অর্থায়ন সম্পর্কিত গণিত
Mathematics of Finance

৭

ভূমিকা
Introduction

আর্থিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ, অর্থের প্রবাহ, অনিশ্চয়তা, প্রকল্প মূল্যায়ন এবং তহবিল পরিকল্পনা গ্রহণে যেকোনো ব্যবসায় প্রশাসন, আর্থিক প্রতিষ্ঠান এবং সামাজিক বিজ্ঞান শিক্ষা ক্ষেত্রে ব্যবহারিক গণিতের ভূমিকা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। তাই এসব সিদ্ধান্ত বাস্তবায়নে গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য। বিভিন্ন সরকারি, বেসরকারি এবং ব্যবসা প্রতিষ্ঠানের পরিমাণগত সরঞ্জাম (Quantitative tools) এর ব্যবহার দিন দিন বেড়েই চলছে। একজন আর্থিক ব্যবস্থাপক ব্যবসায়িক সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে পরিমাণগত সরঞ্জামের হিসাব এবং বিভিন্ন ক্ষেত্রে গাণিতিক বিভিন্ন কৌশল অবলম্বন করে থাকেন। এই ইউনিটে অর্থায়ন সম্পর্কীয় গণিতের বিভিন্ন বিষয়ের তত্ত্ব ও ব্যবহার নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৩ দিন

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৭.১: সুদ
পাঠ-৭.২: বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্তি
পাঠ-৭.৩: অবচয়, প্রতিপূরক তহবিল, বিধি, বাট্টাকরণ এবং এ্যামারটাইজেসন

মূখ্য শব্দ	অর্থায়ন, সরল সুদ, চক্রবৃদ্ধি সুদ, এ্যামারটাইজেশন, অগ্রিম বার্ষিক বৃত্তি, ভবিষ্যৎ মূল্য, প্রতিপূরক তহবিল, বার্ষিক সাধারণ বৃত্তি, অবচয়, প্রতিপূরক তহবিল, বিধি, বাট্টাকরণ ইত্যাদি।

পাঠ-৭.১ সুদ
Interest

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সরল ও চক্রবৃদ্ধি সুদ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সরলসুদ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবেন;
- চক্রবৃদ্ধি সুদ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

অর্থায়ন সম্পর্কিত গণিত এবং আধুনিক ব্যবসায় শিক্ষায় এর গুরুত্ব
Mathematics of finance and its importance in morden business study

একটি ব্যবসায় প্রতিষ্ঠানে ভবিষ্যৎ নগদ প্রবাহের মূল্যায়ন, অর্থসংস্থান ও ঋণকৃত মূলধনের ব্যয় নির্ণয়, প্রকল্প নির্বাচন এবং অন্যান্য আর্থিক সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে 'অর্থের সময় মূল্য' ভিত্তিক যে গাণিতিক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয় তাকে অর্থায়ন সম্পর্কিত গণিত (Mathematics of finance) বলা হয়।

আধুনিক ব্যবসায় শিক্ষায় অর্থায়ন সম্পর্কিত গণিতের গুরুত্ব: মুদ্রাস্ফিতীর ক্রমবর্ধমান হার, তীব্র প্রতিযোগীতা ও প্রযুক্তির উন্নয়নের কারণে অতীতের তুলনায় বর্তমানে অর্থায়ন সম্পর্কিত গণিতের গুরুত্ব বৃদ্ধি পেয়েছে। বিনিয়োগ সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে ভবিষ্যৎ নগদ প্রবাহের মূল্যায়ন নির্ণয়, লাভজনক প্রকল্প নির্বাচন, শেয়ার ও ফার্মের মূল্যায়ন ইত্যাদি ক্ষেত্রে অর্থায়ন গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য। নিম্নে অর্থায়ন গণিতের গুরুত্ব আলোচনা করা হলো:

১. ঋণের কিস্তি নির্ধারণ: গৃহীত ঋণ পরিশোধের কিস্তি নির্ধারণ তথা ঋণ পরিশোধ তালিকা প্রস্তুতের ক্ষেত্রে অর্থায়ন গণিতের ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

২. প্রকল্প মূল্যায়ন: বিনিয়োগ সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে বিভিন্ন প্রকল্পের মধ্য থেকে সবচেয়ে উত্তম প্রকল্প নির্বাচনের জন্য প্রকল্পসমূহের বর্তমান বাজার মূল্য নির্ণয় করতে অর্থায়ন গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য।

৩. তহবিল ব্যবস্থাপনা: আধুনিক ব্যবসায় প্রতিষ্ঠানের সম্ভাব্য ব্যয়ের কথা চিন্তা করে বিভিন্ন তহবিল গঠন করা হয়। যেমন: ঋণ পরিশোধক তহবিল, পেনশন তহবিল, সম্পদ প্রতিস্থাপন তহবিল ইত্যাদি। এসব তহবিল কোথায় বিনিয়োগ করা হবে, কিস্তির পরিমাণ কত হবে ইত্যাদি নির্ধারণের জন্য অর্থায়ন গণিতের ব্যবহার করা হয়।

৪. প্রকৃত আয় পরিমাপ: মুদ্রাস্ফীতির কারণে প্রতিনিয়ত অর্থের মূল্য পরিবর্তিত হচ্ছে, তাই যেকোনো বিনিয়োগের থেকে প্রাপ্ত নগদ আন্তপ্রবাহের (Cash in flow) প্রকৃত মূল্য নির্ধারণ করার প্রয়োজন দেখা দেয়। অর্থায়ন গণিতের ব্যবহার করে প্রকৃত আয় পরিমাপ করা সম্ভব।

৫. শেয়ার ও ফার্মের মূল্যায়ন: শেয়ার তথা ফার্মের মূল্য নির্ধারণের ক্ষেত্রে ভবিষ্যতে প্রাপ্য লভ্যাংশ প্রবাহের মূল্যায়নের জন্যও অর্থায়ন গণিতের ব্যবহার করা হয়।

৬. মূলধন ব্যয় নির্ধারণ: মূলধনের বিভিন্ন উৎসের ব্যয়, ঋণপত্র ও অগ্রাধিকার শেয়ারের ব্যয়, সাধারণ শেয়ারের ব্যয়, প্রভৃতি নির্ধারণের ক্ষেত্রেও অর্থায়ন গণিতের প্রত্যক্ষ প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়।

৭. কার্যকরী সুদের হার নির্ধারণ: এক বছরে একাধিকবার সুদ গণনা এর ক্ষেত্রে প্রকৃত বা কার্যকরী সুদের হার নির্ণয়ের জন্যও অর্থায়ন গণিত ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

৮. ব্যাংকিং ও বীমা ব্যবসার ক্ষেত্রে: সব ধরনের প্রতিষ্ঠানেই বিনিয়োগ, অর্থসংস্থান ও লভাংশ সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে অর্থায়ন গণিতের ব্যবহার রয়েছে। তবে ব্যাংকিং ও বীমা ব্যবসায়ের ক্ষেত্রে অর্থায়ন গণিতের ব্যাপক ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়।

সুদ বা মুনাফা (Interest)**:** যখন কোন ব্যক্তি বা প্রতিষ্ঠান বা সংস্থা আসল বা মূলধন (Principal) বলে অভিহিত কোন অর্থ গ্রহণ করে নিজ প্রয়োজনে বিনিয়োগ করে তখন উক্ত ব্যক্তি বা প্রতিষ্ঠান বা সংস্থা মূলধনের জন্য যে অর্থ প্রদান করে তাকে সুদ (Interest) বলা হয়। সাধারণত সুদ নির্দিষ্টভাবে উল্লেখিত সমান সময়ের ব্যবধানে প্রদান করা হয়। যেমন: প্রতি এক বছর শেষে (Yearly), প্রতি ছয় মাস শেষে (Half-yearly), প্রতি এক মাস শেষে (Monthly)। আসল ও সুদের সমষ্টিকে সুদাসল (Amount) বলা হয়। প্রতি একক সময়ের জন্য ধার্য সুদ এবং আসলের অনুপাতকে সুদের হার (Rate of interest) বলা হয়। সুদ দুই প্রকার। যথা:

১. সরল সুদ বা মুনাফা (Simple interest) ২. চক্রবৃদ্ধি সুদ বা মুনাফা (Compound interest)

১. **সরল সুদ বা মুনাফা** (**Simple interest**): যখন কোন ব্যক্তি বা প্রতিষ্ঠান অপর কোন ব্যক্তি বা প্রতিষ্ঠানের নিকট হতে ঋণ বা ধার এমন শর্ত সাপেক্ষে গ্রহণ করে যেন শুধুমাত্র ঋণের উপর সুদ প্রদান করবে, তখন ঋণকৃত মূলধনের উপর প্রদত্ত অর্থকে সরল সুদ বলা হয়। এক্ষেত্রে সুদের উপর কোনো প্রকার সুদ গ্রহণ করা হয় না। এছাড়া ঋণকৃত অর্থকে আসল (Principal Value) বলা হয়।

সরল সুদ, $I = PV \times n\left(\frac{r}{100}\right)$

এখানে, সরল সুদ (Simple Interest) $= I$, মূলধন (Principal Value) $= P$ or PV

সময় (Time) $= n$, সুদরে হার (Rate of Interest) = $r\% = \frac{r}{100}$

সুদাসলের পরিমাণ (Future Value), $FV = PV + I$

উদাহরণ 1: 8% সরল সুদে মো: জামাল সাহেব 10,000 টাকা 10 বছরের জন্য একটি সমবায় সমিতি থেকে গ্রহণ করেন। 10 বছর পরে মো: জামাল সাহেব সমিতিকে কত টাকা সুদ দিবেন তা নির্ণয় করুন। সুদাসলের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে দেওয়া আছে,

মূলধন (Principal Value)=P or PV =10,000 টাকা, সময় (Time) $= n$ =10 বছর, সুদরে হার $r = 8\% = \frac{8}{100}$

আমরা জানি, সরল সুদ বা মুনাফা, $I = Pn\left(\frac{r}{100}\right) = 10{,}000 \times 10 \times \frac{8}{100} = 8{,}000$ টাকা

সুতরাং, সুদাসলের পরিমাণ (Future Value): $FV = PV + I = 10{,}000 + 8{,}000 = 18{,}000$ টাকা

নির্ণেয় সুদ 8,000 টাকা এবং সুদাসল 18,000 টাকা।

উদাহরণ 2: রহিমা বেগম এক ব্যক্তির নিকট হতে কিছু পরিমাণ টাকা ধার করে 6% সরল সুদে 5 বছর পর সুদে আসলে 39,000 টাকা পরিশোধ করেন। রহিমা বেগম ঐ ব্যক্তির নিকট হতে কত টাকা ধার করে ছিলেন?

