সূচক ও লগারিদম
Indice and Logarithm

৫

ভূমিকা
Introduction

সূচক ও লগারিদমের সাহায্যে গাণিতিক হিসাব ও সমস্যা সমাধান অনেক ক্ষেত্রে সহজতর হয়। সূচকের সাহায্যে অনেক বড় সংখ্যা বা ছোট সংখ্যাকে শুধুমাত্র একটি প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যেমন: 100000 কে লেখা যায় 10^5 । একই ভাবে লগারিদমেরও প্রয়োগ রয়েছে। যেমন: জনসংখ্যা বৃদ্ধি, চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হিসাব ইত্যাদি ক্ষেত্রে সূচক এবং লগারিদম ব্যবহার করা হয়। জন নেপিয়ার (John Napier 1550-1617) সর্ব প্রথম লগারিদম আবিষ্কার করেন। জন নেপিয়ার (অমূলদ) ভূমির উপর ভিত্তি করে লগারিদম আবিষ্কার করেন এবং এটিকে e ভিত্তিক লগারিদম বা স্বাভাবিক লগারিদম বলা হয়। পরবর্তীতে জন নেপিয়ারের সমসাময়িক গণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs 1561-1630) মূলদ 10 ভিত্তি লগারিদম আবিষ্কার ও ব্যবহার করেন যা সাধারণ গণনায় ব্যবহার করা হয়।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২ দিন

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৫.১: সূচক

পাঠ ৫.২: লগারিদম

মূখ্য শব্দ	সূচক, মূল, বর্গমূল, n তম মূল, সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শরূপ, পূর্ণক, অংশক, লগারিদম, স্বাবাবিক বা প্রাকৃতিক লগারিদম, সাধারণ লগারিদম ইত্যাদি।

পাঠ-৫.১ সূচক
Indices

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- মূলদ সূচক কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণ-সাংখ্যিক সূচক ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- সূচকের সূত্রাবলি বর্ণনা ও তা প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন;
- n তম মূলকে সূচক আকারে প্রকাশ করতে পারবেন।

সূচক
Indices

সূচক অর্থ শক্তি বা Power। কোন সংখ্যাকে ঐ সংখ্যা দ্বারা একাধিকবার গুণ করলে সূচক নামের একটি সংকেত দ্বারা একে প্রকাশ করা হয়। যদি x যেকোনো বাস্তব সংখ্যা এবং n স্বাভাবিক সংখ্যা হয় তবে x এর ক্রমিক গুণ, অর্থাৎ $x \times x \times x \times x \times x........ \times x$ (n সংখ্যক বার x) কে x^n আকারে লেখা হয়। এখানে, n হলো **সূচক বা ঘাত** এবং x কে **ভিত্তি** বলা হয়।

সূচক শুধু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাই নয়, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ধনাত্মক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক ভগ্নাংশও হতে পারে।

অর্থাৎ ভিত্তি Ix∈ **R** বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং সূচক $n \in Q$ (মূলদ সংখ্যার সেট) এর জন্য সংজ্ঞায়িত। তবে বিশেষ ক্ষেত্রে $n \in N$ (স্বাভাবিক সংখ্যার সেট) ধরা হয়।

সূচকের ধর্মাবলি (Rules for Indices)

মনে করুন, $x \in R$ এবং $m, n \in N$

1. যদি $m = n$ হয়, তবে $x^m = x^n$ হবে।
বিপরীতক্রমে $x^m = x^n$ হলে, $m = n$ হবে।

2. আবার, যদি $x = y$ হয়, তবে $x^m = y^n$ হবে।
বিপরীতক্রমে $x > 0, y > 0$ হলে, যদি $x^m = y^n$ হয়, তাহলে $x = y$ হবে।

সূচকের সূত্রাবলি (Formulae for Indices)

