বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা
(Measures of Dispersions and Probability)

ভূমিকা

দুই বা ততোধিক তথ্যসেটের সংখ্যাগুলোর মধ্যক মান একই হলেও মধ্যক মানের উভয় পাশে সংখ্যাগুলোর দূরত্বের পার্থক্য থাকতে পারে। এই পার্থক্যকে বিস্তার বলে। অন্যদিকে কোন ঘটনা ভবিষ্যতে ঘটবে কিনা এ প্রশ্নের উত্তর তিনভাবে দেয়া যায়: (i) *ঘটবে*, (ii) *ঘটবে না এবং* (iii) *ঘটতে পারে, নাও ঘটতে পারে। প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘটনাটির ভবিষ্যৎ সম্পর্কে নিশ্চিতভাবে জানা যায়, কিন্তু তৃতীয় ক্ষেত্রে তা অনিশ্চিত। তবে এ অনিশ্চয়তার মাত্রা কতখানি তা বিভিন্ন বিষয়ের ভিত্তিতে সর্বদাই নির্ধারণ করা যায়। অনিশ্চয়তার মাত্রা খুব বেশি হলে ধরা হয় ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা ক্ষীণ। পক্ষান্তরে ঘটনাটি ঘটার নিশ্চয়তার মাত্রা বেশি হলে বলা হয় তা ঘটার সম্ভাবনা অনেক। গণিতে কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তার মাত্রাকেই তার সম্ভাবনা বলা হয়। এই ইউনিটে বিস্তার পরিমাপ এবং সম্ভাবনা আলোচিত হবে।*

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- উপাত্তের বিস্তার কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- উপাত্তের বিস্তার পরিমাপগুলো ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- শ্রেণিকৃত ও অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- সম্ভাবনার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- দৈনন্দিন বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ঘটনা, সম্ভাব্য ঘটনা এবং প্রয়োজনীয় ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাব্য ফলাফল নির্ণয় করতে পারবেন,
- পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্রের প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- অনির্ভরশীল ও নির্ভরশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার গুণনসূত্রসমূহ ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- বাস্তব জীবনভিত্তিক সহজ সমস্যা সমাধানে সম্ভাবনার ধারণা ও সূত্রসমূহ প্রয়োগ করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২০ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১০.১ উপাত্তের বিস্তার এবং বিস্তার পরিমাপ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- উপাত্তের বিস্তার কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- উপাত্তের বিস্তার পরিমাপগুলো ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	উপাত্ত, বিস্তার, পরিমাপ, পরিসর, গড় ব্যবধান, ভেদাঙ্ক, পরিমিত ব্যবধান

মূলপাঠ

উপাত্তের বিস্তার (Dispersion of Data)

Dataশব্দের বাংলা আভিধানিক অর্থ হলো তথ্য বা উপাত্ত। Dataশব্দটি Datum-এর বহুবচন। ল্যাটিন ভাষায় এ শব্দটির প্রকৃত অর্থ হলো 'যা দেয়া আছে'। সুতরাং অনুসন্ধানের মাধ্যমে আমরা যা পাই তাই হলো তথ্য বা উপাত্ত।

কতগুলো উপাত্তের কেন্দ্রিয় প্রবণতার পরিমাপ (সংক্ষেপে কেন্দ্রিয়মান), যেমন- গড়, মধ্যক বা প্রচুরক উপাত্তসমূহের সাধারণ বৈশিষ্ট্য নির্দেশ করে। উদাহরণস্বরূপ একটি কলেজের উচ্চ মাধ্যমিক শ্রেণির গণিত বিষয়ের সম্ভাবনা অধ্যায়ের উপর পরীক্ষা নিয়ে দেখা গেল ঐ শ্রেণির গড় স্কোর 60% যা শিক্ষার্থীদের অধ্যায়টি বুঝতে পারার সামর্থ্যের বিষয়ে ধারণা দেয়।

কিন্তু দুইটি শাখার যদি একই গড় স্কোর হয় তবে শিক্ষক দুইটি শাখার বুঝতে পারার সামর্থ্য সমান কীনা এ বিষয়ে নিশ্চিত হতে পারেন না। এর জন্য শিক্ষককে দুইটি শাখার শিক্ষার্থীদের নম্বরের বিস্তারের ব্যাপারে ধারণা রাখতে হবে।

বিস্তারের সংজ্ঞা(Definition of Dispersion)

বিস্তার হলো একটি ব্যবধিতে উপাত্তসমূহের ছড়িয়ে ছিটিয়ে থাকার প্রবণতা।

কোনো নিবেশনের সকল সংখ্যা সমান হলে তাদের বিস্তার শূন্য। সংখ্যাগুলো যত ছোট বা বড় হবে ততই তাদের বিক্ষিপ্ত বলা হবে এবং তাদের বিস্তার ততই বাড়বে। সুতরাং কোন তথ্যসেটের নিবেশনের বিস্তার হলো তার সংখ্যাগুলোর বিক্ষিপ্ততার মাত্রা (Degree of Scatteredness).

বিস্তার সম্পর্কে কয়েকজন বিশিষ্ট পরিসংখ্যানবিদের মন্তব্য নিম্নরূপ–

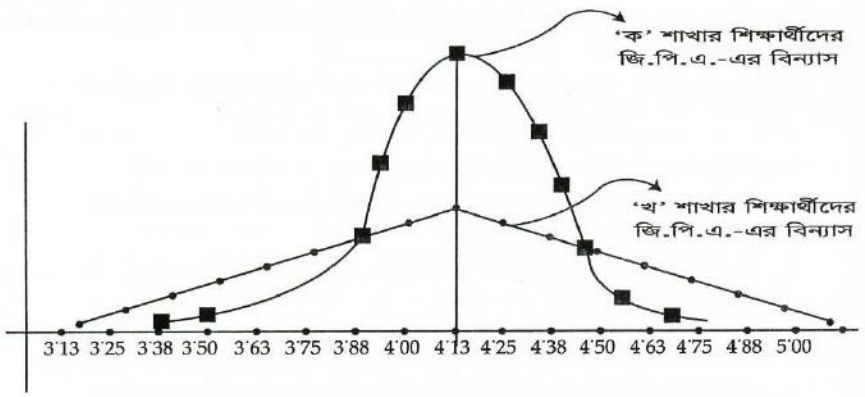
i. বিস্তার হলো কোনো চলকের কেন্দ্রিয়মান থেকে এর অন্যান্য মানের বিক্ষিপ্ততা বা ভেদের পরিমাপ। (Dispersion or spread is the degree of the scatter or variation of the variable about a central value)- Brooks and Dick.

ii. বিস্তার হলো তথ্যসারির মানগুলোর মধ্যে বিদ্যমান ভেদের বা বিচ্যুতির পরিমাপ। (Dispersion is the mean of extent to which the individual items vary) – L. R. Connor.

iii. বিস্তার হলো তথ্যসারির উপাদানগুলোর ভিন্নতার পরিমাপ। (Dispersion is the measure of the variation of the items) – A. L. Bowley.

সুতরাং যে মাত্রায় তথ্য নিবেশনের সংখ্যাগুলো তাদের গড় মান থেকে উভয় দিকে বিস্তৃত থাকে তাকে বিস্তার বলে।

ধরা যাক, একটি কলেজে উচ্চ মাধ্যমিক শ্রেণিতে দুইটি শাখায় 100 জন করে শিক্ষার্থী ভর্তি হয়েছে। উভয় শাখায় ভর্তিকৃত শিক্ষার্থীদের এসএসসি-তে প্রাপ্ত গড় জিপিএ 4.13। কোন শাখার শিক্ষার্থীদের জিপিএ অধিক সমন্বিত তা কলেজটির অধ্যক্ষ জানতে চেয়ে দুইটি বিন্যাসেরই গড় জিপিএ দেখলেন 4.13। এ থেকে শ্রেণি দুইটির ব্যাপারে তিনি কোনো সিদ্ধান্ত নিতে পারেন না। এক্ষেত্রে কেন্দ্রিয় মান (গড়, মধ্যক, প্রচুরক) ছাড়া গণসংখ্যা বিন্যাসের অন্যান্য বৈশিষ্ট্যকে বিবেচনায় আনতে হবে।



উপরের চিত্রে 'ক' শাখার শিক্ষার্থীদের জিপিএ-এর বিন্যাসে জিপিএ-গুলো গড় জিপিএ-এর খুব কাছাকাছি। এক্ষেত্রে জিপিএ-গুলোর ভিন্নতা কম। অন্যদিকে 'খ' শাখার জিপিএ-গুলোর ভিন্নতা খুব বেশি।

তথ্যসেটের তথ্য বিন্দুগুলোর এ ভিন্নতা বা পারস্পরিক দূরত্বই বিস্তার। উপরের উদাহরণটি বিশ্লেষণে দেখা যায় বিস্তার বলতে কেন্দ্রিয়মান (এক্ষেত্রে গড়) হতে তথ্যসেটের অন্যান্য মানগুলোর দূরত্বকে বুঝানো হয়। বাস্তবে শুধু কেন্দ্রিয় মান হতেই বিস্তার পরিমাপ করা হয় না। তথ্যসেটের মধ্যে অবস্থিত যে কোনো ধ্রুবক হতেও বিস্তার পরিমাপ করা যায়। আবার তথ্যসেটের বিভিন্ন তথ্যবিন্দুর পারস্পরিক দূরত্ব পরিমাপ করেও বিস্তার পরিমাপ করা যায়।

ধরুন, দুইটি তথ্যসেট হলো, 48, 50, 50, 52এবং 30, 50, 50, 70।সেট দুইটির (গাণিতিক) গড়, মধ্যক ও প্রচুরক একই আর তা হলো 50। কেন্দ্রিয়মান একই হলেও প্রথম সেটের তথ্যবিন্দুগুলোর কেন্দ্রিয় মানের সাথে ব্যবধান দ্বিতীয় সেটের তথ্যবিন্দুগুলোর কেন্দ্রিয় মানের সাথে ব্যবধানের চেয়ে কম। এ ব্যবধান বা পারস্পরিক দূরত্বই হলো বিস্তার।

বিস্তার পরিমাপের সংজ্ঞা (Definition of Measures of Dispersion)

কোনো তথ্যসেট বা নিবেশনের তথ্যবিন্দুগুলোর পারস্পরিক বিস্তৃতির মাত্রার বা কেন্দ্রিয় মান হতে তথ্যবিন্দুগুলোর বিস্তৃতির মাত্রার সংখ্যাসূচক পরিমাপকে বিস্তার পরিমাপ বলা হয়।

উপাত্তের বিস্তার পরিমাপ (Measures of Dispersion of Data)

উপাত্তের বিস্তার পরিমাপগুলো হচ্ছে–

i. পরিসর (Range)
ii. অর্ধ-চতুর্থক পরিসর (Semi-Inter quartile Range)
iii. গড় ব্যবধান (Mean Deviation)
iv. ভেদাঙ্ক (Variance)
v. পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation)

বিস্তার পরিমাপের প্রয়োগ সহজবোধ্য করার উদ্দেশ্যে উপরের পরিমাপগুলোর অল্পবিস্তর ব্যাখ্যা দেয়া হলো–

i. পরিসর (Range):পরিসর হলো কোনো তথ্যসেট বা নিবেশনের বৃহত্তম তথ্যবিন্দু হতে ক্ষুদ্রতম তথ্যবিন্দুর পার্থক্য। একে সাধারণত R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং পরিসর = বৃহত্তম মান − ক্ষুদ্রতম মান

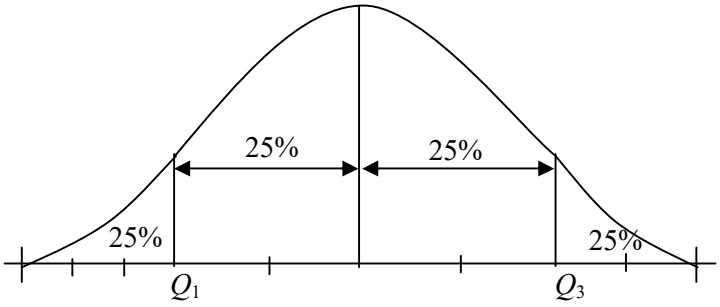
উদাহরণস্বরূপ, যদি কোনো পরীক্ষার সর্বোচ্চ স্কোর 95 এবং সর্বনিম্ন স্কোর 15 হয় তবে পরিসর = 95 – 15=80

যদিও পরিসর সহজতম বিস্তার পরিমাপ, তবু এটি নির্ভরযোগ্য পরিমাপক হিসেবে গণ্য হয় না।

উদাহরণ 1: অবিন্যস্ত উপাত্ত 5, 3, 8, 4, 9, 7, 5, 6, 2, 3, 6, 8, 4-এর পরিসর নির্ণয় করুন।

সমাধান: পরিসর = উপাত্তের বৃহত্তম মান− উপাত্তের ক্ষুদ্রতম মান $=9-2=7$

ii. অর্ধ-চতুর্থক পরিসর (Semi-Inter Quartile Range):একটি তথ্যসেটের তিনটি চতুর্থক থাকে যারা প্রান্তিয় মানের প্রভাব মুক্ত। প্রথম চতুর্থক Q_1 এর নিচে 25%, দ্বিতীয় চতুর্থক Q_2 এর নিচে 25% এবং তৃতীয় চতুর্থক Q_3 এর উপরে 25% তথ্যবিন্দু থাকে, দ্বিতীয় চতুর্থক আর মধ্যক (Median) একই। এ দুইটি সর্বনিম্ন25% ও সর্বোচ্চ25% তথ্যবিন্দু বাদ দিলে Q_1 ও Q_3 এর মাঝে 50% তথ্যবিন্দু থাকে।



