ম্যাট্রিক্স এবং নির্ণায়ক

Metrices and Determinants

৮

ভূমিকা

Introduction

বীজগাণিতিক রাশি, চলক বা প্যারামিটার সমূহকে শ্রেণিবদ্ধভাবে সারি ও কলামের ভিত্তিতে উভয়পার্শ্বে উলম্ব রেখা বা বন্ধনীর মাধ্যমে প্রকাশ করার বীজগাণিতিক পদ্ধতি ইহলো ম্যাট্রিক্স। আধুনিক গণিতে ম্যাট্রিক্স একটি শক্তিশালী কৌশল যার সাহায্যে ব্যবসায় বাণিজ্যের উৎপাদন, ক্রয়-বিক্রয় সংক্রান্ত জটিল সমস্যা অতি সহজেই সমাধান করা সম্ভব। ব্যবসায় বাণিজ্যের বিভিন্ন তথ্যাদিকে ম্যাট্রিক্স আকারে সাজিয়ে এর সাহায্যে উৎপাদন মোট আয়, মোট ব্যয়, লাভ, ক্ষতি, একক প্রতিমূল্য বিভিন্ন চলকের মান ইত্যাদি নিরূপন করা সম্ভব হয়। অর্থনীতি এবং ব্যবসায় ক্ষেত্রে ব্যবহৃত এক মাত্রিক সমীকরণগুলো সমাধানের ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সের ব্যবহার ও গুরুত্ব লক্ষ্য করা যায়। প্রথম James Joseph Sylvester (1814-1897) ম্যাট্রিক্সের ধারণা দেন। কিন্তু, Arthur Cayley (1821-1895) কে ম্যাট্রিক্সের জনক বলা হয় এবং তিনিই প্রথমে বিশ্লেষণমূলকভাবে ম্যাট্রিক্স প্রকাশ করেন। এ ইউনিটে ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা, বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্স, বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়, ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ, ম্যাট্রিক্সের গুণ, নির্ণায়ক এবং ম্যাট্রিক্সের র‌্যাঙ্ক ইত্যাদি বিষয়গুলো নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৪ দিন

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৮.১: ম্যাট্রিক্স এবং এর প্রকারভেদ
পাঠ-৮.২: ম্যাট্রিক্সের বিভিন্ন কার্যক্রম
পাঠ-৮.৩: নির্ণায়ক
পাঠ-৮.৪: ম্যাট্রিক্সের র‌্যাঙ্ক এবং একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান

মূখ্য শব্দ	ম্যট্রিক্স, বর্গ ম্যাট্রিক্স, কর্ণ ম্যাট্রিক্স, স্কেলার ম্যাট্রিক্স, অভেদ ম্যাট্রিক্স, অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স, প্রতিসম ম্যাট্রিক্স, সমঘাতি ম্যাট্রিক্স, সহগুণক ম্যাট্রিক্স, উলম্ব ম্যাট্রিক্স, বিপরীত ম্যাট্রিক্স, অর্থগোনাল ম্যাট্রিক্স, সংযুক্ত ম্যাট্রিক্স, নির্ণায়ক, নির্ণায়কের বৈশিষ্ঠ্য, ম্যাট্রিক্স এর র‌্যাঙ্ক ক্রেমারের নিয়ম ইত্যাদি।

পাঠ-৮.১ ম্যাট্রিক্স এবং এর প্রকারভেদ
Matrix and its types

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাট্রিক্সএর সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্স এর বর্ণনা করতে পারবেন।

ম্যাট্রিক্স
Matrix

ম্যাট্রিক্স হচ্ছে সংখ্যা বা প্রতীক বা বীজগণিতীয় রাশিকে দুইটি বন্ধনীর মাধ্যমে সারি (Row) বা কলামের (Column) আয়তাকার সাজানো ব্যবস্থা। ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করতে সাধারণত তৃতীয় [ ] বা প্রথম বন্ধনী () অথবা‖ ‖প্রতীক ব্যবহারকরা হয়। যে সংখ্যা বা রাশি নিয়ে ম্যাট্রিক্স গঠিত হয় তাদেরকে ম্যাট্রিক্সের ভূক্তি (entry) বা উপাদান (element) বলা হয়। উপাদানগুলোকে a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এছাড়া ম্যাট্রিক্সকে ইংরেজী বড় অক্ষর বা Capital Letter এর দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ দুইটি ম্যাট্রিক্স।

সাধারণভাবে ম্যাট্রিক্স $[a_{ij}]$ দ্বারা সূচিত হয়। যেখানে $i = 1, 2, ...m$ সারি সংখ্যা এবং $j = 1, 2, ...n$ কলাম সংখ্যা।

অর্থাৎ, $A = [\ a_{ij}\ ]_{m\times n} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots a_{3n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

এখানে ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা m এবং কলাম সংখ্যা n হলে ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা $m\times n$ হবে এবং পড়তে হবে m বাই n। অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা বা ক্রম (Order)= সারি×কলাম।

যেমন, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

এখানে প্রদত্ত A ম্যাট্রিক্স এর সারি সংখ্যা 2 এবং কলাম সংখ্যা 2 সুতরাং A ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা (Order) 2×2। একইভাবে B ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা (Order) 2×3।

বিভিন্ন প্রকারের ম্যাট্রিক্স (Different types of Matrices)

(i) বর্গাকার বা বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix): যে ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা সমান থাকে তখন তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন :2×2 ম্যাট্রিক্স; 3×3 ম্যাট্রিক্স; $m\times n$ ম্যাট্রিক্স.

যেমন, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & l & k \end{bmatrix}$ যথাক্রমে 2×2 এবং 3×3 বর্গাকার ম্যাট্রিক্স।

(ii) **কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix):** যখন কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্স এর প্রধান কৌণিক উপাদানসমূহ ব্যতীত অন্যান্য সকল উপাদানই শূণ্য (0) থাকে তখন ঐ ম্যাট্রিক্সকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন, $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\ C=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ ইত্যাদি কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

(iii) **স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix):** যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের সবগুলো উপাদানের মান সমান ও অশূণ্য হয় তখন তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন,

$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$ ইত্যাদি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(iv) **একক ম্যাট্রিক্স বাঅভেদ ম্যাট্রিক্স (Unit Matrix or Indendity Matrix):** যে ম্যাট্রিক্স এর কর্ণের সবগুলো উপাদানই এক (1) এবং অন্যান্য উপাদানগুলো শূণ্য (0) সেই ম্যাট্রিক্সকে একক ম্যাট্রিক্স বা Indendity Matrix বলা হয়। অভেদ ম্যাট্রিক্সকে I দ্বারা প্রকাশ করা হয়।সকল অভেদ ম্যাট্রিক্সই স্কেলার বা কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

যেমন, $I_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ I_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ইত্যাদি অভেদ ম্যাট্রিক্স।

(v) **উর্ধ্ব ত্রিভুজ আকৃতির ম্যাট্রিক্স (Upper Triangular Matrix):** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের নীচের সকল উপাদান শূণ্য (0) হয় তাকে উর্ধ্ব ত্রিভুজ আকৃতির ম্যাট্রিক্স বলা হয়। এক্ষেত্রে $a_{ij}= 0$ যখন $i>j$

যেমন, $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

(vi) **নিম্নত্রিভুজআকৃতির ম্যাট্রিক্স (Lower Triangular Matrix):**যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপরের উপাদানগুলো শূণ্য (0) এর হয় তাকে নিম্নত্রিভুজ আকৃতির ম্যাট্রিক্স বলা হয়। এক্ষেত্রে $a_{ij}= 0$ যখন $i<j$.