মনে করুন, $x \in R$ এবং $m, n \in N$

1. $x^m \times x^n = x^{m+n}$
2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ যদি, $m > n$
3. $\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{m-n}}$ যদি, $m < n$
4. $\frac{x^m}{x^n} = 1$ যদি, $m = n$
5. $(x^m)^n = x^{mn}$
6. $(x.y)^m = x^m \times y^m$
7. $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$
8. $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, যেখানে, $x \neq 0$
9. $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, যেখানে, $x \neq 0$
10. $x^0 = 1$

n তম মূল

লক্ষ্য করুন, $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$

আবার, $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3 \therefore \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$

$3^{\frac{1}{2}}$ এর বর্গ (দ্বিতীয় ঘাত) $= 3$ এবং 3 এর বর্গমূল (দ্বিতীয় মূল) $= 3^{\frac{1}{2}}$

$3^{\frac{1}{2}}$ কে বর্গমূলের চিহ্ন $\sqrt{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt{3}$ আকারে লেখা হয়।

আবার, লক্ষ্য করুন- $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3$

আবার, $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{3\times\frac{1}{3}} = 3 \quad \therefore \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3$

$3^{\frac{1}{3}}$ এর ঘন (তৃতীয় ঘাত) $= 3$ এবং 3 এর ঘনমূল (তৃতীয় মূল) $= 3^{\frac{1}{3}}$

$3^{\frac{1}{3}}$ কে ঘনমূলের চিহ্ন $\sqrt[3]{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt[3]{3}$ আকারে লেখা হয়।

n তম মূলের ক্ষেত্রে

$x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n}} \times \ldots\ldots. \times x^{\frac{1}{n}}$ [n সংখ্যক $x^{\frac{1}{n}}$ এর ক্রমিক গুণ]

$= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$

আবার, $x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n}} \times \ldots\ldots. \times x^{\frac{1}{n}}$

$= x^{\frac{1}{n}\times n}$ [সূচকে n সংখ্যক $\frac{1}{n}$ এর যোগ] $= x \therefore \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$

$x^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত $= x$ এবং x এর n তম মূল $= x^{\frac{1}{n}}$

অর্থাৎ $x^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত $= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ এবং x এর n তম মূল $(x)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

x এর n তম মূল কে $\sqrt[n]{x}$ আকারে লেখা হয়। $\left(\frac{7}{3}\right)^5 \times \left(\frac{7}{3}\right)^{-5}$

- **উদাহরণ 1:** মান নির্ণয় করুন: (ক) $\frac{5^7}{5^9}$ (খ) $\left(\frac{7}{3}\right)^5 \times \left(\frac{7}{3}\right)^{-5}$

সমাধান: (ক) $\frac{5^7}{5^9} = 5^{7-9} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ (খ) $\left(\frac{7}{3}\right)^5 \times \left(\frac{7}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5-5} = \left(\frac{7}{3}\right)^0 = 1$

উদাহরণ 2: সরল করুন: (ক) $\frac{\sqrt[3]{7^2}.\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$, (খ) $\frac{2^{n+4}-4.2^{n+1}}{2^{n+2}\div 2}$

সমাধান: (ক) দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt[3]{7^2}.\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

$$= \frac{7^{\frac{2}{3}}.7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 7^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 7^{\frac{2+1}{3}-\frac{1}{2}}$$

$$= 7^{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

(খ) দেওয়া আছে, $\frac{2^{n+4}-4.2^{n+1}}{2^{n+2}\div 2}$

$$= \frac{2^n.2^4-4.2^n.2}{2^n.2^2\div 2}$$

$$= \frac{16.2^n-8.2^n}{\frac{2^n.2^2}{2}}$$

$$= \frac{8.2^n(2-1)}{2^n.2} = \frac{8}{2} = 4$$

উদাহরণ 3: সরল করুন: $\frac{9\times\left(4^x\right)^2}{16^{x+1}-2^{x+1}\times 8^x}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{9\times\left(4^x\right)^2}{16^{x+1}-2^{x+1}\times 8^x}$

$$= \frac{3^2\times\left(2^{2x}\right)^2}{\left(2^4\right)^{x+1}-2^{x+1}\times\left(2^3\right)^x}$$

$$= \frac{3^2\times 2^{4x}}{2^{4x+4}-2^{x+1}\times 2^{3x}} = \frac{3^2\times 2^{4x}}{2^{4x+4}-2^{4x+1}}$$

$$= \frac{3^2\times 2^{4x}}{2^{4x}\times 2^4-2^{4x}\times 2^1} = \frac{3^2\times 2^{4x}}{2^{4x}(2^4-2)} = \frac{3^2}{(16-2)} = \frac{9}{14}$$

