স্থিতিবিদ্যা
(Statics)

ভূমিকা: *পৃথিবী পৃষ্ঠে আমরা আমাদেও চারিদিকে নানা ধরনের বস্তু দেখতে পাই যার কোনটি স্থির আবার কোনটি গতিশীল।* স্থির এবং গতিশীল এই দুইটি অবস্থাকে যথাক্রমে বস্তুর **জড় অবস্থা এবং গতিশীল অবস্থা** বলা হয়। *গণিত শাস্ত্রের যে শাখায় বস্তুর স্থির অবস্থা বা গতিশীল অবস্থা এবং তাদের বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করা হয়তা কেবল বিদ্যা বা বলবিজ্ঞান (Mechanics) বলা হয়। বল বিদ্যা আবার দুইটি শাখায় বিভক্ত, একটি স্থিতিবিদ্যা (Statics) এবং অপরটি গতিবিদ্যা (Dynamics) । বর্তমান ইউনিটে স্থিতিবিদ্যা নিয়ে আলোচনা করা হবে।*

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- বলবিদ্যার প্রাথমিক ধারণা ও বলের ক্রিয়াবিন্দুর স্থানান্তরবিধি বর্ণনা করতে পারবেন,
- কোনো কণার উপর কার্যরত দুইটি বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন,
- নির্দিষ্ট দিকে একটি বলের অংশক নির্ণয় করতে পারবেন,
- লম্বাংশকের সাহায্যে কোনো কণার উপর কার্যরত সমতলীয় বলজোটের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন,
- কোনো কণার উপর কার্যরত বলজোটের সাম্যাবস্থা কী বর্ণনা করতে পারবেন,
- কোনো কণার উপর কার্যরত সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন,
- বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্র ও লামির সূত্র বর্ণনা, প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- জড়বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন,
- লেখের সাহায্যে একাধিক বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২৫ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৭.১ বলবিদ্যার প্রাথমিক ধারণা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বলবিদ্যা সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- স্থিতিবিদ্যা ও গতিবিদ্যা সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,

মুখ্য শব্দ	বল, বলবিদ্যা, স্থিতিবিদ্যা, গতিবিদ্যা, ক্রিয়ারেখা, প্রয়োগবিন্দু

মূলপাঠ

বলবিদ্যারপ্রাথমিকধারণা(Elementary idea of Mechanics)

সময়েরপরিবর্তনেরসাথেপারিপার্শ্বিকেরসাপেক্ষেযদিকোনোবস্তুরঅবস্থানেরপরিবর্তননাঘটে, তখনঐবস্তুটিকে**স্থিরবস্তু**বলাহয় ।আবারযদিসময়েরপরিবর্তনেরসাথেপারিপার্শ্বিকেরসাপেক্ষেবস্তুটিরঅবস্থানেরপরিবর্তনঘটেকিংবা ঘটতে থাকে তখনঐবস্তুটিকে**গতিশীলবস্তু**বলাহয় ।কোনোবস্তুস্থিরবাগতিশীলযেকোনোএকঅবস্থায়থাকতেপারে ।স্থিরএবংগতিশীলএইদুইটি অবস্থাকেবস্তুরজড়**অবস্থা এবং গতিশীল**অবস্থা বলাহয় ।

বল(Force):

বলএমনএকটিবাহ্যিকক্রিয়াযাকোনোস্থিরবস্তুরউপরক্রিয়াকরেবস্তুটিকেগতিশীলকরেকিংবাকরতেচায়অথবাগতিশীলবস্তুরউপরি ক্রিয়াকরেবস্তুটিরগতিরপরিবর্তনকরেকিংবাপরিবর্তনঘটাতেচায় ।

বলবিদ্যা(Mechanics):

বলবিদ্যামূলতঃগণিতশাস্ত্রেরএকটিশাখা ।গণিতশাস্ত্রেরযেশাখায়কোনোবস্তুরস্থিতিশীলকিংবাগতিশীলঅবস্থানিয়েআলোচনাকরাহ য়তাকে**বলবিদ্যা**বলে ।বলবিদ্যাকেপ্রধানতঃদুইভাগেভাগকরাযায় ।যথা: (ক) স্থিতিবিদ্যা(Statics) (খ) গতিবিদ্যা(Dynamics) ।

(ক)

স্থিতিবিদ্যা:বলবিদ্যারযেঅংশেকোনোকণাবাজড়বস্তুরউপরএকবাএকাধিকবলেরক্রিয়ায়শুধুমাত্রতারস্থিতিশীলঅবস্থাআলোচনাক রাহয়তাকে**স্থিতিবিদ্যা**বলে ।এইউনিটেস্থিতিবিদ্যাসম্পর্কেআলোচনাকরাহয়েছে ।মূলতঃএশাখায়বলেরপ্রভাবেস্থিরবস্তুরস্থিরঅবস্থা রআলোচনাকরাহয়েছে ।

(খ)গতিবিদ্যা:

বলবিদ্যারযেঅংশেকোনোকণাবাজড়বস্তুরউপরএকবাএকাধিকবলেরক্রিয়ায়শুধুমাত্রতারগতিশীলঅবস্থাআলোচনাকরাযায়তাকে **গতিবিদ্যা**বলে ।এপাঠ্যপুস্তকেরঅষ্টমইউনিটেগতিবিদ্যাসম্পর্কেআলোচনাকরাহয়েছে ।গতিবিদ্যাকেআবারদুইভাগেভাগকরাহয়েছ ।যথা : (i) সূতিবিদ্যা (kinematies) বা বিশুদ্ধ গতিবিজ্ঞান, (ii) বল গতিবিজ্ঞান(kineties)

(i) সূতিবিদ্যা: গতিবিদ্যার যে অংশে বস্তুর বিভিন্ন প্রকার গতি ও গতির ফলে অবস্থানের পরিবর্তন আলোচনা করা হয় তাকে সূতিবিদ্যা বলে। সূতিবিদ্যায় মূলত : কোনো কারণ অনুসন্ধান করা হয় না অর্থাৎ বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলকে অগ্রাহ্য করা হয়।

(ii)বল গতিবিজ্ঞান: গতিবিদ্যার যে অংশে বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের সম্পর্ক ও বল প্রয়োগের ফলে উৎপন্ন গতি নিয়ে আলোচনা করা হয়, তাকে বল গতিবিজ্ঞান বলে।

বস্তুওঅনঢ়বস্তু(Body and Rigid body):পদার্থেরযেকোনোসীমাবদ্ধঅংশকেবস্তুবলে ।অপরপক্ষেযখনকোনোবস্তুরবিভিন্নঅংশেরউপরযেকোনোবলপ্রয়োগকরাহয়

তখনযদিবস্তুরআয়তনেরকোনোপরিবর্তননাহয়তাহলেতাকেঅনঢ়বস্তুবলে ।অনঢ়বস্তুরদুইটিকণারদূরত্বসর্বদাইএকইথাকে ।স্থিতি বদ্যারআলোচিতসকলবস্তুঅনঢ়বস্তুবলেগণ্যকরাযায় ।

বলেরসূচনা(Representation of force):
কোনোবলকেসম্পূর্ণভাবেজানতেহলেএরচারটিবিশেষগুণবাবৈশিষ্ট্যসম্পর্কেধারণাথাকাপ্রয়োজন ।যেমন:

(i)প্রয়োগবিন্দু:বলযেবিন্দুতেক্রিয়াকরে ।
(ii)ক্রিয়ারদিক:বলযেদিকেকাজকরে ।
(iii)ক্রিয়ারেখা:বলযেসরলরেখাবরাবরক্রিয়াকরে ।
(iv)বলেরমান:বলযেশক্তিতেক্রিয়াকরে তাকেই এক কথায় বলের মান বলা হয় ।

বলএকটিভেক্টররাশি ।কোনোকণারউপরযেযেবিন্দুতেবলক্রিয়াশীলহয়তাকে**প্রয়োগবিন্দু**বলে ।কোনোএকটিবলOবিন্দু হতেAএরদিকেক্রিয়ারতহলেOবিন্দুটিকেপ্রয়োগবিন্দুবলাহয়এবংOহতেA-

এরদিকবরাবররেখাকেবলের**ক্রিয়ারদিক**বলাহয়এবংতা$\overrightarrow{OA}$ দ্বারাসূচিতকরাহয় ।আবার$\left|\overrightarrow{OA}\right|$ রেখাংশবা$\overrightarrow{OA}$

দ্বারাবলেরমানসূচিতহয় ।$\overrightarrow{AO}$ দ্বারাএখানেবলেরবিপরীতক্রিয়ারদিকনির্দেশকরে ।

