বিন্যাস ও সমাবেশ
Permutations and Combinations

৩

ভূমিকা
Introduction

বৈচিত্র্যময় পৃথিবী তথা সৌরজগতের গ্রহ ও নক্ষত্র রাজির অবস্থান সম্পর্কিত মানুষের কৌতুহলই প্রথমত বিন্যাস ও সমাবেশের সৃষ্টি করেছে। প্রাচীনকালে জ্যোতিষীরা গ্রহগুলোর বিভিন্ন সংযুক্তির সংখ্যাসূচক মান নির্ণয়ে আগ্রহী ছিলেন এবং পঞ্চদশ শতাব্দীর শেষদিকে **পেসিওলী** বিন্যাসের সাধারণ সূত্রটি আবিষ্কার করেন। বিন্যাসের মূল আলোচ্য বিষয় হলো একটি কাজের সাথে আরও একটি কাজ যুক্ত করা হলে, কাজের মোট ফলাফল কী হবে এ বিষয়ে। একজন ব্যক্তি একটি নির্দিষ্ট জায়গায় কত বিভিন্ন প্রকারে মতামত প্রদান করতে পারে এবং কোন বিশেষ বিশেষ ব্যক্তিকে অন্তর্ভুক্ত করে কত বিভিন্ন প্রকারে সিদ্ধান্ত গ্রহণ বা কমিটি গঠন করা যায়। ক্রম বিবেচনা করে সাজানোর প্রক্রিয়া হলো বিন্যাস এবং ক্রম উপেক্ষা করে সাজানোর প্রক্রিয়া হলো সমাবেশ। ভারতীয় গাণিতবিদ ও জ্যোতির্বিদ ভাস্কারা–II (Bhaskara–II) 1150 সালে সর্বপ্রথম n সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয়ের সূত্র প্রদান করেন। ফেবিয়ান স্টেডম্যান (Febian Stedman) 1677 সালে ফ্যাকটোরিয়াল সম্পর্কে প্রথম ধারণা প্রদান করেন। ভারতীয় চিকিৎসক সুশ্রুতা (Sushruta) খ্রীষ্টপূর্ব ষষ্ঠ শতাব্দীতে সর্বপ্রথম Combinatorics-এর ধারণা দেন। গণিতের বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিন্যাস ও সমাবেশের ধারণার বিশেষ অবদান রয়েছে।
বর্তমান ইউনিটে বিন্যাস ও সমাবেশে সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২দিন

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৩.১: বিন্যাস
পাঠ-৩.২: সমাবেশ

মূখ্য শব্দ	গণনার যোজনবিধি, গণনার গুণনবিধি, ফ্যাকটোরিয়াল, বিন্যাস, সমাবেশ, পুনরাবৃত্তিমূলক সমাবেশ।

পাঠ-৩.১ বিন্যাস
Permutation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- গণনার যোজন বিধির সংজ্ঞা বলতে পারবেন;
- গণনার গুণন বিধি ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- বিন্যাস কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- বিন্যাসের বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

গণনার যোজন বিধি
Addition law of counting

যদি কোনো একটি কাজ সম্ভাব্য m সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায় এবং অপর একটি কাজ স্বতন্ত্রভাবে n সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়, তবে ঐ দুইটি কাজ $(m+n)$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করাকেই গণনার যোজন বিধি বলা হয়।

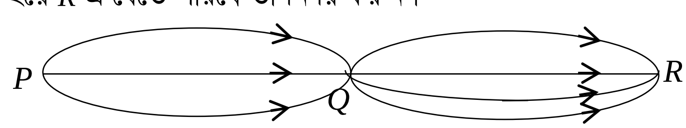
উদাহরণ 1: বিবিএ প্রোগ্রামের দ্বিতীয় সিমেস্টারের পরিচালনা কমিটিতে 4 জন পুরুষ সদস্য ও 3 জন মহিলা সদস্য আছেন। শুধু পুরুষ অথবা শুধু মহিলা সদস্য নিয়ে 2 সদস্যবিশিষ্ট কতগুলো উপ-কমিটি গঠন করা যায় তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, পুরুষ সদস্য, a, b, c, d এবং মহিলা সদস্য p, q, r। সুতরাং, শুধু পুরুষ সদস্য নিয়ে 2 সদস্য বিশিষ্ট যে সকল উপ-কমিটি গঠন করা যায়, তা হলো: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ $\{c, d\}$, এদের মোট সংখ্যা 6.
শুধু মহিলা সদস্য নিয়ে 2 সদস্য বিশিষ্ট সে সকল উপ-কমিটি গঠন করা যায় তা হলো: $\{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}$, এদের মোট সংখ্যা 3.
সুতরাং গণনার যোজন বিধি অনুযায়ী শুধু পুরুষ অথবা শুধু মহিলা সদস্য নিয়ে 2 সদস্য বিশিষ্ট উপ-কমিটি মোট সংখ্যা 6+3 = 9.

গণনার গুণন বিধি (Multiplication law of counting): যদি কোনো কাজ p সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায় এবং ঐ কাজের ওপর নির্ভরশীল দ্বিতীয় একটি কাজ যদি q সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়, তবে কাজ দুইটি একত্রে $(p\times q)$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যাবে, এটাই গণনার গুণন বিধি। এই বিধিটিকে দুইয়ের অধিক গুণনীয়কের জন্য সম্প্রসারণ করা যায়। উপরের ঐ দুইটি কাজের উপর নির্ভরশীল যদি অপর আরেকটি কাজ r সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়, তবে ঐ তিনটি কাজ একত্রে $(p\times q\times r)$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যাবে।

উদাহরণ 2: P থেকে Q যেতে 3 টি পৃথক পথ আছে এবং Q থেকে R এ যেতে 4 টি পৃথক পথ আছে। এক ব্যক্তি কত প্রকারে P থেকে Q হয়ে R এ যেতে পারবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান:



চিত্রানুযায়ী, লোকটি P থেকে Q তে 3টি পৃথক পথে যেতে পারে এবং Q থেকে R এ 4 টি পৃথক পথে যেতে পারে।
যেহেতু P থেকে Q তে যাওয়ার প্রতিটি পথের জন্য Q থেকে R এ যাওয়ার 4টি পথ আছে, সেহেতু গণনার গুণন বিধি অনুযায়ী, লোকটি P থেকে Q হয়ে R এ মোট $(3\times 4)=12$ প্রকারে যেতে পারবে।

বিন্যাস (Permutation): কতগুলো জিনিস থেকে প্রত্যেকবার কয়েকটি বা সব কয়টি জিনিস **একবার** নিয়ে সম্ভাব্য যত প্রকারে সাজানো যায় তাদের প্রত্যেকটিকে ভিন্ন ভিন্ন রকমের এক একটি বিন্যাস বলা হয়।

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস হতে প্রত্যেক বার r $(r \le n)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যাকে ^nP_r বা $p(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

মনে করুন a,b,c তিনটি বর্ণ আছে। এই বর্ণ তিনটির একটি, দুইটি অথবা তিনটি নিয়ে কী কী ভাবে বিন্যাস হতে পারে তা নিম্নরূপ–

(i) যখন তিনটি বর্ণ থেকে একটিকেও নেয়া হয় না তখন বিন্যাস সংখ্যা হয় 1 টি কারণ তিনটি বর্ণ abc সাজানোর পূর্বেরই একটি শব্দ। এখানে, n=3 এবং r=0 ধরে বিন্যাস সংখ্যা $^nP_r={}^3P_0=\dfrac{3\times2\times1}{3\times2\times1}=1$, যেমন-$abc$.