সমাধান: এখানে, সুদাসলের পরিমাণ (Future Value), $FV =$ 39,000 টাকা

সময় n= 5, সুদের হার r= 6% = $\frac{6}{100}$, আসল বা মূলধন PV নির্ণয় করতে হবে। মনে করুন, মূলধন $PV = x$ টাকা

আমরা জানি, $FV = PV + I = PV + PV \times n\left(\frac{r}{100}\right) = PV\left\{1 + n\left(\frac{r}{100}\right)\right\}$

$$\Rightarrow x \times \left\{1 + 5 \times \left(\frac{6}{100}\right)\right\} = 39{,}000 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\Rightarrow x \times \left\{1 + \frac{3}{10}\right\} = 39{,}000$$

$$\Rightarrow x \times \left\{\frac{13}{10}\right\} = 39{,}000$$

$$\therefore x = 39{,}000 \times \frac{10}{13} = 30{,}000$$

নির্ণেয় রহিমা বেগম ঐ ব্যক্তি থেকে ধার করেছিলেন, 30,000 টাকা।

উদাহরণ 3: 12% সরল সুদে 40,000 টাকায় কত বছরে সুদে আসলে 78,400 টাকা হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে,সুদাসলের পরিমাণ (Future Value), $FV =$ 78,400 টাকা

আসল বা মূলধন $PV=$ 40,000 টাকা, সুদের হার = 12% = $\frac{12}{100}$, সময় n নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $FV = PV + I = PV + PVn\left(\frac{r}{100}\right) = PV\left\{1 + n\left(\frac{r}{100}\right)\right\}$

$$\Rightarrow 78{,}400 = 40{,}000\left\{1 + n\left(\frac{3}{25}\right)\right\}$$ [মান বসিয়ে]

$$\Rightarrow 78{,}400 = 40{,}000\left\{\frac{25 + 3n}{25}\right\}$$

$$\Rightarrow 25 + 3n = \frac{78{,}400}{40000} \times 25 = 49$$

$$\Rightarrow 3n = 49 - 25$$

$$\therefore n = \frac{24}{3} = 8$$

সুতরাং, নির্ণেয় সময় 8 বছর।

উদাহরণ 4: মানিক বাবু, অশোক বাবুর নিকট হতে 15000 টাকা ঋণ গ্রহণ করে। 7 বছর পর সুদসহ মানিক বাবু অশোক বাবুকে 24450 টাকা পরিশোধ করেন। সে অশোক বাবুর থেকে শতকরা কত সরল সুদে ঋণ গ্রহণ করেছিল?

সমাধান: এখানে, আসল (Principal Value) = $PV = 15{,}000$ টাকা

সুদাসলের পরিমাণ (Future Value), $FV =$ 24450 টাকা, সময় $n = 7$, সুদের হার r নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $FV = PV + I = PV + PV \times n\left(\frac{r}{100}\right) = PV\left\{1 + n\left(\frac{r}{100}\right)\right\}$

$$\Rightarrow 24450 = 15000\left\{1 + 7\left(\frac{r}{100}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow 1 + 7\left(\frac{r}{100}\right) = \frac{24450}{15000} = \frac{163}{100}$$

$$\Rightarrow 7\left(\frac{r}{100}\right) = \frac{163}{100} - 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{100}\right) = \frac{163 - 100}{100 \times 7}$$

$$\Rightarrow r = \frac{63 \times 100}{100 \times 7} = 9$$

সুতরাং, মানিকবাবু 9% সরল সুদে অশোক বাবুকে ঋণ পরিশোধ করেছিল।

উদাহরণ 5: মো: তামিম ইকবাল একজন ক্রিকেটার। তিনি ঢাকা শহরে একটি ফ্ল্যাট ক্রয় করতে চান। তিনি 48 মাসের জন্য 9% সরল সুদে পূবালী ব্যাংক লিঃ হতে 10,00,000 টাকা ঋণ গ্রহণ করেন। তিনি প্রতি মাসে প্রতি কিস্তিতে কত টাকা ব্যাংকে প্রদান করবেন তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে মূলধন PV= 10,00,000 টাকা, সময় n=48 মাস= $\frac{48}{12}=4$ বছর, সুদের হার r%= 9% $=\frac{9}{100}$

আমরাজানি, $I = PV \times n \times r = 10{,}00{,}000 \times 4 \times \frac{9}{100} = 3{,}60{,}000$

12 মাসে তিনি পরিশোধ করবেন 3,60,000 টাকা

সুতরাং, মো: তামিম ইকবাল **প্রতি মাসে** প্রতি কিস্তিতে ব্যাংকে প্রদান করবেন $3{,}60{,}000 \div 12 = 30{,}000$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ বা মুনাফা বা চক্রবৃদ্ধিকরণ (Compound Interest or Compounding): শুধুমাত্র প্রাথমিক আসল টাকার উপরই নয় বরং পূর্ববর্তী বছরে অর্জিত সুদের উপরও সুদ বা মুনাফা প্রদান করা হয় সেটিকেই চক্রবৃদ্ধি মুনাফা (Compound Interest) বলা হয়। আর যে পদ্ধতি বা প্রক্রিয়ায় এ চক্রবৃদ্ধি সুদের ধারণা ব্যবহার করে ভবিষ্যৎ মূল্য নির্ণয় করা হয় তাকে চক্রবৃদ্ধিকরণ (Compounding) বলা হয়।

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয়ের সূত্র হলো, সবৃদ্ধি মূল বা ভবিষ্যৎ সুদাসল, $FV = PV(1+r)^n$

যেখানে, চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সবৃদ্ধি মূল $= FV$, আসল বা মূল $= P$ or PV,

একক সময়ে একক আসলের উপর মুনাফার হার $= r$, সময় (বছরে) $= n$

সুতরাং, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা (Compound Interest) $CI = FV - PV$

বছরে একাধিকবার মুনাফা বা সুদ প্রদান (Compounding more frequently than annually): পূর্বে আপনারা বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি জেনেছেন। কিন্তু এ সুদ গণনা বা চক্রবৃদ্ধিকরণ বছরে একাধিকবারও প্রদান করা হতে পারে। বছরে একাধিকবার সুদ গণনা করাকে বলা হয় Multi-Period Compounding।এ Multi-Period Compounding-কে m দ্বারা চিহ্নিত করা হয়ে থাকে। যখন একাধিকবার সুদ প্রদান করা হয় তখন এ সূত্রটি ব্যবহার করা হয়: $FV = PV \times \left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$

যেখানে, আসল বা মূল $= P$ or PV, সুদের হার $= r\% = \frac{r}{100}$, সময় (বছরে) $= n$, বছরে চক্রবৃদ্ধির সংখ্যা $= m$

উদাহরণ 6: শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হারে চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 12,000 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, আসল বা মূল, $PV = 12000$ টাকা, একক সময়ে একক আসলের উপর মুনাফা $= r = 4\% = \frac{4}{100}$ এবং সময় $n = 3$ বছর

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে সবৃদ্ধি মূল $FV = PV(1+r)^n$

$$\therefore FV = PV(1+r)^n = 12000\left(1+\frac{4}{100}\right)^3 = 12000\left(\frac{104}{100}\right)^3$$

$$= 12000\left(\frac{52}{50}\right)^3 = 12000 \times \frac{52}{50} \times \frac{52}{50} \times \frac{52}{50} = \frac{12 \times 52 \times 52 \times 52}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1687296}{125} = 13498.37$$

$\therefore$ সবৃদ্ধি মূল=13498.37 টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $CI = FV - PV$ = (13498.37–12000) টাকা = 1498.37 টাকা

উদাহরণ 7: 10,000 টাকার উপর 5% হার সুদে 4 বছরের জন্য বিনিয়োগ করা হলে চক্রবৃদ্ধি মুনাফা এবং সরল মুনাফা নির্নয় করুন।

সমাধান: এখানে, আসল $PV = 10{,}000$ টাকা, সুদের হার, $r = 5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, সময় $n = 4$ বছর,

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি সুদাসল $= FV = PV(1+r)^n$

$$\Rightarrow FV = 10{,}000\left(1+\frac{1}{20}\right)^4$$

$$\Rightarrow FV = 10{,}000\left(\frac{21}{20}\right)^4$$

$$\Rightarrow FV = 10{,}000(1.05)^4$$

$$\Rightarrow FV = 10{,}000 \times 1.2155 = 12155$$

সুতরাং, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা (Compound Interest) $CI = FV - PV = 12{,}155 - 10{,}000 = 2155$ টাকা

সরল সুদ, $I = PV \times n \times \left(\frac{r}{100}\right)$

এখানে, মূলধন (Principal Value) = P or $PV = 10{,}000$ টাকা, সময় (Time) $= n = 4$ বছর

সুদরে হার (Rate of interest) = $r\% = \frac{r}{100} = \; = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, সরল সুদ (Simple Interest) = I নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, সরল সুদ, $I = PV \times n \times \left(\frac{r}{100}\right)$

$$\Rightarrow I = 10{,}000 \times 4 \times \left(\frac{1}{20}\right) = 2000 \quad \therefore \text{সরল সুদ}, I = 2000 \text{ টাকা}$$

সুতরাং, নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $CI = 2155$ টাকা এবং সরল সুদ, $I = 2000$ টাকা

এক বছরে একাধিকবার চক্রবৃদ্ধিকরণ (Multiperiod Compounding):

সময়েরব্যবধান	ব্যবহৃত নাম	বছরে চক্রবৃদ্ধি সংখ্যা	সূত্র
6 মাসঅন্তর	অর্ধ-বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি	$\frac{12}{6}$ মাস $= m = 2$ বার	$FV = PV\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$
4 মাস অন্তর	চতুর্মাসিক চক্রবৃদ্ধি	$\frac{12}{4}$ মাস $= m = 3$ বার	$FV = PV\left(1+\frac{r}{3}\right)^{3n}$
3 মাস অন্তর	ত্রৈমাসিক চক্রবৃদ্ধি	$\frac{12}{3}$ মাস $= m = 4$ বার	$FV = PV\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n}$
2 মাস অন্তর	দ্বিমাসিক চক্রবৃদ্ধি	$\frac{12}{2}$ মাস $= m = 6$ বার	$FV = PV\left(1+\frac{r}{6}\right)^{6n}$
1 মাস অন্তর	মাসিক চক্রবৃদ্ধি	$\frac{12}{1}$ মাস $= m = 12$ বার	$FV = PV\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}$
1 সপ্তাহ অন্তর	সাপ্তাহিক চক্রবৃদ্ধি	$\frac{365}{7}$ দিন $= m = 52$ বার	$FV = PV\left(1+\frac{r}{52}\right)^{52n}$
প্রতিদিন বা ধারাবাহিক	দৈনিক চক্রবৃদ্ধি	$\frac{365}{1}$ দিন $= m = 365$ বার	$FV = PV\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365n}$