সারসংক্ষেপ

- গণিত শাস্ত্রের যে শাখায় কোনো বস্তুর স্থিতিশীল কিংবা গতিশীল অবস্থা নিয়ে আলোচনা করা হয় তাকে **বলবিদ্যা** বলে। বলবিদ্যাকে প্রধানতঃ দুইভাগে ভাগ করা যায়। যথা: (ক) স্থিতিবিদ্যা (Statics) (খ) গতিবিদ্যা (Dynamics)।
- বলবিদ্যার যে অংশে কোনো কণা বা জড় বস্তুর উপর এক বা একাধিক বলের ক্রিয়ায় শুধুমাত্র তার স্থিতিশীল অবস্থা আলোচনা করা হয় তাকে **স্থিতিবিদ্যা** বলে।
- বলবিদ্যার যে অংশে কোনো কণা বা জড় বস্তুর উপর এক বা একাধিক বলের ক্রিয়ায় শুধুমাত্র তার গতিশীল অবস্থা আলোচনা করা যায় তাকে **গতিবিদ্যা** বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.১

1. বল বলতে কি বুঝায়? আলোচনা কর।
2. বলের বৈশিষ্টসমূহ ব্যাখ্যা করুন।

পাঠ ৭.২ বিভিন্ন প্রকারের বল

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন প্রকারের বল সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- বলের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	চাপ, টান, ঘর্ষণ, আকর্ষণ, বিকর্ষণ, ওজন, ক্রিয়া, প্রতিক্রিয়া

মূলপাঠ

বলেরপ্রকারভেদঃ মোটামুটিভাবেবলকেদুইভাগেভাগকরাযায়।যথা : (i) একধরনেরবলেরকাজহলোগতিসঞ্চারকরা; এটিসক্রিয়বল। যেমন:সচলবস্তুরটানবাঠেলা, পতনশীলবস্তুরওজন, চুম্বকপ্রভৃতিরআকর্ষণবাবিকর্ষণইত্যাদি। (ii) দ্বিতীয়ধরনেরবলপ্রত্যক্ষভাবেগতিউৎপাদনকরেনা, তারাকেবলগতিকেরোধবাপরিবর্তনকরতেসমর্থ হয়; যেমন: বাধা, ঘর্ষণপ্রভৃতিএইধরণেরবল।টেবিলেরউপরএকটিবইরাখলে, বই-এরওজনবইটিকেনিম্নদিকেগতিদিতেচায়, কিন্তুটেবিলেরপ্রতিক্রিয়াঐগতিকেবাধাদেয়।একটিদড়িরএকপ্রান্তহাতেধরেঅপরপ্রান্তেএকটিপ্রস্তরখণ্ডবেঁধেনিচেঝুলিয়েদিলে, তারভারবাওজননিচেরদিকেগতিসঞ্চারকরতেচায়,
কিন্তুদড়িরটানতাতেবাধাদেয়।মাটিতেএকটিবস্তুগড়ায়েদিলেমাটিরঘর্ষণপ্রথমেবস্তুটিরগতিহ্রাসকরবে,
শেষপর্যন্তঘর্ষণজনিতবাধাএরগতিকমাতেকমাতেতাকেএকেবারেথামিয়েদেয়।সাধারণভাবেতাদেরকোনোসক্রিয়অস্তিত্বনেই।তা ইএধরনেরবলকে**নিষ্ক্রিয়**বা**প্রতিক্রিয়া**বলবলাহয়।প্রধানতঃ, এইদ্বিতীয়শ্রেণীরবলেরআলোচনাইস্থিতিবিদ্যারমূখ্যবিষয়।

বলেরশ্রেণীবিভাগঃ

স্থিতিবিদ্যারআলোচনাকালেযেসমস্তবলেরসাথেআমাদেরপরিচয়ঘটেসেবলগুলোকেসাধারণতঃকয়েকটিরূপেভাগকরাযায়।যথা:

(i) চাপঃ দুইটি বস্তু পরপর সংস্পর্শে আসলে এদের সাধারণ স্পর্শবিন্দুতে যে বল সৃষ্টি হয় তাহাই চাপ। পাম্পের সাহায্যে ফুটবলে বাতাস ঢুকানো হলে, ফুটবলের ভিতর হতে চারিদিকে বাতাস চাপ প্রয়োগ করে। একটি রশির দুইপ্রান্তে দুইটি ভারি বস্তু একটি পুলির উপর দিয়ে ঝুলালে রশিটি পুলির উপর চাপ সৃষ্টি করে।

(ii) টান (Pull or tension):যে বল দ্বারা দৃশ্য মাধ্যমে একটি বস্তু অপর একটি বস্তুকে একসঙ্গে রাখতে চেষ্টা করে, তাকে **টান** বলে। যেমন: দড়ির দ্বারা কোনো বস্তুকে বেঁধে টানলে দড়ির মাধ্যমে যে বল প্রয়োগ করা হয় এটিই **টান।**
আবার দৃশ্য মাধ্যমে যে বল দ্বারা একটি বস্তু অপর একটি বস্তুকে দূরে সরিয়ে দেয় তাকে **ঘাত** (Thrust) বলে। যেমন: টেবিলের উপর রাখা একটি বইকে হাত দিয়ে ঠেলে দিলে হাতের মাধ্যমে যে বল প্রয়োগ করা হয় এটিই **ঘাত।**

(iii) ঘর্ষণ বল (Friction): দুইটি বস্তু একে অপরকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুতে এমন একটি বলের উদ্ভব হয়। যা একটি বস্তুকে অপর বস্তুর উপর দিয়ে গড়িয়ে যেতে বা চলাচলের বাঁধার সৃষ্টি করে সেই বাঁধা বলকেই **ঘর্ষণ বল** বলে। যেমন: কোনো টেবিলের উপর দিয়ে কোনো বলকে গড়িয়ে দিলে ঘর্ষণ বলের কারণে বলটি কিছুদূর গিয়ে থেমে যায়। অমসৃণ বস্তুর ঘর্ষণ বল বেশি এবং বস্তুদ্বয় যত বেশি মসৃণ হবে তাদের মধ্যে ঘর্ষণ বল তত কম।

(iv)আকর্ষণ(Attraction) ও বিকর্ষণ(Repulsion)ঃ যেঅদৃশ্যবলেরকারণেযখনদুইটিবস্তুস্পর্শ বা সংযোগছাড়াইপরস্পরেরদিকেঅগ্রসরহয় বাএকটিবস্তুরউপরদূরহতেবলপ্রয়োগেরদ্বারাকিংবাপরস্পরকেনিকটেটানতেচায়, তখনসেইবলকে**আকর্ষণ**বলে।একটিচুম্বক-শলাকাএকখন্ডলৌহ-শলাকাকেযেবলদ্বারাআকর্ষণকরে, লৌহ-শলাকাতারবিপরীতমুখীসমানবলদ্বারাআকর্ষণকরে।
আবারযেঅদৃশ্যবলেরকারণেদুইটিবস্তুকোনোস্পর্শবাসংযোগছাড়াইপরস্পরহতেদূরেসরেযায়বাএকটিবস্তুঅপরএকটিবস্তুকেদূরে সরিয়েরাখতেচায়, তখনঐবলকে**বিকর্ষণ**বলে।যেমনদুইটিধন-তড়িৎযুক্তঅথবাঋণ-তড়িৎযুক্তলৌহ-শলাকাপরস্পরকেসমানবলদ্বারাদূরেসরিয়েদেয়।এটিকে**বিকর্ষণ**বলে।

(v)ওজন (Weight):কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষণ বলকে বস্তুর **ওজন বা ভার** বলা হয়। বস্তুর ওজন সর্বদাই বস্তুর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়াশীল হয়; এখানে নির্দিষ্ট বিন্দুটিকেবস্তুটির ভারকেন্দ্র বলা হয়(centre of gravity)। M.K.S.পদ্ধতিতে বস্তুর ওজনের একককিলোগ্রাম।

(v)বলের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া(Action and Reaction): যখন কোনো দুইটি বস্তু পরস্পরকে স্পর্শ বা আঘাত করে তখন প্রথম বস্তু দ্বিতীয় বস্তুকে যে চাপ বা ঠেলা দেয়,তাকে ক্রিয়া (Action) বলে আবার সেই সময় দ্বিতীয় বস্তুটিও সমান ও বিপরীতমুখী একটি চাপ প্রথম বস্তুর দিকে দেয়, তখন একে প্রতিক্রিয়া (Reaction) বলে।"প্রত্যেক ক্রিয়ারই একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে" যা নিউটনের তৃতীয় সূত্র হিসেবে বিখ্যাত হয়ে আছে।

মন্তব্য:(i) সংস্পর্শজনিত কারণে সৃষ্ট ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সব সময়ই সমান ও বিপরীতমুখী হয়ে থাকে।