(ii) যখন তিনটি বর্ণ থেকে প্রতিবারে একটি করে বর্ণ নিয়ে বিন্যাস করা হয় তখন বিন্যাস সংখ্যা হবে 3 টি। এখানে, n=3 এবং r=1 ধরে বিন্যাস সংখ্যা $^nP_r={}^3P_1=\dfrac{3!}{(3-1)!}=\dfrac{3\times2\times1}{2\times1}=3$ । যেমন- a,b,c.

(iii) যখন তিনটি বর্ণ থেকে প্রতিবারে **দুইটি** করে বর্ণ নিয়ে বিন্যাস করা হয় তখন বিন্যাস সংখ্যা হবে 6 টি। এখানে, n=3 এবং r=2 ধরে বিন্যাস সংখ্যা $^nP_r={}^3P_2=\dfrac{3!}{(3-2)!}=\dfrac{3\times2\times1}{1}=6$ । যেমন- ab,ba,ac,ca,bc,cb.

(iv) যখন তিনটি বর্ণ থেকে প্রতিবারে তিনটি করে বর্ণ নিয়ে বিন্যাস করা হয় তখন বিন্যাস সংখ্যা হবে 6 টি। এখানে, n=3 এবং r=3 ধরে বিন্যাস সংখ্যা $^nP_r={}^3P_3=\dfrac{3!}{(3-3)!}=\dfrac{3\times2\times1}{0!}=6$ । যেমন- abc,acb,bca,bac,cab,cba.

উপরোক্ত বিন্যাস বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায় যে, একটি বর্ণ একই বিন্যাসে একাধিকবার ব্যবহার হয়নি। এটি বিন্যাসের একটি বৈশিষ্ট্য।

ক্রামের ফ্যাক্টোরিয়াল নোটেশন (Kramp's Factorial Notation): কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n এর ফ্যাক্টোরিয়াল বলতে 1 থেকে n পর্যন্ত সকল স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল বুঝায়। একে, '!' (factorial) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $4!=4\times3\times2\times1=24$, $3!=3\times2\times1=6$

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)! \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)..............\{n-(n-2)\}\{n-(n-1)\} \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)..............3.2.1 \end{aligned}$$

(a) n **সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু এক সাথে নিয়ে বিন্যাস**

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3)..............(n-r+1)$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...........(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$ [লব ও হরকে $(n-r)!$ দ্বারা গুণ করে]

$$=\frac{n!}{(n-r)!}........(i)$$

উদাহরণ 3: EQUATION শব্দটির সবগুলো অক্ষর একত্রে নিয়ে কতগুলো শব্দ তৈরি করা যায় তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: EQUATION শব্দটিতে 8টি অক্ষর আছে। এখন 8টি অক্ষরের সবকয়টি একত্রে নিয়ে মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে

$$^8p_8 = 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40{,}320$$

অনুসিদ্ধান্ত 1: ${}^{n}p_{n}=n!$

প্রমাণঃ $r=n$ হলে সমীকরণ (i) হতে পাই- ${}^{n}p_{n}=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots.\text{to } n \text{ factor}$

$=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\{n-(n-1)\}$

$=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots1$

$=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots3.2.1=n!$

$\therefore {}^{n}P_{n}=n!$

অনুসিদ্ধান্ত 2: ${}^{n}P_{n-1}=n!$

প্রমাণঃ ${}^{n}P_{n-1}=\dfrac{n!}{\{n-(n-1)\}}=\dfrac{n!}{(n-n+1)}=\dfrac{n!}{1!}=n!$

$\therefore {}^{n}P_{n-1}=n!$

অনুসিদ্ধান্ত 3: ${}^{n}P_{r}=n.{}^{n-1}P_{r-1}$

প্রমাণঃ ${}^{n}P_{r}=n.{}^{n-1}P_{r-1}$

$=n.\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{n(n-1)!}{(n-1-r+1)!}$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!}={}^{n}P_{r}$

$\therefore {}^{n}P_{r}=n.{}^{n-1}P_{r-1}$

অনুসিদ্ধান্ত 4: $0!=1$

প্রমাণঃ আমরা জানি, ${}^{n}P_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

এখন, $r=n$ বসিয়ে আমরা পাই

${}^{n}P_{n}=\dfrac{n!}{(n-n)!}=\dfrac{n!}{0!}$

বা, $n!=\dfrac{n!}{0!}$,$[\because {}^{n}P_{n}=n!]$

বা, $0!=\dfrac{n!}{n!}=1 \therefore 0!=\dfrac{n!}{n!}=1\Rightarrow 0!=1$

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন যে, ${}^{n}P_{r}={}^{n-1}P_{r}+r.{}^{n-1}P_{r-1}$

সমাধান: R.H.S. $={}^{n-1}P_{r}+r.{}^{n-1}P_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r.\dfrac{(n-1)!}{(n-1-r+1)!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+r.\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+\dfrac{r.(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}\left\{1+\dfrac{r}{n-r}\right\}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}\left\{\dfrac{n-r+r}{n-r}\right\}=\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}\times\dfrac{n}{n-r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}={}^{n}P_{r}=\text{L.H.S.}$

$\therefore {}^{n}P_{r}={}^{n-1}P_{r}+r.{}^{n-1}P_{r-1}$ (প্রমাণিত)

(b) নির্দিষ্ট p সংখ্যক জিনিসকে সর্বদা গ্রহণ করে n সংখ্যক জিনিসের মধ্য থেকে প্রত্যেক বার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস নির্ণয়, যেখানে $(p \le r \le n)$.

মনে করুন, n সংখ্যক জিনিস হতে নির্দিষ্ট p সংখ্যক জিনিসকে পৃথক করে রাখা হলো। অতঃপর $(n-p)$ সংখ্যক জিনিস হতে $(r-p)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস গঠন করা হলে মোট ${}^{n-p}P_{r-p}$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাবে।

আবার, p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস একটির পর একটি বিবেচনা করলে, প্রথম জিনিসটি সাজানো যাবে $(r-p+1)$ প্রকারে দ্বিতীয় জিনিসটি সাজানো যাবে $(r-p+2)$ প্রকারে এবং এভাবে p -তম জিনিসটিকে সাজানো যাবে r প্রকারে।

$\therefore$ p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিসকে সাজানো যাবে- $(r-p+1),(r-p+2),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r$ বা ${}^{r}P_{p}$ প্রকারে।

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-p}P_{r-p} \times {}^{r}P_{p}$

উদাহরণ 5: 12টি বস্তুর একবারে 5টি নিয়ে কতগুলো বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: 5টি বস্তুর মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা ${}^{5}P_{2}$ এবং অবশিষ্ট (12-2)টি বা 10টি বস্তুর মধ্যে 3টি বস্তু নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা ${}^{10}P_{3}$

$\therefore$ 12টি বস্তু হতে 5টি নিয়ে যাতে সর্বদা 2টি বিশেষ বস্তু অন্তর্ভুক্ত থাকে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা

$$= {}^{5}P_{2} \times {}^{10}P_{3} = \frac{5!}{3!} \times \frac{10!}{7!} = 20 \times 720 = 14{,}400$$

উদাহরণ 6: (i) $7!$ (ii) $5! \times 3!$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: (i) $7! = 7(7-1)(7-2)(7-3)(7-4)(7-5)(7-6)(7-7)! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$

(ii) $5! \times 3! = (5\times4\times3\times2\times1)\times(3\times2\times1) = 120\times6 = 720$