উদাহরণ 4: সরল করুন: $\frac{2^{m+3}\times 3^{2m-n}\times 5^{m+n+3}6^{n+1}}{6^{m+1}\times 10^{n+3}\times 15^m}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{2^{m+3}\times 3^{2m-n}\times 5^{m+n+3}6^{n+1}}{6^{m+1}\times 10^{n+3}\times 15^m}$

$$= \frac{2^{m+3}\times 3^{2m-n}\times 5^{m+n+3}(2\times 3)^{n+1}}{(2\times 3)^{m+1}\times(5\times 2)^{n+3}\times(5\times 3)^m}$$

$$= \frac{2^{m+3}\times 3^{2m-n}\times 5^{m+n+3}\times 3^{n+1}\times 2^{n+1}}{2^{m+1}\times 3^{m+1}\times 5^{n+3}\times 2^{n+3}\times 5^m\times 3^m}$$

$$= 2^{m+3+n+1-m-1-n-3}\times 3^{2m-n+n+1-m-1-m}\times 5^{m+n+3-n-3-m}$$

$$= 2^0\times 3^0\times 5^0 = 1$$

উদাহরণ 5: যদি $y^{y\sqrt{y}} = \left(y\sqrt{y}\right)^y$ হয় তাহলে প্রমাণ করতে হবে যে, $y = \frac{9}{4}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $y^{y\sqrt{y}} = \left(y\sqrt{y}\right)^y \Rightarrow y^{y^{1+\frac{1}{2}}} = \left(y^{1+\frac{1}{2}}\right)^y$

$\Rightarrow y^{y^{\frac{2+1}{2}}} = \left(y^{\frac{2+1}{2}}\right)^y \Rightarrow y^{y^{\frac{3}{2}}} = y^{\frac{3}{2}y} \Rightarrow y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}y$

$\Rightarrow y^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{y} = \frac{3}{2}y \times \frac{1}{y}$, [উভয় পক্ষে $\frac{1}{y}$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow y^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow y^{\frac{3-2}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ [উভয় পক্ষে বর্গ করে]

$\therefore y = \frac{9}{4}$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 6: দেখান যে, $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$

সমাধান: L.H.S $= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$= \frac{x^{\frac{a}{ab}}}{x^{\frac{b}{ab}}} . \frac{x^{\frac{b}{bc}}}{x^{\frac{c}{bc}}} . \frac{x^{\frac{c}{ca}}}{x^{\frac{a}{ca}}}$

$= \frac{x^{\frac{1}{b}}}{x^{\frac{1}{a}}} . \frac{x^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{b}}} . \frac{x^{\frac{1}{a}}}{x^{\frac{1}{c}}}$

$= \frac{x^{\frac{1}{a}} . x^{\frac{1}{b}} . x^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{a}} . x^{\frac{1}{b}} . x^{\frac{1}{c}}} = 1 =$ R.H.S

বিকল্প পদ্ধতি: L.H.S $= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$= \left(x^{a-b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(x^{b-c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(x^{c-a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$= x^{\frac{a-b}{ab}} . x^{\frac{b-c}{bc}} . x^{\frac{c-a}{ca}}$

$= x^{\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}}$

$= x^{\frac{c(a-b)+a(b-c)+b(c-a)}{abc}}$

$= x^{\frac{ac-bc+ab-ac+bc-ab}{abc}}$

$= x^0 = 1 =$ R.H.S

উদাহরণ 7: যদি $pqr = 1$ হয় তাহলে দেখান যে, $\frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+r^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}} = 1$

সমাধান: দেওয়া আছে, $pqr = 1 \therefore pq = r^{-1}$

L.H.S $= \frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+r^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$

$\frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+pq} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$ [$\because r^{-1} = pq$]