(ii) যখন একটি বস্তু অপর কোনো বস্তুর সাথে বা মসৃণ তলের উপর চাপসৃষ্টি করে বা বস্তুর ওজন তলটির উপর দিকে ক্রিয়া করে কিংবা কোনো কব্জা দ্বারা বলগুলো সংযুক্ত হয় তখন প্রতিক্রিয়া সাধারণ তলের উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে। টেবিলেরউপরএকটিবইরাখলেবইটিরওজনেরজন্যটেবিলেরউপরনিম্নদিকেএকটিচাপদেয়এবংটেবিলেওবিপরীতদিকেঅর্থাৎউপরেরদিকেএকটিচাপদেয়।এখানেএকটিঅপরটিকেচাপদেয়বলেউভয়েস্পর্শবিন্দুতেএকটিবলঅনুভবকরে।যেকোনোএকটিবলকেক্রিয়াএবংঅপরটিকেপ্রতিক্রিয়াবলাহয়। যদি ক্রিয়া প্রতিক্রিয়ার থেকে বেশি হয় তাহলে টেবিলটি ভেঙ্গে বই নিচে পড়বে।

সারসংক্ষেপ

- দুইটি বস্তু পরপর সংস্পর্শে আসলে এদের সাধারণ স্পর্শবিন্দুতে যে বল সৃষ্টি হয় তাহাই চাপ।
- যে বল দ্বারা দৃশ্য মাধ্যমে একটি বস্তু অপর একটি বস্তুকে একসঙ্গে রাখতে চেষ্টা করে, তাকে **টান** বলে। যেমন: দড়ির দ্বারা কোনো বস্তুকে বেঁধে টানলে দড়ির মাধ্যমে যে বল প্রয়োগ করা হয় এটিই **টান**।
- দুইটি বস্তু একে অপরকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুতে এমন একটি বলের উদ্ভব হয়। যা একটি বস্তুকে অপর বস্তুর উপর দিয়ে গড়িয়ে যেতে বা চলাচলের বাঁধার সৃষ্টি করে সেই বাঁধা বলকেই **ঘর্ষণ বল** বলে।
- যে অদৃশ্য বলের কারণে যখন দুইটি বস্তু স্পর্শ বা সংযোগ ছাড়াই পরস্পরের দিকে অগ্রসর হয় বা একটি বস্তুর উপর দূর হতে বল প্রয়োগের দ্বারা কিংবা পরস্পরকে নিকটে টানতে চায়, তখন সেই বলকে **আকর্ষণ** বলে।
- যে অদৃশ্য বলের কারণে দুইটি বস্তু কোনো স্পর্শ বা সংযোগ ছাড়াই পরস্পর হতে দূরে সরে যায় বা একটি বস্তু অপর একটি বস্তুকে দূরে সরিয়ে রাখতে চায়, তখন ঐ বলকে **বিকর্ষণ** বলে।
- কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল আকর্ষণ বলকে বস্তুর **ওজন বা ভার** বলা হয়। বস্তুর ওজন সর্বদাই বস্তুর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়াশীল হয়; এখানে নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বস্তুটির ভারকেন্দ্র বলা হয়।
- যখন কোনো দুইটি বস্তু পরস্পরকে স্পর্শ বা আঘাত করে তখন প্রথম বস্তু দ্বিতীয় বস্তুকে যে চাপ বা ঠেলা দেয়, তাকে ক্রিয়া (Action) বলে আবার সেই সময় দ্বিতীয় বস্তুটিও সমান ও বিপরীতমুখী একটি চাপ প্রথম বস্তুর দিকে দেয়, তখন একে প্রতিক্রিয়া (Reaction) বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.২

1. বিভিন্ন প্রকার বলের সংজ্ঞা লিখুন।
2. বলের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া আলোচনা কর।

পাঠ ৭.৩ বলের ক্রিয়াবিন্দুর স্থানান্তর বিধি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ভেক্টর রাশি হিসেবে বলকে প্রকাশ করতে পারবেন,

- বলের ক্রিয়াবিন্দুর স্থানান্তর সূত্র বর্ণনা করতে পারবেন,
- সমান বল ও বলের সাম্যবস্থা বর্ণনা করতে পারবেন,
- বলের বিভিন্ন একক বর্ণনা করতে পরবেন।

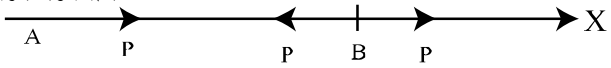
মুখ্য শব্দ	ভেক্টর, স্থানান্তর সূত্র, সাম্যবস্থা, একক

মূলপাঠ

ভেক্টররাশিহিসাবেবল(Force as a vector Quantity):
বলেরপ্রকৃতিবাধর্মবিশ্লেষণকরলেদেখাযাবেযে, এর(i)**দিক,** (ii)**মান**ও(iii)**প্রয়োগ-বিন্দু**;এইতিনটিবিশেষত্বআছে।যেরাশিরদিকওমানউভয়ইআছেতাকে**ভেক্টররাশি**বলে।বলেরওদিকএবংমানআছে, কাজেইউহাএকটিভেক্টররাশি।এখন,
একটিরেখাংশেরওদৈর্ঘ্যওদিকথাকেএবংকোনোনির্দিষ্টবিন্দুহতেইহাঅঙ্কনকরাযায়।সুতরাংএরএকটিনির্দিষ্টঅবস্থানআছে।অতএব সরলরেখাওভেক্টররাশিজ্ঞাপক।প্রত্যেকবলেরএকটিনির্দিষ্টমানথাকেএবংএকটিনির্দিষ্টবিন্দুতেতাক্রিয়াকরে।সরলরেখাঅঙ্কনকরতে হলেকোনোনির্দিষ্টবিন্দুহতেআরম্ভকরেকোনোনির্দিষ্টদিকেনির্দিষ্টদৈর্ঘ্যেরসমানকরেঅঙ্কনকরতেহয়।সুতরাংসরলরেখাবারেখাংশেরসাহায্যেযেকোনোবলকেপ্রকাশকরাযায়।এস্থলেসরলরেখাযেবিন্দুহতেঅঙ্কিতহয়, সেইবিন্দুকেবলেরপ্রারম্ভিকবিন্দু, রেখারদৈর্ঘ্যদ্বারাবলেরমানএবংপ্রারম্ভিকবিন্দুহতেরেখাটিযেদিকেবিস্তারিতসেইনির্দিষ্টদিকদ্বারাবলেরদিকনির্দেশিতহয়।

বলেরস্থানান্তরসূত্র(The principle of transmissibility of a force):
একটিবলকোনোদৃঢ়বস্তুরকোনোএকটিবিন্দুতেক্রিয়াশীলহলে
যদিএরক্রিয়ারেখাবরাবরবস্তুটিরঅপরএকবিন্দুতেযদিএরপ্রয়োগবিন্দুরস্থানান্তরকরাহয়,
তাহলেবস্তুটিরউপরবলটিরক্রিয়াফলেরকোনোপরিবর্তনহবেনা।এটিইবলের**প্রয়োগবিন্দু স্থানান্তরসূত্র**।

মনেকরুনকোনোএকটিদৃঢ়বস্তুরউপরAবিন্দুতে$\overrightarrow{AX}$ বরাবরPএকটিবলক্রিয়াশীল। এখন যদি AX রেখার উপরBবিন্দুতে$\overrightarrow{BA}$ এবং$\overrightarrow{AB}$ বরাবরদুইবিপরীতদিকেযদিদুইটিপরস্পরসমানওবিপরীতমুখীবলPপ্রয়োগকরাহয়,
তাহলেঐদুইটিসমানবলসাম্যাবস্থায়থাকায়পরস্পরকেক্রিয়াহীনকরবেএবংপ্রথমপ্রযুক্তবলP-এরউপরএদেরকোনোপ্রভাবফেলবেনা।



এখনAবিন্দুতেক্রিয়াশীলবলPএবংBবিন্দুতেক্রিয়াশীলএরবিপরীত সমানবলPউভয়েমিলেসাম্যাবস্থারসৃষ্টিকরে। তাহলে$\overrightarrow{AX}$ অভিমুখেবা$\overrightarrow{BX}$বরাবরBবিন্দুতেক্রিয়াশীলঅবশিষ্টPবলটিAবিন্দুতেক্রিয়ারতপ্রথমপ্রযুক্তবলP-রসমানবলহিসেবেক্রিয়াকরতেথাকে।অতএববলেরস্থানান্তরণেরনিয়মপ্রমাণিতহলো।
মন্তব্য:কোনোবলেরক্রিয়ারেখারউপরিস্থযেকোনোবিন্দুকেএবলেরক্রিয়াবিন্দুহিসেবেগণ্যকরাযায়।