যেমন, $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}x & 0 & 0\\ y & z & 0\\ a & b & c\end{bmatrix}$

(vii) **শূণ্য ম্যাট্রিক্স (Zero Matrix):**যে ম্যাট্রিক্স এর সারি ও কলামের প্রতিটি উপাদান শূণ্য (0) হয় তখন তাকে শূণ্য ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন, $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(vii) **রূপান্তরিত বা ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স (Transpose of Matrix):** কোন ম্যাট্রিক্স এর সারিগুলোকে কলামে এবং কলামগুলোকে সারিতে রূপান্তরিত করা হলে যে ম্যাট্রিক্সটি পাওয়া যাবে, সেই ম্যাট্রিক্সকে মূল ম্যাট্রিক্স এর রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স বা Transpose of Matrix বলা হয়। Transpose কে [′] Prime চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & a\\ 2 & b\\ 3 & c\\ 4 & d\end{bmatrix}$ B ম্যাট্রিক্সটি হলো A ম্যাট্রিক্সটির রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স।

আবার, $B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ হলে $B'=\begin{bmatrix}3 & 6 & 2\\ 4 & 7 & 0\\ 5 & 8 & 1\end{bmatrix}$ B' ম্যাট্রিক্সটি হলো B ম্যাট্রিক্সটির রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স।

(ix) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric Matrix): যে ম্যাট্রিক্সের সারিকে কলামে এবং কলামকে সারিতে রূপান্তর করলে আদি ম্যাট্রিক্সটির কোন পরিবর্তন হয় না তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অর্থাৎ, একটিবর্গ ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স একই হলে ($A'=A$) তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়। প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $a_{ij}=a_{ji}$

যেমন, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 0\\ 5 & 0 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & e & j\\ e & b & g\\ f & g & c\end{bmatrix}$

(x) বিপ্রতিসম বা অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew-symmetric Matrix): যে বর্গ ম্যাট্রিক্স এর অনুভূমিক সারির উপাদান (Row) এবং উলম্ব সারির (Column) উপাদানসমূহ একই মানের বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় এবং প্রধান কৌণিক উপাদানসমূহের মান শূণ্য হয় তবে ঐ ম্যাট্রিক্স কে বিপ্রতিসম বা অপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন, $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & -5\\ 2 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & e & -f\\ -e & 0 & -g\\ f & g & 0\end{bmatrix}$

Skew symmetry matrix-এর এক্ষত্রে $a_{ij}=-a_{ji}$ যখন $i\neq j$ এবং $a_{ij}=0$ যখন $i=j$

(xi) কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrix): যে ম্যাট্রিক্স এর কেবলমাত্র একটি কলাম থাকে, তাকে Column Matrix বলা হয়। যেমন, $A=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$

(xii) সারি বা অনুভূমিক ম্যাট্রিক্স (Row Matrix): যে ম্যাট্রিক্স এর সারির সংখ্যা একটি তাকে সারি ম্যাট্রিক্স বা Row Matrix বলা হয়। যেমন–$A=[1\ \ 2\ \ 3]$, $B=[abc]$. Row Matrix কে Row vector ও বলা হয়।

(xiii) একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্স / ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Singular Matrix): যদি কোন ম্যাট্রিক্স এর নির্ণায়কের মান শূণ্য হয় তবে তাকে ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বা Singular Matrix বলা হয়। যেমন, $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ এখানে, $|A|=0$

(xiv) অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Non-singular Matrix): যদি নির্ণায়কের মান শূণ্য না হয় অর্থাৎ, $|A|\neq 0$ তখন তাকে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বা Non-singular Matrix বলা হয়। যেমন, $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ এখানে, $|A|=-7$

(xiv) উপ ম্যাট্রিক্স (Sub Matrix): একটি ম্যাট্রিক্সের যে কোন উপাদান নিয়ে গঠিত অপর ম্যাট্রিক্সকে আদি ম্যাট্রিক্সের উপম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$, Sub Matrix of $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(xv) সমঘাতি ম্যাট্রিক্স (Idempotent Matrix): একই ম্যাট্রিক্সকে বার বার গুণ করার ফলে গুণফল যদি আদি ম্যাট্রিক্স হয় তখন ঐ Matrix কে Idempotent Matrix বলা হয়। অর্থাৎ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য $A.A = A$ হলে তাকে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বা Idempotent Matrix বলা হয়।

যেমন, $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স $A.A=A$ এবং $B=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স $B.B=B$

(xvi) অর্থগোনাল ম্যাট্রিক্স (Orthogonal Matrix): যদি কোন ম্যাট্রিক্সকে তার রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স (A') দ্বারা গুণন করলে গুণফল যদি একক ম্যাট্রিক্স হয় অথবা যদি কোন রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স তার বিপরীত ম্যাট্রিক্স এর সমান হয় তবে তাকে Orthogonal Matrix বলা হয়। অর্থাৎ, $AA' = I$ অথবা $A' = A^{-1}$

(xvii) উলম্ব ম্যাট্রিক্স (Vertical Matrix): যে Matrix এর কলাম সংখ্যা অপেক্ষা সারি সংখ্যা অধিক থাকে, তাকে উলম্ব ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন, $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

(xviii) বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse Matrix): একটিবর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে যদি তা অব্যতিক্রমী হয় অর্থাৎ নির্ণায়ক শূণ্য না হয়। অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স A এর জন্য যদি এমন ম্যাট্রিক্স B পাওয়া যায় যেন $AB=BA=I$ হয় তাহলে B ম্যাট্রিক্সটিকে A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। A ম্যাট্রিক্স এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে A^{-1} দ্বারা সূচিতকরা হয় এবং $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I.$

আবার $A^{-1} = \dfrac{\text{সংযুক্ত ম্যাটিক্স } A\,(\text{Adjoint Matrix } A)}{|A|}$

(xix) সহগুণক ম্যাট্রিক্স (Cofactor Matrix): কোনবর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি উপাদানের সহগুণক নির্ণয় করে তাদের সমন্বয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সকে সহগগুণ কম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন, $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ সহ গুণক ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}$

(xx) সংযুক্ত ম্যাট্রিক্স (Adjoint Matrix): কোন ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি উপাদানসমূহের Transpose Matrix-দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত বা Transpose Matrix কে সংযুক্ত ম্যাট্রিক্স বা Adjoint Matrix বলা হয়।

Adjoint Matrix of A = Cofactor Matrix of A^{-1}.