উদাহরণ 8: বার্ষিক 4% হারে চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 2500 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল এবং চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করুন যখন (i) সুদ বছরে 1 বার দেয়া হলে; (ii) সুদ বছরে 4 বার দেয়া হলে; (iii) সুদ বছরে প্রতি মাসে দেয়া হলে।

সমাধান: (i) এখানে, আসল PV =2500 টাকা

সুদেরহার, $r = 4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$, সময় $n = 3$ বছর

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি সুদ $= FV = PV(1+r)^n = 2500\left(1+\frac{1}{25}\right)^3$

$FV = 2500 \times \left(1+\frac{1}{25}\right)^3 = 2500 \times 1.1249 = 2812.16$ টাকা

বছরে এক বার চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $CI = FV - PV = 2812.16 - 2500 = 312.16$ টাকা

(ii) এখানে, আসল P V=2500টাকা, $r = 4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 0.04$, সময় $n = 3$ বছর, বছরে চক্রবৃদ্ধির সংখ্যা $m = 4$ বার

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি সুদ $= FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$

$\Rightarrow FV = 2500\left(1+\frac{0.04}{4}\right)^{3\times4} = 2500\left(\frac{4.04}{4}\right)^{12} = 2500 \times 1.126825 = 2817.06$

বছরে চার (4) বার চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হলে মুনাফা $CI = FV - P = 2817.06 - 2500 = 317.06$ টাকা

(iii) সুদ বছরে প্রতিমাসে দেয়া হলে, বছরে চক্রবৃদ্ধির সংখ্যা, $m = 12$ বার

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি সুদ $= FV = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$

$\Rightarrow FV = 2500\left(1+\frac{0.04}{12}\right)^{3\times12} = 2500\left(\frac{12.04}{12}\right)^{36} = 2818.18$

বছরে প্রতিমাসে মুনাফা দেওয়া হলে চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, $CI = FV - PV = 2818.18 - 2500 = 318.18$ টাকা

উদাহরণ 9: চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 8 টাকা হলে 7500 টাকার এক বছর সাত মাসের মুনাফার পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, আসল $= PV = 7500$, সুদের হার $= r = 8\% = \frac{8}{100} = 0.08$, সময় $n = 1\frac{7}{12} = \frac{19}{12}$ বছর

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি সুদাসল $= FV = PV(1+r)^n = 7500(1+.08)^{\frac{19}{12}} = 8471.92$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $CI = FV - PV = 8471.93 - 7500 = 971.93$ টাকা।

উদাহরণ 10: একটি সঞ্চয়ী হিসাবে16,000 টাকা জমা আছে এবং ব্যাংকে বার্ষিক 6% হারে বছরে দুইবার সুদ দেয়। কত বছর আগে এ হিসাবে 8000 টাকা জমা ছিল তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, সুদাসল, $FV = 16000$, আসল, $P = 8000$, বছরে চক্রবৃদ্ধির সংখ্যা $m = 2$ বার

সুদ বছরে দুই বার প্রদত্ত হলে আমরা জানি, $FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} = 8000 \times \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2n}$

$\Rightarrow 16000 = 8000(1.03)^{2n}$

$\Rightarrow (1.03)^{2n} = \frac{16000}{8000} = 2$

$\Rightarrow \log(1.03)^{2n} = \log 2$, [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

$\Rightarrow 2n \times \log(1.03) = \log 2$

$\Rightarrow n = \dfrac{\log 2}{2 \times \log(1.03)} = 11.72$ বছর

নির্ণেয় সময় 11.72 বছর।

উদাহরণ 11: জনাব জাভেদ আহমেদ ব্যাংক থেকে 50,000 টাকা ঋণ গ্রহণ করে। 6 বছর পর্যন্ত কোন টাকা ফেরত দেয়নি। তাই ব্যাংক তার নিকট এখন 110,000 টাকা দাবি করল। দাবিকৃত অর্থের উপর শতকরা বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, চক্রবৃদ্ধি সুদাসল $FV = 1{,}10{,}000$ টাকা, আসল $PV = 50{,}000$ টাকা, সময় $n = 6$ বছর

বার্ষিক সুদের হার r নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি সুদাসল, $FV = PV(1+r)^n$

$$\Rightarrow 1{,}10{,}000 = 50{,}000(1+r)^6$$

$$\Rightarrow (1+r)^6 = \frac{110000}{50000} = 2.2$$

$$\Rightarrow (1+r)^{6\times\frac{1}{6}} = (2.2)^{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow 1 + r = (2.2)^{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow r = 1.14 - 1 = 0.1404$$

$$\therefore r = 14.04\%$$

বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার $r = 14.04\%$.

উদাহরণ 12: 75,000 টাকার চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত হবে নির্ণয় করুন যদি চক্রবৃদ্ধি মুনাফা বছরে তিন বার প্রদান করা হয় এবং প্রথম দুই বছরের মুনাফার হার 6% এবং তৃতীয় বর্ষে মুনাফার হার 9% হয়।

সমাধান: এখানে, আসল $PV = 75{,}000$ টাকা, সময় প্রথম দুই বছর $n = 2$ এবং পরবর্তী এক বছর অর্থাৎ $n = 1$

বছরে চক্রবৃদ্ধির সংখ্যা $m = 3$ বার,

বার্ষিক সুদের হার প্রথম দুই বছর $r = 6\% = 0.06$ এবং তৃতীয়বর্ষে, $r = 9\% = 0.09$।

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধির সুদাসল, $FV = PV\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{mn}$

$$\Rightarrow FV = 75{,}000\left(1+\frac{0.06}{3}\right)^{3\times2} = 84{,}462.18 \text{ টাকা}$$

প্রথম দুই বছরে চক্রবৃদ্ধির সুদ $CI_1 = 84{,}462.18 - 75{,}000 = 9462.18$ টাকা

আবার, তৃতীয় বর্ষে মূলধন বা আসল হবে, $PV = 84{,}462.18$ টাকা

সুতরাং, চক্রবৃদ্ধির সুদাসল, $FV = PV\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{mn}$

$\Rightarrow FV = 84,462.18\left(1+\frac{0.09}{3}\right)^{3\times1} = 92294.10$ টাকা

তৃতীয় বর্ষে চক্রবৃদ্ধির সুদ $CI_2 = 92294.10 - 84,462.18 = 7831.92$ টাকা

নির্ণেয় তিন বছরে মোট প্রাপ্য মুনাফা $CI = CI_1 + CI_2 = 9462.18 + 7831.92 = 17294.10 = 17294$ (প্রায়) টাকা।

সরল সুদ এবং চক্রবৃদ্ধি সুদের মধ্যে পার্থক্য (Difference between Simple interest and Compound interest):
সরল সুদ এবং চক্রবৃদ্ধি সুদ উভয়ই সুদের অন্তর্গত হলেও এদের মধ্যে যথেষ্ট পার্থক্য বিদ্যমান। নিম্নে পার্থক্যগুলো বর্ণনা করা হলো:

সরল সুদ	চক্রবৃদ্ধি সুদ
১. প্রতি বছর মূল বা আসল টাকার উপরে নির্দিষ্ট হারে সুদ ধার্য করাকে সরল সুদ বলা হয়।	১. প্রতিবছর সুদ, আসলের সাথে যোগ হয়ে বৃদ্ধি প্রাপ্ত আসলের উপর নির্দিষ্ট হারে সুদ ধার্য করাকে চক্রবৃদ্ধি সুদ বলা হয়।
২. সরল সুদের ক্ষেত্রে সুদের পরিমাণ কম হয়।	২. চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে সুদের পরিমাণবেশিহয়।
৩. সরল সুদ সব সময় আসলের উপর ধার্য করা হয়।	৩. চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে সুদাসলের উপর ধার্য করা হয়।
৪.সুদেরহার ও আসল সব সময়ঠিক থাকে।	৪. চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে সুদের হার ঠিক থাকে কিন্তু আসল পরিবর্তিত হতে থাকে।
৫. সূত্র: $FV = PV + PV \times r \times n = PV(1+nr)$	৫. সূত্র: $FV = PV(1+r)^n$

সারসংক্ষেপ:

- সরল সুদ, $I = PV \times n\left(\frac{r}{100}\right)$
- চক্রবৃদ্ধি সুদাসল বা সবৃদ্ধি মূল, $FV = PV(1+r)^n$
- বছরে একাধিকবার মুনাফা বা সুদ প্রদান করা হলে সূত্রটি হবে, $FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$

পাঠ-৭.২ বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্তি
Annuities

উদ্দেশ্য

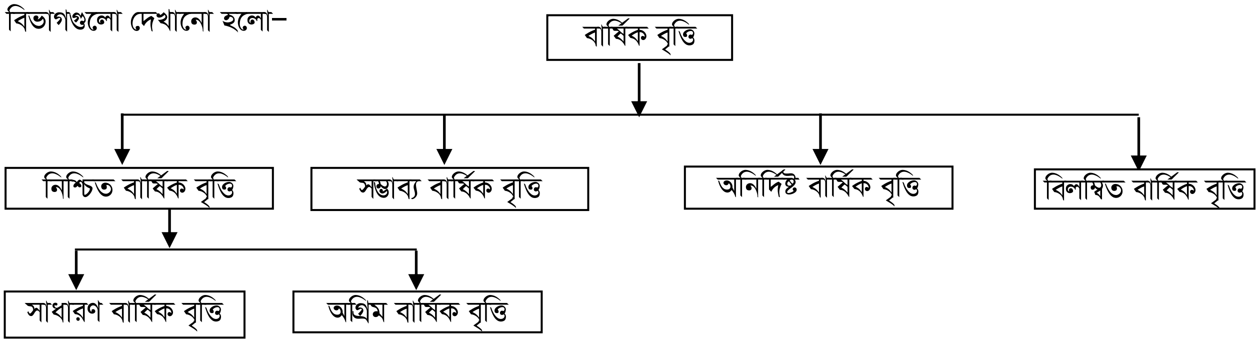
এ পাঠ শেষে আপনি-

- বার্ষিক বৃত্তি কী তা বর্ণনা করতে পারবেন;
- বার্ষিক বৃত্তির ভাগসমূহ লিখতে পারবেন;
- সাধারণ বার্ষিক বৃত্তির সূত্র ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন;
- অগ্রিম বার্ষিক বৃত্তির সূত্র ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