$= \frac{1}{1+p+\frac{1}{q}} + \frac{1}{1+q+pq} + \frac{1}{1+r+\frac{1}{p}}$

$$=\frac{1}{\frac{q+pq+1}{q}}+\frac{1}{1+q+pq}+\frac{1}{\frac{p+rp+1}{p}}$$

$$=\frac{q}{q+pq+1}+\frac{1}{1+q+pq}+\frac{p}{p+rp+1}$$

$$=\frac{q}{q+pq+1}+\frac{1}{1+q+pq}+\frac{pq}{pq+pqr+q}$$ [তৃতীয় অংশের লব ও হরকে p দ্বারা গুণ করে]

$$=\frac{q}{q+pq+1}+\frac{1}{1+q+pq}+\frac{pq}{pq+1+q}$$ [যেহেতু, $pqr=1$]

$$= =\frac{q+pq+1}{q+pq+1}=1=\text{R.H.S}$$

$$\therefore \frac{1}{1+p+q^{-1}}+\frac{1}{1+q+r^{-1}}+\frac{1}{1+r+p^{-1}}=1$$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৪: সমাধান করুন: $4^{1+x}+4^{1-x}=10$

সমাধান: দেওয়া আছে, $4^{1+x}+4^{1-x}=10$

$$\Rightarrow 4^1.4^x+4^1.4^{-x}=10$$

$$\Rightarrow 4^1.4^x+4^1.\frac{1}{4^x}=10$$

$$\Rightarrow 4y+4\frac{1}{y}=10$$ [মনে করুন, $4^x=y$]

$$\Rightarrow 4y^2+4=10y$$ [উভয় পক্ষে y দ্বারা গুণ করে]

$$\Rightarrow 4y^2-10y+4=0$$

$$\Rightarrow 4y^2-8y-2y+4=0$$

$$\Rightarrow 4y(y-2)-2(y-2)=0$$

$$\Rightarrow (y-2)(4y-2)=0$$

$\therefore y=2$ অথবা, $y=\frac{1}{2}$

এখন, $y=2$ হলে, $4^x=2$

$$\Rightarrow 2^{2x}=2$$

$$\Rightarrow 2x=1$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}$$

আবার $y=\frac{1}{2}$ হলে, $4^x=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 2^{2x}=2^{-1},$$

$$\Rightarrow 2x=-1$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2}$$

নির্ণেয় সমাধান, $x=\pm\frac{1}{2}$

সারসংক্ষেপ:

- যদি x যেকোনো বাস্তব সংখ্যা এবং n স্বাভাবিক সংখ্যা হয় তবে x এর ক্রমিক গুণ, অর্থাৎ $x\times x\times x\times x\times......\times x$ (n সংখ্যক বার x) কে x^n আকারে লেখা হয়। এখানে, n হলো **সূচক বা ঘাত** এবং x কে ভিত্তি বলা হয়।

পাঠ-৫.২ লগারিদম
Logarithm

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- লগারিদম কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- কোনো সূচকীয় ফাংশনকে লগারিদমের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবেন;
- লগারিদমের সূত্রের সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

লগারিদম
Logarithm

Logos এবং Arithmas নামক দুটি গ্রিক শব্দ হতে Logarithm শব্দটির উৎপত্তি হয়েছে। Logos অর্থ আলোচনা এবং Arithmas অর্থ সংখ্যা । অর্থাৎ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা। লগ এর মাধ্যমে $a^x = N$ এর আর একটি অনুরূপ প্রকাশের মাধ্যম হলো $Log_a N = x$ । ভূমি বা base a-এর উপর সূচক উন্নিত হলে ফলাফল হবে N । সুতরাং, কোন সংখ্যার একটি প্রদত্ত ভিত্তিযুক্ত লগারিদম হচ্ছে ঐ সূচক বা ঘাত বা প্রদত্ত ভিত্তির উপর উন্নিত করলে সংখ্যাটি পাওয়া যাবে। যেমন: যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ $x = \log_a b$ ।

বিপরীতক্রমে, যদি $x = \log_a b$ হলে $a^x = b$ হবে। এক্ষেত্রে b সংখ্যাটিকে a এর সাপেক্ষে x এর প্রতিলগ (Anilogarithm) বলে এবং লেখার পদ্ধতি $b = \text{anti}\log_a x$.