সারসংক্ষেপ:

- ম্যাট্রিক্স হচ্ছে সংখ্যা বা প্রতীক বা বীজগণিতীয় রাশিকে দুইটি বন্ধনীর মাধ্যমে সারি (Row) বা কলামের (Column) আয়তাকার সাজানো ব্যবস্থা।
- যে ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা সমান থাকে তখন তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।
- যখন কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্স এর প্রধান কৌণিক উপাদান সমূহ ব্যতীত অন্যান্য সকল উপাদানই শূণ্য (0) থাকে তখন ঐ ম্যাট্রিক্সকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

পাঠ-৮.২ ম্যাট্রিক্সের বিভিন্ন কার্যক্রম
Operation on Matrices

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাট্রিক্সের সমতা কী বলতে পারবেন;
- ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ নির্ণয় করতে পারবেন;
- ম্যাট্রিক্সের গুণ নির্ণয় করতে পারবেন।

ম্যাট্রিক্সের কার্যক্রম
Operation on Matrices

ম্যাট্রিক্সের কার্যক্রম বলতে প্রধানত ম্যাট্রিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ ও গুণন সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান বুঝায়। ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত কতিপয় নিয়ম রয়েছে সে সকল নিয়মগুলোকে ম্যাট্রিক্স কার্যক্রম বাব্যবহারের মৌলিক নিয়ম বলা হয়।

ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of Matrices): দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হবে যদি তাদের আকার (order) একই হয় এবং সংশ্লিষ্ট উপাদানসমূহ সমান হয়। অর্থাৎ A ম্যাট্রিক্স এর সকল উপাদন B ম্যাট্রিক্স এর সকল উপাদানের সমান হবে।

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ এবং } B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

A ও B দুইটি তখনই সমান হবে যখন:

$a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12}, a_{13} = b_{13},\ a_{21} = b_{21},\ a_{22} = b_{22},\ a_{33} = b_{33},\ a_{31} = b_{31},\ a_{32} = b_{32},\ a_{33} = b_{33}$

ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগের নিয়মাবলী (Laws of Addition and Subtraction of Matrices):

(ক) দুইটি ম্যাট্রিক্সের আকার একই হলে তাদের মধ্যে যোগ ও বিয়োগ করা যায়।

(খ) যোগফল বা বিয়োগফল হচ্ছে সংশ্লিষ্ট উপাদানগুলোর যোগফল বা বিয়োগফল।

যেমন: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

A ও B ম্যাট্রিক্সের Order একই।

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 & 3+1 \\ 0+5 & 1+3 & 2+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 1-3 & 2-2 & 3-1 \\ 0-5 & 1-3 & 2-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

আবার, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ এবং $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

এখানে, দুইটির আকার (Order) যথাক্রমে 2×2 এবং 2×3

যেহেতু, আকার সমান নয় তাই এদের যোগ, বিয়োগ করা যাবেনা।

ম্যাট্রিক্সের গুণন (Multiplication of Matrices)

(ক) স্কেলার গুণন (Scalar multiplication of a matrix): k যেকোন একটি ধ্রুবক সংখ্যা হলে $k.A$ বলতে এমন একটি ম্যাট্রিক্স বুঝায় যা A ম্যাট্রিক্সটির সকল উপাদানের k গুণ।

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ হলে } k.A=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ হলে } 9.B=\begin{bmatrix} 36 & -27 \\ 72 & 63 \end{bmatrix}$$

(খ) ম্যাট্রিক্সের সাথে ম্যাট্রিক্সের গুণন (Multiplication of Matrices):

(i) দুইটি ম্যাট্রিক্স এর মধ্যে গুণন তখনই সম্ভব যখন প্রথম ম্যাট্রিক্স-এর কলাম সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার সমান হবে। অন্যথায় দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণন সম্ভব নয়।

A ম্যাট্রিক্স এর আকার (order) 2×3 এবং B ম্যাট্রিক্স এর আকার (order) 3×3 হলে, তাদের গুণফল AB ম্যাট্রিক্স এর আকার (order) হবে 2×3।

(ii) গুণ করার সময় প্রথম ম্যাট্রিক্স এর **১ম সারির** সাথে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স এর **১ম কলামের** উপাদানসমূহের সাথে গুণ করে যোগ করতে হবে। এই যোগফল নতুন ম্যাট্রিক্স এর ১ম সারি এবং ১ম কলামের উপাদান হবে। অতঃপর প্রথম ম্যাট্রিক্স এর ১ম সারি ঠিক রেখে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের ২য় কলাম গুণ করে যোগ করলে পাওয়া যাবে নতুন ম্যাট্রিক্স এর ১ম সারি ২য় কলামের উপাদান। অনুরূপভাবে ৩য় কলাম গুণ করে যোগ করলে পাওয়া যাবে নতুন ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি ৩য় কলামের উপাদান। পরবর্তীতে প্রথম ম্যাট্রিক্সের ২য় সারির সাথে অনুরূপভাবে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের ১ম কলাম, ২য় কলাম এবং ৩য় কলাম গুণ করে যোগ করতে হবে। সর্বশেষে প্রথম ম্যাট্রিক্সের ৩য় সারির সাথে পূর্বের ন্যায় দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের কলামের সাথে গুন করে যোগ করতে হবে।

উদাহরণ 1: যদি $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ এবং $B\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ হয় তাহলে AB -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: তাহলে, $AB=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times1+5\times(-3) & 2\times(-1)+5\times2 \\ 1\times1+3\times(-3) & 1\times(-1)+3\times2 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} 2-15 & -2+10 \\ 1-9 & -1+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -13 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

উদাহরণ 2: যদি $P=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}$ এবং $Q=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times1}$ তাহলে P গুণন Q নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}$ এবং $Q=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times1}$

$$\therefore PQ=\begin{bmatrix} ax+by+cz \\ 2x+3y+4z \end{bmatrix}_{2\times1}$$

উদাহরণ 3: যদি $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ হলে $A+B$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $A+B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0+7 & 2+6 & 3+3 \\ 2+1 & 1+4 & 4+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

উদাহরণ 4: যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 5\\4 & 1 & 2\end{bmatrix}$ হয় তাহলে $3A'$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\4 & 1 & 2\end{bmatrix}$

ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স $A'=\begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}$ $\therefore 3.A'=\begin{bmatrix}9 & 12\\6 & 3\\15 & 6\end{bmatrix}$

উদাহরণ 5: যদি $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 3 & 4\\-4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 4 & 2\\1 & 6 & 9\end{bmatrix}$ হয় তাহলে দেখান যে, $AB \neq BA$ ।

সমাধান: $AB=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 3 & 4\\-4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 4 & 2\\1 & 6 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+1-1 & 9+4-6 & 3+2-9\\2+3+4 & 6+12+24 & 2+6+36\\-4+5+6 & -12+20+36 & -4+10+54\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 7 & -4\\9 & 42 & 44\\7 & 44 & 60\end{bmatrix}$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 4 & 2\\1 & 6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 3 & 4\\-4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+6-4 & 1+9+5 & -1+12+6\\3+8-8 & 1+12+10 & -1+16+12\\3+12-36 & 1+18+45 & -1-24+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 15 & 17\\3 & 23 & 27\\-21 & 64 & 77\end{bmatrix}$$

$\therefore AB \neq BA$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 6: দেখান যে, $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বা Idempotant matrix ।

সমাধান: সমঘাতি ম্যাট্রিক্স দেখাতে হলে, $A^2 = A.A = A$ প্রমাণ করতে হবে।

এখন, $A^2 = A.A$

$$=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12\\-2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12\\2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{bmatrix}=A$$

$\therefore$ ম্যাট্রিক্স A সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বা Idempotant matrix.