নিবেশনের সর্বাধিক তথ্যবিন্দু কেন্দ্রিয় মানের কাছাকাছি থাকলে মধ্যক হতে Q_1 ও Q_3 এর দূরত্ব খুব কম হয়। Q_2-Q_1 এবং Q_3-Q_2 এর গড়কে অর্ধ-চতুর্থক পরিসর বলা হয়।

$\therefore$ অর্ধ-চতুর্থক পরিসর $=\dfrac{(Q_2-Q_1)+(Q_3-Q_2)}{2}=\dfrac{Q_3-Q_1}{2}$

উদাহরণ 2: উচ্চ মাধ্যমিক শ্রেণির একটি শাখার শিক্ষার্থীদের গণিত বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বরসমূহ নিম্নরূপ: 52, 45, 25, 75, 63, 86, 72, 85, 55, 65, 70, 82, 90, 48, 68, 86, 65, 64, 78, 75, 32, 42 ।অর্ধ-চতুর্থক পরিসর নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রাপ্ত নম্বরগুলোকে উর্ধ্বক্রমে সাজানো হলো− 25, 32, 42, 45, 48, 52, 55, 63, 64, 65, 65, 68, 70, 72, 75, 75, 78, 82, 85, 86, 86, 90.
এখানে উপাত্তের সংখ্যা 22, উক্ত উর্ধ্বক্রমে সজ্জিত সারির 6-তম পদ হবে Q_1 এবং 17-তম পদ হবে Q_3।

$\therefore$ অর্ধ-চতুর্থক পরিসর $=\dfrac{Q_3-Q_1}{2}=\dfrac{78-52}{2}=\dfrac{26}{2}=13$

এ ফল থেকে বুঝা যায় যে, 50% নম্বর মধ্যক নম্বর 66.5 হতে ± 13 নম্বরের ব্যবধানে অবস্থিত।

iii. গড় ব্যবধান (Mean Deviation):কোনো তথ্যসেটের প্রতিটি তথ্যবিন্দু হতে কেন্দ্রিয় মানের ব্যবধানের পরমমানের সমষ্টিকে মোট তথ্যবিন্দুর সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে গড় ব্যবধান বলে।

উপাত্তগুলো $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ হলে, গড় ব্যবধান $=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\bar{x}\right|}{N}$

উদাহরণ 3: নিচের ছকটি হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

তথ্যবিন্দু x	5	6	7	8	9	10
$\left\|x_i-\bar{x}\right\|$	2.5	1.5	0.5	0.5	1.5	2.5

তথ্যগুলোর গাণিতিক গড়, $\bar{x}=\dfrac{5+6+7+8+9+10}{6}=\dfrac{45}{6}=7.5$

সুতরাং গড় ব্যবধান $=\dfrac{2.5+1.5+0.5+0.5+1.5+2.5}{6}=\dfrac{9}{6}=1.5$

বি:দ্রঃ তথ্যসেটের প্রতিটি তথ্যবিন্দু হতে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানগুলোর সমষ্টি সর্বদা শূন্য হয়। তাই গড় ব্যবধান নির্ণয়ে ব্যবধানগুলোর পরমমান নেয়া হয়।

iv. ভেদাঙ্ক (Variance):তথ্যবিন্দুগুলো হতে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানগুলোর বর্গের গাণিতিক গড়কে ভেদাঙ্ক বলা হয়। একে σ^2 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}$, যেখানে $\bar{x} =$ গাণিতিক গড়, $N =$ তথ্যবিন্দুর সংখ্যা।

v. পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation):ভেদাঙ্কের ধনাত্মক বর্গমূলকে পরিমিত ব্যবধান বলে; একে σ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।সুতরাং পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}}$

সারসংক্ষেপ

- বিস্তার হলো একটি ব্যবধিতে উপাত্তসমূহের ছড়িয়ে ছিটিয়ে থাকার প্রবণতা।
- কোনো তথ্যসেট বা নিবেশনের তথ্যবিন্দুগুলোর পারস্পরিক বিস্তৃতির মাত্রার বা কেন্দ্রিয় মান হতে তথ্যবিন্দুগুলোর বিস্তৃতির মাত্রার সংখ্যাসূচক পরিমাপকে বিস্তার পরিমাপ বলা হয়।
- উপাত্তের বিস্তার পরিমাপগুলো হচ্ছে-i.পরিসর (Range), ii. অর্ধ-চতুর্থক পরিসর (Semi-Inter Quartile Range), iii.গড় ব্যবধান (Mean Deviation), iv. ভেদাঙ্ক (Variance), v. পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation)
- পরিসর = বৃহত্তম মান − ক্ষুদ্রতম মান।
- অর্ধ-চতুর্থক পরিসর $= \frac{(Q_2 - Q_1) + (Q_3 - Q_2)}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$
- কোনো তথ্যসেটের প্রতিটি তথ্যবিন্দু হতে কেন্দ্রিয় মানের ব্যবধানের পরম মানের সমষ্টিকে মোট তথ্যবিন্দুর সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে গড় ব্যবধান বলে। গড় ব্যবধান $= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|}{N}$
- তথ্যবিন্দুগুলো হতে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানগুলোর বর্গের গাণিতিক গড়কে ভেদাঙ্ক বলা হয়। একে σ^2 দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}$, যেখানে $\bar{x} =$ গাণিতিক গড়, $N =$ তথ্যবিন্দুর সংখ্যা।
- ভেদাঙ্কের ধনাত্মক বর্গমূলকে পরিমিত ব্যবধান বলে; একে σ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.১

1. নিচের তথ্য সারির পরিসর নির্ণয় করুন।
   (i) − 8, − 12, − 5, 0 (ii) 28, 12, − 5, 37, 2, 0, 12, 19 (iii) 8, 12, 5, 3, 2, 2, 12, 9

2. কোনো শ্রেণির 15 জন ছাত্রের গড় বয়স ও বয়সের পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 10 ও 2। ঐ শ্রেণিতে 15 বছর বয়সের নতুন ছাত্র ভর্তি হলে তাদের গড় বয়স ও পরিমিত ব্যবধান কত হবে?
3. গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন: 12, − 5, 0, 7, 2, − 9, 4.
4. 3, 4, 5, 7, 10, 8, 9, 6, 12, 6 সংখ্যাগুলোর গড় থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।
5. 12, 10, 5, 0, −5, −10, −12 সংখ্যাগুলোর গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

পাঠ ১০.২ পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- শ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	গণসংখ্যা নিবেশন, গাণিতিক গড়

মূলপাঠ

শ্রেণিকৃত তথ্যের পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক (Standard Deviation and Variance of Grouped Data)

গণসংখ্যা নিবেশন (Frequency Distribution): উপাত্তের মানগুলোকে যখন পরিমাণগত বৈশিষ্ট্যের আলোকে কতগুলো শ্রেণিতে বিভক্ত করে প্রতিটি শ্রেণির বিপরীতে গণসংখ্যা দেখিয়ে উপস্থাপন করা হয় তখন তাকে গণসংখ্যা নিবেশন বলে। ধরুন, $x_1, x_2, ..., x_n$ কোনো গণসংখ্যা নিবেশন চলক x-এর n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন মানের গণসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, ..., f_n$ যেখানে $\sum_{i=1}^{n} f_i = N.$ সুতরাং $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$ এবং ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$

কার্যক্ষেত্রে ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য নিচের বিকল্প সূত্র ব্যবহার করা সুবিধাজনক:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

প্রমাণ: $N\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} f_i$

$= \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - 2\bar{x}.N\bar{x} + \bar{x}^2 N = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - N\bar{x}^2$ সুতরাং $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 1: নিচের গণসংখ্যা নিবেশনের ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন:

শ্রেণি	7–12	12–17	17–22	22–27	27–32	32–37	37–42	42–47	47–52	52–57
গণসংখ্যা	3	6	11	15	19	14	12	9	5	2

সমাধান: প্রদত্ত শ্রেণি ও গণসংখ্যা ছক ব্যবহার করে নিচের ছকটি তৈরি করা হলো–

শ্রেণি	**শ্রেণির মধ্যবিন্দু** x_i	**গণসংখ্যা** f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$

শ্রেণি	শ্রেণির মধ্যবিন্দু x_i	গণসংখ্যা f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
7–12	9.5	3	28.5	270.75
12–17	14.5	6	87.0	1261.50
17–22	19.5	11	214.5	4182.75
22–27	24.5	15	367.5	9003.75
27–32	29.5	19	560.5	16534.75
32–37	34.5	14	483.0	16663.50
37–42	39.5	12	474.0	18723.00
42–47	44.5	9	400.5	17822.25
47–52	49.5	5	247.5	12251.25
52–57	54.5	2	109.0	5940.50
		$N = \sum f_i = 96$	$\sum f_i x_i = 2972$	$\sum f_i x_i^2 = 102654$

গাণিতিক গড় $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N} = \dfrac{2972}{96} = 30.96$

সুতরাং ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^{\,2}}{N} - \bar{x}^2 = \dfrac{102654}{96} - (30.96)^2$

$= 1069.3125 - 958.5216 = 110.7909 = 110.79$ (প্রায়)

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{110.79} = 10.53$ (প্রায়)

অশ্রেণিকৃত তথ্যের ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান

ধরা যাক $x_1, x_2, ..., x_n$ একটি অশ্রেণিকৃত উপাত্তের n সংখ্যক মান। তাহলে $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$

সুতরাং ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{N}$.

পূর্বের অনুচ্ছেদে প্রমাণিত সূত্রে $f_i = 1$ সকল i-এর জন্য নিয়ে আমরা পাই $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{N} - \bar{x}^2$

উদাহরণ 2: একটি গার্মেন্টস ফ্যাক্টরীর সাতজন শ্রমিকের দৈনিক মজুরি যথাক্রমে 110, 115, 120, 122, 130, 140, 160 টাকা। ভেদাঙ্ক ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, শ্রমিকের দৈনিক মজুরি প্রকাশের চলক x.

তাহলে গড় $\bar{x} = \dfrac{110 + 115 + 120 + 122 + 130 + 140 + 160}{7} = \dfrac{897}{7} = 128.14$ টাকা

সারণি

x	$x - \bar{x} = x - 128.14$	$(x - \bar{x})^2$
110	– 18.14	329.06
115	– 13.14	172.66
120	– 8.14	66.26
122	– 6.14	37.70

130	1.86	3.46
140	11.86	140.66
160	31.86	1015.06
		1764.86

সুতরাং ভেদাঙ্ক $\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{1764.86}{7} = 252.12$

এবং পরিমিত ব্যবধান $\sigma_x = \sqrt{252.12} = 15.88$ টাকা (প্রায়)।

ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের সহজ পদ্ধতি

অনেক সময় প্রদত্ত চলকের পরিবর্তে সুবিধাজনক মান a, c নিয়ে নতুন চলক $u = \frac{x-a}{c}$ প্রবর্তন করে ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের কাজ সহজ করা যায়। a-এর মান মোটামুটি চলকগুলোর গড়ের কাছাকাছি এবং $c(c \geq 1)$-এর মান নিতে হয় যেন নতুন চলকের মানগুলো অপেক্ষাকৃত (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) সংখ্যা হয়। তখন ভেদাঙ্ক নিচের সূত্র দ্বারা নির্ণয় হয়:

$\sigma_x^2 = c^2\sigma_u^2$ যেখানে σ_x^2 এবং σ_u^2 যথাক্রমে চলক x এবং u-এর মাধ্যমে প্রাপ্ত ভেদাঙ্ক বুঝায়।

প্রমাণ: $u = \frac{x-a}{c} \Rightarrow u_i = \frac{x_i - a}{c}; i = 1, 2, ..., n.$

$\Rightarrow x_i = a + cu_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = a\sum_{i=1}^{n} f_i + c\sum_{i=1}^{n} f_i u_i = aN + c\sum_{i=1}^{n} f_i u_i$

উভয় পক্ষকে N দিয়ে ভাগ করে পাই $\bar{x} = a + c\bar{u}$

নতুন চলক u-এর ভেদাঙ্ক σ_u^2 হলে $N\sigma_u^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(u - \bar{u})^2$

এখন $N\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(a + cu_i - a - c\bar{u})^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(cu_i - c\bar{u})^2$

$= c^2\sum_{i=1}^{n} f_i(u_i - \bar{u})^2 = Nc^2\sigma_u^2$, অতএব $\sigma_x^2 = c^2\sigma_u^2$

অনুসিদ্ধান্ত: $\sigma_x = c\sigma_u$

বিশেষ ক্ষেত্র: $c = 1$ হলে $\sigma_x = \sigma_u$ হয়। অর্থাৎ, স্কেল অপরিবর্তিত রেখে শুধু মূলবিন্দু পরিবর্তনে ভেদাঙ্কের ও পরিমিত ব্যবধানের কোনো পরিবর্তন হয় না। মূলবিন্দু ও স্কেল পরিবর্তন বিশেষ করে শ্রেণিকৃত উপাত্তের বেলায় বিশেষ উপযোগী।

উদাহরণ 3: নিচের তথ্য ছক হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন:

শ্রেণি	গণসংখ্যা
0 – 5	5
5 – 10	12
10 – 15	20
15 – 20	8
20 – 25	3

সমাধান: এখানে শ্রেণিগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে 2.5, 7.5, 12.5, 17.5, 22.5; প্রতিটি শ্রেণি ব্যবধান = 5.