বার্ষিক বৃত্তি
Annuities

নির্দিষ্ট মেয়াদে বা স্কিমে প্রতি বছর একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ জমা দিয়ে একটি নির্দিষ্ট মেয়াদ শেষে জমাকৃত মূল অর্থ এবং তার উপর প্রাপ্ত চক্রবৃদ্ধি সুদের সমুদয় প্রাপ্তিকে বলা হয় বার্ষিক বৃত্তি বা **Annuity**। অন্যভাবে বলা যায়, **নির্দিষ্ট সময়** পর পর **সমপরিমাণ** অর্থ প্রদান বা প্রাপ্তির সিরিজকে বার্ষিক বৃত্তি বা **Annuity** বলা হয়। অর্থাৎ, প্রতি বছর বা নির্দিষ্ট সময় পর পর কিস্তি প্রদান করলেই সেটি বৃত্তি বা **Annuity** হবে না, প্রতি কিস্তিতে সম পরিমাণ অর্থও হতে হবে। **উদাহরণ স্বরূপ:** কিস্তিতে একটি ফ্ল্যাট ক্রয়ের জন্য প্রতি মাসে নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ প্রদান কিংবা কোনো বাড়ি নির্মাণের জন্য ব্যাংক কর্তৃক গৃহীত ঋণের মাসিক বা ত্রৈমাসিক ভিত্তিতে সমান অঙ্কের দায় পরিশোধ করা ইত্যাদি।

মেয়াদ ও সময়ের উপর ভিত্তি করে বৃত্তি বিভিন্ন প্রকার হতে পারে। নিম্নে ছক আকারে বিভিন্ন প্রকার বার্ষিক বৃত্তির শ্রেণি বিভাগগুলো দেখানো হলো–

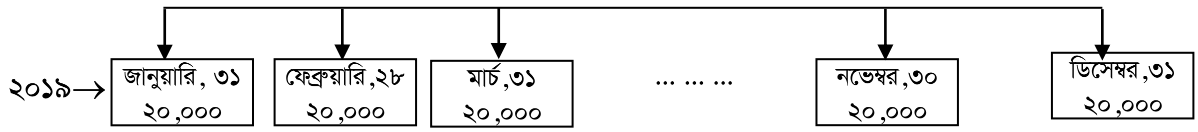


নিম্নে বিভিন্ন প্রকার বৃত্তি সম্পর্কে আলোচনা করা হলো–

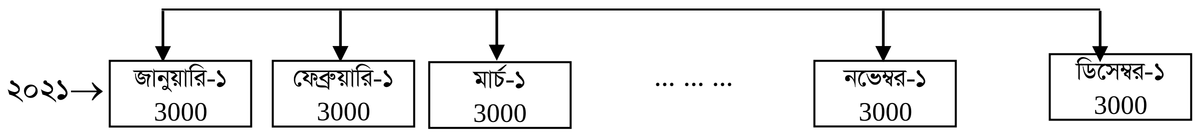
১. **নিশ্চিত বার্ষিক বৃত্তি (Definite Annuity):** যখন ভবিষ্যতের কোন নির্দিষ্ট সময় পর্যন্ত সমহারে কিস্তি প্রদান করা হয় তখন তাকে **নিশ্চিত বার্ষিক বৃত্তি** বলা হয়।নিশ্চিত বৃত্তি শর্তহীন হয়ে থাকে। বৃত্তি শুরু এবং শেষ হওয়ার তারিখ সুনির্দিষ্ট থাকে। এক্ষেত্রে বছরের সংখ্যা (n) জানা থাকে। যেমন: অধ্যাপক শহদুির রহমান ২০২০ সাল থেকে ২০২৫ সাল পর্যন্ত প্রতিবছর 60,000 টাকা করে জনতা ব্যাংকে সঞ্চয়ের সিদ্ধান্ত নিলেন। এ ক্ষেত্রে বৃত্তি প্রদানের মেয়াদ নির্দিষ্ট করে বলা আছে, তাই এটি নিশ্চিত বৃত্তি। নিশ্চিত বার্ষিক বৃত্তি দুই প্রকার। যথা–

(ক) সাধারণ বার্ষিক বৃত্তি (Ordinary or Immediate Annuity): প্রতিটি কিস্তি নির্দিষ্ট সময়কালের শেষে (End of the period) প্রদান করা হয় বা পাওয়া যায় তাকে **সাধারণ বার্ষিক বৃত্তি** বলা হয়। যেমন: ক্রিকেটার আকবর খান ২০১৯ সালের

জানুয়ারি থেকে ডিসেম্বর পর্যন্ত প্রতি মাসের শেষে 20,000 টাকা করে সিটিব্যাংকে জমা রাখেন। এটি সাধারণ বৃত্তির উদাহরণ। নিচে Time Line এর মাধ্যমে দেখানো হলো–



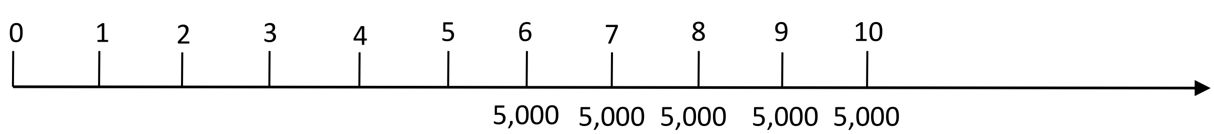
(খ) অগ্রিম বৃত্তি (Annuity Due): যদি প্রতিটি কিস্তি নির্দিষ্ট সময়কালের শুরুতে (Begining of the period) প্রদান করা হয় বা পাওয়া যায় তাকে **অগ্রিম বার্ষিক বৃত্তি** বলা হয়।**উদাহরণ:** মো: জাহেদ সিদ্ধান্ত নিলেন যে ২০২১ সালের জানুয়ারি থেকে ডিসেম্বর পর্যন্ত প্রতিমাসের শুরুতে 3,000 টাকা করে পূবালী ব্যাংকে জমা রাখবেন।



২. **সম্ভাব্য বা শর্তযুক্ত বার্ষিক বৃত্তি (Posible Annuity):** যখন ভবিষ্যতে কোন ঘটনা ঘটা পর্যন্ত অনিশ্চিত সময়ের জন্য বৃত্তি প্রদান করা হয়, তখন তাকে সম্ভাব্য বা শর্তযুক্ত বার্ষিক বৃত্তি বলা হয়। এ ক্ষেত্রে বৃত্তি প্রদান ভবিষ্যতে কখন সময় শেষ হবে সেটা নির্ধারিত থাকে না। **উদাহরণ:** জনাব আমিরুল হক তার মেয়ের বিয়ে না হওয়া পর্যন্ত প্রতিমাসে 5000 টাকা করে একটি মাসিক প্রকল্পে জমা রাখবেন বলে ঠিক করলেন। এখানে মেয়ের বিয়ে যতদিন না হবে ততদিন বৃত্তি চলবে, এ জন্য এটা সম্ভাব্য বা শর্তযুক্ত বার্ষিক বৃত্তি।

৩. **অনির্দিষ্ট বার্ষিক বৃত্তি (Indefinite Annuity):** নির্দিষ্ট সময় পর পর সমপরিমাণ কোন বৃত্তির অর্থ যদি অনির্দিষ্টকাল পর্যন্ত প্রদান করা হয় বা পাওয়া যায় তাকে অনির্দিষ্ট বার্ষিক বৃত্তি বা Indefinite Annuityবলা হয়। এ ক্ষেত্রেও প্রতিটি কিস্তির অর্থ সমান থাকে কিন্তু বছরের সংখ্যা বা সময়কাল নির্দিষ্ট থাকে না। **উদাহরণ:** জনাব ইমতিয়াজ প্রতিবছর পূর্ব কোটালীপাড়া ইউনিয়ন উচ্চ বিদ্যালয়ে ১ জন মেধাবী ছাত্রকে ১০,০০০ টাকা বৃত্তি প্রদান করার জন্য কিছু টাকা দানের মাধ্যমে একটি ফান্ড গঠন করলেন। উক্ত ফান্ড থেকে প্রাপ্ত সুদের মাধ্যমে অনির্দিষ্ট কাল ধরে বৃত্তি প্রদান চলতে থাকবে। এটি হলো অনির্দিষ্ট বার্ষিক বৃত্তি।

৪. **বিলম্বিত বার্ষিক বৃত্তি (Delayed Annuity):** যখন কয়েক বছর পর থেকে ভবিষ্যতের কোন নির্দিষ্ট সময় পর্যন্ত সমপরিমাণ টাকার কিস্তি বা বৃত্তি প্রদান করা হয়, তখন তাকে বিলম্বিত বৃত্তি বলা হয়।



উপরে উল্লেখিত টাইম লাইনে দেখা যাচ্ছে যে, প্রথম 5 বছরে কোনো কিস্তি পাওয়া যায় নাই। ৬ষ্ট বছরের শেষ থেকে পরবর্তী 5 বছর 5000 টাকা করে পাওয়া যাবে। বিলম্বে বৃত্তি প্রদান শুরু হওয়ায় এর নামকরণ বিলম্বিত বার্ষিক বৃত্তি।

বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় (Present Value of an Annuity): ভবিষ্যতে নির্দিষ্ট সময় ধরে সমপরিমাণ টাকার একাধিক কিস্তি পাওয়া যাবে অথবা প্রদান করা হবে তার বর্তমান মূল্যকেই বৃত্তির বর্তমান মূল্য বলা হয়। বিভিন্ন বেসরকারি ব্যাংক কিছু নতুন ধরনের বিনিয়োগ সুযোগ বা স্কিম প্রদান করছেন। **উদাহরণ:** জনাব সালেহ আহম্মদকে ব্রাক ব্যাংক প্রস্তাব দেয় যে, বর্তমানে নির্দিষ্ট পরিমাণ এককালীন কিছু টাকা ব্রাক ব্যাংককে প্রদান করতে এবং নির্দিষ্ট সময় ধরে (1 বা 2 বা 5 বা 7 বা 10 বছর) এই মূলধনের সাপেক্ষে ভবিষ্যতে ব্যাংক জনাব সালেহ আহম্মদকে প্রতিবছর বা প্রতিমাসে নির্দিষ্ট পরিমাণ

অর্থ প্রদান করবে। এ ক্ষেত্রে ভবিষ্যতে নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থের বৃত্তিসমূহ পাওয়ার জন্য বর্তমানে এককালীন কত টাকা ব্যাংককে দেওয়া প্রয়োজন সেটি জানার জন্য 'বৃত্তির বর্তমান মূল্য' নির্ণয় করতে হয়।

প্রতি মেয়াদের শেষে বা শুরুতে প্রাপ্য বা দেওয়ার উপর ভিত্তি করে বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্যকে দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে। যথা–(ক) বার্ষিক সাধারণ বৃত্তি (Ordinary Annuity) (খ) বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তি (Annuity Due)