সমানবলওবলের সাম্যবস্থা(Equal forces and equilibrium of forces):
বলবিদ্যায়দুইটিসমানবলবলতেএমনদুইটিবলবুঝায়যাদেরপ্রত্যেকেসমানসমানভরেরউপরক্রিয়াশীলহলেসমানসমানত্বরণউৎপন্ন হয়।স্থিতিবিদ্যায়সমান বলবলতে–**বিপরীতমুখীদুইটিবলেরক্রিয়াসত্ত্বেওযদিএকটিবস্তু-কণাস্থিরথাকে, তবেঐবলদুইটিকেসমানবলাহয়।**
দুইটিসমানবলেরবিপরীতমুখীক্রিয়ায়কিংবা, দুই-এরঅধিকবলেরক্রিয়াতেওবস্তুবিশেষস্থিরবাসাম্যবস্থায়থাকতেপারে।সুতরাং যদিদুইবাততোধিকবলেরঅধীনএকটিবস্তুস্থিরথাকে, তখন **বলসাম্য**(equilibrium)প্রতিষ্ঠিতহয়।এইরূপক্ষেত্রেবলগুলোকেসাম্যাবস্থায়আছেবলাহয়।সাম্যাবস্থায়ক্রিয়াশীলবলসমূহেরলব্ধি বলশূন্য।

বলের একক(Units of Fore): আমরা জানি বল $F = ma$ অর্থাৎ, বল = ভর × ত্বরণ = ভর $\times \frac{\text{বেগ}}{\text{সময়}}$

(i) M. K. S. পদ্ধতিতে বলের পরম একক নিউটন। অর্থাৎ 1 N = 1 kg× 1 m/sec$^{2;}$ এটিকে বলের অন্যপেক্ষ একক বলা হয়।

(ii) F. P. S. পদ্ধতিতে বলের পরম একক পাউন্ডাল (Poundal) অর্থাৎ 1 পাউন্ডাল = 1 পাউন্ড ×1 ফুট/সে.^{2}

(iii) C. G. S. পদ্ধতিতে বলের পরম একক ডাইন (Dyne)। অর্থাৎ 1 ডাইন = 1 গ্রাম ×1 সে.মি./সে.^{2}

পাউন্ডাল ও ডাইনের মধ্যে সম্পর্ক:

1 পাউন্ডাল = 1 পাউন্ড × 1 ফুট/সে.^{2} = 453.6 গ্রাম ×30.48 সে.মি./সে.^{2}= 13825.728 ডাইন।

নিউটন ও ডাইনের মধ্যে সম্পর্ক:

1 নিউটন = 1 কিলোগ্রাম ×1 মিটার/সে.^{2} = 1000 গ্রাম ×100 সে. মি./সে.^{2}= 10^5ডাইন।

10^6 ডাইন = 10 নিউটন = 1 মেগাডাইন।

(iv) অভিকর্ষীয় একক:C. G. S. পদ্ধতিতে বলের পরম একক ডাইন এবং অভিকর্ষীয় একক গ্রাম-ওজন। পৃথিবী এর মাধ্যকর্ষণ শক্তির জন্য যে পরিমাণ বল দ্বারা এক গ্রাম ভরকে আকর্ষণ করে তাকে গ্রাম-ওজন বলে। এই পদ্ধতিতে এক গ্রাম-ওজন বল এক গ্রাম ভরের উপর কার্যরত হলেg পরিমাণ ত্বরণ সৃষ্টি হয়। এখানেg-এর মান (প্রায়) 980 সে. মি./সে.^{2}। ডাইনকে গ্রাম-ওজনে প্রকাশ করতে হলে 980 দ্বারা একে ভাগ করতে হবে।

M. K. S. পদ্ধতিতে বলের পরম একক নিউটন এবং অভিকর্ষীয় একক কিলোগ্রাম-ওজন।সুতরাং 1 কিলোগ্রাম-ওজন = 9.80 নিউটন।

বর্তমানে পরিমাপের জন্য SI একক ব্যবহার হয় যেখানে দৈর্ঘ্যের একক মিটার, ভরের একক কিলোগ্রাম এবং সময়ের একক সেকেন্ড।

সারসংক্ষেপ

- বলের প্রকৃতি বা ধর্ম বিশ্লেষণ করলে দেখা যাবে যে, এর (i)**দিক,** (ii)**মান** ও (iii)**প্রয়োগ-বিন্দু**; এই তিনটি বিশেষত্ব আছে। যে রাশির দিক ও মান উভয়ই আছে তাকে **ভেক্টর রাশি** বলে। বলেরও দিক এবং মান আছে, কাজেই উহা একটি ভেক্টর রাশি।
- একটি বল কোনো দৃঢ় বস্তুর কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে যদি এর ক্রিয়ারেখা বরাবর বস্তুটির অপর এক বিন্দুতে যদি এর প্রয়োগবিন্দুর স্থানান্তর করা হয়, তাহলে বস্তুটির উপর বলটির ক্রিয়াফলের কোনো পরিবর্তন হবে না। এটিই বলের **প্রয়োগবিন্দুর স্থানান্তর সূত্র**।
- যদি দুই বা ততোধিক বলের অধীন একটি বস্তু স্থির থাকে, তখন **বলসাম্য** (equilibrium) প্রতিষ্ঠিত হয়। এইরূপ ক্ষেত্রে বলগুলোকে সাম্যাবস্থায় আছে বলা হয়। সাম্যাবস্থায় ক্রিয়াশীল বলসমূহের লব্ধিবল শূন্য।
- আমরা জানি বল $F = ma$ অর্থাৎ, বল = ভর × ত্বরণ = ভর $\times \frac{\text{বেগ}}{\text{সময়}}$
- **(i)** M. K. S. পদ্ধতিতে বলের পরম একক নিউটন, F. P. S. পদ্ধতিতে বলের পরম একক পাউন্ডাল, C. G. S. পদ্ধতিতে বলের পরম একক ডাইন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৩

1. বলের ক্রিয়াবিন্দুর স্থানান্তর বিধি সম্পর্কে আলোচনা করুন।
2. বলের এককসমূহ বর্ণনা করুন।

পাঠ ৭.৪ সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

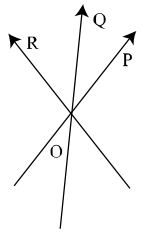
এই পাঠ শেষে আপনি-

- সমবিন্দু বল কী বর্ণনা করতে পারবেন,
- বলের লব্ধি বর্ণনা করতে পারবেন,
- বলের সামান্তরিক সূত্র বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বলের ত্রিভূজ সূত্র বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সমবিন্দু বল, লব্ধি, সামান্তরিক সূত্র, ত্রিভুজ সূত্র

মূলপাঠ

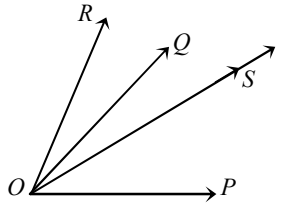
সমবিন্দু বল (Concurrent Forces):



যদি দুই বা ততোধিক বলের ক্রিয়ারেখা একটি বিন্দুতে মিলিত হয়, তখন ক্রিয়ারত ঐ বল সমূহকে **সমবিন্দু বল** বলে। চিত্রে P, Q, Rমানের বলত্রয় কোনো বস্তুকণার O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এখানে P, Q, Rবলত্রয় সমবিন্দু, কেননা এদের ক্রিয়ারেখা পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। O বিন্দুটিকে **ক্রিয়াবিন্দু** বলা হয়।

বলের লব্ধি(Resultant of Forces)ওউপাংশ(Conponents):

যখনদুইবাততোধিকবলকোনোজড়বস্তুরউপরযুগপৎভাবে(simultaneously) ক্রিয়াশীলহয়এবংএদেরক্রিয়ারফলাফলকেএকটিমাত্রবলদ্বারাসূচিতকরাযায়, তখন সেইপ্রাপ্তএকক(single) বলটিকে**লব্ধি বল**বলাহয়।যখন লব্ধিবলেরপ্রভাবঐবস্তুরউপরপ্রয়োগকৃতবলগুলোরসম্মিলিতক্রিয়ারসমানহয় তখন ঐক্রিয়াশীলবলগুলোকেইলব্ধিবলের**উপাংশ**(Component)বলাহয়।