উদাহরণ 7: যদি ${}^{n}P_{4} = 12 \times {}^{n}P_{2}$ হয় তবে n এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, ${}^{n}P_{4} = 12 \times {}^{n}P_{2}$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)(n-3) = 12.n(n-1)$$

$$\Rightarrow (n-2)(n-3) = 12$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 6 = 12$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 6 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n - 6 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 6n + n - 6 = 0$$

$$\Rightarrow n(n-6) + 1(n-6) = 0$$

$$\Rightarrow (n-6)(n+1) = 0$$

হয় $n-6=0$ অথবা $n+1=0$

$\Rightarrow n = 6$ অথবা $n = -1$

n এর মান বিয়োগবোধক হতে পারে না ।

$\therefore n = 6$

উদাহরণ 8: যদি ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 5:12$ হয় তবে n এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 51:2$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!} : \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} = 5:12$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} : \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 5:12$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1} : \frac{(n+1)n(n-1)}{1} = 5:12$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1} \times \frac{1}{n(n+1)(n-1)} = 5:12$$

$$\Rightarrow \frac{(n-2)(n-3)}{n(n+1)} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2-5n+6}{n^2+n} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow 12n^2 - 60n + 72 = 5n^2 + 5n$$

$$\Rightarrow 12n^2 - 5n^2 - 60n - 5n + 72 = 0$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 65n + 72 = 0$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 56n - 9n + 72 = 0$$

$$\Rightarrow 7n(n-8) - 9(n-8) = 0$$

$$\Rightarrow (7n-9)(n-8) = 0$$

হয় $n-8=0$ অথবা $7n-9=0$ $\Rightarrow n=8$ অথবা $n=\frac{9}{7}$

n এর মান ভগ্নাংশ হতে পারবে না। $\therefore n=8$

(c) **p সংখ্যক জিনিসকে সর্বদা বর্জন করে n সংখ্যক জিনিসের মধ্যে থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস নির্ণয়:** যেহেতু p সংখ্যক জিনিস কোনো বিন্যাসেই অন্তর্ভুক্ত হয় না তখন একে একেবারে বর্জন করলে অবশিষ্ট $(n-p)$ সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস গঠন করতে হবে। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-p}P_r$

উদাহরণ 9: 8টি বস্তুর একবারে দুইটি নিয়ে কতগুলো বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে না?
সমাধান: 8টি বস্তুর মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত না থাকলে অবশিষ্ট বস্তু থাকে (8-2) টি বা 6টি

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা ${}^6P_2 = \frac{6!}{4!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = \frac{720}{24} = 30$

(d) **সবগুলো ভিন্ন নয় এরূপ বস্তুর বিন্যাস নির্ণয়:** n সংখ্যক বস্তুর সব কয়টি একবার নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে, যখন তাদের p সংখ্যক বস্তু এক প্রকার, q সংখ্যক বস্তু দ্বিতীয় প্রকার, r সংখ্যক বস্তু তৃতীয় প্রকার এবং বাকী বস্তুগুলো ভিন্ন ভিন্ন।

মনে করুন, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা x ; এদের যেকোনো একটি থেকে, যদি p সংখ্যক একজাতীয় বস্তু স্বতন্ত্র হতো, তবে সাজানোর পদ্ধতি পরিবর্তন করে $p!$ সংখ্যক নতুন বিন্যাস তৈরি করা যেত। অতএব, যদি $p!$ এক জাতীয় বস্তুর সবগুলো স্বতন্ত্র হয়, তবে $x \times p!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়।

অনুরূপভাবে, যদি q সংখ্যক এক জাতীয় বস্তু স্বতন্ত্র হয়, তবে দ্বিতীয় সেট বিন্যাসের প্রত্যেকটি থেকে $q!$ সংখ্যক নতুন বিন্যাস পাওয়া যায়।

অতএব, যদি p সংখ্যক এক জাতীয় বস্তু ও q সংখ্যক এক জাতীয় বস্তুর সবগুলো স্বতন্ত্র হয়, তবে আমরা $x \times p! \times q!$ সংখ্যক বিন্যাস পাই। আবার, যদি r সংখ্যক এক জাতীয় বস্তু স্বতন্ত্র হয়, তবে আমরা মোট $x \times p! \times q! \times r!$ সংখ্যক বিন্যাস পাই।

এখন সবগুলো বস্তুই স্বতন্ত্র, ফলে n সংখ্যক বস্তুর সবকটি একবারে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $n!$

$\therefore x \times p! \times q! \times r! = n!$

অতএব, $x = \dfrac{n!}{p! \times q! \times r!}$ অর্থাৎ, বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{n!}{p! \times q! \times r!}$

উদাহরণ 10: COMMERCE শব্দটির সবকয়টি বর্ণকে কত প্রকার বিভিন্ন রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন। তাদের স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে নিয়ে কতগুলো বিন্যাস করা যাবে এবং স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে কতগুলো বিন্যাস করা যাবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: COMMERCE শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 2টি C, 2টি M, 2টি E, 1টি R এবং 1টি O আছে।
মনে করুন, মোট বর্ণ আছে n সংখ্যক, C বর্ণ আছে p সংখ্যক, M বর্ণ আছে q সংখ্যক এবং E বর্ণ আছে r সংখ্যক

সুতরাং, মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{n!}{p! \times q! \times r!} = \dfrac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5040$

COMMERCE শব্দটিতে O, E এবং E, 3টি স্বরবর্ণ আছে, যাদেরকে একটি বর্ণ মনে করলে মোট সংখ্যা হয় {C, M,M, R,C,OEE} 6টি। এই 6টি বর্ণের মধ্যে 2টিC, 2টিM এবং অন্যান্য বর্ণগুলো ভিন্ন।

সুতরাং, স্বরবর্ণ তিনটি একত্র মনে করে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{6!}{2! \times 2!} = 180$

আবার তিনটি স্বরবর্ণ নিজেদের মধ্যে বিন্যাস তৈরি করে $= \dfrac{3!}{2!} = 3$ ভাবে।

সুতরাং, স্বরবর্ণ তিনটি একত্র মনে করে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 180 \times 3 = 540$

$\therefore$স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= 5040 - 540 = 4500$

(e) পুনরাবৃত্তি মূলক বস্তুর বিন্যাস নির্ণয়: n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক একবারে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে, যখন যে কোনো বিন্যাসের প্রত্যেকটি বস্তু r সংখ্যক কবার পুনরাবৃত্তি হতে পারে। n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা r সংখ্যক শূন্য স্থান যত রকমভাবে পূরণ করা যাবে তাই নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা।

প্রথম স্থানটি n প্রকারে পূরণ করা যায় এবং প্রথম স্থানটি পূরণ করার পর, দ্বিতীয় স্থানটিও পূরণ করা যায় n প্রকারে, কেননা সবগুলো বস্তুই পুনরায় ব্যবহার করা যায়।

অতএব, প্রথম দুইটি স্থান মোট $n \times n = n^2$ প্রকারে পূরণ করা যায়।

অনুরূপভাবে, তৃতীয় স্থানটিও n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। অতএব প্রথম তিনটি স্থান $n^2 \times n = n^3$ প্রকরে পূরণ করা যায়। এভাবে দেখানো যায় যে, r সংখ্যক স্থান n^r সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব নির্ণেয় বিন্যাসসংখ্যা n^r .