লগারিদমের সূত্রাবলী (Formulas of Logarithm)

সূত্র ১: $\log_a a = 1$ এবং $\log_a 1 = 0$

সূত্র ২: $\log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N$

সূত্র ৩: $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

সূত্র ৪: $\log_a (M)^N = N \log_a M$

সূত্র ৫: $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

সূত্র ৬: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$ or $\log_a M \times \log_M a = 1$

সূত্র ৭: $\log_a b = \log_x b \times \log_a x$

সূত্র ৮: $\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a}$

সূত্র ৯: $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$, যেখানে, $x, y > 0$

উদাহরণ 1: মান নির্ণয় করুন: (ক) $\log_{10} 100$ (খ) $\log_{\sqrt{3}} 81$

সমাধান: (ক) $\log_{10} 100 = \log_{10} (10)^3 = 3\log_{10} 10 = 3.1 = 3$ $[\because \log_a a = 1]$

(খ) $\log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{\sqrt{3}} 3^4 = \log_{\sqrt{3}} \left\{(\sqrt{3})^2\right\}^4 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^8 = 8\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3}) = 8$ $[\because \log_a a = 1]$

লগারিদমের ব্যবহার (Use of Logarithms): দৈনন্দিন জীবনে লগারিদমের ব্যবহারিক তথা ব্যবসায়িক প্রয়োগ রয়েছে। আর এজন্য বিশেষ ধরনের গণনা কার্যে লগারিদমের প্রয়োজন অনুভূত হয়ে থাকে। নিম্নে লগারিদমের ব্যবহারিক প্রয়োগ উল্লেখ করা হলো:

1. সূচক বা ঘাত বিশিষ্ট মানের গণনা লগারিদমের সাহায্যে দ্রুত ও সহজে করা যায়।
2. চক্রবৃদ্ধি সুদ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধানে লগারিদম ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

3. অজানা সুদের হার এবং সময়কাল নির্ণয়ের জন্য লগারিদম ব্যবহার করা হয়।
4. ক্রমহ্রাসমান জের পদ্ধতিতে অবচয়ের পরিমাণ, সম্পত্তির জীবনকাল, অবচয়ের হার প্রভৃতি নির্ণয়ে লগারিদম এর প্রয়োগ রয়েছে।
5. বীমা কিস্তি নির্ধারণেও লগারিদমের ব্যবহার লক্ষ্য করা যায়।
6. অতি বড় এবং জটিল সংখ্যার গুণ, ভাগ প্রভৃতি গণনার ক্ষেত্রে লগারিদম এর ব্যবহার কাজকে সহজ করে দেয়।
7. একাধিক ফাংশনের গুণফল নির্ণয় এবং অনুপাত সম্বলিত ফাংশনের বিভিন্ন গণনা কার্য সহজে করার জন্য লগারিদম এর ব্যবহার করা হয়।
8. জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার নির্ণয়, প্রবৃদ্ধির হার নির্ণয় ছাড়াও অর্থনীতির বিভিন্ন গাণিতিক কার্যক্রমে লগারিদম এর ব্যবহার লক্ষ্যনীয়।

লগারিদমের প্রকারভেদ (Types of Logarithm)

লগারিদম দুই প্রকার। যথা: 1. স্বাভাবিক বা প্রাকৃতিক লগারিদম 2.সাধারণ লগারিদম

1. **স্বাভাবিক বা প্রাকৃতিক লগারিদম (Naal/ Napierian/ 'e' base Logarithm):** গণিতবিদ জন নেপিয়ার প্রথম e ভিত্তিক লগারিদম আবিষ্কার করেন তা প্রাকৃতিক লগারিদম। প্রাকৃতিক লগারিদম এর ভিত্তি হলো e। তাই এটিকে e ভিত্তিক লগারিদম বা নাম অনুসারে নেপিয়ার লগারিদম বলা হয়। e এর মান হলো: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...\infty = 2.71828$ । এ লগারিদমকে $\log_e N$ অথবা $\ln N$ (Lynn N পড়তে হয়) প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

