$= 1600 - 400 = 1200$ টাকা, সুতরাং, মোট ব্যয় হবে $= 1200 \times 20 = 24000$ টাকা।

কিন্তু সে 20 একক দ্রব্যের ক্রয় এর জন্য দিতে প্রস্তুত ছিল,

$\int_0^{20}(1600 - q^2)dq = \left[1600q - \frac{1}{3}q^3\right]_0^{20}\ \ = 29333.33$ টাকা।

সুতরাং ভোক্তার উদ্বৃত্ত হবে $(29333.33 - 24000)$ টাকা $= 5333.33$ টাকা।

উদাহরণ 4: কোনো প্রতিষ্ঠানের সরবরাহ ফাংশন $P = (q + 3)^2$দেয়া আছে। $P = 81$ এবং $q = 6$ হলে উৎপাদনের উদ্বৃত্ত কত নির্ণয় করুন।

সমাধান: উৎপাদক 6 একক দ্রব্য উৎপাদন করে 81 টাকা দরে বিক্রয় করলে মোট আয় পাবে $= 81 \times 6 = 486$ টাকা।

কিন্তু $q = 6$ একক দ্রব্য বিক্রয় করতে প্রস্তুত ছিল: $\int_0^6 (q + 3)^2 dq$ টাকায়

অতএব, উৎপাদকের উদ্বৃত্ত $= 486 - \int_0^6 (q + 3)^2 dq$

$= 486 - \left[\frac{1}{3}(q + 3)^3\right]_0^6 =\ 486 - \left[\frac{1}{3}(6 + 3)^3 - \frac{1}{3}(0 + 3)^3\right] = 486 - (243 - 9) = 486 - 234 = 252$ টাকা।

উদাহরণ 5: প্রান্তিক সঞ্চয় প্রবণতা $MPS = -0.5 - 0.2x^{-2}$; যেখানে $x =$ আয়। ভোগ (অপেক্ষক) ফাংশন নির্ণয় করুন; যখন আয় 10 টাকার জন্য ভোগ 4.8 টাকা।

সমাধান: $MPC = 1 - MPS$

$= 1 - (-0.5 - 0.2x^{-2})\ = 1.5 + 0.2x^{-2}$

ভোগ অপেক্ষক C হলে $\frac{dc}{dx} =\ MPC = 1.5 + 0.2x^{-2}$

$\therefore C = \int (MPC).dx = \int (1.5 + 0.2x^{-2})\,dx = 1.5x + 0.2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + K = 1.5x - 0.2x^{-1} + K$

শর্তানুসারে, $x = 10$ এবং $C = 4.8$ হলে $4.8 = 1.5 \times 10 - 0.2 \times (10)^{-1} + K \therefore\ K\ \ = -10.18$

অতএব, ভোগ অপেক্ষক $C = 1.5x - 0.2x^{-1} - 10.18$

সারসংক্ষেপ:

- মোট ভোগ হবে $c = \int (MPC)dy + k$
- মোট আয় $R = px$ যেখানে একক প্রতি মূল্য P, $\therefore px = \int (MR)\,dx + c$

ইউনিট মূল্যায়ন

নিচের ফাংশনগুলোর অন্তরীকরণ নির্ণয় করুন:

1. (i) $\cos x^0$ (ii) $x\sqrt{\sin x}$ (iii) $\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$ (iv) $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ (v) $\sin^2\{\ln(x^4)\}$ (vi) $e^{5x}\sin x^0$

2. (i) $\sin^{-1}\sqrt{xe^x}$ (ii) $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ (iii) $\tan^{-1}\dfrac{4x}{1-4x^2}$ (iv) $\sec^{-1}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ (v) $\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$

(vi) $\sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

3. (i) $\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ (ii) $x^{1/x}$ (iii) $x^{\cos^{-1}x}$ (iv) $(x^x)^x$ (v) $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ (vi) $e^{5\ln(\tan 5x)}$

(vii) $x^{\sin^{-1}x}$ (viii) $e^{x^2}+x^{x^2}$ (ix) $x^y=y^x$ (x) $(\sin x)^y=(\cos y)^x$

4. নিচের ফাংশনগুলোর দ্বিতীয় অন্তরীকরণ নির্ণয় করুন: (ক) $y=(2+x)\sin^{-1}x$ (খ) $y=x^m e^{nx}$ (গ) $y=x^2\tan^{-1}x$

5. যদি $y=\dfrac{\log x}{x}$ হয়, তবে দেখান যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$