উদাহরণ 7: যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\3 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ এবং $C=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}$ হয় তাহলে দেখান যে, $(AB)C = A(BC)$.

সমাধান: $AB=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\3 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+3-2\\3+0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$

এখন, $(AB).C=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -6\\7 & -14\end{bmatrix}$

আবার, $BC=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & -2\\2 & -4\end{bmatrix}$

এখন, $A(BC)=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\3 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & -2\\2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+3-2 & -4-6+4\\3+0+4 & -6-0-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -6\\7 & -14\end{bmatrix}$

সুতরাং, $(AB)\,C = A(BC)$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 8: যদি $A=\begin{pmatrix}9 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\7 & 12\end{pmatrix}$ হয় তাহলে $3A+5B+x=0$ এর থেকে x মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $3A + 5B + x = 0$

$$\therefore x = -3A-5B$$

এখন, $x=-3\begin{pmatrix}9 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1 & 5\\7 & 12\end{pmatrix}$

$$=-\begin{pmatrix}27 & 3\\12 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 25\\35 & 60\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}27+5 & 3+25\\12+35 & 9+60\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}32 & 28\\47 & 69\end{pmatrix}$$

$$\therefore x=\begin{pmatrix}-32 & -28\\-47 & -69\end{pmatrix}$$

উদাহরণ 9: যদি $f(x)=x^2-5x+4I$ এবং $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ তাহলে এর $f(B)$ মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $f(B)=B^2-5B+4I$

আমরা জানি, $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

এখন, $B^2=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4+0+2 & 0-0+0 & 4+0+0\\0-0+1 & 0+1+0 & 0-1+0\\2+0+0 & 0-0+0 & 2+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\1 & 1 & -1\\2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$f(B)=B^2-5B+4I$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\1 & 1 & -1\\2 & 0 & 2\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 0 & 10\\ 0 & -5 & 5\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-10+4 & 0-0+0 & 4-10+0\\ 1-0+0 & 1+5+4 & -1-5+0\\ 2-5+0 & 0-0+0 & 2-0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 10 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

উদাহরণ 10: কোন একটি দোকানের তিন দিনের বিভিন্ন ব্রান্ডের কলম বিক্রয়ের তথ্য নিম্নের তালিকায় দেখানো হলো:

	কলমের সংখ্যা			
দিন	পাইলট	ইয়োথ	মনটেক্স	ম্যাটাডোর
১ম দিন	3	4	10	20
২য় দিন	2	3	15	20
৩য় দিন	1	5	12	14
প্রতি কলমে লাভ (টাকায়)	0.50	0.75	0.50	0.40

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে দোকানের তিন দিনের লাভ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $P=\begin{pmatrix}3 & 4 & 10 & 20\\ 2 & 3 & 15 & 20\\ 1 & 5 & 12 & 14\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}0.50\\ 0.75\\ 0.50\\ 0.40\end{pmatrix}$

অতএব, মোট লাভ $= P\times Q$

$$=\begin{pmatrix}3 & 4 & 10 & 20\\ 2 & 3 & 15 & 20\\ 1 & 5 & 12 & 14\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.50\\ 0.75\\ 0.50\\ 0.40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5+3+5+8\\ 1+2.25+7.5+8\\ .50+3.75+6+5.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17.5\\ 18.75\\ 15.85\end{pmatrix}$$

সারসংক্ষেপ:

- দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হবে যদি তাদের আকার (order) একই হয় এবং সংশ্লিষ্ট উপাদানসমূহ সমান হয়। অর্থাৎ A ম্যাট্রিক্স এর সকল উপাদন B ম্যাট্রিক্স এর সকল উপাদানের সমান হয়।
- দুইটি ম্যাট্রিক্সের আকার একই হলে তাদের মধ্যে যোগ ও বিয়োগ করা যায়। যোগফল বা বিয়োগফল হচ্ছে সংশ্লিষ্ট উপাদানগুলোর যোগফল বা বিয়োগফল।
- দুইটি ম্যাট্রিক্স এর মধ্যে গুণন তখনই সম্ভব যখন প্রথম ম্যাট্রিক্সএর কলাম সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার সমান হবে। অন্যথায় দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণন সম্ভব নয়।
- A ম্যাট্রিক্স এর আকার (order) 2×3 এবং B ম্যাট্রিক্স এর আকার (order) 3×3 হলে, তাদের গুণফল AB ম্যাট্রিক্স এর আকার (order) হবে 2×3।

পাঠ-৮.৩ নির্ণায়ক
Determinant

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ণায়ক কী তা বর্ণনা করতে পারবেন;
- নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক নির্ণয় করতে পারবেন;
- সারাসের চিত্রের মাধ্যমে নির্ণায়ক নির্ণয় করতে পারবেন;
- ম্যাট্রিক্স এবং নির্ণায়কের মধ্যে পার্থক্য লিখতে পারবেন।

নির্ণায়কের ধারণা
Concept of Determinant

তিনটি চলকের তিনটি সরল সহসমীকরণের সমাধান সূত্র হিসেবে গণিতে নির্ণায়কের আবির্ভাব ঘটে। পরবর্তীতে ম্যাট্রিক্সের ধারণা ও কার্যবিধি আবির্ভূত হয়। খ্রিস্টপূর্ব ৩য় শতাব্দীতে চীনদেশীয় গণিতবিদদের রচিত "The Nine Chapters on the Mathematical Art" বইতে সর্ব প্রথম নির্ণায়ক ব্যবহৃত হয়।

নির্ণায়ক (Determinant): নির্ণায়ক হচ্ছে বর্গ ম্যাট্রিক্সের একটি বিশেষ প্রকারের ফাংশন। একে দুইটি উলম্ব রেখা (Vertical Line) এর মধ্যে লেখা হয়। A বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক $|A|$ অথবা Det(A) দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেমন: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের সংশ্লিষ্ট নির্ণায়ক হচ্ছে $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

একইভাবে, $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের সংশ্লিষ্ট নির্ণায়ক হচ্ছে $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

উল্লেখ্য যে, প্রত্যেকটি নির্ণায়কের একটি মান আছে।

নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক (Minors and Cofactor of Determinant): $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}_{3\times3}$

প্রদত্ত A নির্ণায়কের 9টি উপাদান রয়েছে। 9টি উপাদানের মধ্যে যেকোন একটি উপাদানের সংশ্লিষ্ট সারি এবং কলামের সকল উপাদান বাদ দিয়ে অবশিষ্ট উপাদানগুলো দিয়ে যে নির্ণায়ক হয় সেটিই উক্ত উপাদানের সংশ্লিষ্ট অনুরাশি (Minor)। অর্থাৎ (i,j) তম উপাদানের অনুরাশি হবে i তম সারি এবং j তম কলামের সকল উপাদান বাদ দিয়ে অবশিষ্ট উপাদানগুলো নিয়ে যে নির্ণায়ক হয় সেটি।