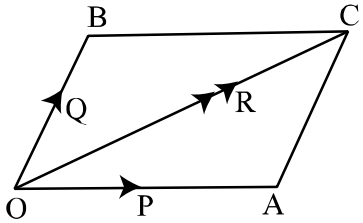


মনে করুন, চিত্রে O বিন্দুতে P, Q, R বলত্রয় ক্রিয়া করায় এদের ক্রিয়ার ফলাফল একটিমাত্র বল S দ্বারা সূচিত করা যায়; তাহলে S বলটি P, Q, R বলত্রয়ের লব্ধি বল এবং P, Q, R বলত্রয় S বলের অংশক। ক্রিয়াশীল কতকগুলো বলের লব্ধি নির্ণয়ের পদ্ধতিকে **বল সংযোজন** এবং লব্ধি বলের অংশক নির্ণয়ের পদ্ধতিকে **বল বিশ্লেষণ** বলা হয়।

মন্তব্যঃ একাধিকবলেরক্রিয়ারফলাফলইযেএককবলের(single force) দ্বারাসূচিতহয়সেইএককবলটিকে**লব্ধিবল**(Resultant Force) বলাহয়এবংলব্ধিবলউৎপন্নকরতেযেক্রিয়াশীলবলগুলোঅংশগ্রহণকরে, সেইবলগুলোরপ্রত্যেককেলব্ধি **বলেরঅংশক**(Component)বা**উপাংশ**বলবলে।

বলেরসামান্তরিকসূত্র(Parallelogram Low of forces)

কোনোবস্তুরএকটিবিন্দুতেক্রিয়াশীলদুইটিবলযদি ঐবিন্দুদিয়েঅঙ্কিতএকটিসামান্তরিকেরদুইটিসন্নিহিতবাহুদ্বারামানে, ক্রিয়ারেখায় ও দিকে নির্দেশিতহয়তাহলেবলদ্বয়েরলব্ধিরমান, ক্রিয়ারেখাওদিকসামান্তরিকটির উক্ত সন্নিহিত বাহুদ্বয়েরঐকৌণিকবিন্দুগামীকর্ণদ্বারানির্দেশিতহবে।



মনে করুন, কোনো বস্তুর Oবিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল Pও Qএবং এদেরকে যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$এবং $\overrightarrow{OB}$দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত করা হলো। এখন যদি $\overrightarrow{OA}$এবং $\overrightarrow{OB}$-কে সন্নিহিত বাহু ধরে $OACB$সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করা হয়, তাহলে অঙ্কিত কর্ণ $\overrightarrow{OC}$দ্বারা বল দুইটির লব্ধি Rএর মান ও দিক নির্দেশ করবে।

ভেক্টরপ্রতীকেরসাহায্যেবলাহয়, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ অর্থাৎ $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q}=\overrightarrow{R}$

যেহেতু$\overrightarrow{AC}$এবং$\overrightarrow{OB}$সর্বসমওসমান্তরাল।$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$;সুতরাং$P$ও$Q$বলদুইটিরলব্ধি$R$. $\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$

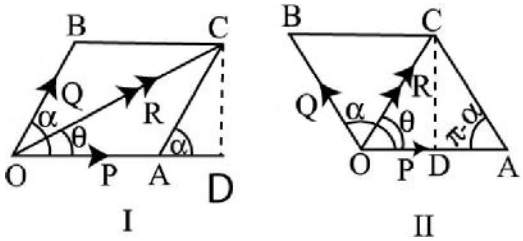
মন্তব্যঃ যদিDবিন্দুতে$\overrightarrow{OC}$ এবং$\overrightarrow{AB}$ কর্ণদ্বয়ছেদকরে, তবে$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$

একইবিন্দুতেক্রিয়ারতদুইটিবলেরলব্ধিরমানওদিকনির্ণয়(To find the resultant of two forces acting at a point in magnitude and direction)

মনে করুন,Oবিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বল P ও Q, এদের মধ্যবর্তী কোণ αএবং বল দুইটি যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা দিকে, মানে ও ক্রিয়ারেখায় নির্দেশিত হয়।

এখন সামান্তরিক $OACB$সম্পূর্ণ করে OCযুক্ত করা হলো।

তাহলে, বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে P ও Qবলদুইটির লব্ধি$OACB$সামন্তরিকেরকর্ণ $OC = R$দ্বারা নির্দেশিত হবে।মনেকরুনঐলব্ধিOA-রসহিতθকোণউৎপন্নকরে।তাহলে$\angle AOC = \theta$,যালব্ধিরদিকনির্দেশকরে।Cহতে$\overrightarrow{OA}$ বাবর্ধিত$\overrightarrow{OA}$ -রউপর$\overrightarrow{CD}$ লম্বটানাহলো।



চিত্র I:এখনαসূক্ষ্মকোণহলেΔCADহতে, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=Q$এবং $\angle CAD=\alpha$

$\therefore AD=AC\cos CAD=Q\cos\alpha$এবং $CD=AC\sin CAD=Q\sin\alpha$

সুতরাং $OD=OA+AD=P+Q\cos\alpha$

চিত্র II:α স্থূলকোণ হলে $CD=CA\sin CAD=Q\sin(\pi-\alpha)=Q\sin\alpha$

এবং$AD=AC\cos CAD=Q\cos(180°-\alpha)=-Q\cos\alpha$

$\therefore OD=OA-AD=P-(-Q\cos\alpha)=P+Q\cos\alpha$

এখন (উভয়চিত্রে) CODসমকোণীত্রিভুজহতেপাই$OC^2=OD^2+CD^2$

বা, $R^2=(P+Q\cos\alpha)^2+(Q\sin\alpha)^2=P^2+2PQ\cos\alpha+Q^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$---------- (i)

$\therefore$সমীকরণ(i) হতেলব্ধিবল R এরমানপাওয়াযাবে।

আবার, $\tan\theta=\frac{CD}{OD}=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ $\therefore \theta=\tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ ---------- (ii)

$\therefore$সমীকরণ(ii)হতেলব্ধিবল R এরদিকপাওয়াযাবে।

অনুসিদ্ধান্ত1:যদি$\alpha = 0$হয়, তাহলেPএবং Qবলদ্বয়ের লব্ধি$R = P + Q$, যাবলদ্বয়েরবৃহত্তমলব্ধিনির্দেশকরে।এক্ষেত্রে বলদ্বয় একই রেখায় একই দিকে কিংবা সমান্তরাল ভাবে একই দিকে ক্রিয়াশীল হয়।

প্রমাণঃ যেহেতু$\alpha = 0$, সুতরাং, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2.PQ\cos 0° = P^2 + Q^2 + 2PQ = (P + Q)^2 \therefore R = P + Q.$

অনুসিদ্ধান্ত 2: যদি$\alpha = \pi$হয়, তবে$R = P \sim Q$ $(P>Q)$, যাবলদ্বয়েরক্ষুদ্রতমলব্ধিনির্দেশকরে।এক্ষেত্রে বলদ্বয় একই রেখার পরস্পর বিপরীত দিকে কিংবাসমান্তরালভাবে বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হয়।

অনুসিদ্ধান্ত3:যদি$\alpha = 90°$ হয়, অর্থাৎ বলদ্বয় লম্ব হয় তাহলে$R^2 = P^2 + Q^2$ $(\because \cos 90° = 0)$

এবং$\tan\theta = \dfrac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°} = \dfrac{Q}{P}$ $\therefore \theta = \tan^{-1}\dfrac{Q}{P}$

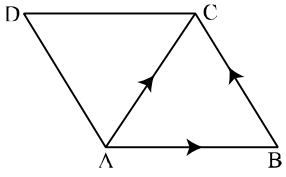
অনুসিদ্ধান্ত4:$P = Q$হলে, অর্থাৎ বলদ্বয় সমান হলে $R^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha$

$= 2P^2 + 2P^2\cos\alpha = 2P^2(1 + \cos\alpha) = 4P^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \therefore R = 2P\cos\dfrac{\alpha}{2}$

এবং$\tan\theta = \dfrac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\dfrac{\alpha}{2} \therefore \theta = \dfrac{\alpha}{2}$

সুতরাংএক্ষেত্রেলব্ধি-বলপ্রদত্ত বলদুইটিরমধ্যবর্তীকোণকেসমদ্বিখণ্ডিতকরে।

বলের ত্রিভুজ সূত্র (Law of Triangle of Forces)



কোনো বস্তুকণায় একই বিন্দুতে যুগপৎভাবে ক্রিয়াশীল দুইটি বলকে, যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু দ্বারা দিকে, মানে ও একই ক্রমে সূচিত করা যায়, তাহলে উক্ত ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু দ্বারা বল দুইটির লব্ধির দিক ও মান বিপরীত ক্রম অনুযায়ী সূচিত হয়।

কোনো বস্তুকণার একটি বিন্দুতে কার্যরতP এবংQ বল দুইটিকে যথাক্রমে ΔABCএরAB ও BC রেখাংশ দ্বারা দিকে, মানে ও একই ক্রমে সূচিত করুন এবং$ABCD$ সামন্তরিকটি পূর্ণ করুন।