6. যদি $y=ac^{mx}+be^{-mx}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $\dfrac{d^2y}{dx^2}=m^2y$

7. যদি $y=\sin(\sin x)$ তবে দেখান যে, $y_2+y_1\tan x+y\cos^2 x=0$

8. A ও B যে কোন ধ্রুবক হলে $y=Ae^{2x}+Be^{2x}$ থেকে প্রমাণ করুন $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=0$

9.(i) $y=\sin^{-1}x$ তবে প্রমাণ করুন যে, $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}=0$ (ii) $y=e^{\tan-1x}$ তবে প্রমাণ করুন যে, $(1-x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$

10. যদি $y=\cos(m\sin^{-1}x)$ হয় তবে দেখান যে, $(1-x^2)y_2+m^2y=xy_1$

11. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোকে ম্যাকলরিনের উপপাদ্য অনুসারে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর: (ক) e^x (খ) e^{-mx} (গ) $e^{\cos x}$ (ঘ) $\sin x$ (ঙ) $\tan x$ (চ) $\sin^{-1}x$ (ছ) $\ln(1+x)$

প্রশ্নমালা

12. গণিতের ফাংশন সমূহের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নমান নির্ণয় করুন: (i) $2x^3-15x^2+36x+12$ (ii) $\dfrac{x^3}{3}+x^2a-3a^2x$

13. প্রমাণ করুন যে, $3y=x^3-3x^2-9x+11$ বক্ররেখার $x=-1$ বিন্দুতে সর্বোচ্চ ও $x=3$ বিন্দুতে সর্বনিম্নমান থাকবে।

14. একটি প্রতিষ্ঠানের উৎপাদন ব্যয় $C=5+\dfrac{48}{x}+3x^2$ যেখানে x হলো প্রতিষ্ঠানের মোট উৎপাদিত পণ্যের পরিমাণ। প্রতিষ্ঠানের উৎপাদন খরচ C সর্বনিম্ন হবে নির্ণয় করুন।

15. একটি উৎপাদন প্রতিষ্ঠান তার উৎপাদিত পণ্য সমূহ প্রতি ইউনিট 2 টাকা দরে বিক্রি করে। প্রতিষ্ঠানটির q ইউনিট দ্রব্য উৎপাদনে যে খরচ হয় তাহলো $\left[100+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q}{50}\right)^2\right]$ টাকা।

(ক) যদি একক পণ্য উৎপাদিত হয় এবংতাবিক্রি হয় তবেমুনাফানির্ণয়করুন। (খ) প্রতিষ্ঠানটি কত একক দ্রব্য উৎপাদনকরলে এর মুনাফাসর্বোচ্চহবে? (গ) সর্বোচ্চমুনাফা কত? (ঘ) যদি 6000 একক পণ্য উৎপাদিত হয় তবেমুনাফা কত হবে?

16. একটি প্রতিষ্ঠানের উৎপাদিত পন্যের খরচও ব্যয় যোগানের অপেক্ষক যথাক্রমে $C=100+5q+7q^2$ এবং

(i) মান নির্ণয় করুন যেন প্রতিষ্ঠানের মুনাফা সর্বোচ্চ হয়।

(ii) এই অবস্থায় সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমান নির্ণয় করুন। যেখানে হলো প্রতিষ্ঠানে উৎপাদিত পণ্যের পরিমাণ।

17. নিচের অনির্দিষ্ট যোগজগুলো নির্ণয় করতে হবে: (i) $\int dt$ (ii) $\int(3\cos x - 5\sec^2 x)\,dx$ (iii) $\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + dx$ (iv) $\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$ (v) $\int(x^3-5e^x+8)\,dx$ (vi) $\int\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$ (vii) $\int x\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

18. (i) $\int\frac{\mathrm{dx}}{1-\cos 2x}$ (ii) $\int\frac{sinx+\cos x}{\sqrt{1+sin2x}}dx$ (iii) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$ (vi) $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

(v) $\int\tan^2 x\,dx$ (vi) $\int(\sec x\tan x - 3\,\mathrm{cosec}^2 x)\,dx$ (vii) $\int(\tan x+\cot x)^2\,dx$ (viii) $\int\frac{\cos\theta-\cos\theta}{1-\cos\theta}dx$

নিম্নলিখিত অনির্দিষ্ট যোগজীকরণগুলো নির্ণয় করতে হবে:

19. (i) $\int\frac{\cos 2x dx}{\sqrt{1-sm\,2x}}$ (ii) $\int 4\,sm^3x\ dx$ (iii) $sm^4x\,dx$ (iv) $\int\cos^4 x\ dx$ (v) $\int\sin^2 x\ .\cos^2 x\,dx$