উদাহরণ 11: টেলিফোন ডায়ালে 0 থেকে 9 পর্যন্ত লেখা থাকে। যদি ভোলা শহরের টেলিফোন নম্বরগুলো 5 অঙ্ক বিশিষ্ট হয়, তবে ঐ শহরের কত জনকে টেলিফোন সংযোগ দেওয়া যাবে তা নির্ণয় করুন।

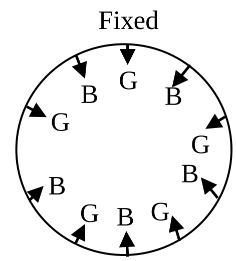
সমাধান: ভোলা শহরের টেলিফোন নম্বরগুলো 5 অঙ্কবিশিষ্ট, সুতরাং 5 অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার ১ম অঙ্কটি 0 বাদে 9টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে 9 উপায়ে, কারণ টেলিফোন নম্বর শূন্য দিয়ে শুরু হয় না। ২য় স্থানটি 10 টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে। অতএব ৩য়, ৪র্থ, ৫ম স্থানগুলোর প্রত্যেকটি পূরণ করা যায় 10 উপায়ে।

অতএব, নির্ণেয় টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা $= 9\times10\times10\times10\times10 = 90,000$

(f) চক্র বিন্যাস: একটি বস্তুকে স্থির ধরে n সংখ্যক বস্তুর সবগুলো নিয়ে চক্র বিন্যাস। কিন্তু যদি চক্রকার বিন্যাস বামাবর্তে ও ডানাবর্তে একই হয় তবে বিন্যাস সংখ্যা $\frac{(n-1)!}{2}$ ।

উদাহরণস্বরূপ, 5 জন ব্যক্তি গোলাকার হয়ে দাঁড়াতে পারবে $(5-1)!$ বা 24 উপায়ে।

উদাহরণ 12: একটি গোল টেবিলে 5 জন ছাত্র এবং 5 জন ছাত্রী এমনভাবে বসাতে হবে যেন 2 জন ছাত্র একসাথে না বসে, তাহলে তাদেরকে কত প্রকারে সাজানো যাবে তা নির্ণয় করুন।



সমাধান: মনে করুন, ছাত্রী প্রথমে বসবে তাহলে প্রথম বসার সিটটি স্থির। পাশের চিত্রে G দ্বারা ছাত্রী এবং B দ্বারা ছাত্র বোঝানো হয়েছে।

সুতরাং, ছাত্রীরা বসতে পারবে $(5-1)! = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$ উপায়ে।

এখন, ছাত্ররা বসবে ছাত্রীদের মাঝখানে এবং যা নির্দিষ্ট। সুতরাং 5 জন ছাত্র 5টি স্থানে বসবে তার বিন্যাস $= (5)! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$.

সুতরাং, ছাত্র-ছাত্রীদের মোট বসার উপায় $= 120\times24 = 2880$

উদাহরণ 13: PERMUTATION শব্দটির বর্ণগুলোর মধ্যে স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে বর্ণগুলোকে কত রকমে পুনরায় সাজানো যেতে পারে।

সমাধান: PERMUTATION শব্দটিতে মোট 11টি অক্ষর আছে, যার মধ্যে 5টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জনবর্ণ আছে। যেহেতু স্বরবর্ণগুলো এদের অবস্থান পরিবর্তন করবেনা, কাজেই এদের স্থান নির্দিষ্ট করে 6টি ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা সাজানোর সংখ্যা বের করতে হবে যার মধ্যে T দুই বার থাকবে।

সুতরাং সাজানোর সংখ্যা $= \frac{6!}{2!} = 360$ টি এবং PERMUTATION শব্দটি নিজেই একটি সাজানো সংখ্যা।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সাজানো সংখ্যা $= 360-1 = 359$.

উদাহরণ 14: স্বপ্ন সুপারশপের কতৃপক্ষ 8 টি বিভিন্ন শাখার জন্য 8 জন ব্যবস্থাপক নিয়োগ দিয়েছেন। 8 জন ব্যবস্থাপককে 8 টি বিভিন্ন শাখায় কতভাবে নিযুক্ত করা যাবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: স্বপ্ন সুপারশপের কতৃপক্ষ 8 টি বিভিন্ন শাখার জন্য নিয়োগ দিয়েছে 8 জন ব্যবস্থাপক।

সুতরাং, বিভিন্ন উপায়ে সাজানো সংখ্যা $= {}^8P_8 = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = 40320$

সারসংক্ষেপ:

- কতগুলো জিনিস থেকে প্রত্যেকবার কয়েকটি বা সব কয়টি জিনিস **এক বার** নিয়ে সম্ভাব্য যত প্রকারে সাজানো যায় তাদের প্রত্যেকটিকে ভিন ভিন্ন রকমের এক একটি বিন্যাস বলা হয়।
- n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু এক সাথে নিয়ে বিন্যাস $n_{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
- সবগুলো ভিন্ন নয় এরূপ বস্তুর বিন্যাস, $x = \frac{n!}{p!q!r!}$

পাঠ-৩.২ সমাবেশ
Combination

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সমাবেশ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- বিন্যাস ও সমাবেশের মধ্যে পার্থক্য করতে পারবেন;
- সমাবেশ সংখ্যা ^nC_r এর মান নির্ণয় করতে পারবেন;
- সম্পূরক সমাবেশ কী তা বর্ণনা করতে পারবেন;
- শর্তাধীন সমাবেশের সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

সমাবেশ
Combination

কতগুলো বস্তুর থেকে কয়েকটি বা সবগুলোকে একবারে নিয়ে যতপ্রকারে নির্বাচন বা দল (ক্রম বর্জন করে) গঠন করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলা হয়।

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে প্রত্যেকবার r সংখ্যক বস্তু নিয়ে প্রাপ্ত সমাবেশ সংখ্যাকে সাধারণত ^nC_r বা $C(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়; যেখানে, $n \geq r$ ।

মনে করুন, a,b,c তিনটি বর্ণ আছে। এই বর্ণ তিনটি একক ভাবে, দুইটি নিয়ে অথবা তিনটি নিয়ে কী কীভাবে সমাবেশ হতে পারে তা নিম্নরূপ–

(i) যখন তিনটি বর্ণ থেকে একটিও না নিয়ে সমাবেশ করা হয় তখন সমাবেশ সংখ্যা হয় 1টি, কারণ abc পূর্ব থেকেই একটি সমাবেশ। এখানে, $n=3$ এবং $r=0$ ধরে সমাবেশ সংখ্যা $^nC_r={}^3C_0=1$। যেমন: $abc.$

(ii) যখন তিনটি বর্ণ থেকে প্রতিবারে একটি করে বর্ণ নিয়ে সমাবেশ করা হয় তখন সমাবেশ সংখ্যা হবে 3 টি। এখানে, $n=3$ এবং $r=1$ ধরে সমাবেশ সংখ্যা $^nC_r={}^3C_1=3$। যেমন: $a,b,c.$

(iii) যখন তিনটি বর্ণ থেকে প্রতিবারে দুইটি করে বর্ণ নিয়ে সমাবেশ করা হয় তখন সমাবেশ সংখ্যা হবে 3 টি। এখানে, $n=3$ এবং $r=2$ ধরে সমাবেশ সংখ্যা $^nC_r={}^3C_2=3$। যেমন: $ab,\ ac,bc$ অথবা $ba,\ ca,cb$

(iv) যখন তিনটি বর্ণ থেকে প্রতিবারে তিনটি করে বর্ণ নিয়ে সমাবেশ করা হয় তখন সমাবেশ সংখ্যা হবে 1 টি। এখানে, $n=3$ এবং $r=3$ ধরে সমাবেশ সংখ্যা $^nC_r={}^3C_3=1$। যেমন: $abc.$

বি.দ্র.: উল্লেখ্য যে, সমাবেশের ক্ষেত্রে কেবলমাত্র একযোগে কোন বস্তু নেয়া হলো তা বিবেচনা করা হবে, ঐ বস্তুগুলোর কোনটির পর কোনটি রেখে সাজানো হলো তা বিবেচনা করে সাজানো হয় না। এখানে সমাবেশের ক্ষেত্রে $abc,\ acb,\ bca,\ bac,\ cab,\ cba$ সমাবেশ 1টি।

সমাবেশ সংখ্যা বা ^nC_r এর মান নির্ণয়: n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস বা বস্তু থেকে প্রতিবার r সংখ্যক জিনিস বা বস্তু নিয়ে যতগুলো সমাবেশ হতে পারে, তার সংখ্যা নির্ণয়, যেখানে $n,r \in N$ এবং $n \geq r$