2. **সাধারণ লগারিদম (Common Logarithm/ Briggsian/10 base Logarithm)**

10ভিত্তিক লগারিদমকে সাধারণ বা ব্রিগসীয় লগারিদম বলে। 10 ভিত্তিক লগারিদম কে শুধু $\log_{10} N$ দ্বারা নির্দেশ করা যায়। অর্থাৎ, সাধারণ গণনার জন্য জন্য নেপিয়ারের সমসাময়িক গণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs 1561-1630) এ লগারিদম ব্যবহার করেন।সাধারণ লগারিদমের ক্ষেত্রে ভিত্তি লেখা না থাকলেও 10 কে ভিত্তি ধরা হয়।

উদাহরণ 2: লগারিদমের মান নির্ণয় করুন:

(ক) $\log 64$ এর ভিত্তিক $2\sqrt{2}$ (খ) $\log \frac{1}{324}$ এর ভিত্তিক $3\sqrt{2}$

সমাধান: (ক) $\log 64$ এর ভিত্তিক $2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} log_{2\sqrt{2}} 64 &= log_{2\sqrt{2}} 2^6 \\ &= log_{2\sqrt{2}} (2 \times \sqrt{2})^4 \\ &= 4 log_{2\sqrt{2}} 2 \times \sqrt{2} \\ &= 4 \times 1 \end{aligned}$$

(খ) $\log \frac{1}{324}$ এর ভিত্তিক $3\sqrt{2}$

$$\log \frac{1}{324} = \log \frac{1}{3^4 \times 2^2} = \log \frac{1}{\left(3 \times \sqrt{2}\right)^4}$$

$$= \log_{3\sqrt{2}} \left(3 \times \sqrt{2}\right)^{-4}$$
$$= -4 \log_{3\sqrt{2}} 3\sqrt{2}$$
$$= -4 \times 1 = -4 \ = 4$$

াহরণ 3: যদি $\log_{\sqrt{27}} x = 3\frac{1}{3}$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\log_{\sqrt{27}} x = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

সুতরাং, $x = \left(\sqrt{27}\right)^{\frac{10}{3}} = \left\{\left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{10}{3}}$

$= 3^{\frac{3}{2}\times\frac{10}{3}} = 3^5 = 125$

নির্ণেয় $x = 125$

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন, $\log_{10}\frac{50}{147} = \log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7$

সমাধান: বামপক্ষ = $\log_{10}\frac{50}{147}$ = $\log_{10}\frac{5\times5\times2}{3\times7\times7} = \log_{10}\frac{2\times5^2}{3\times7^2}$

= $\log_{10}\left(2\times5^2\right) - \log_{10}\left(3\times7^2\right)$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 5^2 - \left(\log_{10} 3 + \log_{10} 7^2\right)$

$= \log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 5: প্রমাণ করুন যে, $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

সমাধান: মনে করুন, $\log_a y = p$ এবং $\log_a x = q$

সুতরাং, $a^p = y$ এবং $a^q = x$

$\therefore \left(a^p\right)^q = y^q$,[উভয় পক্ষে q ঘাত নিয়ে]

বা, $a^{pq} = y^q ....(i)$

আবার, $\left(a^q\right)^p = x^p$ [উভয় পক্ষে p ঘাত নিয়ে]

বা, $a^{pq} = x^p ....(ii)$

(i) ও (ii) নং থেকে পাই, $x^p = y^q$

$\therefore x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 6: প্রমাণ করুন,

$\log_5 5^2 + \log_3 3^4 + \log_{10} 1 = 6$

সমাধান: $L.H.S. = \log_5 5^2 + \log_3 3^4 + \log_{10} 1$

$= 2\log_5 5 + 4\log_3 3 + 0$

$= 2\times1 + 4\times1$

$= 2 + 4 = 6 = \text{R.H.S.}$

$\therefore \log_5 5^2 + \log_3 3^4 + \log_{10} 1 = 6$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 7: প্রমাণ করুন যে, $\dfrac{\log_3 8}{\log_9 16 \times \log_4 10} = 3\log 2$