(vi) $\int sm^2x\ .\cos 2x\,dx$ (vii) $\int 5\cos 4x\sin 3x\,dx$ (viii) $\int\frac{1}{1+smx}\,dx$ (ix) $\int\frac{dx}{1+\cos x}$ (x) $\int\frac{x+25}{x+25}\,dx$

20. (i) $\int\cos x\ .\cos(\sin x)\ dx$ (ii) $\int\tan^4 x\ .\sec^2 x\ dx$ (iii) $\int\left(2^x+\frac{1}{x}\right)(e^x+\ln x)dx$

(iv) $\int\frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (v) $\int\frac{x^2\tan^{-1}x^3}{1+x^6}\,dx$ (vi) $\int\frac{e^{a\ \tan^{-1}x}}{1+x^2}\,dx$ (vii) $\int\frac{1}{x\sqrt{1+lnx}}\,dx$

(viii) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$ (ix) $\int\frac{dx}{9x^2-16}$ (x) $\int\frac{dx}{x^2-x+1}$ (xi) $\int\frac{\tan x}{\ln(\cos x)}\,dx$ (xii) $\int\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}\,dx$

21. $\int\frac{dx}{1-3\cos^2 x}$ নির্ণয় করতেহবে।

22. $\int\frac{\sqrt{\tan x}}{smx\ \cos x}\,dx$ নির্ণয় করতেহবে।

23. $\int\frac{smx}{3+4\cos x}\,dx$ নির্ণয়করতেহবে।

24. $\int sm^3\cos^2 x\ dx$ নির্ণয়করতেহবে।

25. $\int\frac{sec^2\,x\,dx}{\sqrt{16-\tan^2 x}}$ নির্ণয় করতেহবে।

26. (i) $\int\frac{dx}{x^2+x}$ (ii) $\int\frac{x-3}{(1-2x)(1+x)}dx$ (iii) $\int\frac{x+35}{x^2-25}dx$

27. (i) $\frac{(x+1)dx}{x^2-5x+6}$ (ii) $\int\frac{(2x+3)}{x^3+x^2-2x}dx$ (iii) $\int\frac{(x+1)}{3x^2-x-2}$

28. (i) $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$ (ii) $\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)}$ (iii) $\int\frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$ (iv) $\int\frac{x^2dx}{x^2-4}$ (v) $\int\frac{x^2-1}{x^2-4}dx$

নিচের অনিদির্ষ্ট যোগজীকরণগুলো নির্ণয় করতে হবে :

29. (i) $\int x^2e^x dx$ (ii) $\int x\cos^2 x\,dx$ (iii) $\int x\sec^2 x\,dx$ (iv) $\int x\tan^2 x\,dx$

(v) $\int x\sin^2 {}^{x}/_{2}\,dx$ (vi) $\int x\cos 2x\cos 3x\,dx$ (vii) $\int x\sin x.\sin 2x\,dx$.

30. (i) $e^x\cos x\,dx$ (ii) $e^{2x}\sin x\,dx$ (iii) $e^{2x}\cos e^x\,dx$ (iv) $\int e^2\sin 2x\,dx$

31. (i) $\sin^{-1}x\,dx$ (ii) $\cos^{-1}x\,dx$ (iii) $\int x\ \tan^{-1}x\,dx$ (iv) $\int x\ \cos^{-1}x\ dx$ (v) $\int x\ \sin^{-1}x^2\,dx$

32. (i) $\int e^n(sinx+cosx)dx$ (ii) $\int e^2(tanx-lncosx)dx$ (iii) $\int\frac{e^2}{x}(xlnx+1)dx$ (iv) $\int e^{5x}\left\{5\,lnx+\frac{1}{x}\right\}dx$

৩৩. নিচের নির্দিষ্ট যোগজীকরণগুলো নির্ণয় করতে হবে:

(i) $\int_0^3(3-2x+x^2)dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta$ (iii) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sec x+1}{\sec x}\,dx$

(iv) $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos x}\,dx$ (v) $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$ (vi) $\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx$

(vii) $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\sin 3x\ \ dx$ (viii) $\int_0^{\pi/2}\sin x\ \sin 2x\ dx$

34. মান নির্ণয় করতে হবে: (i) $\int_1^2 x^2e^{x^3}\ dx$ (ii) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^2}\,dx$ (iii) $\int_0^{\pi/2}\tan^2 x\sec^2 x\,dx$