তাই $a = 12.5$ এবং $c = 5$ নিয়ে নতুন চলক $u = \frac{x-12.5}{5}$ প্রবর্তন করুন।

নিচের সারণিতে ফল সংকলন করা হলো:

সারণি

শ্রেণি	**গণসংখ্যা f_i**	**মধ্যবিন্দু x_i**	$u_i = \frac{x_i - a}{c}$	f_iu_i	$f_iu_i^2$
0– 5	5	2.5	– 2	– 10	20
5 –10	12	7.5	– 1	– 12	12
10 – 15	20	12.5	0	0	0
15 – 20	8	17.5	1	8	8
20 – 25	3	22.5	2	6	12
	$N = 48$			$\sum f_iu_i = -8$	$\sum f_iu_i^2 = 52$

এখানে $\bar{u} = \frac{\sum f_iu_i}{N} = \frac{-8}{48} = -\frac{1}{6} = -0.16667; \quad \frac{\sum f_iu_i^2}{N} = \frac{52}{48} = \frac{13}{12} = 1.08333$

অতএব $\sigma_u^2 = \frac{\sum f_iu_i^2}{N} - \bar{u}^2 = 1.08333 - 0.02777 = 1.05556.$

সুতরাং নির্ণেয় পরিমিত ব্যবধান $\sigma_x = c\sigma_u = 5\sqrt{1.05556} = 5.137$ (প্রায়)

উদাহরণ 4: নিচের তথ্য সেটটির ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন:
5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.

সমাধান:ধরুন, x চলক প্রদত্ত মানগুলো নির্দেশ করে।

সুতরাং ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}$

এখানে গড় $\bar{x} = \frac{5+10+15+20+25+30+35+40+45+50}{10} = 27.5$

নিচে বিচ্যুতি ছকটি নির্ণয় করুন–

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
5	– 22.5	506.25
10	– 17.5	306.25
15	– 12.5	156.25
20	– 7.5	56.25
25	– 2.5	6.25
30	2.5	6.25
35	7.5	56.25
40	12.5	156.25
45	17.5	306.25
50	22.5	506.25
		সমষ্টি=2062.5

সুতরাং ভেদাঙ্ক $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{2062.5}{10} = 206.25$

উপরের উদাহরণের পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{206.25} = 14.36$

শিক্ষার্থীর কাজ	$a = 0, c = 5$ নিয়ে উদাহরণ 4 এর সমাধান সহজ পদ্ধতিতে নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- উপাত্তের মানগুলোকে যখন পরিমাণগত বৈশিষ্ট্যের আলোকে কতগুলো শ্রেণিতে বিভক্ত করে প্রতিটি শ্রেণির বিপরীতে গণসংখ্যা দেখিয়ে উপস্থাপন করা হয় তখন তাকে গণসংখ্যা নিবেশন বলে।
- ধরা যাক $x_1, x_2, ..., x_n$ একটি অশ্রেণিকৃত উপাত্তের n সংখ্যক মান। তাহলে $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$ । সুতরাং ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{N}$.
- ভেদাঙ্ক নির্ণয়ের সূত্র: $\sigma_x^2 = c^2 \sigma_u^2$ যেখানে σ_x^2 এবং σ_u^2 যথাক্রমে চলক x এবং u-এর মাধ্যমে প্রাপ্ত ভেদাঙ্ক বুঝায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.২

1. নিচের তথ্য হতে ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন:

পরিবারের মাসিক আয় (হাজার টাকা)	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
পরিবারের সংখ্যা	3	5	10	8	2

2. নিচের তথ্য ছক হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন:

মাসিক আয় (টাকা)	1001 – 2000	2001 – 3000	3001 – 4000	4001 – 5000	5001 – 6000	6001 –7000
পরিবারের সংখ্যা	8	30	75	25	18	14

3. নিচের নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন:

x	10	13	25	30	37	42	45
f	3	7	8	15	10	5	2

4. 200 জন লোকের আয়ের তথ্য হতে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণন করুন:

আয়ের সীমা	5000–10000	10000–15000	15000–20000	20000–25000	25000-30000
গণসংখ্যা	25	40	70	35	30

পাঠ ১০.৩ সম্ভাবনা এবং সম্ভাবনার প্রয়োজনীয় ধারণা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভাবনার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- দৈনন্দিন বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ঘটনা, সম্ভাব্য ঘটনা এবং প্রয়োজনীয় ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সম্ভাবনা, পরীক্ষণ, নমুনা, ঘটনা

মূলপাঠ

সম্ভাবনার ধারণা(Concept of Probability)

Girolambo Cardano (1501 – 1576) নামের একজন ব্যক্তি লটারি খেলা বিশ্লেষণে 'সম্ভাবনা' সম্পর্কে প্রথম ধারণা দেন। কিন্তু ফরাসি গণিতবিদ প্যাসকেল (Blaise Pascal, 1623 – 1662) সপ্তদশ শতকে সম্ভাবনা তত্ত্বের উন্নতি সাধন করেন এর গাণিতিক ভিত্তি দেন। প্যাসকেল মূলত দ্বিপদী সহগ (Binomial Coefficient)-গুলোর বিভিন্ন ধর্ম নিয়ে গবেষণা করেন এবং 'প্যাসকেলের ত্রিভুজ' গঠন করেন। অষ্টাদশ শতাব্দীর শুরুতে আরেক ফরাসী গণিতবিদ, পদার্থবিজ্ঞানী ও জ্যোতির্বিজ্ঞানী লাপলাস (Pierresimon Marquis de Laplace, 1749 – 1827) সম্ভাবনার একটি সংজ্ঞা দেন। তিনি একটি ঘটনার অনুকূল ফলাফল (Outcomes) সংখ্যাকে সকল সম্ভাব্য ফলাফল (Number of all Possible Outcomes) সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে সম্ভাবনাকে সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করেন। উদাহরণস্বরূপ, লুডু খেলায় নিরপেক্ষভাবে একটি ঘুঁটি নিক্ষেপ করলে একটি বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে, সম্ভাব্য মোট ফলাফল সংখ্যা 6 (অর্থাৎ 1, 2, 3, 4, 5, 6) এবং বিজোড় সংখ্যা হওয়ার পক্ষে ফলাফল 1, 3, 5 অর্থাৎ 3টি। সুতরাং বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$। এটিই কোনো ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয়ে লাপলাসের সংজ্ঞা। ঊনবিংশ শতাব্দীতে জ্যোতির্বিজ্ঞানে ব্যবহারিক কাজে গাউস সম্ভাবনা তত্ত্ব প্রয়োগ করেন। সম্ভাবনা হলো কোনো ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তার গাণিতিক পরিমাপ।

সম্ভাবনার প্রয়োজনীয় ধারণা

পরীক্ষণ (Experiment): কোনো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে বা অবস্থায় পূর্ব হতে জানা ফলাফলগুলোর অভীষ্ট ফলাফলের যে কোনোটি লাভের উদ্দেশ্যে কোনো কাজ বার বার করাকে পরীক্ষণ বলে। যেমন–

(i) লুডু খেলায় ছক্কা নিক্ষেপ করা একটি পরীক্ষণ।

(ii) যে কোনো খেলা শুরুর পূর্বে মুদ্রা নিক্ষেপ করা একটি পরীক্ষণ।

চেষ্টা (Trial): কোনো পরীক্ষণ একবার সম্পন্ন করাকে একটি চেষ্টা বলে।

দৈব পরীক্ষণ (Random Experiment): যদি কোনো পরীক্ষণের ফলাফলগুলোর মধ্য হতে কোন চেষ্টায় কী ফলাফল হবে তা নিশ্চিত করে বলা না যায় তবে তাকে দৈব পরীক্ষণ বলে। যেমন– একটি বাক্সের মধ্যে 7টি রঙের সাতটি কলম আছে। চোখ বুজে একটি কলম বাছাই করলে 7টি রঙের যে কোনো একটি রঙের কলম পাওয়া যাবে তা নিশ্চিত করে বলা গেলেও কোন রঙের কলম পাওয়া যাবে তা নিশ্চিত করে বলা যায় না।

নমুনা বিন্দু (Sample Point): কোনো পরীক্ষণের প্রতিটি চেষ্টা হতে যে ফলাফল পাওয়া যায় তার প্রত্যেকটিকে একটি নমুনা বিন্দু বলে। যেমন– লুডু খেলায় ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ করে 6 পাওয়া গেলে 6 একটি নমুনা বিন্দু। পরীক্ষণ হতে প্রাপ্ত সকল ফলাফলই এক একটি নমুনা বিন্দু।

নমুনা ক্ষেত্র (Sample Space): কোনো পরীক্ষণ হতে প্রাপ্ত সম্ভাব্য সকল নমুনা বিন্দুর সেটকে নমুনা জগৎ বা নমুনা ক্ষেত্র বলে। যেমন– একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলো। একবার নিক্ষেপে প্রাপ্ত ফলাফল H অথবা T। সুতরাং তিনবার নিক্ষেপে প্রাপ্ত সম্ভাব্য ফলাফলগুলোর সেট = $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ যাকে তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র বলা হয়।

ঘটনা (Event): কোনো পরীক্ষণে নমুনা ক্ষেত্রের একটি উপসেট বা কোনো নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সেটকে ঘটনা বলে। যেমন– একটি ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$। কিন্তু জোড় সংখ্যা পাওয়ার পক্ষের নমুনা বিন্দুর সেট = $\{2, 4, 6\} = A$ হলে, $A \subset S$ এবং A একটি ঘটনা যা ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ হতে জোড় সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা সূচিত করল।

সরল ঘটনা (Simple Event/Elementary Event): কোনো পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্রের যে কোনো একটি নমুনা বিন্দু নিয়ে যে ঘটনা হয় তাকে সরল ঘটনা বলে। একটি সরল ঘটনার নমুনা বিন্দু নিয়ে অন্য কোনো সরল ঘটনা হয় না। যেমন– একটি ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ পরীক্ষণে 6 পাবার ঘটনা একটি সরল ঘটনা।

যৌগিক ঘটনা (Compound Event): যদি কোনো পরীক্ষণের অধীন একটি ঘটনাকে কয়েকটি সরল ঘটনায় ভাগ করা যায় তবে তাকে যৌগিক ঘটনা বলে। যেমন– ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ পরীক্ষণে বিজোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা B হলে,$B = \{1, 3, 5\}$ একটি যৌগিক ঘটনা।

সম-সম্ভাব্য ঘটনা (Equally Likely Event): যদি কোনো পরীক্ষণের দুই বা ততোধিক ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা সমান হয় তবে তাকে সম-সম্ভাব্য ঘটনা বলে।

অনুকূল ফলাফল (Favourable Outcomes): কোনো পরীক্ষণে একটি ঘটনার সপক্ষে প্রত্যেকটি নমুনা বিন্দুকে উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল বলে। যেমন– একটি ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ পরীক্ষণে জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনার অনুকূল ফলাফল 2, 4, 6 অর্থাৎ 3টি।

সম্ভাবনা (Probability): কোনো পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র S-এ নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(S) = m$ এবং S-এর অধীন একটি ঘটনা A-এর অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা, $n(A) = n$ হলো, A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনাকে $P(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয় যার গাণিতিক পরিমাপ–

$$P(A) = \frac{A\text{-এর অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা}}{\text{নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n}{m}$$

সূত্র 1: সম্ভাবনার মান 0 থেকে 1-এর মধ্যে থাকে।

অথবা, কোনো পরীক্ষণের S নমুনা ক্ষেত্রের অধীনে E একটি ঘটনা হলে $0 \le P(E) \le 1$.

প্রমাণ: মনে করুন, S নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = n এবং E ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা= m

$$\therefore P(E) = \frac{m}{n}$$

এটি অবশ্যই সত্য যে, m-এর মান 0 থেকে n-এর মধ্যে থাকবে।

$$\therefore 0 \le m \le n \Rightarrow 0 \le \frac{m}{n} \le \frac{n}{n}$$

$$\therefore 0 \le P(E) \le 1$$

সুতরাং সম্ভাবনার মান 0 থেকে 1-এর মধ্যে থাকে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: কোনো পরীক্ষণের নমুনা জগৎ S-এর n সংখ্যক সরল ঘটনা $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ হলে,

অর্থাৎ, $S = \{E_1, E_2, E_3, ..., E_n\}$ হলে, $P(E_i) = \frac{1}{n}$; যখন $i = 1, 2, 3, ..., n$

নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event): কোনো পরীক্ষণে যে ঘটনাটি অবশ্যই ঘটবে তাকে নিশ্চিত ঘটনা বলে। যেমন– প্রতিদিন সূর্য পূর্ব দিক থেকে ওঠার ঘটনা একটি নিশ্চিত ঘটনা। ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে 1 থেকে 6 পর্যন্ত যে কোনো একটি সংখ্যা পাবার ঘটনা নিশ্চিত ঘটনা। নিশ্চিত ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা 1।

অসম্ভব ঘটনা (Impossible Event): যদি কোনো পরীক্ষণের একটি ঘটনার অনুকূলে কোনো ফলাফল বা নমুনা বিন্দু না থাকে তবে তাকে অসম্ভব ঘটনা বলে। অসম্ভব ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা 0। যেমন– মুদ্রা নিক্ষেপ করে 6 পাবার ঘটনা অসম্ভব ঘটনা।

উদাহরণ 1: দুইটি ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ পরীক্ষণের নমুনা জগৎ নির্ণয় করুন এবং পরপর দুইটি একই সংখ্যা পাবার সম্ভাবনা কত তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: দুইটি ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ পরীক্ষণে নমুনা জগৎ নিচের বর্গক্ষেত্রে দেখানো হলো:

(১ম ছক্কাঘুঁটি) \ (২য় ছক্কাঘুঁটি)	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
⚁	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
⚂	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
⚃	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
⚄	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
⚅	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

পরপর দুইটি একই সংখ্যা পাবার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সেট, $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি করুন। জোড়সংখ্যা ও দুইটি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। 2. *TEA* শব্দটিকে সবগুলো বর্ণ নিয়ে বিন্যাস গঠন পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্রটি প্রস্তুত করুন। নিরপেক্ষভাবে একটি বিন্যাস বাছাই করলে তার মাঝখানে T থাকার সম্ভাবনা কত?