অতএব $|A|$ প্রদত্ত নির্ণায়কটির (1,1)তম অনুরাশি হবে $= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, একইভাবে (2,3)তম অনুরাশি হবে $= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

এবং (3,2)তম অনুরাশি হবে $= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$

একইভাবে 9টি উপাদানের ম্যাট্রিক্স থেকে 9টি অনু রাশি পাওয়া যাবে। যেকোনো একটি উপাদানের অনুরাশির সামনে যথাযথ চিহ্ন বসালে তাকে ঐ উপাদানের সহগুণক (Cofactor) বলা হয়।

নির্ণায়কের বিস্তৃতি করণ (Expansion of Determinant): একটি নির্ণায়ককে তার যেকোন একটি সারি অথবা একটি কলামের মাধ্যমে বিস্তৃত করা যায়। নির্ণায়কের বিস্তৃতি হচ্ছে একটি সারির অথবা কলামের উপাদানগুলোর সাথে সংশ্লিষ্ট সহগগুণকের গুণফলগুলোর সমষ্টি।

$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ নির্ণায়কের $a_1,\ a_2,\ a_3$ ভূক্তিগুলোর সহগুণক যথাক্রমে $A_1,\ A_2,\ A_3$ হলে নির্ণায়কের মান হবে

$$a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$

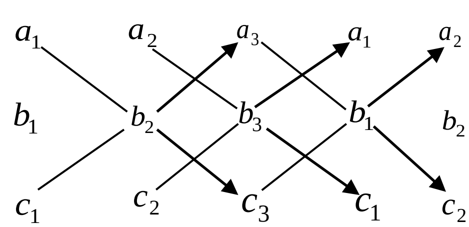
তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের চিহ্ন $=\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

উদাহরণ 1: $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ এর নির্ণায়ক ণির্ণয় করুন।

সমাধান: $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(0-54)-2(0-48)+3(36-40)=-54+96-12=96-66=30$

সারাসের চিত্রের মাধ্যমে নির্ণায়কের বিস্তৃতি (Expansion of a Determinant using Sarrus Diagram)

$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ নির্ণায়কের জন্য এর সারাসের চিত্র

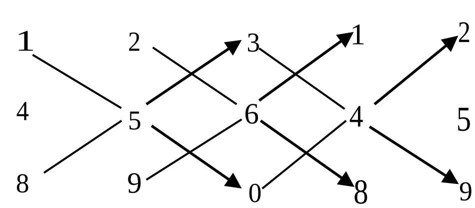


একই তীর চিহ্ন বরাবর উপাদান তিনটি গুণ হবে। উপর থেকে নিচে তীর চিহ্ন বরাবর গুণফলের পূর্বে '+' চিহ্ন এবং নিচ থেকে উপরে গুণফলের পূর্বে '–' চিহ্ন বসিয়ে ছয়টি গুণফল যোগ করলেই নির্ণায়কটির মান পাওয়া যাবে।

প্রদত্ত নির্ণায়কটির মান হবে $=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-c_1b_2a_3-c_2b_3a_1-c_3b_1a_2$

উদাহরণ 2: $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ এর সারাসের চিত্রের মাধ্যমে নির্ণায়ক নির্ণয় করুন।

সমাধান: নির্ণায়ক $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ এর সারাসের চিত্র



প্রদত্ত নির্ণায়কটির মান হবে–

$=1\times5\times0+2\times6\times8+3\times4\times9-8\times5\times3-9\times6\times1-0\times4\times2$

$=0+96+108-120-54-0=207-174=33$

নির্ণায়কের বৈশিষ্ট্য (Properties of Determinants)

(i) নির্ণায়কের সারি বা কলামসমূহ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে তার মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

যেমন: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ কারণ, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ এবং $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$

(ii) নির্ণায়কের পাশাপাশি দুইটি সারি বা কলামের মধ্যে স্থান বিনিময় করলে, সেক্ষেত্রে নির্ণায়কের চিহ্নের পরিবর্তন ঘটে, কিন্তু সাংখ্যিক মান একই থাকে।

যেমন: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1$ এবং $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1$

কলাম দুইটি স্থান বিনিময় করায় মান 1থেকে -1 হয়েছে।

(iii) নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম অভিন্ন হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন: $\begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix}=0$ এবং $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=0$

(iv) নির্ণায়কের যে কোন সারি বা কলামের সবগুলো মান শূন্য হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হয়।

যেমন: $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix}=0$ এবং $\begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$

(v) নির্ণায়কের যে কোন একটি সারি বা কলামের সকল উপাদানকে একই ধ্রুবক সংখ্যাদ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কের মানকে ঐ ধ্রুবক সংখ্যাদ্বারা গুণ করাকে নির্দেশ করে।

যেমন: $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=5$ এখন ২য় কলামকে 3 দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়ক হবে $=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 12 \end{vmatrix}=24-9=15=3D$

(vi) কোন নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের সকল উপাদানের যোগফলরূপে প্রকাশ করা হলে, নির্ণায়কটিকে একাধিক নির্ণায়কের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়।

যেমন: $A=\begin{vmatrix} a_1+\alpha & a_2 & a_3 \\ b_1+\beta & b_2 & b_3 \\ c_1+\gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha & a_2 & a_3 \\ \beta & b_2 & b_3 \\ \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(vii) নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের উপাদানগুলোকে অপর একটি সারি বা কলামের সংশ্লিষ্ট উপাদানগুলোর সহগুণক দ্বারা গুণ করলে প্রাপ্ত গুণফলগুলোর বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য হবে।

যেমন: $A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

নির্ণায়ক $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0$

যেখানে A_1,A_2,A_3 যথাক্রমে a_1,a_2,a_3 এর সহগুণক।

ম্যাট্রিক্স এবং নির্ণায়কেরমধ্যে পার্থক্য (Diffedence between Matrix and Determinant):

ম্যাট্রিক্স	নির্ণায়ক
(i) ম্যাট্রিক্স আয়তকার বা বর্গাকার হতে পারে।	(i) নির্ণায়ক কেবলমাত্র বর্গাকার হয়ে থাকে।
(ii) ম্যাট্রিক্সকে সাধারণত প্রথম বন্ধনী () অথবা তৃতীয় বন্ধনী [ ] অথবা দুই জোড়া উলম্ব রেখা ‖ ‖ এর সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।	(ii) নির্ণায়ককে কেবলমাত্র দুইটি উলম্ব রেখা ‖ ‖ এর সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।
(iii) ম্যাট্রিক্সের কোন মান নেই।	(iii) নির্ণায়কের একটি নির্দিষ্ট মান আছে।
(iii) ম্যাট্রিক্সকে কোন স্কেলার দ্বারা গুণ করলে তার সকল উপাদানকেই ঐ স্কেলার দ্বারা গুণ করা বোঝায়। যেমন, $A=k.\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\3&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k&2k&3k\\0&k&-2k\\3k&4k&k\end{bmatrix}$	(iv) নির্ণায়ককে কোনো স্কেলারদ্বারা গুণ করলেতার যেকোন একটি সারি বা কলামের সকল উপাদানকে স্কেলার দ্বারা গুণ করা বোঝায়। যেমন, $A=k.\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\3&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k&2k&3k\\0&1&-2\\3&4&1\end{vmatrix}$