(ক) বার্ষিক সাধারণ বৃত্তির সূত্র (Ordinary Annuity): কোনো প্রতিষ্ঠান থেকে ঋণ গ্রহণ করলে বা কোনো প্রতিষ্ঠানে অর্থ জমা রাখলে বছরের বা সময়কালের (End of the period) শেষে কিস্তি প্রদান বা প্রাপ্য হলে তাকে বার্ষিক সাধারণ বৃত্তি বলা হয়। বার্ষিক সাধারণ বৃত্তির নির্ণয় করার সূত্র: $PVA = \frac{A}{i}\left\{1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right\}$

এখানে, PVA= বৃত্তির বর্তমান মূল্য (Present Value of Annuity), A= প্রতি কিস্তিতে অর্থের পরিমাণ (Ammount per installment), n = বছরের সংখ্যা (Number of Years), i = সুদের হার (Interest rate)

উদাহরণ 1: সলিমা বেগম উচ্চ শিক্ষার জন্য একটি 'শিক্ষা বীমা পলিসি' গ্রহণ করেছেন। বীমা কোম্পানি আগামী 4 বছর সলিমা বেগমকে প্রতিবছর 100000 টাকা প্রদান করবে। সুদের হার 5% হলে ভবিষ্যতে প্রাপ্য অর্থের কিস্তি সমূহের বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, A = ভবিষ্যতে প্রাপ্ত প্রতি কিস্তিতে অর্থের পরিমাণ=100000 টাকা, n = বছরের সংখ্যা=4 বছর

i = সুদের হার = 5% $= \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0.05$, PVA = বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $PVA = \frac{A}{i}\left\{1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right\}$

বা, $PVA = \frac{100000}{0.05}\left\{1 - \frac{1}{(1+0.05)^4}\right\}$, [মান বসিয়ে]

বা, $PVA = 354595.05$

বছরে একাধিকবার কিস্তি প্রদান করা হলে বার্ষিক সাধারণ বৃত্তির জন্য নিম্নের সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে–

$$PVA = \frac{A}{\frac{i}{m}}\left\{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}}\right\}$$

এখানে, বছরে একবার কিস্তি প্রদান করা হলে বার্ষিক সাধারণ বৃত্তির জন্যযে সূত্র ব্যবহার করা হয়, সে সূত্রের সাথে নতুন করে শুধু m যুক্ত করা হয়েছে।

m = বছরে প্রদানকৃত বা প্রাপ্য কিস্তির সংখ্যা।

উল্লেখ্য যে, অনেক সময় যদি কোনো গাণিতিক সমস্যাতে বছরের শেষে বা শুরুতে কিস্তি প্রদানের কথা উল্লেখ না থাকে তাহলে সব সময় শেষে ধরে নিতে হবে। সুতরাং, সমস্যা সমাধানে তখন বার্ষিক সাধারণ বৃত্তির সূত্র ব্যবহার করতে হবে।

(খ) বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তি (Annuity Due): কোনো প্রতিষ্ঠান থেকে ঋণ গ্রহণ করলে বা কোনো প্রতিষ্ঠানে অর্থ জমা রাখলে বছরের শুরুতে কিস্তি প্রদান বা প্রাপ্য হলে তাকে বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তি বলা হয়। বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তির নির্ণয় করার সূত্র:

$$PVA_{Due} = \frac{A}{i}(1+i)\left\{1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right\}$$

এখানে, PVA= বৃত্তির বর্তমান মূল্য (Present Value of Annuity), A =ভবিষ্যতে প্রাপ্ত প্রতি কিস্তিতে অর্থের পরিমাণ (Ammount per installment), n = বছরের সংখ্যা (Number of Years), i = সুদের হার (Interest rate)

বছরে একাধিকবার কিস্তি প্রদান করা হলে বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তির জন্য নিম্নের সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে–

$$PVA_{Due} = \frac{A}{\frac{i}{m}}\left(1+\frac{i}{m}\right)\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}}\right\}$$

এখানে, বছরে একবার কিস্তি প্রদান করা হলে বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তির জন্য যে সূত্র ব্যবহার করা হয়, সে সূত্রের সাথে নতুন করে শুধু m যুক্ত করা হয়েছে। $m =$ বছরে প্রদানকৃত বা প্রাপ্য কিস্তির সংখ্যা।

উদাহরণ 2: মোঃ শাজাহান খান একটি মেশিন ক্রয় করতে চায় যার বাজার মূল্য 5,00,000 টাকা। সে মেশিন ক্রয় মূল্যের সমান অর্থ উত্তরা ব্যাংক লিঃ হতে 9% সুদে ঋণ গ্রহণের ব্যবস্থা করেছে। ঋণের অর্থ ত্রৈমাসিক এর শর্তে 5 বছরে পরিশোধ করতে হবে। তাহলে ত্রৈমাসিক কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ এখানে, $PVA_{Due} = 5,00,000$ টাকা, $i = 9\% = \frac{9}{100} = 0.09$, $n = 5$ বছর এবং $m = \frac{12}{3} = 4$ বার, $A =$ ত্রৈমাসিক কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $PVA_{Due} = \frac{A}{\frac{i}{m}}\left(1+\frac{i}{m}\right)\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}}\right\}$

$$\Rightarrow 5,00,000 = \frac{A}{\frac{0.09}{4}}\left(1+\frac{0.09}{4}\right)\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{0.09}{4}\right)^{5\times4}}\right\}, \text{[মান বসিয়ে]}$$

$$\Rightarrow 5,00,000 = \frac{A}{0.0225}\times1.0225\times0.359183528$$

$$\Rightarrow A = \frac{5,00,000\times0.0225}{1.0225\times0.359183528} = 30,631.82 \text{ টাকা}$$

সুতরাং, ত্রৈমাসিক কিস্তির পরিমাণ 30,631.82 টাকা

বার্ষিক বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্য নির্ধারণ (Calculation of future value of an annuity): প্রতি বছর নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ নির্দিষ্ট হারে কোথাও বিনিয়োগ করলে নির্দিষ্ট সময় পরে চক্রবৃদ্ধি হারে বেড়ে তা কী পরিমাণ দাঁড়ায় তাকেই বার্ষিক বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্য বলা হয়। অর্থাৎ, বর্তমানে একাধিকবার সমপরিমাণ টাকা প্রাপ্তি বা প্রদানের ভবিষ্যৎ মূল্যকেই বার্ষিক বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্য বলা হয়।

প্রতি মেয়াদের শেষে বা শুরুতে প্রাপ্য বা দেওয়ার উপর ভিত্তি করে বার্ষিক বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্যকে দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে। যথা– (ক) বার্ষিক সাধারণ বৃত্তি (Ordinary Annuity) (খ) বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তি (Annuity Due)

(ক) বার্ষিক সাধারণ বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্য নির্ণয়ের সূত্র (Ordinary Annuity): কোনো প্রতিষ্ঠান থেকে ঋণ গ্রহণ করলে বা কোনো প্রতিষ্ঠানে অর্থ জমা রাখলে বছরের বা সময়কালের শেষে (end of the period) কিস্তি প্রদান বা প্রাপ্য হলে তাকে বার্ষিক সাধারণ বৃত্তি বলা হয়।

বার্ষিক সাধারণ বৃত্তির **ভবিষ্যৎ মূল্য** নির্ণয় করার সূত্র: $FVA = \frac{A}{i}\left\{(1+i)^n - 1\right\}$ $\quad FVA = \frac{A}{\frac{i}{m}}\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} - 1\right\}$

এখানে, FVA= বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্য, A = প্রতি কিস্তিতে অর্থের পরিমাণ, n = বছরের সংখ্যা, i = সুদের হার

বছরে একাধিকবার কিস্তি প্রদান করা হলে ভবিষ্যতে **বার্ষিক সাধারণ বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্য** নির্ণয়ের জন্য নিম্নের সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে–

উদাহরণ 3: কোনো প্রভিডেন্ট ফান্ডে জমা অর্থ বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদে বিনিয়োগ করা হয়। এক ব্যক্তি প্রতিমাসে নিজ বেতনের 12% উক্ত ফান্ডে জমা দেন এবং নিয়োগকর্তা প্রতিমাসে এটার সাথে তার বেতনের 10%যুক্ত করেন। ঐ ব্যক্তির মাসিক বেতন 60,000 টাকা হলে 25 বছর কর্ম জীবন শেষে প্রভিডেন্ট ফান্ডে জমাকৃত অর্থের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, মাসিক বৃত্তির পরিমাণ A

ঐ ব্যক্তি নিজে জমা দেন প্রতি মাসে $60{,}000\times\frac{12}{100} = 7200$ টাকা

নিয়োগ কর্তা জমাদেন প্রতিমাসে $60{,}000\times\frac{10}{100} = 6000$ টাকা

সুতরাং, মাসিক কিস্তির পরিমাণ $A = 13200$ টাকা

সুদের হার i = 10% $= \frac{10}{100} = 0.10$, সময় n = 25 বছর, বছরে কিস্তির সংখ্যা m = 12

আমরা জানি, $FVA = \frac{A}{\frac{i}{m}}\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} - 1\right\}$

$$FVA = \frac{13200}{\frac{0.10}{12}}\left\{\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{25\times12} - 1\right\} = 1584000\times11.0569450 = 1{,}75{,}14{,}200.88 \text{ টাকা}$$

নির্ণেয় ঐ ব্যক্তির জমাকৃত অর্থের পরিমাণ হবে $1{,}75{,}14{,}200.88$ টাকা।

(খ) বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্য (Annuity Due): কোনো প্রতিষ্ঠান থেকে ঋণ গ্রহণ করলে বা কোনো প্রতিষ্ঠানে অর্থ জমা রাখলে বছরের শুরুতে কিস্তি প্রদান বা প্রাপ্য হলে তাকে বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তির **ভবিষ্যৎ মূল্য** বলা হয়। বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্য নির্ণয় করার সূত্র: $FVA_{Due} = \frac{A}{i}(1+i)\left\{(1+i)^n - 1\right\}$ $\quad FVA_{Due} = \frac{A}{\frac{i}{m}}\left(1+\frac{i}{m}\right)\left\{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} - 1\right\}$

এখানে, FVA_{Due} = বর্ষিক বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্য, A = ভবিষ্যতে প্রাপ্ত প্রতি কিস্তিতে অর্থের পরিমাণ, n = বছরের সংখ্যা, i = সুদের হার.