মনে করুন, নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা ^nC_r প্রত্যেক সমাবেশে r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস আছে। এখন প্রত্যেক সমাবেশের অন্তর্গত r সংখ্যক জিনিসকে তাদের নিজেদের মধ্যে r প্রকারে সাজানো যায়। এরূপ ^nC_r সংখ্যক সমাবেশ হতে প্রাপ্ত

মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $^nC_r \times r!$ এবং যা n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যার সমান।

$$\therefore {}^nC_r \times r! = {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{বা}, {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad ....(i)$$

$n=r$ হলে, (i) থেকে পাই, $^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{n!(0)!} = \frac{n!}{n! \times 1!} = 1$

$r=0$ হলে, (i) থেকে পাই, $^nC_0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!(0)!} = \frac{n!}{n! \times 1!} = 1$

উদাহরণ 1: ব্যবসায় গণিত বিষয়ের একটি সিমেস্টার পরীক্ষার জন্য 10 সেট প্রশ্ন তৈরি করা হয়েছে। এই 10 সেট প্রশ্ন থেকে কোর্স কো-অর্ডিনেটর কিভাবে 7 সেট প্রশ্ন নির্বাচন করবেন তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: $^{10}C_7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times3!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$ উপায়ে।

অনুসিদ্ধান্ত: n সংখ্যক জিনিসের p সংখ্যক জিনিস এক প্রকার, বাকী জিনিসগুলো ভিন্ন ভিন্ন হলে, তাদের $r \geq p$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $\sum_{i=0}^{p} {}^{n-p}C_{r-i} = {}^{n-p}C_r + {}^{n-p}C_{r-1} + {}^{n-p}C_{r-2} + --- + {}^{n-p}C_{r-p}$

উদাহরণ 2: 'THESIS' শব্দটি কত প্রকারে নির্বাচন করা যাবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: 'THESIS' শব্দটিতে S আছে 2টি এবং অন্য 4টি বর্ণ ভিন্ন। প্রতিবারে 4টি বর্ণ নিয়ে গঠিত মোট সমাবেশ সংখ্যা = S অন্তর্ভুক্ত না করে সমাবেশ সংখ্যা +1টি S অন্তর্ভুক্ত করে সমাবেশ সংখ্যা +2টি S অন্তর্ভুক্ত করে সমাবেশ সংখ্যা

$= {}^{6-2}C_4 + {}^{6-2}C_{4-1} + {}^{6-2}C_{4-2} = {}^4C_4 + {}^4C_3 + {}^4C_2 = 1 + 4 + 6 = 11$

বিন্যাস ও সমাবেশের মধ্যে পার্থক্য

ক্রম	বিন্যাস	সমাবেশ
১.	কোন নির্দিষ্ট বস্তু-সমষ্টি হতে প্রতিবারে এদের সবগুলো অথবা কিছুসংখ্যক বস্তুকে সম্ভাব্য যতভাবে বিভিন্ন ক্রম অনুযায়ী সাজানো যায় এদের প্রত্যেকটিকে ভিন্ন ভিন্ন রকমের এক একটি বিন্যাস বলা হয়।	কতগুলো বস্তুর কয়েকটিকে অথবা এদের সবগুলোকে এক সাথে নিয়ে তাদের কোনটির পর কোনটিকে সাজানো হলো তা বিবেচনা না করে যতপ্রকারে সাজানো সম্ভব হয় তাদের প্রত্যেকটিকে ঐ বস্তুগুলোর এক একটি সমাবেশ বলা হয়।
২.	n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে $r\ (r \leq n)$ সংখ্যক বস্তু নিয়ে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যা ^nP_r.	n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে $r\ (n \geq r)$ সংখ্যক বস্তু নিয়ে প্রাপ্ত সমাবেশ সংখ্যা ^nC_r
৩.	বিন্যাসে বস্তু এবং বস্তুর অবস্থান উভয়ই বিবেচনা করা হয়।	সমাবেশে কেবলমাত্র বস্তুর বিবেচনা করা হয়, তাদের অবস্থান নয়।
৪.	দুই বা ততোধিক বিন্যাসের সবগুলোর উপাদান সাধারণ হতে হয়।	দুই বা ততোধিক সমাবেশের সবগুলোর উপাদান সাধারণ হতে পারে না। অন্ততপক্ষে এদের মধ্যে একটি উপাদান পৃথক হতে হয়।
৫.	বিন্যাসের ক্ষেত্রে সাধারণত এ্যারেজম্যান্ট শব্দটি ব্যবহৃত হয়।	সমাবেশের ক্ষেত্রে সাধারণত সিলেকশন শব্দটি ব্যবহৃত হয়।

সম্পূরক সমাবেশ (Complementary Combination): n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা, n সংখ্যক জিনিস থেকে প্রত্যেকবার $(n-r)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যার সমান অর্থাৎ, $^nC_r = {}^nC_{n-r}$, এরূপ সমাবেশকে সম্পূরক সমাবেশ বলা হয়।

প্রমাণ: সমাবেশের সংজ্ঞা থেকে পাই $^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r$

$\therefore {}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

সূত্র: প্রমাণ করুন যে, ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

প্রমাণ: L.HS. $= {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} + \dfrac{n!}{(r-1)!\{n-(r-1)\}!}$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1).(n-r)!} \quad [\because n! = n(n-1)!]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right\} = \frac{(n+1)n!}{r(r-1)!(n-r+1)(n-r)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!\{(n+1)-r\}!} = {}^{n+1}C_r = \text{R.H.S}$$

শর্তাধীন সমাবেশ (Conditional Combination)

(a) p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত করে n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রতিবার $r(r \geq p)$ সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা = ${}^{n-p}C_{r-p}$

(b) p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত না করে n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা = ${}^{n-p}C_r$.

উদাহরণ 3: বাংলাদেশ ক্রিকেট দল মোট ভালো খেলোয়ার নির্বাচন করল 20 জন। এই 20 জন খেলোয়ার থেকে বিশ্বকাপ খেলার জন্য 11 জন নির্বাচন করবেন যার মধ্যে–

i. সাকিব এবং তামিম ইকবাল সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

ii. 5 জন বিশেষ খেলোয়ার যারা কখনো দলে থাকবে না।

সমাধান: (i) সাকিব এবং তামিম ইকবাল সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে। সুতরাং, বিশ্বকাপ খেলার জন্য 11 জন নিয়ে দল নির্বাচন করা যাবে, ${}^{20-2}C_{11-2} = {}^{18}C_9 = 48620$ উপায়ে।

(ii) 5 জন বিশেষ খেলোয়ার যাদের কখনো দলে না নিয়ে 11 জন নিয়ে বিশ্বকাপ দল নির্বাচন করা যাবে

${}^{20-5}C_{11} = {}^{15}C_{11} = 1365$ ভাবে।

(c) n সংখ্যক জিনিস থেকে প্রত্যেকবার অন্তত একটি জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা 2^n-1 প্রত্যেক জিনিসকে গ্রহণ করা বা বর্জনকরা যায়।

সুতরাং, প্রত্যেকটি জিনিসের জন্য 2টি উপায় গ্রহণ করা যায়। এরূপ n সংখ্যক জিনিসের জন্য গৃহীত উপায় $=2^n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $=2^n$। কিন্তু এর ভিতর সকলকে বর্জন করার উপায়ও অন্তর্ভুক্ত।

সুতরাং, মোট সমাবেশ সংখ্যা $= 2^n - 1$

(d) p সংখ্যক এক জাতীয়, q সংখ্যক অন্য এক জাতীয়, r সংখ্যক অন্য আর এক জাতীয় এবং k সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন যে কোনো সংখ্যক জিনিস নিয়ে উৎপন্ন সমাবেশ সংখ্যা $=(p+1)(q+1)(r+1)2^k-1$

p সংখ্যক এক জাতীয়, q সংখ্যক অন্য এক জাতীয়, r সংখ্যক অন্য আর এক জাতীয় এবং k সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন যে কোনো সংখ্যক জিনিস নিয়ে উৎপন্ন সমাবেশ সংখ্যা = $(p+1)(q+1)(r+1)2^k-1$.