এখন BC রেখাংশ দ্বারা সূচিত বলকে BC বাহুর সমান ও সমান্তরাল রেখাংশADদ্বারা প্রকাশ করা যায়। সুতরাং বলের সামন্তরিক সূত্র অনুযায়ী,AB এবংAD দ্বারা সূচিত বলের লব্ধি AC রেখাংশ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হবে। সুতরাংAB ও BCবাহুদ্বয় দ্বারা সূচিত বলের লব্ধিকে ABC ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু AC দ্বারা দিকে ও মানে প্রকাশ করা যায়।ভেক্টর সমীকরণের সাহায্যে যায়,$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$দ্বারা সূচিত করা যায়।

মন্তব্যঃ কোনো বস্তুকণার উপর একইসংগে কার্যরত তিনটি বলকে যদি কোনো একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা দিকে, মানে ও একই ক্রমে প্রকাশ করা যায়, তবে বস্তু কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকবে অর্থাৎ **বলত্রয় সাম্যবস্থা** সৃষ্টি করে।

যার ভেক্টর সমীকরণ,$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

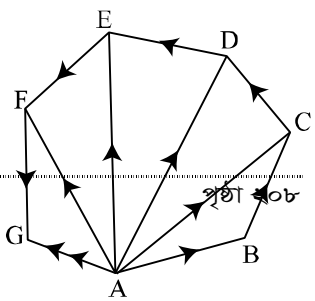
বলের বহুভুজ সূত্র (Law of Polygon of Forces)

যদি কোনো বস্তুকণার উপর একইসঙ্গে কার্যরত $(n-1)$ সংখ্যক বলকে nবাহুবিশিষ্ট বহুভুজের $(n-1)$ সংখ্যক বাহু দ্বারা দিকে, মানে ও একই ক্রমে প্রকাশ করা যায়, তাহলে উক্ত বহুভুজের সর্বশেষ বাহুটি ক্রিয়ারত বলসমূহের বিপরীত-ক্রম অনুযায়ী, প্রদত্ত বলসমূহের লব্ধিকে সূচিত করবে।

প্রমাণঃমনে করুন, কোনো বিন্দুতে কার্যরত ছয়টি বল$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ কে $ABCDEFG$ বহুভুজের যথাক্রমে ছয়টি বাহুAB, BC, CD, DE, EF, FG দ্বারা দিকে, মানে ও একই ক্রমে নির্দেশ করা যায়। প্রমাণ করতে হইবে যে, $ABCDEFG$ বহুভুজের অবশিষ্ট বাহু AG দ্বারা দিকে ও মানে এদের লব্ধি-বলকে সূচিত করবে।

AC, AD, AE, AF সংযুক্ত করুন।সুতরাং লব্ধি-বল বলসমূহের ভেক্টর সমষ্টি

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$



$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$ $\left[\text{বলের ত্রিভুজ-সূত্র অনুযায়ী, } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\right]$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$ $\left[\because \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}\right]$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$ $\left[\because \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}\right]$

$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$ $\left[\because \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}\right]$

মন্তব্যঃ কোনো বস্তুকণায় একই সময়ে কার্যরত বলসমূহকে দিকে, মানে ও একই ক্রম অনুযায়ী কোনো বদ্ধ বহুভুজের সবগুলো বাহু দ্বারা যদি প্রকাশ করা যায়, তাহলে বলগুলো**সাম্যবস্থা** সৃষ্টি করে।

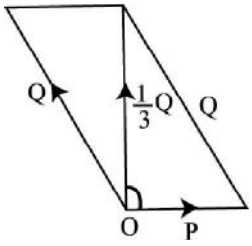
উদাহরণ 1: PএবংQদুইটি বল একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল এবং এদের অর্ন্তবর্তী কোণ αও এদের লব্ধি বল R.
(i) যদি $P = 3, Q = 5, R = 7$ হয়, তবে αনির্ণয় করুন।
(ii) যদি $P = 7, Q = 8, \alpha = 60°$ হয়, তবে R-এর মান নির্ণয় করুন।
(iii) যদি $P = 12, Q = 5, \alpha = 90°$ হয়, তবে R-এর মান নির্ণয় করুন।
সমাধানঃ (i) $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \therefore 7^2 = 3^2 + 5^2 + 2.3.5\cos\alpha$,
বা, $30\cos\alpha = 49 - 9 - 25 = 15$; বা, $\cos\alpha = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, $\therefore \alpha = 60°$

(ii) $R^2 = 7^2 + 8^2 + 2.7.8\cos 60° = 49 + 64 + 2 \times 56 \times \frac{1}{2} = 49 + 64 + 56 = 169 \quad \therefore R = 13$ একক

(iii) $R^2 = 12^2 + 5^2 + 2.12.5\cos 90° = 12^2 + 5^2 = 13^2 \therefore R = 13$ একক $[\because \cos 90° = 0]$

উদাহরণ 2: যদি একটি বিন্দুর উপর ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি এদের একটির সাথে লম্বভাবে অবস্থিত হয় এবং এর মান অপর বলটির মানের এক-তৃতীয়াংশ হয়, তবে দেখান যে, বৃহত্তর বল ও ক্ষুদ্রতর বলের মানের অনুপাত $3 : 2\sqrt{2}$ ।

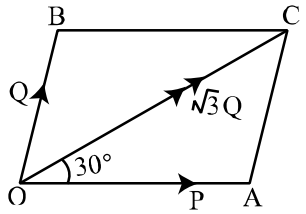
সমাধানঃ মনে করুন বল দুইটির মান P ও Qএবং এদের লব্ধির মান $\frac{Q}{3}$, যাP-এর উপর লম্ব।
P এবং Qবলদ্বয়ের মান নির্দেশকারী রেখাংশদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরলে, অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণ এদের লব্ধি নির্দেশ করে। চিত্র হতে পাই, $Q^2 = \left(\frac{Q}{3}\right)^2 + P^2$, $[\because$লব্ধি $\frac{Q}{3}$ও Q-এর মধ্যবর্তী কোণ $= 90°]$



অর্থাৎ$\frac{8}{9}$ $Q^2 = P^2 \therefore \frac{Q^2}{P^2} = \frac{9}{8}$; বা, $Q : P = 3 : 2\sqrt{2}$.

উদাহরণ 3:একটি বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল Pএবং Qমানের দুইটি বলের লব্ধির মান $\sqrt{3}\,Q$এবং উহার দিক Pবলের দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। দেখান যে, হয় $P = Q$, অথবা $P = 2Q$.

সমাধানঃ মনে করুন Pও Qমানের বলদ্বয় $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা নির্দেশিত। $OACB$ সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করুন তাহলে কর্ণ$\overrightarrow{OC}$ দ্বারা Pও Q-এর লব্ধি নির্দেশিত হয়।
এখন প্রশ্ন মতে, $\angle AOC = 30°$



এবং লব্ধির মান, $R = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{3}Q$, তাহলে ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র হতে পাই
$\cos 30° = \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2 \cdot OA \cdot OC}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{P^2 + (\sqrt{3}Q)^2 - Q^2}{2P.\sqrt{3}\,Q}$ বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{P^2 + 3Q^2 - Q^2}{2\sqrt{3}P.Q} = \frac{P^2 + 2Q^2}{2\sqrt{3}\,P.Q}$; বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{P^2 + 2Q^2}{2\sqrt{3}\,PQ}$
বা, $P^2 + 2Q^2 = 3PQ$; বা, $P^2 - 3PQ + 2Q^2 = 0$,
বা, $(P - Q)(P - 2Q) = 0$; $\therefore P = Q$, অথবা $P = 2Q$

উদাহরণ 4:পরস্পর θকোণে নত দুইটি বল Pও Q-এর লব্ধি $(2m+1)\sqrt{(P^2+Q^2)}$; বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $(90°-\theta)$ হলে লব্ধি $(2m-1)\sqrt{(P^2+Q^2)}$; প্রমাণ করুন, $\tan\theta=\frac{m-1}{m+1}$

সমাধান: এখনPএবং Qমানের বলদ্বয় θকোণে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধি $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$

$\therefore (2m+1)^2(P^2+Q^2)=P^2+Q^2+2PQ\cos\theta$

বা, $(4m^2+4m+1)(P^2+Q^2)=P^2+Q^2+2PQ\cos\theta$

বা, $(4m^2+4m)(P^2+Q^2)=2PQ\cos\theta$ ---------- (i)

আবার, Pএবং Qমানের বলদ্বয়ের $(90°-\theta)$ কোণে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধি $=(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$

$\therefore (2m-1)^2(P^2+Q^2)=P^2+Q^2+2PQ\cos(90°-\theta)$

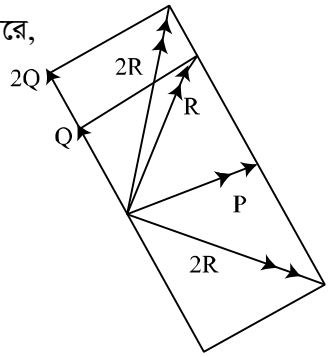
বা, $(4m^2-4m+1)(P^2+Q^2)=P^2+Q^2+2PQ\sin\theta$

বা, $(4m^2-4m)(P^2+Q^2)=2PQ\sin\theta$---------- (ii)

এখন (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\tan\theta=\frac{4m^2-4m}{4m^2+4m}=\frac{4m(m-1)}{4m(m+1)}=\frac{m-1}{m+1}$

উদাহরণ 5:Pএবং Qমানের বলদ্বয়ের লব্ধির মান R; Qকে দ্বিগুণ করলে, Rদ্বিগুণ হয় এবং Q-এর দিক বিপরীতমুখী করলে Rপুনরায় দ্বিগুণ হয়। প্রমাণ করুন, $P:Q:R=\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$.