সমাধান: $L.H.S. = \dfrac{\log_3 8}{\log_9 16 \times \log_4 10}$

$$= \dfrac{\dfrac{\log_e 8}{\log_e 3}}{\dfrac{\log_e 16}{\log_e 9} \times \dfrac{\log_e 10}{\log_e 4}}$$

$$= \dfrac{\log_e 8}{\log_e 3} \times \dfrac{\log_e 9}{\log_e 16} \times \dfrac{\log_e 4}{\log_e 10}$$

$$= \dfrac{\log_e 2^3}{2\log_e 3} \times \dfrac{\log_e 3^2}{\log_e 2^4} \times \dfrac{\log_e 2^2}{\log_e 10}$$

$$= \dfrac{3\log_e 2}{\log_e 3} \times \dfrac{2\log_e 3}{4\log_e 2} \times \dfrac{2\log_e 2}{\log_e 10}$$

$$= \dfrac{3\log_e 2}{\log_e 3} \times \dfrac{2\log_e 3}{4\log_e 2} \times \dfrac{2\log_e 2}{1}$$

$$= 3\log_e 2 = R.H.S.$$

$$\therefore \dfrac{\log_3 8}{\log_9 16 \times \log_4 10} = 3\log 2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

সারসংক্ষেপ:

- কোন সংখ্যার একটি প্রদত্ত ভিত্তিযুক্ত লগারিদম হচ্ছে ঐ সূচক বা ঘাত বা প্রদত্ত ভিত্তির উপর উন্নিত করলে সংখ্যাটি পাওয়া যাবে। যেমন: যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ $x = \log_a b$ ।
- **সূত্র ১:** $\log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N$
- **সূত্র ২:** $\log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
- **সূত্র ৩:** $\log_a (M)^N = N \log_a M$

ইউনিটমূল্যায়ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-10):

1. অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যা বা রাশিকে কিসের সাহায্যে অতি সহজে লিখে প্রকাশ করা যায়?
   (ক) সূচকের সাহায্যে (খ) + চিহ্নের সাহায্যে (গ) ভগ্নাংশের সাহায্যে (ঘ) = চিহ্নের সাহায্যে।
2. সূচকের নিয়ম অনুযায়ী : $a^m.a^0 =$ কত?
   (ক) $a^{m\times o}$ (খ) a^1 (গ) 0 (ঘ) a^m
3. a যেকোনো অশূন্য বাস্তব সংখ্যা এবং $n > m$ হলে $\frac{a^m}{a^n} =$ কত?
   (ক) a^{m+n} (খ) $\frac{1}{a^{n-m}}$ (গ) a^{n-m} (ঘ) a^{mn}
4. $\sqrt[3]{3}$ এর 3 ভিত্তিক লগ কত?
   (ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{3}{2}$ (গ) 5.1 (ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\log_{10} x = -3$ হলে x এর মান কত?
   (ক) 100 (খ) 0.1 (গ) $\frac{1}{1000}$ (ঘ) $\frac{1}{10}$
6. 144 এর লগ 4 হলে এর ভিত্তি কত?
   (ক) $2\sqrt{5}$ (খ) $5\sqrt{2}$ (গ) $3\sqrt{2}$ (ঘ) $2\sqrt{3}$
7. $\log_x \frac{1}{343} = -3$ হলে x এর মান কত?
   (ক) 4 (খ) 7 (গ) 6 (ঘ) 5
8. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$ এর মান কত?
   (ক) -1 (খ) -2 (গ) 1 (ঘ) 2
9. কোন শর্তে $\log_a a = 1$
   (ক) $a > 0$ (খ) $a \neq 1$ (গ) $a > 0, a \neq 1$ (ঘ) $a \neq 0, a > 1$
10. তথ্যগুলো লক্ষ করুন– (i) $\log_a (n)^m = m\log_a n$ (ii) $3^3 = 27$ এবং $\log_3 27 = 3$ সমার্থক
    (iii) $\log_a(m+n) = \log_a m + \log_a n$

উপরের কোন্ তথ্যগুলো সঠিক

(ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i), (ii), (iii)