p সংখ্যক এক জাতীয় জিনিস থেকে 0 বা 1 ....., বা 3 ..., বা p সংখ্যক জিনিস বাছাই করা যায়। অতএব $(p+1)$ সংখ্যক উপায়ে বাছাই করা যায়। অনুরূপভাবে, q সংখ্যক এক জাতীয় এবং r সংখ্যক এক জাতীয় জিনিসের জন্য যথাক্রমে $(q+1)$ এবং $(r+1)$ উপায়ে বাছাই করতে পারি।

আবার, k সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের প্রত্যেকটির জন্য দুই রকম উপায় গ্রহণ করা যায়। সুতরাং, মোট 2^k সংখ্যক উপায় গ্রহণ করা যায়। কিন্তু সকলকে বর্জন করার ঘটনাও এদের অন্তর্ভুক্ত বলে নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা $=(p+1)(q+1)(r+1)2^k-1$

উদাহরণ 4: সুমনের নিকট 8টি দশ টাকার, 4টি পাঁচ টাকার, 2টি দুই টাকার এবং 2টি এক টাকার নোট আছে। সুমন কত প্রকারে দরিদ্র ভান্ডারে দান করতে পারবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: দরিদ্র ভান্ডারে দান করার সংখ্যা = $(8+1)(4+1)(2+1)(2+1)-1 = 9\times5\times3\times3-1 = 405-1= 404$

(e) p সংখ্যক এক জাতীয়, q সংখ্যক অন্য এক জাতীয় ও r সংখ্যক অন্য আর এক জাতীয় হলে প্রতিটির অন্ততঃ একটি নিয়ে উৎপন্ন সমাবেশ সংখ্যা-

$$= \sum_{i=1}^{p} {}^pC_i \times \sum_{i=1}^{q} {}^qC_i \times \sum_{i=1}^{r} {}^rC_i = (2^p-1)(2^q-1)(2^r-1)$$

(f) $(p+q)$ সংখ্যক জিনিসকে দুইটি দলে বিভক্ত করতে হবে যেন এক দলে p সংখ্যক ও অন্যদলে q সংখ্যক জিনিস থাকে।

$p+q$ সংখ্যক জিনিস থেকে প্রতিবারে p সংখ্যক জিনিস নির্বাচন করা যায় ${}^{p+q}C_p$ উপায়ে। অতঃপর অবশিষ্ট q সংখ্যক জিনিস থেকে q সংখ্যক জিনিস নির্বাচন করা যায় ${}^qC_q=1$ উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা= ${}^{p+q}C_p \times 1 = \dfrac{(p+q)!}{p!(p+q-p)!} = \dfrac{(p+q)!}{p!q!}$

উদাহরণ 5: 10 জন খেলোয়াড় দ্বারা 6 সদস্য ও 4 সদস্যের দুইটি দল করা যাবে কতটি তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: 10 জন খেলোয়াড় দ্বারা 6 সদস্য ও 4 সদস্যের দুইটি দল করা যাবে,

$$\frac{10!}{6!\,4!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(6\times5\times4\times3\times2\times1)(4\times3\times2\times1)} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} = 210$$ উপায়ে।

উদাহরণ 6: যদি ${}^nC_{12}={}^nC_8$ হয়, তবে ${}^{22}C_n$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, ${}^nC_{12}={}^nC_8$

বা, ${}^nC_{n-12}={}^nC_8 \qquad [\because {}^nC_{12}={}^nC_{n-12}]$

$\therefore n-12=8$

বা, $n=8+12 \quad \therefore n=20$

$$\therefore {}^{22}C_n = {}^{22}C_{20} = {}^{22}C_{22-20} = {}^{22}C_2 = \frac{22!}{2!(22-2)!} = \frac{22!}{2!20!} = \frac{22\times21\times20!}{2!20!} = \frac{22\times21}{2\times1} = 231$$

$\therefore {}^{22}C_n = 231$

উদাহরণ 7: 20 বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম সমতলিক ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুর সংযোগে প্রাপ্ত রেখা দ্বারা কতগুলো ত্রিভুজ গঠন করা যায় ও ঐ সমতলিক ক্ষেত্রটির কতগুলো কর্ণ আছে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: (i) 20 বাহুবিশিষ্ট একটি সমতলিক ক্ষেত্রের 20টি কৌণিক বিন্দু আছে এবং 20টি বিন্দুর যেকোনো তিনটির সংযোগ রেখার সাহায্যে একটি ত্রিভুজ গঠন করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের সংখ্যা $^{20}C_3 = \dfrac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$

(ii) কৌণিকে বিন্দুগুলোর যে কোনো দুইটিকে সংযুক্ত করলে একটি কর্ণ উৎপন্ন হয়।

সুতরাং 20টি কৌণিক বিন্দু দ্বারা গঠিত কর্ণের সংখ্যা $^{20}C_2 = 190$

কিন্তু এদের মধ্যে সমতলিক ক্ষেত্রের 20টি বাহুর অন্তর্ভুক্ত।

$\therefore$ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা= (190–20) = 170

উদাহরণ 8: 5 জন বিজ্ঞান ও 3 জন কলাবিভাগের ছাত্রের মধ্যে থেকে 4 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। যদি প্রত্যেক কমিটিতে (i) অন্তত 1 জন বিজ্ঞানের ছাত্র থাকে, (ii) অন্তত 1 জন বিজ্ঞান ও 1 জন কলাবিভাগের ছাত্র থাকে, তাহলে কত বিভিন্নভাবে এ কমিটি গঠন করা যেতে পারে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: (i) 4 জনের কমিটি নিম্নরূপে গঠন করা যায়:

5 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র	3 জন কলাবিভাগের ছাত্র	কমিটি গঠন করার উপায়
1	3	$^5C_1\times{}^3C_3 = 5\times1 = 5$
2	2	$^5C_2\times{}^3C_2 = 10\times3 = 30$
3	1	$^5C_3\times{}^3C_1 = 10\times3 = 30$
4	0	$^5C_4\times{}^3C_0 = 5\times1 = 5$

$\therefore$ কমিটি গঠন করা যায় = 5+30+30+5 = 70 উপায়ে।

(ii) যেহেতু অন্তত 1জন বিজ্ঞান ও 1জন কলাবিভাগের ছাত্র থাকবে সুতরাং কমিটি গঠন করা যাবে =5+30+30=65 উপায়ে।

উদাহরণ 9: একটি বাক্সে 15টি লাল, 12টি সাদা এবং 10টি কালো বল রয়েছে। কত ভিন্নভাবে 5টি লাল, 4টি সাদা এবং 3টি কালো বল পছন্দ করা যাবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: মোট লাল বল সংখ্যা $n_1 = 15$ মোট সাদা বল সংখ্যা $n_2 = 12$ এবং মোট কালো বল সংখ্যা $n_3 = 10$

নির্বাচিত লাল বল সংখ্যা $r_1 = 5$, নির্বাচিত সাদা বল সংখ্যা $r_2 = 4$ এবং নির্বাচিত কালো বল সংখ্যা $r_3 = 3$

15টি লাল বল থেকে 5টি লাল বল বাছাই করার উপায় $^{15}C_5$

12টি সাদা বল থেকে 4টি সাদা বল বাছাই করার উপায় $^{12}C_4$

10টি কালো বল থেকে 3টি কালো বল বাছাই করার উপায় $^{13}C_3$

একত্রে বাছাই করার উপায়, $^{15}C_5\times{}^{12}C_4\times{}^{10}C_3 = 3003\times495\times120 = 178{,}378{,}200$