উদাহরণ 3: $A=\begin{vmatrix}8&9&5\\3&2&1\\-2&5&7\end{vmatrix}$ এর নির্ণায়ক নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A=\begin{vmatrix}8&9&5\\3&2&1\\-2&5&7\end{vmatrix}$

$$|A|=8\begin{vmatrix}2&1\\5&7\end{vmatrix}-9\begin{vmatrix}3&1\\-2&7\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}3&2\\-2&5\end{vmatrix}$$

$$=8(14-5)-9(21+2)+5(15+4)=8\times9-9\times23+5\times19=72-207+95=167-207=-40$$

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন যে, $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&p&p^2\\1&p^2&p^4\end{vmatrix}=p(p-1)^2(p^2-1)$

সমাধান: বামপক্ষ $=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&p&p^2\\1&p^2&p^4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&p-1&p^2-p\\1&p^2-1&p^4-p^2\end{vmatrix}$, $[C_2'\to C_2-C_1, C_3'=C_3-C_2]$

$=1\begin{vmatrix}(p-1)&p(p-1)\\(p^2-1)&p^2(p^2-1)\end{vmatrix}$, [১ম সারির মাধ্যমে বিস্তৃতি করে]

$=(p-1)(p^2-1)\begin{vmatrix}1&p\\1&p^2\end{vmatrix}$

$=p(1-p)(p^2-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&p\end{vmatrix}$

$=p(p-1)(p^2-1)(p-1)$

$=p(p-1)(p-1)(p^2-1)$

$=p(p^2-1)(p-1)^2=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 5: দেখান যে, $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

সমাধান: বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & b+c+a \\ 1 & b & c+a+b \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} [\mathrm{C}_3' \to C_3 + \mathrm{C}_2]$$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \times 0 = 0 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 6: দেখান যে, $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix} = 4xyz$

সমাধান: বাম পক্ষ $= \begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x+y-x-y & x & y \\ x-x-z-z & x+z & z \\ y-z-y-z & z & y+z \end{vmatrix} [\mathrm{C}_1' \to C_1 - \mathrm{C}_2 - C_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} = (-2z)\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x+z-z & z-y-z \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix} [\mathrm{R}_2' \to R_2 - \mathrm{R}_3]$$

$$= (-2z)\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix}$$

$= (-2z) \times 1 \times (-xy - xy) = 4xyz =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 7: $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -6+3x & -1-x+3 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0 \ [R_1' \to R_1 - R_2]$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 3(x-2) & -1(x-2) \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 3-3 & -1+1 \\ 2 & -3x-6 & x-3+2 \\ -3 & 2x+9 & x+2-3 \end{vmatrix} = 0 \ [C_2' \to C_2 - 3C_1, \ \ C_3' \to C_3 + C_1]$$

$$\Rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3(x+2) & x-1 \\ -3 & 2x+9 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3(x+2) & x-1 \\ -3 & 2x+9 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3(x+2) & 1 \\ -3 & 2x+9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-1)\times 1\times\{-3(x+2)-(2x+9)\} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-1)(-3x-6-2x-9) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-1)(-5x-15) = 0$$

$$\Rightarrow -5(x-2)(x-1)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow -5(x-2)(x-1)(x+3) = 0$$

$\Rightarrow x = 2, x = 1$ এবং $x = -3$

সুতরাং, x এর মান $1, 2$ এবং -3

সারসংক্ষেপ:

- নির্ণায়ক হচ্ছে বর্গ ম্যাট্রিক্সের একটি বিশেষ প্রকারের ফাংশন। একে দুইটি উল্লম্ব রেখা (Vertical Line) এর মধ্যে লেখা হয়।
- ম্যাট্রিক্সের কোন মান নেই কিন্তু নির্ণায়কের একটি নির্দিষ্ট মান আছে।

পাঠ-৮.৪ ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক এবং একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান
Rank of a Matrix and Solving of Linear Equation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক কী তা বোঝতে পারবেন;
- ম্যাট্রিক্স এর র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন;
- ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন;
- ক্রেমার নিয়মের মাধ্যমে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক
Rank of a Matrix

ম্যাট্রিক্স এর র‍্যাঙ্ক হলো কোন ম্যাট্রিক্সের অশূন্য অনুরাশির সর্বোচ্চ ক্রম। কোন ম্যাট্রিক্স A হলে তার র‍্যাঙ্ক (Rank)R(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় Rank of a Matrix A.

ম্যাট্রিক্স এর র‍্যাঙ্ক নির্ণয় পদ্ধতি:

(i) কোনবর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix)-এর নির্ণায়কের মান শূন্য না হলে, উক্ত ম্যাট্রিক্সের ক্রম (Order) যত উহার র‍্যাঙ্ক (Rank)-ও তত। অর্থাৎ A একটি 2×2 ম্যাট্রিক্স এবং $|A|\neq 0$ তবে R(A)=2. একইভাবে A একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $|A|\neq 0$ হয়, তবে R(A)=3।

(ii) যদি কোনো ম্যাট্রিক্স = এর নির্ণায়কের মান শূন্য হয় এবং অন্ততপক্ষে একটি অনুরাশি শূন্যের সমান না হয় তবে ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক হবে উক্ত ম্যাট্রিক্সের ক্রমের চেয়ে (1) এক কম। অর্থাৎ A একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স যার $|A|\neq 0$ এবং এর একটি অনুরাশি (Minor) এর নির্ণায়ক শূন্য নয়। ফলে A ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক হবে R(A) = 2।
যদি A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×2 হয় তবে R(A) = 1।

(iii) যদি মূলবর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মানশূন্য হয় এবং সবগুলো অনুরাশির নির্ণায়ক শূন্য হলে তার র‍্যাঙ্ক ম্যাট্রিক্সের ক্রমের চেয়ে 2 কম হবে।

উদাহরণ 1: নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলোর র‍্যাঙ্ক নির্ণয় করুন।

(i) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (ii) $B=\begin{bmatrix}-1&1&2\\1&-1&2\\-1&1&10\end{bmatrix}$

সমাধান:(i) দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,

$$\therefore |A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$\therefore |A|=1\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=1$$

সুতরাং,ম্যাট্রিক্স A এর র‍্যাঙ্ক 3.