11. মান নির্ণয় করুন: (ক) $\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[4]{a^2} \times \sqrt[6]{a^7}$ (খ) $\frac{\sqrt[5]{7} \times \sqrt[3]{7}}{\sqrt[5]{7^{-2}} \times \sqrt[5]{7^{-3}}}$ (গ) $(xy)^{-1} \times \left((x^{-2}y^3)\right)^{-3}$
12. সরল করুন: (ক) $\frac{9 \times 4^{2x}}{16^{x+1} - 2^{x+1}.8^x}$ (খ) $\left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{x+y} \times \left(\frac{ay}{a^z}\right)^{y+z} \div 3\left(a^x.a^z\right)^{x-z}$
13. যদি $3^x = 5^y$ হয় তাহলে দেখান যে, $xy = z(2x + y)$

14. যদি $2^x = 3^y = 6^z$ হয় তাহলে দেখান যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

15. প্রমাণ করুন যে, $\left(x^{\frac{1}{a-b}}\right)^{\frac{1}{a-c}} \times \left(x^{\frac{1}{b-c}}\right)^{\frac{1}{b-a}} \times \left(x^{\frac{1}{c-a}}\right)^{\frac{1}{c-b}} = 1$

16. যদি $\frac{x^{n+1}}{a^n} = \frac{y^{n+1}}{b^n} = \frac{z^{n+1}}{c^n} = a+b+c$ যেখানে, $n > 0$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে,

$$\left[x^{\frac{n+1}{n}} + y^{\frac{n+1}{n}} + z^{\frac{n+1}{n}}\right]^{\frac{n}{n+1}} = a+b+c$$

17. যদি $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} + \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে, $x^3 - 3x = 2$ ।

18. যদি $x = a^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}$ হয় তাহলে দেখান যে, $x^3 - 3x = a + \frac{1}{a}$

19. সমাধান করুন: $2^{x+9} = 4^{x+3}$

20. $2^x = 4^y = 8^z$ এবং $\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{8z}$ হলে x, y এবং z এর মান নির্ণয় করুন।

21. যদি $\frac{9^n \times 3^2 \times \left(3^{-n}\right)^{-1} - 27^n}{3^{3m} \times 2^3} = \frac{1}{27}$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে, $m = 1 + n$

22. মান নির্ণয় করুন (i) $\log_7 \sqrt[3]{7}$ (ii) $\log_{\sqrt{2}} 32$ (iii) $\log_4 2$

23. x এর মান নির্ণয় করুন: (i) $\log_x 36 = 2$ (ii) $\log_5 x = -4$ (iii) $\log_{\sqrt{3}} 27 = x$

24. সরল করুন: (i) $16\log\frac{16}{15} + 12\log\frac{25}{24} + 7\log\frac{81}{80} + \log 5$ (ii) $\log_5 \sqrt[3]{5} + 2\log_7\left(\sqrt[3]{7}\right).\left(\sqrt{7}\right) - \log_4 2$

25. মান নির্ণয় করুন: $\left[1 - \{1 - (1 - x^3)^{-1}\}^{-1}\right]^{-\frac{1}{3}}$ যখন, $x = 7$

26. দেখান যে, (i) $5\log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$ (ii) $\log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7 = \log_{10}\frac{50}{147}$

উত্তরমালা

1. (ক) 2.(ঘ) 3.(গ) 4.(ক) 5.(গ) 6.(ঘ) 7.(খ) 8.(খ) 9.(গ) 10. (ঘ)

12. (ক) a^3 (খ) $\sqrt[5]{7^{-2}}$ (গ) $x^5 y^{-10}$ 13.(ক) $\frac{9}{14}$ (খ) $\frac{1}{3}$ 21. $x = 3$ 22. $x = \frac{7}{16}, y = \frac{7}{32}$ এবং $z = \frac{7}{48}$

24. (i) $\frac{1}{3}$ (ii)10 (iii) $\frac{1}{2}$ 25.(i) 6 (ii) $\frac{1}{625}$ (iii) 6 27. (i) $2\log 5$ (ii) $\frac{5}{3}$