সংযোগ ঘটনা (Union of Events): কোনো পরীক্ষণের দুইটি ঘটনা A ও B হলে, A অথবা B ঘটনা দুইটির যে কোনো একটি ঘটনা সংঘটিত হওয়ার ঘটনাকে A ও B-এর সংযোগ ঘটনা বলে এবং একে $A \cup B$ দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন– ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ হলে, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

ঘটনার ছেদ (Intersection of Events): দুইটি ঘটনা A ও B হলে, A এবং B উভয় ঘটনা একত্রে সংঘটিত হবার ঘটনাকে A ও B-এর ছেদ বলা হয় এবং $A \cap B$ দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন: ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে,

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ হলে, $A \cap B = \{6\}$

পূরক ঘটনা (Complementary Event): যদি কোনো পরীক্ষণে নমুনা ক্ষেত্র S-এর কয়েকটি নমুনা বিন্দু কোনো ঘটনার অনুকূলে থাকে, তবে ঐ নমুনা ক্ষেত্রের অবশিষ্ট নমুনা বিন্দুগুলো যে ঘটনার অনুকূল ফলাফল হবে তাকে আগেকার ঘটনার পূরক ঘটনা বলে। যেমন– একটি ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ পরীক্ষণে $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$-এর অধীন A ঘটনার অনুকূল

ফলাফলের সেট $\{1, 3, 5\}$ এবং B একটি ঘটনা যার অনুকূল ফলাফলের সেট $= S - A = \{2, 4, 6\}$. সুতরাং B-কে A-এর পূরক ঘটনা বলে। এক্ষেত্রে $B = \overline{A}$ লেখা যায়।

সূত্র 2: যদি S নমুনা ক্ষেত্রের E ঘটনার পূরক ঘটনা $\overline{E}$ হয়, হবে $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

প্রমাণ: মনে করুন, $n(S) = m$ এবং $n(E) = n$

$$\therefore P(E) = \frac{n}{m}$$

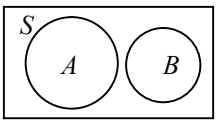
স্পষ্টত $\overline{E}$ ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা $= m-n$

$$\because P(\overline{E}) = \frac{m-n}{m} = \frac{m}{m} - \frac{n}{m} = 1 - P(E)$$

$\because P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ [প্রমাণিত]

পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা (Mutually Exclusive Event): যদি একই পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্রের অধীনে যদি দুই বা ততোধিক ঘটনার অনুকূল ফলাফলগুলোর মধ্যে কোন সাধারণ নমুনা বিন্দু না থাকে, তবে তাদের বর্জনশীল ঘটনা বলে। বর্জনশীল ঘটনাগুলোর যে কোনো একটি ঘটনা ঘটলে বাকিগুলোর কোনোটিই ঘটবে না।

যেমন– ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা, $A = \{2, 4, 6\}$ ও বিজোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা, $B = \{1, 3, 5\}$ হলে, A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা।

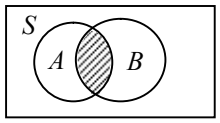


বর্জনশীল ঘটনার ভেনচিত্র পাশে দেখানো হলো:

A ও B পরস্পর বর্জনশীল হলে, $A \cap B = \phi$

পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা (Not Mutually Exclusive Event): কোনো পরীক্ষণের অধীন দুই বা ততোধিক ঘটনার অনুকূল ফলাফলগুলোর মধ্যে যদি সাধারণ নমুনা বিন্দু থাকে তবে ঐ ঘটনাগুলোকে পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা বলে।

যেমন– একটি ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ পরীক্ষণে জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা, $A = \{2, 4, 6\}$ ও 3-এর গুণিতক পাবার ঘটনা, $B = \{3, 6\}$ হলে, A ও B-এর সাধারণ নমুনা বিন্দু 6. সুতরাং A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা। পরীক্ষণের কোনো চেষ্টা হতে অবর্জনশীল ঘটনাগুলো একই সাথে ঘটতে পারে।



যেমন– উপরের উদাহরণে, ছক্কাঘুঁটি নিক্ষেপ করে 6 পেলে A ও B উভয় ঘটনাই ঘটল। অবর্জনশীল ঘটনার ভেনচিত্র পাশে দেখানো হলো। A ও B পরস্পর অবর্জনশীল হলে, $A \cap B \neq \phi$

সম্পূর্ণ ঘটনা (Exhaustive Event): যদি কোনো পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্রের অধীনে দুই বা ততোধিক ঘটনা এমন হয় যে, উক্ত পরীক্ষণের প্রতিটি চেষ্টায় ঘটনাগুলোর কমপক্ষে একটি ঘটনা অবশ্যই ঘটবে, তবে উক্ত ঘটনাগুলোকে সম্পূর্ণ ঘটনা বলে। সম্পূর্ণ ঘটনাগুলোর সংযোগ ঘটনা নমুনা ক্ষেত্রের সমান হয়। সম্পূর্ণ ঘটনাগুলো পরস্পর বর্জনশীল কিংবা অবর্জনশীল হতে পারে।

যেমন– একটি ছক্কাঘুঁটি পরীক্ষণে নমুনা ক্ষেত্র S

এবং A: জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা, B: বিজোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা, C:3-এর গুণিতক পাবার ঘটনা

$\therefore$ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 6\}$

এখানে, A ও B সম্পূর্ণ ঘটনা কিন্তু A ও C এবং B ও C সম্পূর্ণ ঘটনা নয়।

আবার, A, B, C একত্রে সম্পূর্ণ ঘটনা।

সুতরাং A ও B সম্পূর্ণ ঘটনা হলে, $A \cup B = S$

এবং $P(A \cup B) = 1$.

সম্পূরক ঘটনা (Suplimentary Event): কোনো পরীক্ষণের অধীন দুই বা ততোধিক পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা সম্পূর্ণ ঘটনা হলে তাদের সম্পূরক ঘটনা বলে।যদি S নমুনা ক্ষেত্রের অধীনে A, B, Cসম্পূরক ঘটনা হয়, তবে

(i) $A \cup B \cup C = S$, (ii) $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ এবং (iii) $A \cap B \cap C = \phi$

অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Event): দুইটি ঘটনা A ও B-কে অনির্ভরশীল ঘটনা বলা হবে যদি এদের যে কোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অন্যটি ঘটা বা না ঘটার উপর নির্ভর না করে।
যেমন, একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষণে H ও T পাওয়া গেলে, একটি মুদ্রা পরপর দুইবার নিক্ষেপ পরীক্ষণে প্রথম নিক্ষেপে H পাওয়া বা না পাওয়ার উভয় দ্বিতীয় নিক্ষেপে H পাওয়া নির্ভর করে না। সুতরাং প্রথম নিক্ষেপে H পাওয়ার ঘটনা ও দ্বিতীয় নিক্ষেপে H পাওয়ার ঘটনা পরস্পর অনির্ভরশীল ঘটনা।

নির্ভরশীল ঘটনা (Dependent Event): যদি দুইটি এরূপ হয় যেন এদের একটি ঘটনার সম্ভাবনা অপর ঘটনা ঘটা বা না ঘটার উপর নির্ভর করে, তবে ঘটনা দুইটিকে একে অপরের নির্ভরশীল ঘটনা বলে। যেমন– একটি বাক্সে 2টি লাল ও 3টি কালো বল আছে। বাক্স হতে দৈবভাবে পরপর দুইটি বল উঠালে দ্বিতীয় বার লাল বল পাবার সম্ভাবনা প্রথমবার লাল বল পাওয়া বা না পাওয়ার উপর নির্ভর করে। প্রথমবার লাল বল পাবার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং প্রথমবার লাল বল পাওয়া গেলে দ্বিতীয়বার লাল বল পাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$, কিন্তু প্রথমবার লাল বল না পেলে দ্বিতীয়বার লাল বল পাবার সম্ভাবনা $\frac{2}{4}$ ।

সারসংক্ষেপ

- সম্ভাবনা হলো কোনো ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তার গাণিতিক পরিমাপ।
- কোনো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে বা অবস্থায় পূর্ব হতে জানা ফলাফলগুলোর অভীষ্ট ফলাফলের যে কোনোটি লাভের উদ্দেশ্যে কোনো কাজ বার বার করাকে পরীক্ষণ বলে।
- কোনো পরীক্ষণ একবার সম্পন্ন করাকে একটি চেষ্টা বলে।
- কোনো পরীক্ষণের প্রতিটি চেষ্টা হতে যে ফলাফল পাওয়া যায় তার প্রত্যেকটিকে একটি নমুনা বিন্দু বলে।
- কোনো পরীক্ষণ হতে প্রাপ্ত সম্ভাব্য সকল নমুনা বিন্দুর সেটকে নমুনা জগৎ বা নমুনা ক্ষেত্র বলে।
- কোনো পরীক্ষণে নমুনা ক্ষেত্রের একটি উপসেট বা কোনো নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সেটকে ঘটনা বলে।
- কোনো পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র S-এ নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(S) = m$এবং S-এর অধীন একটি ঘটনা A-এর অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা, $n(A) = n$হলো, A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনাকে $P(A)$দ্বারা সূচিত করা হয় যার গাণিতিক পরিমাপ– $P(A) = \frac{A\text{-এর অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা}}{\text{নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n}{m}$
- সম্ভাবনার মান 0 থেকে 1-এর মধ্যে থাকে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৩

1. একটি বাক্সে 7টি লাল, 9টি কালো এবং 6টি সাদা বল আছে। এলোমেলোভাবে একটি বল তুলে নেওয়া হলো। বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?
2. 52 খানা তাসের প্যাকেটে 4টি টেক্কা আছে। নিরপেক্ষভাবে যে কোনো একখানা তাস টেনে টেক্কা না পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত?
3. একটি বাক্সে 5টি লাল ও 10টি সাদা বল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে (i) দুইটি ভিন্ন রঙের বল এবং (ii) দুইটি একই রঙের বল পাবার সম্ভাব্যতা কত?

4. একজন ছাত্রের বাংলা পরীক্ষায় ফেল করার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{5}$, বাংলা এবং ইংরেজি দুইটিতে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{3}{8}$ এবং দুইটির যে কোনো একটিতে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{7}{8}$ হলে, তার কেবল ইংরেজিতে পাসের সম্ভাব্যতা কত?
5. 1 থেকে 20 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হতে একটি সংখ্যা খুশিমতো নিলে সংখ্যাটি 3 অথবা 5-এর গুণিতক হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।

পাঠ ১০.৪ একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাবনা নির্ণয়

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাব্য ফলাফল নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	শর্তাধীন সম্ভাবনা, যৌগিক সম্ভাবনা

মূলপাঠ

একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাবনা নির্ণয়

শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability): মনে করুন, একটি ব্যাগে 3টি সাদা ও 2টি লাল বল আছে। যদি প্রথমে একটি বল বাছাই করার পর পুনরায় তা ব্যাগে ফেরত রাখা না হয়, তবে দ্বিতীয় একটি বল বাছাই ঘটনার সম্ভাবনা প্রথমটির বাছাই ঘটনার উপর নির্ভরশীল হয়।

মনে করুন, R_1: প্রথম বল লাল হবার ঘটনা

R_2: দ্বিতীয় বলটি লাল হবার ঘটনা

W_1: প্রথম বলটি সাদা হবার ঘটনা

তাহলে, $P(R_1)=\frac{2}{5}, \quad P(W_1)=\frac{3}{5}$

এখানে, সরাসরি $P(R_2)$ নির্ণয় করা যাবে না।

কারণ প্রথম বলটি লাল হলে দ্বিতীয় বলটি লাল হবার সম্ভাবনা ও প্রথম বলটি সাদা হলে দ্বিতীয় বলটি লাল হবার সম্ভাবনা সমান হয়।

সুতরং, প্রথম বলটি লাল হলে দ্বিতীয় বলটি লাল হবার সম্ভাবনা $=\frac{1}{4}$ (কারণ অবশিষ্ট 4টি বলের মধ্যে 1টি লাল বল থাকে)।

একে $P\left(\frac{R_2}{R_1}\right)=\frac{1}{4}$ লেখা হয়।

আবার, প্রথম বলটি সাদা হলে দ্বিতীয় বলটি লাল হবার সম্ভাবনা, $P\left(\frac{R_2}{W_1}\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

এরূপ সম্ভাবনাকে শর্তাধীন সম্ভাবনা বলে।

এখানে, $P(R_1 \cap R_2)=P(R_1).P\left(\frac{R_2}{R_1}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

এবং $P(W_1 \cap R_2) = P(W_1).P\left(\frac{R_2}{W_1}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

সংজ্ঞা: দুইটি ঘটনা A ও B হলে, B ঘটনাটি ঘটার শর্তে A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে শর্তাধীন সম্ভাবনা বলে এবং $P\left(\frac{A}{B}\right)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $P\left(\frac{A}{B}\right)$-কে "Probability of A given B" পড়া হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: যদি A ও B পরস্পর অনির্ভরশীল ঘটনা হয় তবে A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা B ঘটনা ঘটা বা না ঘটার ওপর নির্ভর করে না সেক্ষেত্রে, $P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$ এবং $P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$.