(ii) দেওয়াআছে, $B=\begin{bmatrix}-1&1&2\\1&-1&2\\-1&1&10\end{bmatrix}$

$$\therefore |B|=\begin{vmatrix}-1&1&2\\1&-1&2\\-1&1&10\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-1&2\\1&10\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&2\\-1&10\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}$$

$$=-1(-10-2)-1(10+2)+2(1-1)=12-12+0 \therefore |B|=0$$

এখানে, $B=0$ কিন্তু $\begin{vmatrix}1&2\\-1&2\end{vmatrix}\neq 0$, সুতরাং, B ম্যাট্রিক্স এর র‍্যাঙ্ক 2.

একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ (Linear Equation): নিম্নে একঘাত বিশিষ্ট তিনটি সমীকরণ দেওয়া হলো:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

এখন উপরের সমীকরণগুলোকে ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সাজিয়ে পাই–

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

মনে করুন, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A$, সহগ ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X$, চলক সম্বলিত ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = C$ ধ্রুবক ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং, উপরের সম্পর্কটি নিম্নলিখিতভাবে লিখতে পারা যায়, $AX=C$

$$\therefore X = A^{-1}C$$

সুতরাং, চলক ম্যাট্রিক্স এর মান বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং ধ্রুবক ম্যাট্রিক্স এর গুণফল।

উদাহরণ 2: নিম্নলিখিত একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণগুলোর ম্যাট্রিক্স এর মাধ্যমে সমাধান করুন।

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

সুতরাং, ম্যাট্রিক্স এর মাধ্যমে লেখা যায়, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

সুতরাং, ম্যাট্রিক্স এর মাধ্যমে লেখা যায়, $AX=C$ যেখানে, A সহগ ম্যাট্রিক্স, X চলক সম্বলিত ম্যাট্রিক্স এবং C ধ্রুবক ম্যাট্রিক্স।

$$\therefore X = A^{-1}C$$

এখন, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-3) - 3(2-9) + (1-6) = 2 + 21 - 5 = 18$$

যেহেতু, $|A| \neq 0$। সুতরাং, A^{-1} নির্ণয় করা সম্ভব।

সুতরাং, $|A|$ এর সহগুণকগুলো হলো নিম্নরূপ–

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1, A_{12}=-\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix}=7, A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=-5, A_{22}=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1, A_{23}=-\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}=7, A_{32}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=-5, A_{33}=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1$$

$$A^T=\begin{bmatrix}1&7&-5\\-5&1&7\\7&-5&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{A^T}{|A|}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}1&7&-5\\-5&1&7\\7&-5&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=A^{-1}C$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}1&7&-5\\-5&1&7\\7&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\6\\8\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}9+42-40\\-45+6+56\\63-30+8\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}11\\17\\41\end{bmatrix}$$

সুতরাং, $x_1=\frac{11}{18}$, $x_2=\frac{17}{18}$ এবং $x_3=\frac{41}{18}$

উদাহরণ 3: সমীকরণগুলোর ম্যাট্রিক্স এর মাধ্যমে সমাধান করুন, $\begin{matrix}x+2y-z=5\\3x-y+2z=9\\5x+3y+4z=15\end{matrix}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\begin{matrix}x+2y-z=5\\3x-y+2z=9\\5x+3y+4z=15\end{matrix}$

সুতরাং, ম্যাট্রিক্স এর মাধ্যমে লেখা যায়, $\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&-1&2\\5&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\9\\15\end{bmatrix}$

সুতরাং, ম্যাট্রিক্স এর মাধ্যমে লেখা যায়, $AX=B$ যেখানে, A সহগ ম্যাট্রিক্স, X চলক সম্বলিত ম্যাট্রিক্স এবং B ধ্রুবক ম্যাট্রিক্স।

$\therefore X=A^{-1}B$, এখন, $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&-1&2\\5&3&4\end{bmatrix}$,

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-1&2\\5&3&4\end{vmatrix}=1(-4-6)-2(12-10)-1(9+5)=-10-4-14=-28$$

যেহেতু, $|A|\neq 0$ । সুতরাং, A^{-1} নির্ণয় করা সম্ভব।

সুতরাং, $|A|$ এর সহগুণকগুলো হলো−

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4-6 = -10$, , $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(12-10) = -2$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9+5 = 14$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8+3) = -11$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4+5 = 9$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (3-10) = 7$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2+3) = -5$, $A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7$

$$A^T = \begin{bmatrix} -10 & -11 & 3 \\ -2 & 9 & -5 \\ 14 & 7 & -7 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{1}{-28}\begin{bmatrix} -10 & -11 & 3 \\ -2 & 9 & -5 \\ 14 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-28}\begin{bmatrix} -10 & -11 & 3 \\ -2 & 9 & -5 \\ 14 & 7 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{-28}\begin{bmatrix} -50-99+45 \\ -10+81-75 \\ 70+63-105 \end{bmatrix} = \frac{1}{-28}\begin{bmatrix} -104 \\ -4 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -1 \end{bmatrix}$$

সুতরাং, $x = \frac{26}{7}$, $y = \frac{1}{7}$ এবং $z = -1$

ক্রেমারের নিয়ম (Cramer's Rule): ক্রেমারের নিয়মে সহ-সমীকরণের সমাধান করা যায়। বর্তমানে এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ পদ্ধতি হিসেবে স্বীকৃত। যখন কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের পরিধি খুব বড় হয় তখন বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা খুবই জটিল হয়। এ অবস্থায় ক্রেমারের নিয়মে অতি সহজেই একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান করা যায়।

ক্রেমারের নিয়মে সহ-সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করার সময় নিম্নলিখিত পদক্ষেপ গ্রহণ করা হয়:

প্রথম ধাপ: সমীকরণগুলো ম্যাট্রিক্স এ রূপান্তর করতে হবে।

দ্বিতীয় ধাপ: সহগ ম্যাট্রিক্সকে A নাম করণ করতে হবে। অতঃপর সহগ ম্যাট্রিক্স এর নির্ণায়ক $|A|$ নির্ণয় করতে হবে।

তৃতীয় ধাপ: প্রথমে যে চলকের মান নির্ণয় করা হবে সেই সহগ কলামকে পরিবর্তন করে সেখানে চলক ম্যাট্রিক্স প্রতিস্থাপন করে A_1 নাম করণ করতে হবে।

A_1 এর নির্ণায়ক $|A_1|$ নির্ণয় করতে হবে। অনুরূপভাবে, A_2 ম্যাট্রিক্সের $|A_2|$ এবং A_3 ম্যাট্রিক্সের $|A_3|$ নির্ণায়ক নির্ণয় করতে হবে।

চতুর্থ ধাপ: সর্বশেষ চলক তিনটির মান নির্ণয় করতে হবে।

অর্থৎ, $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$, $x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$

উদাহরণ 4: সমীকরণগুলো ক্রেমারের নিয়মে সমাধান করুন,
$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ x - 2y + z &= 5 \\ x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

সমাধান: দেওয়া আছে,
$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ x - 2y + z &= 5 \\ x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

এখানে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-4+1)+1(2-1)-1(-1+2) = -6+1-1 = -6$$

এখন, $|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4(-4+1)+1(10-1)-1(-5+2) = -12+9+3 = 0$

$$\therefore |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(10-1)-4(2-1)-1(1-5) = 18-4+4 = 18$$

$$\therefore |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2+5)+1(1-5)+4(-1+2) = 6-4+4 = 6$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{0}{-6} = 0;\ y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{18}{-6} = -3;\ z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{6}{-6} = -1$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান (x,y,z) = (0,–3,–1)।