(iv) $\int_1^{\sqrt{3}} x\tan^{-1}x\,dx$ (v) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ (vi) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ (vii) $\int_0^4 y\sqrt{4-y\,dy}.$

35. একটি দ্রব্যের প্রান্তিক আয় ফাংশন $MR = 3 - 2x - x^2$ হলে মোট আয় ফাংশন TR, দাম ফাংশন (P) এবং উক্ত দ্রব্যের চাহিদা ফাংশন নির্ণয় করুন।

36. একটি প্রতিষ্ঠানের প্রান্তিক আয় $MR = 10x - x^2$ এবং প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় $MC = 10 - 2x + x^2$ যেখানে x হল উৎপাদনের **পরিমাণ**। প্রতিষ্ঠানের উৎপাদনের **পরিমাণ** কত হলে মুনাফার **পরিমাণ** সবোর্চ্চ হবে? সবোর্চ্চ মুনাফা কত?

37. চাহিদা ও যোগান ফাংশন যথাক্রমে $P_d = 113 - q^2$ এবং $P_s = (q+1)^2$ দেয়া আছে। পূর্ন প্রতিযোগিতা মূলক বাজার ব্যবস্থায় ভোক্তার উদ্বৃত্ত নির্ণয় করুন।

38.একটি প্রতিষ্ঠানের প্রান্তিক আয় ফাংশন $MR = 20x - 2x^2$ । প্রান্তিক খরচ $MC = 81 - 16x + x^2$ মুনাফা সবোর্চ্চকারী উৎপাদন এবং কাম্য উৎপাদনের মোট মুনাফা বের করুন।

উত্তরমালা

1. (i) $-\frac{\pi}{180}\sin\frac{\pi x}{180}$ (ii) $\sqrt{\sin x}+\frac{x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (iii) $\tan\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}$ (iv) $\frac{1}{4\sqrt{x}}\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ (v) $\frac{2\sin\{\ln(x^4\}}{x}$

(vi) $5e^{5x}\sin\frac{\pi x}{180}+\frac{\pi e^{5x}\cos\frac{\pi x}{180}}{180}$

2. (i) $\frac{e^x(1+x)}{2\sqrt{xe^x}\sqrt{1-xe^x}}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{4x}{1+4x^2}$ (iv) $-\frac{2}{1+x^2}$ (v) $-\frac{1}{1+x^2}$ (vi) $-\frac{x}{1-x^2}$

3. (i) $\cos ecx$ (ii) $x^{\frac{1}{x}-2}$ (iii) $x^{\cos^{-1}x}\left\{-\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\cos^{-1}x}{x}\right\}$ (iv) $\left(x^{x^x}\right)x^x\left[\ln x+\ln x+1+\frac{1}{x}\right]$

(v) $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2}\ln x\right)$ (vi) $e^{5\ln(\tan 5x)}$ (vii) $x^{\sin^{-1}x}$ (viii) $2xe^{x^2}+x^{x^2}(2x\ln x+x)$

(ix) $\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}=y^x$ (x) $\frac{\ln(\cos y)y-\cot x}{\ln(\sin x)+c\tan y}$

4. ক) $y_2=\frac{2+2x-x^2}{(1-x^2)^{3}/_{2}}$ খ) $y_2= m(m-1)x^{m-2}e^{nx}+2mnx^{m-1}e^{nx}+n^2x^me^{nx}$ গ) $y_2=\frac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)2}+2\tan^{-1}x.$

11. (ক) $e^x = 1+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\ldots$ (খ) $e^{-mx} = 1-mx+\frac{x^2x^2}{2!}+\frac{m^3x^3}{3!}+\ldots$ (গ) $e^{\cos x}= e\,(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\ldots).$

(ঘ) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots..$ (ঙ) $\tan x =x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots\ldots$ (চ) $\sin^{-1}x = x+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{2x^5}{5}+\ldots..$

(ছ) $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots.$

17. (i) $t+c$; (ii) $3\sin x+5\tan x+c$; (iii) $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3x^3}+2x+c$; (iv) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+c$

(v) $\frac{1}{4}x^4-5c^x+8x+c$; (vi) $x-\frac{1}{x}+c$; (vii) $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+c$

18. (i) $-\frac{1}{2}\cot x+c$; (ii) $x+c$; (iii) $\frac{1}{2}\tan x+c$ (iv) $-\sqrt{2}\cos x+c$ (v) $\tan x-x+c$