যৌগিক সম্ভাবনা (Compound Probability): যদি A ও B ঘটনা দুইটি পরস্পর নির্ভরশীল হয়, তবে $A \cap B$ ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অর্থাৎ $P(A \cap B)$-কে যৌগিক সম্ভাবনা বলে এবং

$$P(A \cap B) = P(B).P\left(\frac{A}{B}\right) \quad \text{অথবা,} \quad P(A \cap B) = P(A).P\left(\frac{B}{A}\right)$$

উদাহরণ 1: একটি বাক্সে 3টি কালো ও 4টি সাদা বল আছে। বাক্স থেকে দৈব পদ্ধতিতে 1টি করে 2টি বল তুলে নেওয়া হলো। দুইটি বলই সাদা হবার সম্ভাবনা কত?
এখানে প্রথমে তোলা বলটি দ্বিতীয় বলটি তোলার আগে– (i) প্রতিস্থাপিত হয়, (ii) প্রতিস্থাপিত হয় না।

সমাধান: বাক্সে কালো বল সংখ্যা = 3, সাদা বল সংখ্যা= 4

$\therefore$ মোট বল সংখ্যা = 7

$\therefore$ P(১ম বলটি সাদা) $= \frac{4}{7}$

এখন, (i) দ্বিতীয় বলটি তোলার আগে প্রথম বলটি প্রতিস্থাপিত হলে,

P(২য় বলটি সাদা) $= \frac{4}{7}$

$\therefore$ P(দুইটি বল সাদা) $= \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

(ii) দ্বিতীয় বলটি তোলার আগে প্রথম বলটি প্রতিস্থাপিত না হলে, বাক্সেকালো বল সংখ্যা = 3, সাদা বল সংখ্যা= 3 মোট বল সংখ্যা= 6

$\therefore P$(২য় বলটি সাদা) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore P$(দুইটি বলই সাদা) $= \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$

সারসংক্ষেপ

- দুইটি ঘটনা A ও B হলে, B ঘটনাটি ঘটার শর্তে A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে শর্তাধীন সম্ভাবনা বলে এবং $P\left(\frac{A}{B}\right)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $P\left(\frac{A}{B}\right)$-কে "Probability of A given B"পড়া হয়।
- যদি A ও B ঘটনা দুইটি পরস্পর নির্ভরশীল হয়, তবে $A \cap B$ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অর্থাৎ $P(A \cap B)$-কে যৌগিক

সম্ভাবনা বলে এবং $P(A \cap B) = P(B).P\left(\frac{A}{B}\right)$ অথবা, $P(A \cap B) = P(A).P\left(\frac{B}{A}\right)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৪

1. একটি ঝুড়িতে 2টি কালো এবং 4টি সাদা বল আছে। একটি বালক নিরপেক্ষভাবে তিনটি বল উঠাল। 3টি বলই কালো হবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।
2. 52টি তাসের প্যাকেট হতে 3টি তাস বের করা হলে তিনটি তাসই রাজা হবার সম্ভাবনা কত?
3. একটি বাক্সে 15টি লাল ও 10টি কালো রঙের মার্বেল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে দুইটি (i) ভিন্ন রঙের এবং (ii) একই রঙের মার্বেল হওয়ার সম্ভাবনা কত?
4. (i)একটি ব্যাগে 5টি সাদা, 7টি লাল এবং 8টি কালো বল আছে। যদি বিনিময় না করে একটি একটি করে পর পর চারটি বল তুলে নেওয়া হয়, তবে সবগুলো বল সাদা হবার সম্ভাবনা কত?
   (ii)একটি থলেতে 5টি সাদা, 7টি লাল এবং 8টি কালো বল আছে। এলোমেলোভাবে তিনটি বল তুলে নেওয়া হলো। বলগুলো লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

পাঠ ১০.৫ পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্রের প্রমাণ করতে পারবেন,
- পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্রের প্রয়োগ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বর্জনশীল ঘটনা, অবর্জনশীল ঘটনা

মূলপাঠ

পরস্পর বর্জনশীল ও অবর্জনশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার যোগসূত্র

কোনো পরীক্ষণের অধীন নুমনা ক্ষেত্র S-এর ক্ষেত্রে–

(i) যদি A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হয়, হবে $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(ii) যদি A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হয়, তবে $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

প্রমাণ:(i) মনে করুন, কোনো পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র S-এর মধ্যে A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনা।

যেন, S নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n(S)$.

A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n(A)$.

এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n(B)$.

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}.$$

যেহেতু, A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা; তাই A ও B ঘটনা দুইটির কোনো সাধারণ নমুনা বিন্দু নেই।
সুতরাং $(A\cup B)$ ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা,

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B)$$

$$\therefore P(A\cup B) = \frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)+n(B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = P(A) + P(B)$$

$\therefore P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.(প্রমাণিত)।

(ii) মনে করুন, S নমুনা ক্ষেত্রের অধীনে A ও B দুইটি পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা এবং তাদের সাধারণ নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = x যদি নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = $n(S) = n$
A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = n_A.

B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = n_B হয়, তবে $P(A) = \frac{n_A}{n}$, $P(B) = \frac{n_B}{n}$, এবং $P(A\cap B) = \frac{x}{n}$.

সুতরাং $A\cup B$ ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যা = $(n_A - x) + (n_B - x) + x = n_A + n_B - x$

$$\therefore \quad P(A\cup B) = \frac{n_A + n_B - x}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{x}{n} = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$\therefore \quad P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \text{(প্রমাণিত)}$$

অনুসিদ্ধান্ত: A, B, C তিনটি ঘটনার জন্য সম্ভাবনার সংযোগসূত্র:
$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(C\cap A) + P(A\cap B\cap C)$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য: যদি কোনো পরীক্ষণের n সংখ্যক পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ হয়, তবে
$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + (P(A_3) + \ldots + P(A_n)$.

উদাহরণ 1: 52 খানা তাস উপযুক্তভাবে শাফল করে দৈবভাবে একখানা তাস বাছাই করা হলো:
(i) তাসটি টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত?
(ii) তাসটি রুইতন অথবা টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত?
(iii) তাসটি রাজা অথবা টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: (i) 52 খানা তাসের মধ্যে 4টি টেক্কা।

$$\therefore \quad P(\text{টেক্কা}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

(ii) 52 খানা তাসের মধ্যে 13টি রুইতন, 4টি টেক্কা এবং 1টি রুইতনের টেক্কা।

সুতরাং P(রুইতন অথবা টেক্কা) = P(রুইতন) + P(টেক্কা) − P(রুইতনের টেক্কা)

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

(iii) 52 খানা তাসের মধ্যে 4টি রাজা ও 4টি টেক্কা।

$$\therefore \quad P(\text{রাজা অথবা টেক্কা}) = P(\text{রাজা}) + P(\text{টেক্কা}) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	A ও Bবর্জনশীল এবং$P(A\cup B) = 1,\ P(B) = 3\,P(A)$হলে,$P(A)$ও $P(B)$নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- কোনো পরীক্ষণের অধীন নুমনা ক্ষেত্র S-এর ক্ষেত্রে– (i)যদি Aও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হয়, হবে $P(A\cup B)$

$= P(A) + P(B)$ (ii) যদি A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হয়, তবে $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৫

1. এক প্যাকেট তাস হতে হরতনের একটি রাজা বের করা হলো। বাকি তাসগুলো ভালোভাবে শাফল করা হলো। পরবর্তী তাসটি হরতন হবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।
2. (i) $P(A\cap B)=\frac{1}{3}, P(A\cup B)=\frac{5}{6}; P(A)=\frac{1}{2}$ হলে $P(B)$ এবং $P(\overline{B})$ এর মান নির্ণয় করুন।
   (ii)যদি $P(A\cap B) = 0.48$ এবং $P(A) = 0.6$ হয়, তবে $P(B)$-এর মান কত হলে A ও B স্বাধীন হবে?
3. $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}$ এবং $P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{3}{5}$ হলে, $P(A\cap B), P\left(\frac{A}{B}\right)$ এবং $P(A\cup B)$-এর মান নির্ণয় করুন।
4. একটি পরীক্ষায় 30% ছাত্র গণিতে, 20% ছাত্র রসায়নে এবং 10% ছাত্র উভয় বিষয়ে ফেল করে। দৈবভাবে একজন ছাত্র নির্বাচন করলে (i) ছাত্রটি গণিতে ফেল করার সম্ভাব্যতা কত? যখন জানা আছে ছাত্রটি রসায়নে ফেল করেছে। (ii) ছাত্রটির একটি মাত্র বিষয়ে ফেল করার সম্ভাব্যতা কত?
5. একটি মুদ্রা তিন বার টস করা হলো। পর্যায়ক্রমে মুদ্রাটির হেড এবং টেইল পাবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।

পাঠ ১০.৬ অনির্ভরশীল ও নির্ভরশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার গুণন সূত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অনির্ভরশীল ও নির্ভরশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার গুণন সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অনির্ভরশীল ও নির্ভরশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার গুণন সূত্র প্রয়োগ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অনির্ভরশীল ঘটনা, নির্ভরশীল ঘটনা

মূলপাঠ

অনির্ভরশীল ও নির্ভরশীল ঘটনার জন্য সম্ভাবনার গুণন সূত্র ও তার প্রয়োগ

(i) দুইটি অনির্ভরশীল ঘটনা উভয়ই একত্রে ঘটার সম্ভাবনা এদের পৃথক পৃথক ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান।

অর্থাৎ, যদি A ও B দুইটি অনির্ভরশীল ঘটনা হয়, তবে$P(A\cap B) = P(A).P(B)$

প্রমাণ: মনে করুন, A ও B অনির্ভরশীল ঘটনা দুইটি যথাক্রমে S_1 ও S_2 নমুনা ক্ষেত্রের অধীন

যখন, $n(S_1) = n_1, n(S_2) = n_2$

এবং A ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা $= m_1$

ও B ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা $= m_2$

$$\therefore P(A)=\frac{m_1}{n_1}, \quad P(B)=\frac{m_2}{n_2}.$$

A ও B পরস্পর অনির্ভরশীল ঘটনা বলে তাদের অনুকূল ফলাফলগুলো একত্রিত হয়ে $m_1 \times m_2$ সংখ্যক ফলাফল গঠন করে যারা $A \cap B$-এর অনুকূল ফলাফল। অনুরুপভাবে, S_1 ও S_2-এর ফলাফলগুলো একত্রিত করে $n_1 \times n_2$ সংখ্যক ফলাফল গঠন করে।

$$\therefore n(S_1 \cap S_2) = n_1 \times n_2$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{m_1 \times m_2}{n_1 \times n_2} = \frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_1} = P(A) \times P(B)$$

$\therefore A$ ও B পরস্পর অনির্ভরশীল ঘটনা হলে, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. (প্রমাণিত)

যেমন, একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

দ্বিতীয় একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
এখন, $A \subset S_1$ যেন $A = \{2, 4, 6\}$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{3}{6}$$

এবং $B \subset S_2$ যেন $B = \{3, 6\}$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{2}{6}$$

সুতরাং প্রথম পরীক্ষণে A ও দ্বিতীয় পরীক্ষণে B ঘটনা ঘটার অনুকূল ফলাফলের সেট,

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \times \{3, 6\} = \{(2, 3), (2, 6), ..., (6, 6)\}$$

$$\therefore \quad n(A \cap B) = 3 \times 2$$

এবং S_1 ও S_2 একত্রিত নমুনা জগতে ফলাফল সংখ্যা $= 6 \times 6$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{3 \times 2}{6 \times 6} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = P(A).P(B)$$

(ii) দুইটি নির্ভরশীল ঘটনা উভয়ই একত্রে ঘটার সম্ভাবনা এদের একটি ঘটার সম্ভাবনা ও প্রথমটি ঘটার শর্তে দ্বিতীয়টি ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান। অর্থাৎ, A ও B নির্ভরশীল ঘটনা হলে,

$$P(A \cap B) = P(A).P\left(\frac{B}{A}\right) \text{ এবং } P(A \cap B) = P(B).P\left(\frac{A}{B}\right)$$

প্রমাণ: মনে করুন, নমুনা ক্ষেত্র S-এর অধীন A ও B দুইটি নির্ভরশীল ঘটনা যখন,

S-এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n$
A-এর অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n_A$
B-এর অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n_B$
$A \cap B$-এর অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n_{AB}$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n_A}{n}, P(B) = \frac{n_B}{n}, P(A \cap B) = \frac{n_{AB}}{n}$$

B ঘটনা A-এর উপর নির্ভরশীল হলে,

$$P(A \cap B) = \frac{n_{AB}}{n} = \frac{n_A}{n} \times \frac{n_{AB}}{n_A} = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$$

A ঘটনা B-এর উপর নির্ভরশীল হলে,

$$P(A \cap B) = \frac{n_{AB}}{n} = \frac{n_B}{n} \times \frac{n_{AB}}{n_B} = P(B) \times P\left(\frac{A}{B}\right).$$

অনুসিদ্ধান্ত: দুইটি ঘটনা একই সাথে অনির্ভরশীল ও বর্জনশীল হতে পারে না।
প্রমাণ: মনে করুন, A ও B দুইটি অনির্ভরশীল ঘটনা

যেন, $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0.$

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$

$\therefore \quad P(A \cap B) \neq 0$ ..... (i)