উদাহরণ 5: সমীকরণগুলো ক্রেমারের নিয়মে সমাধান করুন, $\begin{array}{l} x+2y-z=5 \\ 3x-y+3z=7 \\ 2x+3y+z=11 \end{array}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\begin{array}{l} x+2y-z=5 \\ 3x-y+3z=7 \\ 2x+3y+z=11 \end{array}$ এখানে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-6)-2(3-6)-1(9+2) = -7+6-11 = -15 \neq 0$$

সুতরাং, এটির সমাধান সম্ভব।এখন,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5(-1-9)-2(7-33)-1(21+11) = -50+52-32 = -30$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 1(7-33)-5(3-6)-1(33-14) = -26+15-19 = -30$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 1(-11-21)-2(33-14)+5(9+2) = -32-38+55 = -15$$

$$\therefore x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-30}{-15}=2,\ y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-30}{-15}=2,\ z=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{-15}{-15}=1$$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান সেট (x,y,z) = (2,2,1)

উদাহরণ 6: একটি কারখানায় তিন ধরণের পণ্য যথাক্রমে x, y এবং z উৎপাদন হয়। সাভারে (S) এবং টঙ্গীতে (T) পণ্যগুলো বিক্রয় করা হয়। কারখানায় উৎপাদিত পণ্যের বিক্রয়ের পরিমাণ নিম্নরূপ:

বাজার	x	y	z
S	1000	1500	2000
T	4000	3000	1000
B (একক প্রতি পণ্যের উৎপাদন খরচ)	5	3	6
C (একক প্রতি পণ্যের বিক্রয় মূল্য)	7	5	10

(i) মোট উৎপাদন ব্যয় নির্ণয় করতে হবে (ii) মোট উৎপাদন আয় নির্ণয় করতে হবে (iii) মোট মুনাফা নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: মনে করুন, উৎপাদনকৃত পণ্যের ম্যাট্রিক্স =A, একক প্রতি পণ্যের উৎপাদন খরচ ম্যাট্রিক্স = B

এবং একক প্রতি পণ্যের বিক্রয়মূল্য ম্যাট্রিক্স = C

$$A=\begin{pmatrix}1000 & 1500 & 2000\\ 4000 & 3000 & 1000\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}7\\5\\10\end{pmatrix}$$

(i) মোট উৎপাদন ব্যয় = উৎপাদনকৃত পণ্যের ম্যাট্রিক্স × একক প্রতি পণ্যের উৎপাদন খরচ ম্যাট্রিক্স

অর্থাৎ $A\times B=\begin{pmatrix}1000 & 1500 & 2000\\ 4000 & 3000 & 1000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}5000+4500+12000\\ 20000+9000+6000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21500\\35000\end{pmatrix}$$

∴ মোটউৎপাদনব্যয় = 21500+35000=56500 টাকা

(ii) মোট উৎপাদন আয় = উৎপাদনকৃত পণ্যের ম্যাট্রিক্স একক প্রতি পণ্যের বিক্রয় মূল্য ম্যাট্রিক্স

অর্থাৎ $A\times C=\begin{pmatrix}1000 & 1500 & 2000\\ 4000 & 3000 & 1000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\5\\10\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}7000+7500+20000\\ 28000+15000+10000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34500\\53000\end{pmatrix}$$

∴ মোট উৎপাদন আয় = 34500+53000=87500 টাকা

(iii) মোট মুনাফা = মোট উৎপাদন আয়– মোট উৎপাদন ব্যয়

$$=\begin{pmatrix}34500\\53000\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}21500\\35000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13000\\18000\end{pmatrix}$$

মোটমুনাফা = 13000+18000=31000 টাকা

সারসংক্ষেপ:

- ম্যাট্রিক্স এর র‌্যাঙ্ক হলো কোন ম্যাট্রিক্সের অশূন্য অনুরাশির সর্বোচ্চ ক্রম।
- A একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $|A|\neq 0$ হয়, তবে R(A)=3।
- A একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স যার এবং $|A|\neq 0$ এবং এর একটি অনুরাশি (Minor) এর নির্ণায়ক শূন্য নয়। ফলে A ম্যাট্রিক্সের র‌্যাঙ্ক হবে R(A) = 2।

ইউনিটমূল্যায়ন

নিচের তথ্যের আলোকে $(1-3)$ নং প্রশ্নের উত্তর দিন:

$$A=\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ 3 & 3 & -4\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

1. ১ম সারি ও ২য় কলাম এর অনুরাশির মান কোনটি?

(ক)-8 (খ)8 (গ)-9 (ঘ)9

2. ৩য় সারি ও ৩য় কলাম এর অনুরাশির মান কোনটি?

(ক)11 (খ)20 (গ)18 (ঘ)-10

3.নির্ণায়ক $|A|$ এর মান কোনটি?

(ক)65 (খ)-65 (গ)56 (ঘ)-56

সৃজনশীল প্রশ্ন:

4. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4\\ 6\\ -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\end{bmatrix}$

(ক) উপরের ম্যাট্রিক্সগুলির আলোকে ABএর মান নির্ণয় করুন।

(খ) ABC এর মান নির্ণয় করুন এবং

(গ) দেখান যে, $(AB)C=A(BC)$

5. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 3\\ 7 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$

(ক) A^T ও B^Tএর মান নির্ণয় করুন।

(খ) AB এর মান নির্ণয় করুন এবং

(গ) দেখান যে, $(AB)^T=(BA)^T$

6. $A=\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}x & 2 & -2\\ y & 5 & -4\\ z & 7 & -5\end{bmatrix}$

(ক) $AB=I_3$হলেx, y, zসম্বলিত সমীকরণ গঠন করুন।

(খ) x, y, z এর মান ক্রেমার পদ্ধতিতেনির্ণয় করুন এবং B ম্যাট্রিক্সটি তৈরি করুন।

(গ) AB নির্ণয় করুনএবং A ও B এর মধ্যে সম্পর্ক নিরূপণ করুন।

প্রমাণ করুন : (7-12)

7. $\begin{vmatrix}2a & 2b & a+b\\ b+c & a-c & a\\ b-c & a+c & b\end{vmatrix}=-2(a+b)(a-b)^2$

8. $\begin{vmatrix}a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}=(a+b+c)^2$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$

10. $\begin{vmatrix} -x^2 & xy & xz \\ xy & -y^2 & yz \\ xz & xy & -z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

11. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ হলে
$(i)\ 3A-4B$ $(ii)\ A+B$ $(iii)\ B-A$ এর মান নির্ণয় করুন।

13. মান নির্ণয় করুন: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ।

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, AB ওBA নির্ণয় করুন।

15. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ করুন $AB \neq BA$ ।

উত্তরমালা

1.ক 2. গ 3. ঘ 12. $(i)\ \begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$ $(ii)\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ $(iii)\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$ 14. $AB = \begin{bmatrix} 16 & -9 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ এবং $BA = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$