সমাধান: মনে করুন Pএবং Qবলের অন্তর্গত কোনো α; সুতরাং, বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে,

$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$---------- (i)

আবার Qকে যদি দ্বিগুণ অর্থাৎ $2Q$করা হয়, তাহলে শর্তমতে Rপরিবর্তিত হয়ে $2R$ হয়।

$\therefore (2R)^2=P^2+(2Q)^2+2P.2Q.\cos\alpha$

বা, $4R^2=P^2+4Q^2+4PQ\cos\alpha$---------- (ii)

আবার Q-এর দিক বিপরীতমুখী হলে Rহবে $2R$এবং Q-এর অন্তর্গত কোণ $(180°-\alpha)$

$(2R)^2=P^2+Q^2+2PQ\cos(180°-\alpha)$

বা, $4R^2=P^2+Q^2-2PQ\cos\alpha$---------- (iii)

(i) ও (iii) যোগ করে পাই, $5R^2=2P^2+2Q^2$---------- (iv)

(iii) $\times 2$ + (ii) করে পাই, $12R^2=3P^2+6Q^2$, বা, $4R^2=P^2+2Q^2$ --------- (v)

(iv) হতে (v) বিয়োগ করে পাই, $R^2=P^2\Rightarrow R=P$

(v) হতে পাই, $4P^2=P^2+2Q^2$ $[R^2=P^2]$

বা, $3P^2=2Q^2\therefore 3P^2=2Q^2=3R^2$; বা, $\frac{P^2}{2}=\frac{Q^2}{3}=\frac{R^2}{2}$ বা, $\frac{P}{\sqrt{2}}=\frac{Q}{\sqrt{3}}=\frac{R}{\sqrt{2}}$;

অর্থাৎ $P:Q:R=\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$.

বিকল্প পদ্ধতি: সমীকরণ (iv) এবং (v) থেকে পাই, $2P^2+2Q^2-5R^2=0$ এবং $P^2+2Q^2-4R^2=0$

$\therefore$ বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই, $\frac{P^2}{-8+10}=\frac{Q^2}{-5+8}=\frac{R^2}{4-2}$

বা, $\frac{P^2}{2}=\frac{Q^2}{3}=\frac{R^2}{2}$ বা, $\frac{P}{\sqrt{2}}=\frac{Q}{\sqrt{3}}=\frac{R}{\sqrt{2}}$ $\therefore P:Q:R=\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$ ।

উদাহরণ 6:পরস্পর সমকোণে দুইটি বল একটি কণায় ক্রিয়া করছে। এদের ক্ষুদ্রতরটি 8 Nএবং এদের লব্ধি ও বৃহত্তর বলের সমষ্টি 288 N। লব্ধি এবং বৃহত্তর বলটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: ক্রিয়াশীল বলদ্বয় Pএবং Q, যেখানে $P>Q$; এখানে বলদ্বয়ের লব্ধি R, তাহলে

প্রশ্নানুসারে, $R+P=288$ ---------- (i)

আবার বলের সামন্তরিক সূত্রানুসারে, $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos 90°$

বা, $R^2=P^2+8^2+2.P.Q.0$ $[\because\cos 90°=0]$

বা, $R^2 = P^2 + 8^2$বা, $R^2 - P^2 = 8^2 = 64$ ---------- (ii)

এখন (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{(R+P)(R-P)}{R+P} = \frac{64}{288} = \frac{2}{9}$;

বা, $R - P = \frac{2}{9}$ ---------- (ii)

(i) এবং (ii) সমাধান করে পাই, $P = 143\frac{8}{9}$ Nএবং $R = 144\frac{1}{9}$ N.

উদাহরণ 7:দুইটি বল পরস্পর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি $\sqrt{10}$ কিলোগ্রাম ওজন হয়। যদি তারা $60°$ কোণ করে ক্রিয়া করে তাহলে লব্ধি $\sqrt{13}$ কিলোগ্রাম ওজন হয়। বল দুইটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, বল দুইটির মান Pএবং Q। এদের মধ্যবর্তী কোণ $90°$ হলে লব্ধি $\sqrt{10}$কিলোগ্রাম ওজন এবং মধ্যবর্তী কোণ $60°$ হলে লব্ধি $\sqrt{13}$কিলোগ্রাম ওজন হয়।

প্রথম ক্ষেত্রে: $(\sqrt{10})^2 = P^2 + Q^2$; অর্থাৎ $P^2 + Q^2 = 10$ ---------- (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে: $(\sqrt{13})^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 60°$

অর্থাৎ, $13 = P^2 + Q^2 + PQ$ ---------- (ii)

এখন (i) এবং (ii) হতে পাই, $13 = 10 + PQ$; বা, $PQ = 3$ ---------- (iii) $\therefore P = \frac{3}{Q}$

এখন, P এর মান (i) নং বসিয়ে পাই, $\left(\frac{3}{Q}\right)^2 + Q^2 = 10$ বা, $9 + Q^4 = 10Q^2$বা, $Q^4 - 10Q^2 + 9 = 0$

$\therefore Q^2 = 9, 1 \Rightarrow Q = 3, 1$

এখন (iii) হতে, $Q = 3$ হলে $P = 1$ এবং $Q = 1$ হলে $P = 3$

সুতরাং $P = 3, Q = 1$, অথবা $P = 1, Q = 3$

$\therefore$ বল দুইটির মান 3 এবং 1 কিলোগ্রাম ওজন।

শিক্ষার্থীর কাজ	1. পরস্পর αকোণে নত P ও Qবল দুইটির লব্ধি Q। আবার, পরস্পর αকোণে নত Pএবং $2Q$বল দুইটির লব্ধিও Q। প্রমাণ করুন যে, $\alpha = 150°$. 2. একটি কণায় দুইটি বল ক্রিয়া করলে তাদের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে 16Nও 4 Nহলে বল দুইটির মান নির্ণয় করুন। উত্তর: $P = 10$Nএবং $Q = 6$N।

সারসংক্ষেপ

- যদি দুই বা ততোধিক বলের ক্রিয়ারেখা একটি বিন্দুতে মিলিত হয়, তখন ক্রিয়ারত ঐ বল সমূহকে **সমবিন্দু বল** বলে।
- যখন দুই বা ততোধিক বল কোনো জড় বস্তুর উপর যুগপৎভাবে (simultaneously) ক্রিয়াশীল হয় এবং এদের ক্রিয়ার ফলাফলকে একটি মাত্র বল দ্বারা সূচিত করা যায়, তখন সেই প্রাপ্ত একক (single) বলটিকে **লব্ধি বল** বলা হয়।
- ক্রিয়াশীল কতকগুলো বলের লব্ধি নির্ণয়ের পদ্ধতিকে **বল সংযোজন** এবং লব্ধি বলের অংশক নির্ণয়ের পদ্ধতিকে **বল বিশ্লেষণ** বলা হয়।
- মনে করুন Oবিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বল P ও Q,এদের মধ্যবর্তী কোণ α।যদি এদের লব্ধি R হয় এবং লব্ধি P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে তবে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$
- কোনো বস্তুকণার উপর একইসংগে কার্যরত তিনটি বলকে যদি কোনো একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা দিকে, মানে ও একই ক্রমে প্রকাশ করা যায়, তবে বস্তু কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকবে অর্থাৎ **বলত্রয় সাম্যবস্থা** সৃষ্টি করে, যার ভেক্টর সমীকরণ, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৪