(vi) $\sec x+3\cot x+c$ (vii) $\tan x-\cot x+c$ (viii) $\theta+2\sin\theta+c$

19. (i) $-\sqrt{1-\sin 2x+c}$ (ii) $\frac{1}{3}\cos 3x-3\cos x+c$ (iii) $\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{1}{8}\text{sim}\,4x\right)+c$

(iv) $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)$ c (v) $\frac{1}{32}(4x-\sin 4x)+c$

(vi) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + c$ (vii) $-\frac{5}{14}\cos 7x + \frac{5}{2}\cos x + c$

(viii) $\tan x - \sec x + c$ (ix) $\tan\frac{x}{2} + c$ (x) $x + 60\ln|x - 25| + c$

20. (i) $\sin(\sin x) + c$ (ii) $\frac{1}{5}\tan^5 x + c$ (iii) $\frac{1}{2}(e^x + \ln x)^2 + c$ (iv) $\ln|\sec(\sin^{-1} x)| + c$

(v) $\frac{1}{6}(\tan^{-1} x^3)^2 + c$ (vi) $\frac{1}{a}e^{a\tan^{-1} x} + c$ (vii) $2\sqrt{1 + \ln(x) + c}$ (viii) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}} + c$

(ix) $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x - 4}{3x + 4}\right| + c$ (x) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + c$ (xi) $-\ln(\ln|\cos x|) + c$ (xii) $\frac{1}{1 + \tan x} + c$

21. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right) + c$ 22. $2\sqrt{\tan x + c}$ 23. $-\frac{1}{4}\ln|3 + 4\cos x| + c$ 24. $\frac{1}{4}sin^4 x - \frac{1}{6}sin^6 x + c$

25. $\sin^{-1}\left(\frac{\tan x}{4}\right) + c$

26. (i). $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c$ (ii). $\frac{5}{6}\ln|1 - 2x| - \frac{4}{3}\ln|1 + x| + c$ (iii). $4\ln|x - 5| - 3\ln|x + 5| + c$

27. (i). $4\ln|x - 3| - 3\ln|x - 2| + c$ (ii). $-\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x - 1| + c$ (iii). $\frac{2}{5}\ln|x - 1| - \frac{1}{15}\ln|3x + 2| + c$

28. (i). $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + c$ (ii). $\frac{1}{5}\ln|x - 1| - \frac{1}{16}\ln|x^2 + 4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

(iii). $\frac{3}{10}\ln|x^2 + 4| - \frac{3}{5}\ln|1 - x| - \frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$ (iv). $x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ (v). $x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$

29. (i) $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$ (ii) $\frac{1}{4}(x^2 + x\sin 2x) + \frac{1}{8}\cos 2x + c$ (iii) $x\tan x - \ln|\sec x| + c$

(iv) $x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + c$.(v) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{2}\cos x + c$

(vi) $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}\cos 5x + \cos x\right) + c$ (vii) $\frac{1}{2}\left(x\sin x + \cos x - \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{9}\cos 3x\right) + c$

30. (i) $\frac{e^2}{2}(\cos x + \sin x) + c$ (ii) $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + c$

(iii) $e^2\sin c^x + \cos e^x + c$ (iv) $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$.

31. (i) $x\sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2 + c}$ (ii) $x\cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2 + c}$

(iii) $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + c$ (iv) $\frac{x^2}{2}\cos^{-1} x + \frac{1}{4}\sin^{-1} x - \frac{1}{4}x\sqrt{1 + x^2 + c}$

(v) $\frac{1}{2}x^2\sin^{-1} x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^4 + c}$

32. (i) $e^x\sin x + c$ (ii) $x^2\ln|\sec x| + c$ (iii) $e^2\ln|x| + c$ (iv) $e^{5x}\ln|x| + c$

33. (i) 9 (ii) 2 (iii) $\pi + 2$ (iv) 1 (v) $\frac{\pi}{4}$ (vi) $\frac{2}{3}$ (vii) $-\frac{2}{15}$ (viii) $^2/_3$

34. (i) $\frac{1}{3}(e^8 - e)$ (ii) $ln\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{1}{12}(5\pi - 6\sqrt{3} + 6)$ (v) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}ln\,2$ (vi) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (vii) $\frac{128}{15}$.

35. মোট আয় ফাংশন= $3x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$ চাহিদা ফাংশন $(P) = 3 - x - \frac{1}{3}x^2$

36. উৎপাদনের পরিমাণ $x = 5$ এবং সর্বোচ্চ মুনাফা $= 16.66$

37. 228.67 টাকা এবং 277.67 টাকা

38. সর্বোর্চ্চ উৎপাদনের পরিমান $x = 9$