এখন, A ও B বর্জনশীল হলে,

$A \cap B \neq \phi$

$\therefore \quad P(A \cap B) = 0$ ..... (ii)

কিন্তু (i) ও (ii) নং সমীকরণ যুগপৎ সত্য হতে পারে না।

তাই, A ও B ঘটনা দুইটি একই সাথে অনির্ভরশীল ও বর্জনশীল হতে পারে না।

উদাহরণ 1: যদি A ও B অনির্ভরশীল এবং $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{3}{4}$ হয়, তবে $P(A\cup B)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: A ও B পরস্পর অনির্ভরশীল বলে $P(A\cap B) = P(A).\ P(B)$ এবং সম্ভাবনার সংযোগ সূত্র মতে,

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A).(P(B) = \frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{4+9-3}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{3}{4}$ এবং A ও B অনির্ভরশীল হলে, $P(A\cup B)$ নির্ণয় করুন। 2. $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{3}{4}$ এবং A ও B অনির্ভরশীল হলে, $P(A\cap B)$ কত? 3. $P(A\cap B)=\frac{1}{3}, P(A\cup B)=\frac{5}{6}, P(A)=\frac{1}{2}$ হলে, A ও B স্বাধীন কি-না ব্যাখ্যা করুন। 4. দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। গুণন সূত্র ব্যবহার করে, দুইটি ছয় ওঠার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- দুইটি অনির্ভরশীল ঘটনা উভয়ই একত্রে ঘটার সম্ভাবনা এদের পৃথক পৃথক ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান।অর্থাৎ, যদি A ও B দুইটি অনির্ভরশীল ঘটনা হয়, তবে $P(A\cap B) = P(A).\ P(B)$
- দুইটি নির্ভরশীল ঘটনা উভয়ই একত্রে ঘটার সম্ভাবনা এদের একটি ঘটার সম্ভাবনা ও প্রথমটি ঘটার শর্তে দ্বিতীয়টি ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান। অর্থাৎ, A ও B নির্ভরশীল ঘটনা হলে, $P(A\cap B) = P(A).\ P\left(\frac{B}{A}\right)$ এবং $P(A\cap B) = P(B).\ P\left(\frac{A}{B}\right)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৬

1. (i) একটি বাক্সে 4টি লাল, 5টি নীল এবং 7টি সাদা রঙের বল আছে। দৈবচয়নে একটি বলের লাল বা সাদা হবার সম্ভাব্যতা কত?
   (ii) একটি বাক্সে বিভিন্ন আকারের 6টি সাদা, 7টি লাল এবং 9টি কালো বল আছে। এলোমেলোভাবে 3টি বল তুলে নেওয়া হলো। বলগুলো লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?
2. দুইটি থলির একটিতে 5টি লাল এবং 3টি কালো বল আছে। অপর থলিতে 4টি লাল এবং 5টি কালো বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি থলি নিবার্চন করা হলো এবং তা থেকে দুইটি বল তোলা হলে একটি লাল ও একটি কালো হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।
3. একটি থলিতে 3টি সাদা এবং 2টি কালো বল আছে। অপর একটি থলিতে 2টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক থলি হতে একটি করে বল তোলা হলো। দুইটি বলের মধ্যে অন্তত একটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।
4. একটি বাক্সে 5টি লাল ও 4টি সাদা ক্রিকেট বল আছে এবং অপর একটি বাক্সে 3টি লাল ও 6টি সাদা ক্রিকেট বল আছে। প্রত্যেক বাক্স হতে একটি করে বল উঠানো হলে দুইটি বলের মধ্যে কমপক্ষে একটি লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।
5. একজন প্রার্থী একটি শিল্প প্রতিষ্ঠানের তিনটি পদে আবেদন করে। প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদে প্রার্থীর সংখ্যা যথাক্রমে 3, 4 এবং 2। ঐ প্রার্থীর কমপক্ষে একটি পদে চাকরি পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

পাঠ ১০.৭ বাস্তব জীবনভিত্তিক সম্ভাবনা সংক্রান্ত সমস্যা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বাস্তব জীবনভিত্তিক সহজ সমস্যা সমাধানে সম্ভাবনার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বাস্তব জীবনভিত্তিক সহজ সমস্যা সমাধানে সম্ভাবনার সূত্রসমূহ প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূলপাঠ

বাস্তব জীবনভিত্তিক সম্ভাবনা সংক্রান্ত সমস্যা

সম্ভাবনা তত্ত্বের উদ্ভবই ঘটেছে বাস্তব জীবনভিত্তিক অভিজ্ঞতার তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা প্রদানের প্রয়াস থেকে। পরিসংখ্যান শাস্ত্রের ভিত্তি হচ্ছে সম্ভাবনা তত্ত্ব। নিচে বাস্তব জীবনভিত্তিক সমস্যার কিছু উদাহরণ দেয়া হলো।

উদাহরণ 1: কোনো পরীক্ষায় 500 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 40 জন বাংলায়, 50 জন ইংরেজিতে ফেল করে। যদি উভয় বিষয়ে কেউই ফেল না করে থাকে তবে দৈবভাবে নির্বাচিত একজন পরীক্ষার্থী বাংলায় বা ইংরেজিতে ফেল করার সম্ভাবনা কত, নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, মোট পরীক্ষার্থীর সেট $= S$, বাংলায় ফেল করা পরীক্ষার্থীর সেট $= A$

ইংরেজিতে ফেল করা পরীক্ষার্থীর সেট $= B$

$\therefore \quad n(S) = 500, \qquad n(A) = 40, \qquad n(B) = 50$

$\therefore \quad P(A) = \frac{40}{500}, \qquad P(B) = \frac{50}{500}$

যেহেতু উভয় বিষয়ে কেউই ফেল করে নাই। সুতরাং A ও B বর্জনশীল ঘটনা।

সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাবনা $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{40}{500} + \frac{50}{500} = \frac{9}{50}.$

উদাহরণ 2:200 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 40 জন গণিতে, 20 জন পরিসংখ্যানে এবং 10 জন উভয় বিষয়ে ফেল করে। একজন পরীক্ষার্থী দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো। সে গণিতে ফেল কিন্তু পরিসংখ্যানে পাস করার সম্ভাবনা কত, নির্ণয় করুন।

সমাধান: মোট পরীক্ষার্থী 200 জন, গণিতে ফেল করে 40 জন, উভয় বিষয়ে ফেল করে 10 জন।

সুতরাং গণিতে ফেল কিন্তু পরিসংখ্যানে পাস করে এমন পরীক্ষার্থী (40 – 10) জন বা 30 জন।

নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{30}{200} = \frac{3}{20}.$

উদাহরণ 3: কোনো পরীক্ষায় সুমনের কম্পিউটারে পাস করার সম্ভাবনা $\frac{2}{3}$, পরিসংখ্যানে পাস করার সম্ভাবনা $\frac{4}{9}$। যদি তার যেকোনো এক বিষয়ে পাস করার সম্ভাবনা $\frac{4}{5}$ হয়, তবে উভয় বিষয়ে পাস করার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: ধরুন ঘটনা A = সুমন কম্পিউটারে পাস করে,ঘটনা B = সুমন পরিসংখ্যানে পাস করে।

উভয় বিষয়ে পাস = $(A \cup B)$

$\therefore P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{4}{9}, P(A \cup B) = \frac{4}{5}$

এখন $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

বা, $\frac{4}{5} = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{5} = \frac{14}{45}.$

উদাহরণ 4: ঢাকা মহানগরের একটি এলাকার দৈবচয়নের ভিত্তিতে একশত বাসিন্দার বাড়ি/গাড়ি থাকা না থাকা সম্পর্কে পরিচালিত জরিপের ফলাফল নিম্নরূপ:

	A বাড়ি আছে	A' বাড়ি নাই	মোট
B গাড়ি আছে	10	20	$m_2 = 30$
B' গাড়ি নেই	25	45	70
মোট	$m_1 = 35$	65	$n = 100$

(i) বাড়ি থাকা শর্তে গাড়ি থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

(ii) গাড়ি থাকা শর্তে বাড়ি থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সমাধান: যাদের বাড়ি আছে তাদের সেটA, যাদের গাড়ি আছে তাদের সেটBধরুন। আবার যাদের বাড়ি নাই তাদের সেট A', যাদের গাড়ি নাই তাদের সেট B'। ধরুন তাহলে যাদের বাড়ি আছে গাড়ি নাই তাদের সেট $A \cap B'$; যাদের গাড়ি আছে বাড়ি নাই তাদের সেট $A' \cap B$; যাদের বাড়ি-গাড়ি কোনোটাই নাই তাদের সেট $A' \cap B'$; যাদের বাড়ি এবং গাড়ি উভয়ই আছে তাদের সেট $A \cap B$। এই চারটি সেট পরস্পর নিশ্ছেদ এবং তাদের সংযোগ সেট $A \cup B$। তথ্য সারণি অনুযায়ী $A \cap B'$, $A' \cap B$, $A' \cap B'$, $A \cup B$ সেটগুলোর উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে 25, 20, 45, 100.

সুতরাং $A \cap B$ সেটের উপাদান সংখ্যা = 100 – (25 + 20 + 45) = 100 – 90 = 10

(i) বাড়ি থাকা শর্তে গাড়ি থাকার সম্ভাবনা $P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{10}{100} \div \frac{35}{100} = \frac{10}{35} = 0.28$ (প্রায়)

(ii) গাড়ি থাকা শর্তে বাড়ি থাকার সম্ভাবনা$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{10}{100} \div \frac{30}{100} = \frac{10}{30} = 0.33$

মন্তব্য: সারণির তথ্যানুসারে বাড়ি আছে এমন লোকের গাড়ি থাকার সম্ভাব্যতা 28% এবং গাড়ি আছে এমন লোকের বাড়ি থাকার সম্ভাব্যতা 33%.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৭

1. 10থেকে 30 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যে কোনো একটিকে ইচ্ছা মতো নিলে সেই সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 5-এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।
2. একটি বাক্সে সমআকৃতির 10টি লাল ও 5টি কালো বল আছে। আর একটি অনুরূপ বাক্সে 12টি সমআকৃতির লাল বল আছে। একটি বাক্স লটারি করে নির্বাচন করা হলো এবং সেটা থেকে একটি বল তোলা হলো। যদি বলটি লাল হয় তাহলে প্রথম বাক্সটি যে নির্বাচিত হয়েছে তার সম্ভাবনা কত, নির্ণয় করুন।

3. একটি ব্যাগে 1টি টাকা ও 3টি পয়সা, দ্বিতীয় ব্যাগে 2টি টাকা ও 4টি পয়সা এবং তৃতীয় ব্যাগে 3টি টাকা ও 1টি পয়সা আছে। লটারির মাধ্যমে একটি ব্যাগ বাছাই করে একটি মুদ্রা উত্তোলন করলে সেটি টাকা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।
4. দুইটি বাক্সের প্রথমটিতে 4টি সাদা ও 3টি লাল এবং দ্বিতীয়টিতে 3টি সাদা ও 7টি লাল বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি বাক্স নির্বাচন করা হলো। ঐ বাক্স হতে একটি বল টানা হলে, বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।
5. কোনো জরিপে দেখা গেল 80% লোক ইত্তেফাক পড়ে, 70% লোক জনকণ্ঠ পড়ে এবং 60% লোক উভয় পত্রিকা পড়ে। নিরপেক্ষভাবে বাছাই করলে একজন লোকের ইত্তেফাক অথবা জনকণ্ঠ পড়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।
6. কোনো ব্যাগে 7টি লাল ও 5টি সাদা বল আছে। নিরপেক্ষভাবে 4টি বল তোলা হলো। এদের মধ্যে 2টি লাল ও 2টি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত, নির্ণয় করুন।

পাঠ ১০.৮ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- শ্রেণিকৃত ও অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	শ্রেণিকৃত তথ্য, অশ্রেণিকৃত তথ্য

মূলপাঠ

শ্রেণিকৃত ও অশ্রেণিকৃত তথ্যের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয়

সমস্যা নং - ১০.১	**তারিখ:**

সমস্যা:নিচের ছকে ঢাকা শহরের একজন রিকশাওয়ালা ও নবাবগঞ্জ গ্রামের একজন রিকশাওয়ালার 7 দিনের আয়ের তথ্য দেওয়া হলো:

বার	শনি	রবি	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র
ঢাকা	250	350	250	300	290	325	150
নবাবগঞ্জ	200	600	150	175	500	200	100

তাদের আয়ের পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন এবং কোন স্থানের আয় বেশি স্থিতিশীল তা ব্যাখ্যা করুন।

সমাধান: তত্ত্ব: যদি n সংখ্যক উপাত্ত $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ -এর গাণিতিক গড় $\bar{x}$ হয়,

তবে তাদের পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ এবং ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$

উপকরণ: সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর, পেনসিল, বড় স্কেল, ইরেজার, সাদা কাগজ, কলম ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি: 1. মনে করুন, দৈনিক আয় x_i এবং 7 দিনের আয়ের গড় $\bar{x}$ ।

2. উভয় এলাকার জন্য $\sum x_i$ এবং $\bar{x}$ নির্ণয় করুন।

3. প্রতিদিনের জন্য $x_i - \bar{x}$ নির্ণয় করুন এবং $(x_i - \bar{x})^2$ নির্ণয় করুন।

4. প্রাপ্ত মানগুলো ছকে সাজান।

5.সূত্র ব্যবহার করে σও σ^2নির্ণয় করুন।

গণনা তালিকা:

বার	ঢাকা			নবাবগঞ্জ		
	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
শনি	250	–24	576	200	–75	5625
রবি	350	76	5776	600	325	105625
সোম	250	–24	576	150	–125	15625
মঙ্গল	300	26	676	175	–100	10000
বুধ	290	16	256	500	225	50625
বৃহস্পতি	325	51	2601	200	–75	5625
শুক্র	150	–124	15376	100	–175	30625
মোট	1915		25837	1925		223750

হিসাব: ঢাকার ক্ষেত্রে গড় আয়, $\bar{x} = \frac{1915}{7} = 273.57 \approx 274$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{25837}{7}} = \sqrt{3691} = 60.75$

ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = 3691$

নবাবগঞ্জের ক্ষেত্রে, গড় আয়, $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1925}{7} = 275$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{223750}{7}} = \sqrt{31964} = 178.79$

ও ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = 31964$

মন্তব্য: ঢাকা ও নবাবগঞ্জের গড় আয় প্রায় সমান কিন্তু ঢাকার আয়ের পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক কম বলে ঢাকার আয় বেশি স্থিতিশীল।

সমস্যা নং - ১০.২	**তারিখ:**

সমস্যা: কোনো কারখানায় কর্মচারীদের আয়ের নিম্নোক্ত তথ্য হতে গড় ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

দৈনিক আয়	50–100	100–150	150–200	200–250	250–300	300–350
কর্মচারী সংখ্যা	5	10	15	20	10	5

সমাধান: তত্ত্ব: যদি দৈনিক আয় $= x$, কর্মচারী সংখ্যা $= f$, মূল a ও মাপনী c হলে, $u = \frac{x-a}{c}$

সুতরাংগড় আয় $= a + \frac{\sum fu}{n} \times c$

এবংপরিমিত ব্যবধান $= c\sqrt{\frac{\sum fu^2}{n} - \left(\frac{\sum fu}{n}\right)^2}$; যখন, $n = \sum f$.