উদাহরণ 10: 'PROFESSOR'শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবার 4টি করে বর্ণ নিয়ে সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করুন।

সমাধান: 'PROFESSOR' শব্দটির মোট বর্ণের সংখ্যা 9 যাদের মধ্যে 2টি R, 2টি O এবং 2টি S রয়েছে। 9টি বর্ণ হতে 4টি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়-

(i) সবগুলো বর্ণ ভিন্ন ভিন্ন (ii) 2টি এক জাতীয় ও 2টি ভিন্ন ভিন্ন এবং (iii) 2টি এক জাতীয় ও অন্য 2টি আরেক জাতীয়

(i) 6টি ভিন্ন ভিন্ন বর্ণ থেকে 4টি বর্ণ নিয়ে বাছাইয়ের উপায় $^6C_4$

আবার, এই বেছে নেওয়া 4টি ভিন্ন বর্ণ নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত হবে $^4P_4$ বা 4! প্রকারে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা, ${}^6C_4 = 15$ এবং বিন্যাস সংখ্যা, = ${}^6C_4 \times {}^4P_4 = 15 \times 4! = 15 \times 24 = 360$

(ii) 3 প্রকারের 3 জোড়া এক জাতীয় বর্ণ থেকে 1 জোড়া (2টি) বর্ণ নিয়ে বাছাইয়ের উপায়, ${}^3C_1$

এবং অবশিষ্ট 5টি ভিন্ন বর্ণ থেকে 2টি বর্ণ নিয়ে বাছাইয়ের উপায় ${}^5C_2$

এই বেছে নেওয়া 4টি বর্ণ (যাদের 2টি এক জাতীয়) নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত হবে, $\frac{4!}{2!}$ প্রকারে।

$\therefore$ সমাবেশ সংখ্যা, = ${}^3C_1 \times {}^5C_2 = 3 \times 10 = 30$ এবং বিন্যাস সংখ্যা= $30 \times \frac{4!}{2!} = 360$

(iii) 3 প্রকারের 3 জোড়া এক জাতীয় বর্ণ থেকে (ও অন্য 2টি অন্য এক জাতীয়) 2 জোড়া (4টি বর্ণ) নিয়ে বাছাইয়ের উপায়, ${}^3C_2$

এই বেছে নেওয়া 4টি বর্ণ (যাদের 2টি এক জাতীয়) নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত হবে, $\frac{4!}{2!2!}$ প্রকারে।

$\therefore$ সমাবেশ সংখ্যা $= {}^3C_2 = 3$ এবং বিন্যাস সংখ্যা = $3 \times \frac{4!}{2!2!} = 3 \times 6 = 18$

$\therefore$ মোট সমাবেশ সংখ্যা $= 15 + 30 + 3 = 48$

এবং বিন্যাস সংখ্যা $= 360 + 360 + 18 = 738$

উদাহরণ 11: 16 জন খেলোয়াড় থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট দল গঠন করা হবে যাদের মধ্যে 4 জন বোলার এবং 2 জন উইকেট-কিপার সম্বলিত থাকবে। (i) ঠিক 3 জন বোলার এবং 1 জন উইকেট-কিপার (ii) কমপক্ষে 3 জন বোলার এবং 1 জন উইকেট-কিপার নিয়ে ভিন্ন ভিন্ন কতভাবে দল গঠন করা যাবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: (i) ক্রিকেট দল ঠিক 3 জন বোলার এবং 1 জন উইকেট-কিপার নিয়ে গঠন করা যায়; যেখানে, 3 জন বোলারকে বাছাই করা যাবে 4 জন বোলার থেকে, 1 জন উইকেট-কিপারকে বাছাই করা যাবে 2 জন উইকেট-কিপার থেকে এবং বাকী 7 জন খেলোয়াড়কে বাছাই করা যাবে 10 জন খেলোয়াড় থেকে।

সুতরাং, মোট বাছাই করার উপায়: ${}^4C_3 \times {}^2C_1 \times {}^{10}C_7 = \frac{4!}{3! \times (4-3)!} \times \frac{2!}{1! \times (2-1)!} \times \frac{10!}{7! \times (10-7)} = 4 \times 2 \times 120 = 960$

(ii) আবার ক্রিকেট দলটি যদি কমপক্ষে 3 জন বোলার এবং 1 জন উইকেট-কিপার নিয়ে গঠন করা যায়; যেখানে,

ক্রম	4 জন বোলার	2 জন উইকেট-কিপার	10 অন্যান্য	দল গঠন করার উপায়	দল গঠন করার সংখ্যা
(a)	3	1	7	${}^4C_3 \times {}^2C_1 \times {}^{10}C_7$	$4 \times 2 \times 120 = 960$
(b)	3	2	6	${}^4C_3 \times {}^2C_2 \times {}^{10}C_6$	$4 \times 1 \times 210 = 840$
(c)	4	1	6	${}^4C_4 \times {}^2C_1 \times {}^{10}C_6$	$1 \times 2 \times 210 = 420$
(d)	4	2	5	${}^4C_4 \times {}^2C_2 \times {}^{10}C_5$	$1 \times 1 \times 252 = 252$

সুতরাং, দল গঠন করার মোট উপায় হবে, $960 + 840 + 420 + 252 = 2472$

সারসংক্ষেপ:

- কতগুলো বস্তুর থেকে কয়েকটি বা সবগুলোকে একবারে নিয়ে যতপ্রকারে নির্বাচন বা দল (ক্রম বর্জন করে) গঠন করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলে।
- n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে প্রত্যেক বার r সংখ্যক বস্তু নিয়ে প্রাপ্ত সমাবেশ সংখ্যাকে সাধারণত ${}^nC_r$ বা $C(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়; যেখানে , $n \geq r$ । এবং ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

ইউনিটমূল্যায়ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

1. ${}^{n}p_0$ কত?

   ক. 0 খ. 1 গ. $n!$ ঘ. n

2. 0! = কত?

   ক. 0 খ. n গ. 1 ঘ. অসীম

3. ${}^{6}p_4 =$ কত?

   ক. 320 খ. 360 গ. 120 ঘ. 720

4. 6 টি মুদ্রা 5টি দানবাক্সে কতভাবে ফেলা যায়?

   ক. 5^{6-1} খ. 6^5 গ. 5^6 ঘ. 6^6

5. ইংরেজি বর্ণমালা হতে প্রত্যেকবার 5টি বর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যাবে?

   ক. 7893600 খ. 26! গ. 78063 ঘ. 30360

6. $\dfrac{n!}{(n-2)!3!} = 5$ হলে n কত?

   ক. -5 খ. 0 গ. 5 ঘ. 6

${}^{n}C_r$ কত?

   ক. $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ খ. $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ গ. $n!$ ঘ. $\dfrac{n}{r(n-r)}$

7. ${}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} =$ কত?

   ক. ${}^{n+1}C_r$ খ. ${}^{n+1}C_{r+1}$ গ. ${}^{n+1}C_{r-1}$ ঘ. ${}^{n}C_{r+1}$

8. ${}^{n}C_r$ এর সম্পূরক সমাবেশ কোনটি?

   ক. ${}^{n}C_r \times r!$ খ. ${}^{n}C_{n-r}$ গ. ${}^{n}C_{r+1}$ ঘ. ${}^{n+1}C_{r+1}$

9. ${}^{n}C_r = 120$ ও ${}^{n}C_r = 20$ হলে r এর মান কত?

   ক. 6 খ. 5 গ. 2 ঘ. 3

10. 16 বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখাদ্বারা কতগুলো ত্রিভুজ গঠন করা যায়?