বছরে একাধিকবার কিস্তি প্রদান করা হলে বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তির ভবিষ্যৎ মূল্যের সূত্র:

এখানে, বছরে একবার কিস্তি প্রদান করা হলে বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তির জন্য যে সূত্র ব্যবহার করা হয়, সে সূত্রের সাথে নতুন করে শুধু m যুক্ত করা হয়েছে। m = বছরে প্রদানকৃত বা প্রাপ্য কিস্তির সংখ্যা।

উদাহরণ 4: জনাব তামিম ইকবালের ২৮তম জন্ম বার্ষিকীতে তার পিতা অঙ্গীকার করেন যে ৩৫তম জন্ম বার্ষিকীতে 4,20,000 টাকা প্রদান করবেন। এ লক্ষ্যে উক্ত পরিমাণ অর্থ প্রদানের জন্য 10% চক্রবৃদ্ধি সুদে প্রতিবছর শেষেকী পরিমাণ অর্থ জমা করতে হবে এবং প্রতিবছর শুরুতে কী পরিমাণ অর্থ জমা করতে হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: বছরের শেষে বার্ষিক বৃত্তির ক্ষেত্রে–

এখানে, A = বার্ষিক বৃত্তির বছরের শেষে ভবিষ্যতে প্রাপ্ত প্রতি কিস্তিতে অর্থের পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে।

n = বছরের সংখ্যা $=35-28=7$ বছর, i = সুদেরহার $=10\% = \frac{10}{100} = 0.10$

FVA= বার্ষিক বৃত্তির 7 বছরে মোট ভবিষ্যৎ মূল্য = 4,20,000 টাকা

আমরা জানি, $FVA = \frac{A}{i}\left\{(1+i)^n - 1\right\}$

বা, $4{,}20{,}000 = \frac{A}{0.10}\left\{(1+0.10)^7 - 1\right\}$, [মান বসিয়ে]

বা, $4{,}20{,}000 = \frac{A}{0.10} \times 0.9487171$

বা, $A = \frac{4{,}20{,}000 \times 0.10}{0.9487171} = 44270.31$

সুতরাং, বছরের শেষে প্রতি কিস্তির পরিমাণ 44270.31 টাকা।

বছরের শুরুতে বার্ষিক বৃত্তির ক্ষেত্রে, A = বার্ষিক বৃত্তির বছরের শুরুতে ভবিষ্যতে প্রাপ্ত প্রতি কিস্তিতে অর্থের পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে। n = বছরের সংখ্যা = $35-28=7$ বছর, i = সুদের হার $=10\% = \frac{10}{100} = 0.10$, FVA_{Due} = বার্ষিক বৃত্তির 7 বছরে মোট ভবিষ্যৎ মূল্য = 4,20,000 টাকা

আমরা জানি, $FVA_{Due} = \frac{A}{i}(1+i)\left\{(1+i)^n - 1\right\}$

বা, $4{,}20{,}000 = \frac{A}{0.10}(1+0.10)\left\{(1+0.10)^7 - 1\right\}$

বা, $4{,}20{,}000 = \frac{A}{0.10}(1.10) \times 0.9487171$

বা, $A = \frac{4{,}20{,}000 \times 0.10}{1.10 \times 0.9487171} = 40245.74$

সুতরাং, বছরের শুরুতে প্রতি কিস্তির পরিমাণ44270.31 টাকা।

সারসংক্ষেপ:

- নির্দিষ্ট সময় পর পর **সম পরিমাণ** অর্থ প্রদান বা প্রাপ্তির সিরিজকে বার্ষিক বৃত্তি বা **Annuity** বলা হয়।
- বার্ষিক সাধারণ বৃত্তির সূত্র: $PVA = \frac{A}{i}\left\{1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right\}$
- বার্ষিক অগ্রিম বৃত্তির সূত্র: $PVA = \frac{A}{i}(1+i)\left\{1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right\}$

পাঠ-৭.৩ অবচয়, প্রতিপূরক তহবিল, বিধি, বাট্টাকরণ এবং এ্যামারটাইজেসন
Depreciation, Sinking fund, Rules,Discounting and Amartization

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অবচয়ের সূত্র ব্যবহার করে কোন সম্পত্তির আয়ুষ্কাল নির্ণয় করতে পারবেন;
- প্রতিপূরক তহবিল সম্পর্কে লিখতে পারবেন;
- বিভিন্ন বিধি ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন;
- বাট্টাকরণ কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- এ্যামারটাইজেসন কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

অবচয়
Depreciation

অবচয় বলতে সম্পত্তির ব্যবহার জনিত ক্ষয়কে বুঝায়। এ ক্ষেত্রে আসল মূল্য প্রতি বছর কমতে থাকে একটি নির্দিষ্ট হারে, এ নির্দিষ্ট হারকে অবচয়ের হার বলা হয়। পরবর্তী বছর এ হ্রাস প্রাপ্ত মূল্য আবার আসল হিসেবে ব্যবহৃত হয়। অবচয় যদি প্রতিবছর সমান হারে হয় তাহলে চক্রবৃদ্ধি সুদের i হয়ে যাবে d এবং সূত্রটি হবে নিম্নরূপঃ $SA = P(1-d)^n$,

$SA=$ সম্পত্তির ভগ্নাবশেষ মূল্য, $P=$ সম্পত্তির ক্রয় মূল্য, $d=$ অবচয়ের হার, $n=$ সম্পত্তির আয়ুষ্কাল।

উদাহরণ 1: একটি মেশিনের ক্রয় মূল্য 30,000 টাকা এবং আয়ুস্কাল 10 বছর। যদি হ্রাসকৃত মূল্যের উপর 12% হারে অবচয় ধার্য করা হয়, তাহলে সম্পত্তির ভগ্নাবশেষ মূল্য কত হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, সম্পত্তির ক্রয়মূল্য P =30,000 টাকা

অবচয়ের হার $d = 12\% = \frac{12}{100} = 0.12$, আয়ুষ্কাল n =10 বছর এবং ভগ্নাবশেষ মূল্য SA নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $SA = P(1-d)^n$

বা, $SA = 30{,}000 \times (1-0.12)^{10}$

বা, $SA = 8355.03$

নির্ণেয়, ভগ্নাবশেষ মূল্য $SA = 8355.03$ টাকা

উদাহরণ 2: একটি ফ্ল্যাটের প্রাথমিক মূল্য ছিল 45,00,000 টাকা। ফ্লাটটির অবচিতির হার 2.5%। বর্তমানে ফ্ল্যাটটি 30,00,000 টাকায় মূল্যায়িত হলে, ফ্ল্যাটটি কত বছর পূর্বে প্রতিষ্ঠিত হয়েছিল নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, সম্পত্তির ক্রয়মূল্য P = 45,000 টাকা

অবচিতির হার $d = 2.5\% = \frac{2.5}{100} = 0.025$

ভগ্নাবশেষ মূল্য SA= 30,00,000 টাকা

আয়ুষ্কাল n নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $SA = P(1-d)^n$

বা, $30{,}00{,}000 = 45{,}00{,}000(1-0.025)^n$

বা, $(0.975)^n = \frac{30,00,000}{45,00,000} = 0.6666667$

বা, $\log(0.975)^n = \log 0.6666667$, [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

বা, $n\log(0.975) = \log 0.6666667$

বা, $n = \frac{\log 0.6666667}{\log(0.975)}$

বা, $n = 16.02$

$\therefore$ নির্ণেয় ফ্ল্যাটটি 16.02 বছর পূর্বে নির্মিত।

প্রতিপূরক তহবিল (Sinking Fund): একটি নির্দিষ্ট সময়ান্তে কোন দায় পরিশোধ করার জন্য অথবা সম্পত্তি প্রতিস্থাপনের জন্য একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা কারবার হতে সরিয়ে প্রতিবছর নিয়মিতভাবে চক্রবৃদ্ধি সুদে বিনিয়োগ করে যে সঞ্চিতি তহবিল সৃষ্টি করা হয় তাকে প্রতিপূরক তহবিল বলা হয়। প্রতিপূরক তহবিলের অর্থ নির্ণয়ের জন্য বার্ষিক বৃত্তির সাধারণ সূত্র ব্যবহার করা হয়। কারণ নির্দিষ্ট সময় অন্তর নির্দিষ্ট অর্থ বার্ষিক বৃত্তির উদাহরণ।

প্রতিপূরক তহবিল সৃষ্টির উদ্দেশ্য:

(i) ঋণ বা ঋণপত্র পরিশোধের জন্য
(ii) ক্ষয়িষ্ণু সম্পত্তি প্রতিস্থাপনের জন্য
(iii) অবচয়যোগ্য সম্পত্তির প্রতিস্থাপনের জন্য; এবং
(iv) ইজারাপত্রের পুনর্নবীকরণ **(Renewal of lease)** এর জন্য

69 বিধি (Rule of 69): চক্রবৃদ্ধিকরণের ক্ষেত্রে কত % সুদের হারে বা কত বছরে কোন আসল টাকা দ্বিগুণ হবে সেটা আনুমানিকভাবে এবং দ্রুত নির্ণয় করার একটি কৌশল হলো **Rule of 69**।

Rule of 69-এর মাধ্যমে নির্ধারিত সুদের হার এবং বছরের সংখ্যা সম্পূর্ণ সঠিক না হলেও প্রকৃত মানের নিকটবর্তী হয়ে থাকে।

Rule of 69 হলো, $n = 0.35 + \frac{69}{i}$, এখানে, n = বছর সংখ্যা, i= সুদের হার

72 বিধি (Rule of 72): বার্ষিক চক্রবৃদ্ধিকরণের ক্ষেত্রে (বছরে এক (1) বার সুদ গণনা) কত বছরে বা কত % সুদের হারে কোন আসল টাকা দ্বিগুণ হবে সেটি দ্রুত নির্ণয় করার অন্যতম একটি কৌশল হলো **Rule of 72**।

Rule of 72-এর মাধ্যমে কতবছরে বা কত % সুদের হারে যে কোন পরিমাণ বিনিয়োগকৃত অর্থ দ্বিগুণ হবে তা সহজেই বলতে পারা যায়। Rule of 69 এর মত 'Rule of 72' সুদের হার এবং বছরের সংখ্যা সম্পূর্ণ সঠিক না হলেও প্রকৃত মানের খুব কাছাকাছি হয়ে থাকে।

Rule of 72 হলো– কত বছরে দ্বিগুণ হবে, $n = \frac{72}{i}$ এবং কত % সুদে দ্বিগুণ হবে, $i = \frac{72}{n}$

উদাহরণ 3: 9%বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 1,00,000 টাকা বিনিয়োগ করা হলো, কত বছরে এ বিনিয়োগের পরিমাণ দ্বিগুণ হবে?