কার্যপদ্ধতি: 1.মূল $a = 225$ধরুন এবং মাপনী $c = 50$।
2.প্রাপ্ত তথ্য হতে নিচের গণনা তালিকা প্রস্তুত করুন।
3.সূত্রে মান বসিয়ে গড় আয় নির্ণয় করুন।
4.পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

গণনা তালিকা:

আয়ের শ্রেণি	কর্মচারীর সংখ্যা(f)	শ্রেণি মধ্যবিন্দু(x)	$u = \frac{x-a}{c}$	fu	fu^2
50–100	5	75	–3	–15	45
100–150	10	125	–2	–20	40
150–200	15	175	–1	–15	15
200–250	20	225	0	0	0
250–300	10	275	1	10	10
300–350	5	325	2	10	20
$c = 50$	$n = 65$			$\sum fu = -30$	$\sum fu^2 = 130$

হিসাব ও ফলাফল:

গড় আয় $= a + \frac{\sum fu}{n} \times c = 225 + \frac{-30}{65} \times 50 = 201.92$

পরিমিত ব্যবধান $= c\sqrt{\frac{fu^2}{n} - \left(\frac{\sum fu}{n}\right)^2} = 50\sqrt{\frac{130}{65} - \left(\frac{-30}{65}\right)^2} = 50\sqrt{2 - 0.2130} = 66.84$

বিভিন্ন ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয়

সমস্যা নং - ১০.৩	**তারিখ:**

সমস্যা: 52 খানা তাসের একটি প্যাকেট হতে নিরপেক্ষভাবে একটি তাস নেওয়া হলো। পরীক্ষণটির নমুনা ক্ষেত্র প্রস্তুত করুন এবং নিচের সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় করুন।
(i) টেক্কা অথবা রাজা পাবার সম্ভাবনা এবং (ii) রুইতন অথবা টেক্কা পাবার সম্ভাবনা।

সমাধান: তত্ত্ব: কোনো পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র S-এর অধীনে দুইটি ঘটনা A ও B হলে,
(i) A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হলে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
এবং (ii) A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হলে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
উপকরণ: স্কেল, পেন্সিল, কলম, ইরেজার ইত্যাদি।
কার্যপদ্ধতি:1.তাসের প্যাকেটে52 খানা তাস চার প্রকারের যথা: হরতন, ইস্কাবন, রুইতন ও চিরাতন'কে যথাক্রমে H, I, R, C দ্বারা সূচিত করুন।
2. প্রত্যেক প্রকার তাসের 13টি তাস যথাক্রমে- 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (গালাম), Q (বিবি), K (রাজা) এবং A (টেক্কা) দ্বারা সূচিত হয়।
3.এদের নমুনা ক্ষেত্র S গঠন করুন।
4.টেক্কা পাবার ঘটনা A এবং রাজা পাবার ঘটনা K হলে, A ও K পরস্পর বর্জনশীল।
$\therefore$ $P(A \cup K) = P(A) + P(K)$সূত্র ব্যবহার করে (i)-এর মান নির্ণয় করুন।

5.যেহেতু রুইতনের একটি টেক্কা আছে তাই রুইতন পাবার ঘটনা R ও টেক্কা পাবার ঘটনা A হলে, A ও R পরস্পর অবর্জনশীল।∴ $P(A\cup R) = P(A) + P(R) - P(A\cap R)$সূত্র ব্যবহার করে (ii)−এর মান নির্ণয় করুন।

নমুনা ক্ষেত্রঃ

প্রকার	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*J*	*Q*	*K*	*A*
H	*H*2	*H*3	*H*4	*H*5	*H*6	*H*7	*H*8	*H*9	*H*10	*HJ*	*HQ*	*HK*	*HA*
I	*I*2	*I*3	*I*4	*I*5	*I*6	*I*7	*I*8	*I*9	*I*10	*IJ*	*IQ*	*IK*	*IA*
R	*R*2	*R*3	*R*4	*R*5	*R*6	*R*7	*R*8	*R*9	*R*10	*RJ*	*RQ*	*RK*	*RA*
C	*C*2	*C*3	*C*4	*C*5	*C*6	*C*7	*C*8	*C*9	*C*10	*CJ*	*CQ*	*CK*	*CA*

সুতরাং মোট ফলাফল সংখ্যা = 52

হিসাব ও গণনাঃ

(i)P(টেক্কা অথবা রাজা) $= P(A\cup K) = P(A) + P(K) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

(ii)P(রুইতন অথবা টেক্কা) $= P(R\cup A) = P(R) + P(A) - P(R\cap A) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

সমস্যা নং - ১০.৪	**তারিখঃ**

সমস্যাঃ একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলো। সম্ভাবনা Tree-এর সাহায্যে পরীক্ষণটির নমুনা ক্ষেত্র প্রস্তুত করুন এবং নিচের সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় করুন।

(i) হেডের সংখ্যা বেশি হবার সম্ভাবনা এবং(ii) কমপক্ষে একটি হেড পাবার সম্ভাবনা।

তত্ত্বঃ যদি A ও B পরস্পর অনির্ভরশীল ঘটনা হয়, তবে $P(A$ এবং $B) = P(A)\times P(B)$ ।একে সম্ভাবনার গুণন সূত্র বলে।

মনে করুন,১ম বার মুদ্রা নিক্ষেপে হেডঃ H_1এবং টেইলঃ T_1
২য় বার মুদ্রা নিক্ষেপে হেডঃ H_2এবং টেইলঃ T_2
৩য় বার মুদ্রা নিক্ষেপে হেডঃ H_3এবং টেইলঃ T_3

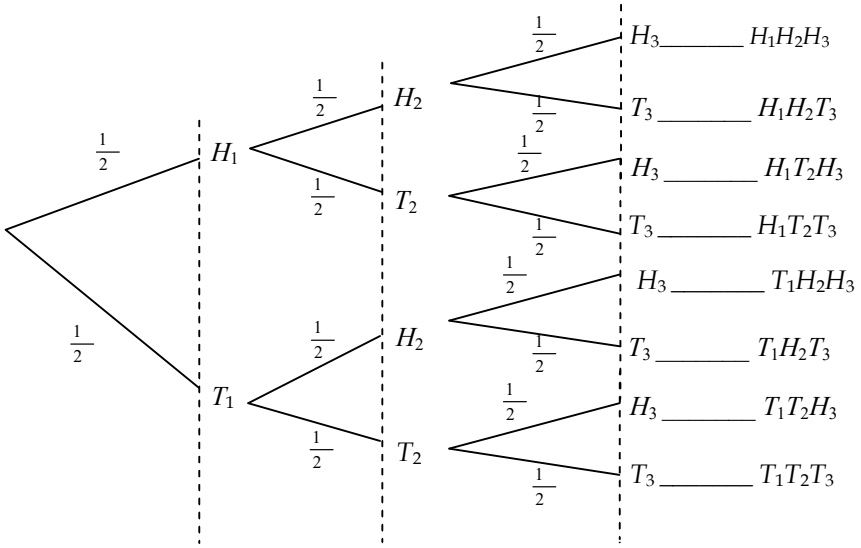
উপকরণঃ স্কেল, পেন্সিল, কলম, ইরেজার ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতিঃ1.সম্ভাবনা Tree গঠন করুন।

2.সম্ভাবনা Tree হতে নমুনা জগৎ S গঠন করুন।

3.সম্ভাবনা Tree-তে সম্ভাবনার মান বসান।

4.সম্ভাবনার গুণন সূত্র ব্যবহার করে (i) ও (ii)-এর ফলাফল নির্ণয় করুন।



ফলাফল ও হিসাবঃ

নমুনা জগৎ,$S = \{H_1H_2H_3,\ H_1H_2T_3,\ H_1T_2H_3,\ H_1T_2,T_3,\ T_1H_2H_3,\ T_1H_2,T_3,\ T_1T_2H_3,\ T_1T_2T_3\}$

(i) হেডের সংখ্যা বেশি হওয়ার সম্ভাবনা

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

(ii) $P(T_1T_2T_3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$\therefore$ কমপক্ষে 1টি হেড পাবার সম্ভাবনা $= 1 - P(T_1T_2T_3) = 1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$

সারসংক্ষেপ

- কোনো পরীক্ষণে নমুনা ক্ষেত্রের একটি উপসেট, যা কোনো নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সেটকে ঘটনা বলে।
- যদি Aও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হয়, তবে $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
- যদি Aও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হয়, তবে $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
- Aও B নির্ভরশীল ঘটনা হলে, $P(A\cap B) = P(A)\,P\left(\frac{B}{A}\right)$ এবং $P(A\cap B) = P(B)\,P\left(\frac{A}{B}\right)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৮

মৌখিক প্রশ্ন

1. সম্ভাবনার গাণিতিক পরিমাপ কী?
2. ঘটনা (Event) বলতে কী বুঝায়?
3. ঘটনাজগত বা নমুনাক্ষেত্র (Sample Space) কী?
4. সমসম্ভাব্য ঘটনাবলী (Equally Likely Events) বলতে কী বুঝায়?
5. পরস্পর বিচ্ছিন্ন বা বর্জনশীল ঘটনাবলী (Mutually Exclusive Events) কী?
6. নির্ভরশীল বা অধীন ঘটনা (Dependent Events) বলতে কী বুঝায়?

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1 - 25):

1. অবিন্যস্ত উপাত্ত –10, –8, 1, 11, 19 এর পরিসর কত?
   (ক) 1 (খ) 2.6 (গ) 24 (ঘ) 29
2. অবিন্যস্ত উপাত্ত 0, 3, 7, 17, 30, x, 51, 70 এর আন্তঃচতুর্থক পরিসর 41.5 হলে, x -এর মান কত হবে?

(ক) 41.5 (খ) 42 (গ) 46.5 (ঘ) 48.5

3. 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7 এর আদর্শ বিচ্যুতি কত?
(ক) 49 (খ) 1 (গ) 0 (ঘ) 7

4. যদি $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$ এর গড় ও আদর্শ বিচ্যুতি যথাক্রমে -6 ও 4.3 হয় তাহলে $x_1 + 3, x_2 + 3, x_3 + 3, ..., x_7 + 3$ এর গড় ও আদর্শ বিচ্যুতি কত হবে?
(ক) -3ও 4.3 (খ) -3ও 7.3 (গ) -6 ও 4.3 (ঘ) -6 ও 7.3

5. একটি নিরপেক্ষ মুদ্রাকে দুইবার নিক্ষেপ করা হলে কমপক্ষে 1টি Hআসার সম্ভাবনা কত?
(ক) $\frac{1}{4}$ (খ) $\frac{2}{4}$ (গ) $\frac{3}{4}$ (ঘ) $\frac{4}{4}$

6. যদি $P(B\backslash A) = 0.2$ এবং $P(A\cap B) = 0.25$ হয়, তাহলে $P(A)$-এর মান কত হবে?
(ক) 0.05 (খ) 0.8 (গ) 0.95 (ঘ) 0.75

7. একজন বিক্রেতা প্রত্যেক খরিদ্দারের নিকট শতকরা 70 ভাগ সুযোগে দ্রব্য বিক্রি করে। পর্যায়ক্রমিক খরিদ্দারের আচরণ পারস্পরিক প্রভাবমুক্ত। যদি A এবং B দুইজন খরিদ্দার দোকানে প্রবেশ করে, তাহলে A অথবা B এর নিকট বিক্রেতার দ্রব্য বিক্রয়ের সম্ভাবনা কত?
(ক) 0.50 (খ) 0.72 (গ) 0.91 (ঘ) 0.93

8. একটি নিরপেক্ষ মুদ্রাকে পরপর তিনবার টস করা হলে পর্যায়ক্রমে হেড ও টেইল পাবার সম্ভাবনা কত হবে?
(ক) $\frac{1}{4}$ (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) $\frac{1}{8}$ (ঘ) এদের একটিও না

9. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে যদি জোড় সংখ্যা উঠে তাহলে সংখ্যাটি মৌলিক হবার সম্ভাবনা কত?
(ক) $\frac{1}{6}$ (খ) $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) এদের একটিও না

10. 5, 6, 7, 6 সংখ্যাগুলোর ভেদাঙ্ক কত?
(ক) 1 (খ) 0.5 (গ) 2 (ঘ) কোনটি নয়

11. প্রথম 20টি স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাঙ্ক কত?
(ক) 30 (খ) 32.2 (গ) 33.25 (ঘ) কোনটি নয়

12. প্রথম 7টি স্বাভাবিক সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান কত?
(ক) 2 (খ) 2.5 (গ) 1.9 (ঘ) 3

13. 1 থেকে 20 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হতে একটি সংখ্যা খুশিমত নিলে সংখ্যাটি 3 এবং 5 এর গুণিতক হবার সম্ভাবনা কত?
(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{3}{10}$ (গ) $\frac{4}{5}$ (ঘ) $\frac{1}{20}$

14. একটি নিটাল মুদ্রা ও একটি নিটাল ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। একই সঙ্গে মুদ্রাটির হেড (H) ও ছক্কাটির জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত?
(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{1}{4}$ (ঘ) $\frac{1}{5}$

15. 40 হতে 50 সংখ্যাগুলো থেকে দৈবচয়নে একটি সংখ্যা নেয়া হলো। সংখ্যাটি মৌলিক না হওয়ার সম্ভাবনা কত?
(ক) $\frac{8}{11}$ (খ) $\frac{5}{11}$ (গ) $\frac{3}{11}$ (ঘ) $\frac{1}{11}$

16. 2 থেকে 40 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যে কোনো একটি পূর্ণসংখ্যা দৈবচয়ন করলে সংখ্যাটি মৌলিক হবার সম্ভাবনা কত?
(ক) $\frac{11}{39}$ (খ) $\frac{4}{13}$ (গ) $\frac{1}{3}$ (ঘ) $\frac{11}{38}$

17. 30 থেকে 40 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যে কোনো একটি সংখ্যা দৈবচয়নে নিলে তা মৌলিক অথবা 5 এর গুণিতক হবার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{5}{11}$ (গ) $\frac{6}{11}$ (ঘ) $\frac{3}{5}$

18. একটি বাক্সে 10টি নীল এবং 15টি লাল মার্বেল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে একটি করে পর পর দুইটি মার্বেল উঠালে দুইটি একই রংয়ের মার্বেল হবার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{4}{5}$ (গ) $\frac{3}{20}$ (ঘ) $\frac{7}{20}$

19. 1 থেকে 99 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো হতে দৈবচয়নে একটি সংখ্যা নেয়া হলে সংখ্যাটি বর্গ সংখ্যা হবার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{11}$ (খ) $\frac{10}{99}$ (গ) $\frac{4}{33}$ (ঘ) $\frac{1}{10}$

20. এক প্যাকেট তাস থেকে একটি তাস দৈবভাবে নেয়া হলো। তাসটি হরতন বা চিরতন হবার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{3}{4}$ (গ) $\frac{4}{13}$ (ঘ) $\frac{1}{4}$

21. একটি বাক্সে 10টি নীল এবং 15টি সবুজ মার্বেল আছে। দৈবচয়নে পর পর দুইটি মার্বেল বাক্স থেকে তোলা হলো। মার্বেল দুইটি ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{2}{5}$ (খ) $\frac{3}{5}$ (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{1}{4}$

22. 1 থেকে 21 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যে কোনো একটি দৈবচয়নের মাধ্যমে নিলে সে সংখ্যাটি 3 অথবা 7 এর গুণিতক হবার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{8}{21}$ (খ) $\frac{3}{7}$ (গ) $\frac{10}{21}$ (ঘ) $\frac{11}{21}$

23. 1, 0, 2 দ্বারা তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যাগুলো হতে দৈবচয়ন পদ্ধতিতে একটি সংখ্যা নেয়া হলে সংখ্যাটি 10 দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{2}{9}$ (ঘ) $\frac{1}{6}$

24. দুইটি ছক্কা একই সঙ্গে নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত বিন্দুর সমষ্টি 7 হবার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{6}$ (খ) $\frac{1}{36}$ (গ) $\frac{5}{36}$ (ঘ) $\frac{7}{36}$

25. $A = \{2, 3, 4, 7, 9, 10\}$; $B = \{3, 6, 9, 12\}$ । A সেট হতে একটি সংখ্যা দৈব পদ্ধতিতে নিলে সংখ্যাটি $A \cap B$ তে থাকার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{1}{4}$ (ঘ) $\frac{2}{3}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

26. একটি তথ্যসারি নিম্নরূপ: 6, 10, 8, 12, 20, 25
    (ক) উপাত্ত বলতে কি বুঝায়?
    (খ) প্রদত্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় এবং মধ্যমা নির্ণয় করুন।
    (গ) উদ্দীপকের প্রদত্ত তথ্যসারির পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন।

27. নিচে একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেওয়া হলো:
    x_i : 3, 5, 7, 8, 10, 12, 15; f_i : 2, 4, 6, 10, 8, 6, 4
    (ক) পরিমিত ব্যবধানের সংজ্ঞা লিখুন।

(খ) উদ্দীপকের গণসংখ্যা নিবেশনের গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

(গ) উদ্দীপকের গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

28. একটি তথ্যসারি দেয়া হলো: 10, –6, 0, 8, 2, 9, 3, 7, 12

(ক) ভেদাঙ্কের সংজ্ঞা দিন।

(খ) প্রদত্ত তথ্যসারির মধ্যমা নির্ণয় করুন।

(গ) উদ্দীপকের তথ্যসারির ভেদাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন।

29. নিচে একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেয়া হলো:

শ্রেণিব্যাপ্তি	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
ছাত্রের সংখ্যা	18	30	46	28	20	12	6

(ক) নিবেশনটির গড় নির্ণয় করুন।

(খ) পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

(গ) গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

30. নিম্নে একটি গণসংখ্যা নিবেশন দেওয়া হলো:

মান x_i	10	13	25	30	37	42	45
গণসংখ্যা f_i	3	7	8	15	10	5	2

(ক) প্রথম 7টি স্বাভাবিক সংখ্যার গড় নির্ণয় করুন।

(খ) প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশনের গড় ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

(গ) গণসংখ্যা নিবেশনের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

31. দ্বাদশ শ্রেণির পঞ্চাশ জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর নিচে দেয়া হলো:

প্রাপ্ত নম্বর	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	মোট
ছাত্রের সংখ্যা	4	6	9	14	11	6	50

(ক) কোনো তথ্যের পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক বলতে কি বুঝায়?

(খ) গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় করুন।

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত নম্বরের পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

32 তামিম ও সাকিব দুইজন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের 10টি ইনিংসের স্কোর নিচে দেওয়া হলো:

তামিম	112	43	0	29	73	100	116	6	0	5
সাকিব	13	23	16	28	19	12	21	39	29	20

(ক) পরিমিত ব্যবধান বলতে কি বুঝায়? পরিমিত ব্যবধানের দুইটি ব্যবহার লিখুন।

(খ) সাকিবের রানের পরিমিত ব্যবধান ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন।

(গ) তামিমের রানের পরিমিত ব্যবধান ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন। কার ব্যাটিং দক্ষতা বেশি?

33. 100 জন শ্রমিকের দৈনিক মজুরী ও গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো:

দৈনিক মজুরী (টাকা)	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80
গণসংখ্যা f	7	14	22	36	15	6

(ক) গণসংখ্যা সারণি বলতে কি বুঝায়?

(খ) প্রদত্ত সারণি থেকে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করুন।

(গ) পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

34. একটি গণসংখ্যা সারণি দেওয়া হলো:

মাসিক আয় (হাজারে) টাকা	5–9	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34
পরিবার সংখ্যা f	15	30	55	17	10	3

(ক) উক্ত সারণি হতে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করুন।

(খ) উক্ত সারণি হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

(গ) উক্ত সারণি হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

35. একটি পাত্রে 8টি লাল বল, 4টি কালো বল এবং 3টি সাদা বল আছে। দৈবভাবে 3টি বল নেয়া হলো।
(ক) A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে দেখান যে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(খ) উদ্দীপকে উত্তোলিত 3টি বলের মধ্যে 2টি লাল বল হবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।
(গ) উত্তোলিত 3টি বলের মধ্যে কমপক্ষে 2টি লাল বল হবার সম্ভাবনা কত? 3টি বিভিন্ন রংয়ের বল হবার সম্ভাবনা কত?।

36. একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলো:
(ক) নমুনা বিন্দু ও নমুনা ক্ষেত্রের সংজ্ঞা লিখুন।
(খ) উদ্দীপক অনুসারে Probability Tree Diagram অঙ্কন করে নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি করুন।
(গ) উল্লিখিত পরীক্ষায় নিচের ঘটনাগুলো ঘটার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন:
(i) একটি হেড (H) পাওয়া, (ii) কমপক্ষে একটি টেল T পাওয়া

37. কোনো কলেজে একটি পরীক্ষায় 25% জন ছাত্র গণিতে ফেল করেছে, 15% জন রসায়নে এবং 10% জন ছাত্র উভয় বিষয়ে ফেল করেছে। দৈবচয়নে একজন ছাত্র নির্বাচন করা হলো:
(ক) দুইটি অধীন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার গুণন সূত্র বর্ণনা করুন।
(খ) ছাত্রটি রসায়নে ফেল করলে গণিতে ফেল করার সম্ভাবনা কত? ছাত্রটি যদি গণিতে ফেল করে থাকে তবে তার রসায়নে ফেল হবার সম্ভাবনা কত?
(গ) ছাত্রটির গণিত অথবা রসায়নে ফেল করার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। ছাত্রটির যে কোনো একটি বিষয়ে পাশ করার সম্ভাবনা কত?

38. সিয়াম ও সাব্বির দুইটি শূন্য পদের চাকুরির জন্য পরীক্ষা দেয়। সিয়ামের ও সাব্বিরের সিলেকশন পাবার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{7}$ ও $\frac{1}{5}$.
(ক) সিয়াম ও সাব্বির উভয়ই চাকুরি পাবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।
(খ) যে কোনো একজনের চাকুরি পাবার সম্ভাবনা কত?
(গ) উভয়ে চাকুরি না পাবার সম্ভাবনা কত? অন্তঃত একজনের চাকুরি পাবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.১

1.(i) 12,(ii) 42,(iii) 10 2.10.6, 3.1 3.6.6 4.2.2 5.7.7, 8.76

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.২

1.29. 475 2.1250 (প্রায়) 3.10 (প্রায়) 4.5482.93

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৩

1. $\frac{13}{22}$ 2. $\frac{132}{13}$ 3. (i) $\frac{10}{21}$, (ii) $\frac{11}{21}$ 4. $\frac{33}{40}$ 5. $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৪

1. $\frac{5}{42}$ 2. $\frac{1}{5525}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. (i) $\frac{1}{969}$, (ii) $\frac{3}{76}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৫

1. $\frac{4}{17}$ 2. (i) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ (ii) 0.8 3. $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{15}$ 4. $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}$
5. $\frac{1}{64}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৬

1. (i) $\frac{11}{16}$, (ii) $\frac{2}{57}$ 2. $\frac{275}{504}$ 3. $\frac{5}{7}$ 4. $\frac{19}{27}$ 5. $\frac{3}{4}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৭

1. $\frac{11}{21}$ 2. $\frac{5}{12}$ 3. $\frac{4}{9}$ 4. $\frac{4}{35}$ 5. $\frac{9}{10}$ 6. $\frac{14}{33}$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1.ঘ 2. খ 3. গ 4. ক 5.গ 6. খ 7. গ 8. ক 9. ক 10. খ 11. গ 12. ক 13. ঘ
14. গ 15. ক 16. খ 17. খ 18. ক 19. ক 20.ক 21. গ 22. খ 23. ক 24. ক 25.খ

সৃজনশীল প্রশ্ন

26.(খ) $\bar{x} = 13.5, 11$ (গ) 6.77, 45.91
27. (খ)গড় ব্যবধান = 2.5 (গ)$\sigma = 3.06$
28. (খ)7 (গ) 15.77, 79.42%

29.(ক) $\bar{x} = 19.44$, (খ)$\sigma = 7.8$, (গ)গড় ব্যবধান= 6.45, 33.18%
30. (ক)4 (খ) 27.44%, (গ)$\sigma = 10$

31.(খ) $\bar{x} = 43$ (গ)$\sigma = 14.28$
32. (খ)$\sigma = 7.78$, বিভেদাঙ্ক = 35.36%
(গ)$\sigma = 45.44$, বিভেদাঙ্ক = 93.88% (সাকিব-এর ব্যাটিং দক্ষতা বেশি)।

33. (খ) $\bar{x} = 65.3$, (গ)$\sigma = 6.33$

34. (ক) $\bar{x} = 16.46$, (খ)গড় ব্যবধান= 4.24, (গ)$\sigma = 5.76$

35. (খ) $\frac{28}{65}$, (গ) $\frac{36}{65}, \frac{96}{455}$

36. (গ) (i) $\frac{3}{8}$, (ii) $\frac{7}{8}$

37. (ক) $\frac{2}{3}$, (খ) $\frac{2}{5}$, (গ) $\frac{3}{10}, \frac{7}{10}$

38. (ক) $\frac{1}{33}$, (খ) $\frac{2}{7}$, (গ) $\frac{24}{35}, \frac{11}{35}$