    ক. 120 খ. 240 গ. 560 ঘ. 3360

11. (i) 15_{P_3}(ii)10_{P_4}(iii) $5! \times 3!$ এর মান নির্ণয় করুন।
12. যদি $n+3_{P_6} : n+2_{P_4} = 14:1$ হয় তবে n এর মান নির্ণয় করুন।
13. 'POSTAGE' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে তা নির্ণয় করুন। কতগুলোতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলো একত্রে থাকবে তা নির্ণয় করুন।
14. 'SECOND' শব্দটির অক্ষরগুলো থেকে 1 টি স্বরবর্ণ ও 2 টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যাতে স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করবে নির্ণয় করুন।
15. 10টি বস্তুর একবারে 5টি নিয়ে কতগুলো বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে তা নির্ণয় করুন।
16. দেখান যে, 'RAJSHAHI' শব্দটির অক্ষরগুলোর একত্রে বিন্যাস সংখ্যা 'BARISAL' শব্দটির অক্ষরগুলোর একত্রে বিন্যাস সংখ্যার চারগুণ।
17. 'PARALLEL' শব্দটির অক্ষরগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন এবং স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তাও নির্ণয় করুন।

18. 'MATHEMATICS' শব্দটির বর্ণগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় এবং এদের কতগুলোতে স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকবে তাও নির্ণয় করুন।
19. প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলো দ্বারা কতগুলো বিভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যাবে যাদের প্রথমে এবং শেষে জোড় অঙ্ক থাকবে তা নির্ণয় করুন।
20. প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেকটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 2, 3, 5, 7, 8, 9 দ্বারা তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তা নির্ণয় করুন।
21. 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে তা নির্ণয় করুন।
22. 'IMMEDIATE' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন, কতগুলোর প্রথমে T এবং শেষে A থাকবে তা নির্ণয় করুন।
23. দেখান যে, AMERICA শব্দটির বর্ণগুলোকে একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় CALCUTTA শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়।
24. EQUATION শব্দটির বর্ণমালা নিয়ে কতভাবে বিন্যাস করা যাবে তা নির্ণয় করুন। ব্যাঞ্জন বর্ণগুলোকে জোড় স্থানে রেখে কত প্রকারে সাজানো যাবে তা নির্ণয় করুন।
25. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলো প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে,

    ক. 5000 ও 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তা নির্ণয় করুন।

    খ. 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 5দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।

    গ. 5 অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলো জোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে তা নির্ণয় করুন।
26. 'COMMUNICATION' শব্দটি দিয়ে-

    ক. কোনো প্রকার শর্ত আরোপ না করে শব্দটির অক্ষরগুলোকে কতভাবে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন।

    খ. শব্দটির অক্ষরগুলোকে কতভাবে সাজানো যাবে যেন সবগুলো জোড়া অক্ষরগুলো পাশাপাশি না থাকে তা নির্ণয় করুন।

    গ. স্বরবর্ণগুলোকে জোড় স্থানে রেখে অক্ষরগুলোকে মোট সাজানোর সংখ্যা নির্ণয় করুন।
27. যদি $2n_{C_9}:2n_{C_8} = 2$ হয় তবে n এর মান নির্ণয় করুন।
28. 4 জন ভদ্রমহিলাসহ 10 ব্যক্তির মধ্যে থেকে 5 জনের একটি কমিটি কত রকমে গঠন করা যেতে পারে, যাতে অন্তত একজন ভদ্র মহিলা থাকবেন তা নির্ণয় করুন।
29. সাতটি সরল রেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 4, 5, 6, 7 সে.মি.। দেখান যে, একটি চতুর্ভুজ গঠন করার জন্য চারটি সরল রেখা যত প্রকারে বাছাই করা যায় তার সংখ্যা 32।
30. 6 জন গণিত ও 4 জন পদার্থ বিজ্ঞানের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যাতে গণিতের ছাত্রদের সংখ্যা গরিষ্ঠতা থাকে। কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যায় নির্ণয় করুন।
31. 14 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বোলার এবং 2 জন উইকেট রক্ষক। এদের মধ্য থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি দল কত প্রকারের বাছাই করা যেতে পারে যাতে অন্তত 3 জন বোলার ও 1 জন উইকেট রক্ষক থাকে তা নির্ণয় করুন।
32. একজন পরিক্ষার্থীকে 12টি প্রশ্ন থেকে 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। তাকে প্রথম 5টি থেকে ঠিক 4টি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারবে তা নির্ণয় করুন।
33. এক ব্যক্তির 6 জন বন্ধু আছে। সে কত প্রকারে এক বা একাধিক বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারে নির্ণয় করুন।
34. 12টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও 5টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ থেকে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ সমন্বয়ে গঠিত কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।

35. 9 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করবে, যার একটিতে 7 জনের বেশি এবং অন্যটিতে 4 জনের বেশি ধরেনা। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে তা নির্ণয় করুন।

36. প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 6,5,2,3,0 দ্বারা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলো অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

37. 6 জন গণিত, 4 জন পদার্থ বিজ্ঞান ও 5 জন রসায়ন বিজ্ঞানের থেকে 7 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যেন প্রত্যেক বিভাগের কমপক্ষে একজন ছাত্র থাকে।

ক. কোনো শর্ত আরোপ না করে কত উপায়ে এক বা একাধিক ছাত্রকে বাছাই করা যাবে তা নির্ণয় করুন।

খ. কতটি কমিটিতে গণিত ছাত্রদের সংখ্যা গরিষ্ঠতা থাকবে নির্ণয় করুন।

গ. দুইজন গণিতের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে কতভাবে একটি গোল টেবিলে বসানো যাবে তা নির্ণয় করুন।

38. কলেজের বার্ষিক ক্রীড়া প্রতিযোগিতা পরিচালনার জন্য পুরস্কার ক্রয় কমিটিতে 5 জন, অতিথি আপ্যায়নে 4 জন এবং শৃঙ্খলা রক্ষার দায়িত্বে 3 জন লোক নিয়োজিত।

ক. $7\times{}^{n}P_{3}={}^{n+1}P_{4}$ হলে n এর মান নির্ণয় করুন।

খ. উক্ত বার্ষিক ক্রিয়া সুষ্ঠুভাবে পরিচালনার্থে প্রত্যেক কমিটি থেকে অনন্তঃপক্ষে 1 জন অন্তর্ভুক্ত রেখে 6 জন সদস্যের কমিটি কতভাবে বাছাই করা যায় নির্ণয় করুন।

গ.কমপক্ষে আপ্যায়ন কমিটির 2 জন এবং শৃঙ্খলা কমিটির 1 জনকে অন্তর্ভুক্ত রেখে 7 জনের দল কতভাবে গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

1. খ 2.গ 3.খ 4.গ 5. ক 6. ঘ 7. ক 8.গ 9.খ 10.ঘ 11. (i) 2730 (ii) 5040 (iii) 720 12. $n=4$ 13. 144, 576 14. 24 15. 6720 17. 3360, 360 18. 4989600, 120960 19. 60480 20. 120 21. 60 22. 45360, 630 24. 226800, 630 25. ক. 210 খ. 92টি গ) 3000 26 ক. $\frac{13!}{(2!)^5}$ বা, 19,45,94,400 খ. $\frac{13!}{(2!)^5}-8!$ বা, 19,45,54,080 গ. $\frac{6!.7!}{(2!)^5}$ বা, 1,13,400 27.(i) 56 (ii) 210 (iii) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 28. $n=13$ 29. 246 30. 342 31. 115 32. 105 33. 63 34. 2,64,000 35. 246 36. ক. 17279 খ. 2370 গ. $40320\times{}^{9}P_{6}$ 37. ক. $n=6$ খ. 805 গ. 636