সমাধান: এখানে, i= 9% এবং n= সময় নির্ণয় করতে হবে।

72 Rule প্রয়োগ করে, $n = \frac{72}{i}$

বা, $n = \frac{72}{9} = 8$

72 বিধি অনুসারে পাওয়া যাচ্ছে যে 8 বছরে টাকা দ্বিগুণ হবে।

এখন সমস্যাটি আবার চক্রবৃদ্ধি সূত্রের মাধ্যমে দেখানো হলো–

এখানে, $PV = 1,00,000$ টাকা, সুতরাং, $FV = 2,00,000$ টাকা, সুদের হার $i = 9\% = 0.09$, সময় $= n$ বছর নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $FV = PV(1+i)^n$

বা, $2,00,000 = 1,00,000(1+0.09)^n$

বা, $(1.09)^n = 2$

বা, $\log(1.09)^n = \log 2$

বা, $n \times \log 1.09 = \log 2$

সুতরাং $n = \dfrac{\log 2}{\log 1.09} = 8.0432$

সুতরাং, এ ক্ষেত্রেও দেখা যাচ্ছে উক্ত মূলধনের দ্বিগুণ হতে সময় লাগবে 8 বছর।

উদাহরণ 4: ব্রাক ব্যাংক প্রস্তাব দিল 7 বছরে 5,00,000 টাকা দ্বিগুণ হবে তাহলে সুদের হার নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, সময়, n = 7 বছর এবং i সুদের হার নির্ণয় করতে হবে।

72 Rule প্রয়োগ করে, $i = \dfrac{72}{n}$

বা, $i = \dfrac{72}{7} = 10.2857$

72 **বিধি** অনুসারে পাওয়া যাচ্ছে যে 10.29% সুদে 7 বছর টাকা দ্বিগুণ হবে।

এখন সমস্যাটি আবার চক্রবৃদ্ধি সূত্রের মাধ্যমে দেখানো হলো–

এখানে, $PV = 5,00,000$ টাকা, সুতরাং, $FV = 10,00,000$ টাকা, সময়, n = 7বছর এবং সুদের হার i নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $FV = PV(1+i)^n$

বা, $10,00,000 = 5,00,000(1+i)^7$

বা, $(1+i)^7 = 2$

বা, $1 + i = \sqrt[7]{2}$

বা, $i = (2)^{\frac{1}{7}} - 1 = 0.1040$

সুতরাং $i = 0.1040 \times 100\% = 10.40\%$

এ ক্ষেত্রে সুদের হার 10.40% যা **72 বিধি** অনুসারে পাওয়া সুদের হার 10.29% এর খুব কাছাকাছি মান।

সুতরাং, খুব দ্রুত এবং সহজেই **72 Rule** প্রয়োগ করে যেকোনো মূলধন দ্বিগুণ হতে কত সময় এবং সুদের হার প্রয়োজন তা নির্ণয় করা সম্ভব।

অসমান কিস্তির ভবিষ্যৎ এবং বর্তমান মূল্য নির্ণয়: বর্তমানে একাধিকবার সমপরিমাণ টাকার কিস্তি পেলে বা প্রদান করলে তার ভবিষ্যৎ মূল্যে কত হবে সেটা আমরা Annuity বা বৃত্তির সূত্র ব্যবহার করে নির্ণয় করতে পারি। কিন্তু বর্তমানের কিস্তিগুলোর পরিমাণ যদি অসমান হয় সে ক্ষেত্রে এককালীন অর্থের ভবিষ্যৎ মূল্যের সূত্র, $FV = PV(1+i)^n$

উদাহরণ 5: এব ব্যক্তি আগামী 5 বছরের শুরুতে যথাক্রমে 1,00,000 টাকা, 2,00,000 টাকা, 4,00,000 টাকা, 8,00,000 টাকা এবং 10,00,000 টাকা বিনিয়োগ করবেন। তার প্রত্যাশিত প্রতিদানের বা আয়ের হার 10% হলে 5বছর পর লাভসহ মোট কত টাকা তিনি পাবেন তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, PV_1= 1,00,000টাকা, PV_2= 2,00,000 টাকা, PV_3= 4,00,000টাকা, PV_4= 8,00,000টাকা এবং PV_5 = 10,00,000 টাকা এবং n_1= 5 বছর, n_2 = 4 বছর, n_3= 3 বছর, n_4 = 2 বছর, n_5 = 1বছর।

আমরা জানি, $FV = PV_1(1+i)^{n_1} + PV_2(1+i)^{n_2} + PV_3(1+i)^{n_3} + PV_4(1+i)^{n_4} + PV_5(1+i)^{n_5}$

$= 1,00,000(1+0.10)^5 + 2,00,000(1+0.10)^4 + 4,00,000(1+0.10)^3 + 8,00,000(1+0.10)^2 + 10,00,000(1+0.10)^1$

$= 161,051 + 292,820 + 532,400 + 968,000 + 1100,000 = 30,54,271$

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি 5 বছর পর তার বিনিয়োগ থেকে লাভ সহ 30,54,271 টাকা পাবেন।

উদাহরণ 6: একজন ঋণদাতা 10,000টাকা 5 বছরের জন্য, 20,000 টাকা 4 বছরের জন্য, 30,000 টাকা 3 বছরের জন্য 40,000 টাকা 2 বছরের জন্য এবং 50,000 টাকা 1 বছরের জন্য বিনিয়োগ করেছেন। সুদের হার 5% হলে বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ এখানে, FV_1= 10000টাকা, FV_2= 20,000 টাকা FV_3= 30,000 টাকা FV_4= 40,000 টাকা এবং FV_5 = 50,000 টাকা এবং n_1= 5 বছর, n_2 = 4 বছর, n_3= 3 বছর, n_4 = 2 বছর, n_5 = 1 বছর এবং i =5%

আমরা জানি, $PV = \frac{FV_1}{(1+i)^{n_1}} + \frac{FV_2}{(1+i)^{n_2}} + \frac{FV_3}{(1+i)^{n_3}} + \frac{FV_4}{(1+i)^{n_4}} + \frac{FV_5}{(1+i)^{n_5}}$

$$= \frac{10000}{(1+0.05)^5} + \frac{20000}{(1+0.05)^4} + \frac{30000}{(1+0.05)^3} + \frac{40000}{(1+0.05)^2} + \frac{50000}{(1+0.05)^1}$$

$$= 7835.261665 + 16454.0495 + 25915.12796 + 36218.179104 + 47619.04762$$

$$= 134104.6659$$

সুতরাং নির্ণেয় বর্তমান মূল্য 134104.67 টাকা।

বাট্টাকরণ (Discounting): বাট্টাকরণ বলতে এমন একটি প্রক্রিয়া বোঝায়, যার মাধ্যমে ভবিষ্যতে সম্ভাব্য নির্দিষ্ট সময় পর অর্জিত মোট টাকার বর্তমান মূল্য নির্ণয় করা যায় অথবা ভবিষ্যতে একটি নির্দিষ্ট সময় পরে কোনো নির্দিষ্ট হার সুদে নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা পেতে চাইলে বর্তমানে মোট কত টাকা জমা রাখতে হবে তা নির্ণয় করা যায়।

বাট্টাকরণ আসলে চক্রবৃদ্ধির ঠিক বিপরীত প্রক্রিয়া। 100 টাকা 10% হারে 1 বছর পর হবে 110 টাকা এবং 2 বছর পরে হবে 121 টাকা, এটি হলো চক্রবৃদ্ধিকরণ। তেমনি এক বছর পরে প্রাপ্য 110 টাকা 10% হারে বাট্টার বর্তমান মূল্য হবে 100 টাকা। আবার দুই বছর পর প্রাপ্য 121 টাকা 10% হারে বাট্টার বর্তমান মূল্য হবে 100 টাকা। এটিই হলো বাট্টাকরণ তাই বাট্টাকরণের ক্ষেত্রে চক্রবৃদ্ধির ঠিক উল্টো সূত্র ব্যবহার করতে হবে।

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

এখানে, PV (Present Value) = বর্তমান মূল্য

FV (Future Value) = ভবিষ্যতে প্রদেয় বা পাওয়া যাবে যে টাকা

n (Time) = বছরের

i (Discount rate) = টাকা প্রতি বাট্টার হার

বাট্টা দুই প্রকার। যথা– (ক) ব্যাংক বাট্টা (Bank Discount) (খ) প্রকৃত বাট্টা (True Discount)

(ক) **ব্যাংক বাট্টা (Bank Discount):** এমন অনেক ঋণ আছে যার গৃহীত অর্থের উপর সুদ ধার্য না করে ঋণদাতা ভবিষ্যতে পরিশোধ্য অর্থের উপর সুদ ধার্য করে থাকে। এভাবে ধার্যকৃত সুদকে ব্যাংক বাট্টা বা Bank Discountবলা হয়।

$\text{Bank Discount} = FV \times i \times n$, এখানে, $FV =$ পরিশোধ্য অর্থ i = সরল সুদের হার, $n =$ বছরের সংখ্যা।

অর্থাৎ ঋণের পরিশোধ্য অর্থের উপর নির্দিষ্ট হারে ধার্যকৃত সরল সুদকে ব্যাংক বাট্টা বা Bank Discount বলা হয়।

(খ) প্রকৃত বাট্টা **(True Discount):** যে অর্থ ঋণদাতা, ঋণগ্রহীতাকে প্রদান করে তার উপর ধার্যকৃত সুদকে ঋণ গ্রহীতা কর্তৃক পরিশোধিত অর্থের প্রকৃত বাট্টা বা True Discount বলা হয়।

মনে করুন, ঋণদাতা, ঋণগ্রহীতাকে এক বছরের জন্য 100 টাকা প্রদান করে যার উপর 5% হারে সুদ ধার্য করা হবে, তাহলে ভবিষ্যতে পরিশোধ করতে হবে (100+5) বা 105 টাকা। অর্থাৎ, 105 টাকার প্রকৃত বাট্টা বা True Discount হবে (105–100) বা 5 টাকা। নিচে প্রকৃত বাট্টার সূত্র দেওয়া হলো:

True Discount = FV – PV, যেখানে, PV = পরিশোধিত অর্থ, PV = ঋণদাতা কর্তৃক প্রদত্ত অর্থ

আবার, $FV = PV - PV \times i \times n$

$= PV(1 - i \times n)$

ব্যাংকারস বাট্টা (Banker's Discount) এবং প্রকৃত বাট্টা (True Discount)-এর মধ্যে যে পার্থক্য রয়েছে তাকে ব্যাংকের লাভ (Banker's Gain) বলা হয়।

অর্থাৎ, Banker's Gain = Bank Discount - True Discount

উদাহরণ 7: জনাব সালাহউদ্দিন 30,000 টাকার বিল 8% সরল সুদে অদ্য থেকে 8 বছর পরে পরিশোধ করবে বলে ঠিক করল, তাহলে তার পরিশোধিত প্রকৃত বাট্টা এবং ব্যাংক বাট্টা নির্ণয় করুন এবং ব্যাংকের লাভ কত হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, বর্তমান মূল্য, PV= 30,000 টাকা

সরল সুদের হার i = 8% =0.08

বছরের সংখ্যা = 8 বছর

আমরা জানি, $FV = PV(1+ i \times n)$

$\Rightarrow FV = 30{,}000 \times (1+0.08 \times 8)$

$\Rightarrow FV = 49{,}200$ টাকা

সুতরাং, প্রকৃত বাট্টা (True Discount) =$FV–PV$=49,200–30,000=19,200টাকা

ব্যাংক বাট্টা (Bank Discount) $= FV \times i \times n$

$= 49{,}200 \times 0.08 \times 8$

$= 31{,}488$ টাকা

ব্যাংকের লাভ (Banker's Gain) = Bank Discount–True Discount = 31,488 –19,200 =12,288 টাকা

সুতরাং, প্রকৃত বাট্টা (True Discount) =19,200, ব্যাংক বাট্টা (Bank Discount) = 31,488 টাকা এবং ব্যাংকের লাভ (Banker's Gain) = 12,288 টাকা।

এ্যামারটাইজেসন **(Amortisation):** যখন ঋণের অর্থ সমান কিস্তিতে ফেরত দেওয়া হয়, তখন প্রত্যেক কিস্তির মধ্যে আসলের একটি অংশ ও সুদ অন্তর্ভুক্ত থাকে। প্রতিটি কিস্তির মধ্যে আসলের যে অংশ অন্তর্ভুক্ত থাকে তাকে Amortisation বলা হয়।

অনেক কারবারি প্রতিষ্ঠান অন্য কোনো ব্যাংক বা আর্থিক প্রতিষ্ঠান থেকে এককালীন ঋণ গ্রহণ করে থাকে। ঋণদাতাকে ঋণের অর্থ ও তার সুদ বাবদ নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে কিস্তিতে কি পরিমাণ অর্থ পরিশোধ করতে হবে তা নির্ণয়ের জন্য বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য পদ্ধতির নেয়া হয়।

ঋণ পরিশোধ তালিকা **(Loan Amortisation Schedule):** যেসব ধরনের ঋণ কিস্তিতে পরিশোধ করা হয়, সেসব ক্ষেত্রে প্রতি কিস্তিতে অর্থের পরিমাণ নির্ণয়ের জন্য অর্থের সময়মূল্যের ধারণা ব্যবহার করা হয়। কিস্তিতে পরিশোধযোগ্য ঋণের প্রধান বৈশিষ্ট্য হলো: ১. প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ সমান। ২. নির্দিষ্ট সময় পর পর কিস্তি প্রদান করা হয়। ৩. প্রতি কিস্তিতে

পরিশোধ্য অর্থের মধ্যে আসল টাকা এবং সুদ উভয়ই থাকে। অর্থাৎ, কিস্তির পরিমাণ (Installment) = আসল (Principal Value)+ সুদ (Interest), এ পদ্ধতিকে **Capital Recovery Method** পদ্ধতিও বলা হয়ে থাকে।

ঋণ পরিশোধ তালিকা প্রস্তুতের পদ্ধতি: ধাপ ১: অর্থের সময় মূল্যের ধারণা ব্যবহার করা বা বর্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্যের সূত্র ব্যবহার করে প্রতি কিস্তিতে পরিশোধ অর্থের পরিমাণ নির্ণয় করা।

ধাপ ২: প্রতি কিস্তিতে পরিশোধ্য মোট অর্থের পরিমাণকে ভেঙ্গে আসল টাকা ও সুদের পরিমাণ আলাদা করে তালিকা প্রস্তুত করা।

উদাহরণ 8: পূবালী ব্যাংক লিমিটেড হতে জনাব ফাহিম 1,00,000 টাকা 10% সুদে 5 বছরের জন্য ঋণ গ্রহণ করলেন। সমান পাঁচটি কিস্তিতে এ ঋণ পরিশোধ করতে হলে ঋণ পরিশোধের তালিকা (Loan Amortisation Schedule) প্রস্তুত করুন।

সমাধান: ধাপ ১: প্রতি কিস্তিতে পরিশোধ্য অর্থের পরিমাণ নির্ণয় (Amount per Installment):

$$PVA = \frac{A}{i}\left\{1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right\}$$

$$\Rightarrow 1,00,000 = \frac{A}{0.10}\left\{1 - \frac{1}{(1+0.10)^5}\right\}$$

$$\Rightarrow 1,00,000 \times (0.10) = A\left\{1 - \frac{1}{(1.10)^5}\right\}$$

$$\Rightarrow A = \frac{10,000}{0.379078676} = 26,379.75$$

এখানে, PVA= 1,00,000 টাকা

$i = 10\% = \frac{10}{100} = 0.10$

n = 5 বছর

প্রতি কিস্তিতে পরিশোধ্য অর্থের পরিমাণ(Amount per Installment) 26380 টাকা (প্রায়)

ধাপ ২: ঋণ পরিশোধের তালিকা (Loan Amortisation Schedule):এখানে, Col: = Column

		বছরের শুরুতে		বছরের শেষে	
Col:1	Col:2	Col:3	Col:4 = Col:2×10%	Col:5 = Col:3−Col:4	Col:6=Col:2−Col:5
Year	Loan at the Beginning of the year	Installment Payment	Interest Payment	Principal Repayment	Loan at the end of the Year
	Tk.	Tk.	Tk.	Tk.	Tk.
1	1,00,000	26,380	10,000	16,380	83,620
2	83,620	26,380	8,362	18,018	65602
3	65602	26,380	6560.2	19819.8	45782.2
4	45782.2	26,380	4578.22	21801.78	23980.42
5	23980.42	26,380	2399.58	23980.42	_____

সারসংক্ষেপ:

- অবচয় বলতে সম্পত্তির ব্যবহার জনিত ক্ষয়কে বোঝায়। অবচয়, $SA = P(1-d)^n$
- ব্যাংক বাট্টা (Bank Discount) $= FV \times i \times n$
- যখন ঋণের অর্থ সমান কিস্তিতে ফেরত দেওয়া হয়, তখন প্রত্যেক কিস্তির মধ্যে আসলের একটি অংশ ও সুদ অন্তর্ভুক্ত থাকে। প্রতিটি কিস্তির মধ্যে আসলের যে অংশ অন্তর্ভুক্ত থাকে তাকে Amortisation বলা হয়।

ইউনিট মূল্যায়ন

সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন:

1. (ক) সরল সুদ কী?
   (খ) চক্রবৃদ্ধি সুদ কী?
   (গ) বার্ষিক বৃত্তি কী?
   (ঘ) অগ্রিম বার্ষিক বৃত্তি কী?
   (ঙ) এ্যামারটাইজেশন কী?
   (চ) প্রতিপূরক তহবিল কী?
2. (ক) মাসিক চক্রবৃদ্ধি সুদের সূত্রটি লিখুন।
   (খ) ভবিষ্যৎ মূল্যের সূত্রটি লিখুন।
   (গ) 72 Rule এর ব্যাখ্যা এবং সূত্রটি লিখুন।
3. সরল সুদের সাধারণ সূত্র নিচের কোনটি?

(ক) $r = PV \times i \times n$ (খ) $i = PV \times r \times n$ (গ) $i = \frac{PV \times r \times n}{FV}$ (ঘ) $i = \frac{FV \times n \times r}{PV}$

4. 10%সরল সুদে10,000 টাকার10 বছরের সুদের পরিমান এবং সুদাসল কত হবে তা নির্ণয় করুন।

5. জনাব দুলাল এক ব্যক্তির নিকট হতে কিছু পরিমাণ টাকা ঋণ করে 8% সরল সুদে 2 বছর পর সুদে আসলে 2,32,000 টাকা পরিশোধ করেন। জনাব দুলাল ঐ ব্যক্তির নিকট হতে কত টাকা ঋণ করে ছিলেন?

6. 10% সরল সুদে 25,000 টাকায় কত বছরে সুদে আসলে 40,000 টাকা হবে তা নির্ণয় করুন।

7. শিমুল,পাপিয়ার নিকট হতে 10,000 টাকা ঋণ গ্রহণ করে। 10 বছর পর সুদসহ শিমুল পাপিয়াকে 17,000 টাকা পরিশোধ করে। সে পাপিয়ার নিকট হতে শতকরা কত সরল সুদে ঋণ গ্রহণ করেছিল?

8. 8%হার সুদে 2 বছর পর 10,000টাকা প্রদেয় হলে তার বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন। যদি চক্রবৃদ্ধি সুদ (i) বার্ষিক এবং (ii) অর্ধবার্ষিকীতে প্রদত্ত হয়।

9. বার্ষিক 5%হার সুদে 50,000টাকার 4 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ কত হবে নির্ণয় করুন।

10. একজন ব্যবসায়ী 37,908 টাকার একটি মেশিন ক্রয় করার জন্য ব্যাংক থেকে 10% সুদে ঋণ গ্রহণ করেন। ব্যবসায়ী উক্ত ঋণ 5 বছরের সুদসহ সমান কিস্তিতে পরিশোধ করবে বলে লিখিত প্রদান করেন।প্রতিটি কিস্তিতে এ্যামারটাইজেশন এর পরিমাণ এবং ঋণ পরিশোধ তালিকা নির্ণয় করুন।

11. একজন ব্যক্তি সোনালী ব্যাংক হতে 9% সুদে 40,000 টাকা ঋণ নেয়। যদি প্রতি বছরের শুরুতে 4টি কিস্তিতে ঋণ পরিশোধযোগ্য হয় তবে ঋণের কিস্তি নির্ণয় করুন এবয় ঋণ পরিশোধ তালিকা নির্ণয় করুন।

12. একটি মেশিন কিস্তিতে ক্রয় করা হলো এমন শর্তে যে, চুক্তি স্বাক্ষরের দিনে10,000টাকা পরিশোধ করতে হবে। অবশিষ্ট অর্থ 6000 টাকা বর্ষিক কিস্তিতে পর পর 5 বছরের শেষে পরিশোধ করতে হবে। যদি বার্ষিক সুদের হার 6% হয়, তাহলে মেশিনের বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

3. (খ) 4. সরল সুদ= 10,000 টাকা এবং সুদাসল = 20,000 টাকা 5.ঋণের পরিমাণ বা আসল ছিল = 2,00,000 টাকা
6. সময় প্রয়োজন = 6 বছর 7. শতকরা সুদের হার = 7% 8. বার্ষিক: 8573 টাকা, অর্ধবার্ষিকীতে: 4548 টাকা।
9. সুদাসল:10,775.5 টাকা 10. 1,000 টাকা 11. 12183.24 টাকা 12. 35274.18 টাকা