1. পরস্পর সমকোণে অবস্থিত দুইটি বলের পরিমাণ 6N এবং 8N। লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন।
2. একটি বিন্দুতে দুইটি বল 60°কোণে সক্রিয় এবং তাদের লব্ধি 7N। যদি একটি বলের মান 7N হয়, তবে অপর বলটির মান নির্ণয় করুন।
3. সমবিন্দু দুইটি সমান বলের লব্ধির মান তাদের একটির সমান হলে তাদের অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় করুন।
4. সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধি একটি বলের সমকোণে অবস্থিত এবং তার মান অপর বলটির অর্ধেক। প্রমাণ করুন যে, বল দুইটির অন্তর্ভূত কোণ 150° হবে।
5. একটি কণায় সমকোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের ক্ষুদ্রতরটি 8N এবং তাদের লব্ধি ও বৃহত্তর বলের সমষ্টি 288N। লব্ধি এবং বৃহত্তর বল নির্ণয় করুন।
6. একটি বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি 30N এবং তা বৃহত্তর বলের অভিমুখিতার সাথে 30° কোণে ক্রিয়া করে। বল দুইটি নির্ণয় করুন।
7. একটি কণায় প্রযুক্ত বিপরীতমুখী দুইটি বলের লব্ধি 34 কি. গ্রা. ওজন এবং যদি তারা পরস্পরের সাথে সমকোণে ক্রিয়া করে তাহলে তাদের লব্ধি 50 কি. গ্রা. ওজন হতো। বল দুইটির মান নির্ণয় করুন।
8. দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 17N। যদি তারা পরস্পর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করে, তাহলে তাদের লব্ধি 13N হয়। বল দুইটির মান কত?
9. দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 14N । যদি তারা পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করে, তাহলে লব্ধি 10N হয়। বল দুইটি নির্ণয় করুন।
10. পরস্পর 60° কোণে নত দুইটি বল P এবং Q,বলদ্বয়ের লব্ধি Rহলে প্রমাণ করুন যে, $P + 2Q = (4R^2 - 3P)^{\frac{1}{2}}$.
11. দুইটি বল একটি কণায় ক্রিয়া করে। একটিকে দ্বিগুণ এবং অপরটি 20N বর্ধিত করলে তাদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। শেষোক্ত বলটি নির্ণয় করুন।
12. দুইটি বল P ও Q-এর মধ্যবর্তী কোণ θ; যদি Pএবং Q-এর অবস্থান পরস্পর পরিবর্তন হয়, তাহলে তাদের লব্ধি ϕপরিমাণ কোণ ঘুরে যায়। দেখান যে, $\tan\frac{1}{2}\phi = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{1}{2}\theta\,(P>Q)$।
13. দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধি R। যদি P-কে Rপরিমাণ বৃদ্ধি করা হয় এবং Qঅপরিবতিত রাখা হয়, তাহলে নতুন লব্ধি R', $P + R$-এর সঙ্গে যে কোণ করে, তা লব্ধি R পূর্বে P-এর সঙ্গে যে কোণ করছিল তার অর্ধেক হয়। নতুন লব্ধির মান নির্ণয় করুন। Rযদি P-এর সঙ্গে θ কোণ করে, দেখান যে নতুন লব্ধি = $2R\cos\frac{\theta}{2}$ ।
14. কোনো নির্দিষ্ট কোণে পরস্পর নত দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধি P-র দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, দেখান যে একই কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বল $P + R$ও Q-এর লব্ধি $P + R$-এর সাথে $\frac{1}{2}\theta$কোণে নত হবে।
15. পরস্পর 2θকোণে নত হলে দুইটি সমপরিমাণ বলের লব্ধি যা হয়, সেটি 2ϕকোণে নত হলে এদের লব্ধির দ্বিগুণ হয়, তাহলে দেখান যে, $\cos\theta = 2\cos\phi$
16. α কোণে ক্রিয়াশীল P ও Q বল দুইটির লব্ধি R। যদি প্রত্যেক বলকে Rপরিমাণ বর্ধিত করা যায়, তবে প্রমাণ করুন যে, এটি নতুন লব্ধি R-এর সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ট্যানজেন্ট এর মান $\frac{(P-Q)\sin\alpha}{P+Q+R+(P+Q)\cos\alpha}$
17. দুইটি বল $P + Q$এবং $P - Q$পরস্পরের সাথে 2αকোণ করে ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধি দুই বলের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সঙ্গে θ কোণ করে। দেখান যে, $P\tan\theta = Q\tan\alpha$
18. দুইটি বল P এবং Q-এর লব্ধি P-এর লম্বাভিমুখে; আবার একই কোণ করে আছে এমন Pএবং Q-বলদ্বয়ের লব্ধি Q'-এর লম্বাভিমুখে। দেখাও যে $QQ' = P^2$.
19. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত নির্দিষ্ট মানের দুইটি বলের গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ লব্ধি যথাক্রমে 16N এবং 4N। যখন তারা পরস্পর 60° কোণে নত থেকে ক্রিয়াশীল হয়, তখন তাদের লব্ধি নির্ণয় করুন।

20. একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে P ও Q, বল দুইটির অন্তর্গত কোণ θহলে, দেখান যে, ঐ দুইটি বলের লব্ধি $\left[P^2\cos^2\frac{\theta}{2} + Q^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$ ।
21. লম্বাভিমুখে ক্রিয়ারত 20N একটি বলকে দুইটি বলে বিশ্লেষিত করা হয়েছে। তাদের একটি অনুভূমিক এবং তা 10N সমান। অপরটির মান ও দিক নির্ণয় করুন।
22. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P এবং R-এর লব্ধি P; দেখান যে P-কে দ্বিগুণ করলে নতুন লব্ধি Q-এর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করবে।

পাঠ ৭.৫ নির্দিষ্ট দিকে দুইটি বলের অংশক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বলের উপাংশ বা অংশক বর্ণনা করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতির সাইন সূত্র ব্যবহার করে বলের অংশক নির্ণয় করতে পারবেন,
- বলের অংশক সূত্র ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	উপাংশ বা অংশক

মূলপাঠ

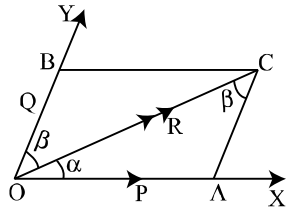
বলেরবিশ্লেষণ (Resolution of Forces)

দুইবাততোধিকবলেরসংশ্লেষণেবাসংযোজনেযেমনএকটিমাত্রবলবালব্ধিবলপাওয়াযায়, তেমনএকটিমাত্রবলকেভেঙ্গেবাবিভাজনকরেদুইবাততোধিকবলেপরিণতকরাকে**বলেরবিশ্লেষণ**বলে ।এভাবেবিশ্লিষ্টবলগুলোকেপ্রথমোক্তঐবলটির**উপাংশবাঅংশকও**প্রথমোক্তবলটিকেএইউপাংশগুলোর**লব্ধিবল**বলে ।

যেকোনোএকটিনির্দিষ্টবলকেএকটিরেখাদ্বারাদিকেওমানেসূচিতকরাযায় ।সেইরেখাকেকর্ণধরেঅসংখ্যসামান্তরিকঅঙ্কনকরাযায় । সামান্তরিকসূত্রঅনুসারেএইরূপকর্ণেরসন্নিহিতদুইটিবাহুরদ্বারাবলেরদুইটিউপাংশদিকেওমানেনির্দেশিতহবে ।

কোনো প্রদত্ত বলকে দুইটি নিদিষ্ট দিকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ

মনে করুন কোনো নিদিষ্ট বল R যা$\overrightarrow{OC}$ দ্বারা নির্দেশিত হয় এবং $\overrightarrow{OC}$ উভয় পাশে $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ সরলরেখা দুইটির, সাথে যথাক্রমে αও βকোণে নত। এখন $\overrightarrow{OX}$ ও$\overrightarrow{OY}$ -এর বরাবর Rবলের উপাংশ নির্ণয় করতে হবে।



এখন $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ রেখা বরাবর সন্নিহিত বাহু নিয়ে $\overrightarrow{OC}$ -কে কর্ণ নিয়ে $OACB$সামান্তরিক অঙ্কন করুন। বলের সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবর R-এর উপাংশ এবং বল দুইটি Pও Qযথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা নির্দেশিত হবে।

যেহেতু $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{OB}$ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল, সুতরাং $\overrightarrow{AC}$ রেখাংশ Qবলের মান ও দিক নির্দেশ করবে।

এখন OACত্রিভুজ হতে পাই, $\frac{\overrightarrow{OA}}{\text{sinOCA}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\text{sinCOA}} = \frac{\overrightarrow{OC}}{\sin \text{OAC}}$

অর্থাৎ $\frac{\overrightarrow{OA}}{\sin\beta} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\sin\alpha} = \frac{\text{R}}{\sin\{180° - (\alpha+\beta)\}}$ $[\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}]$

$\therefore \frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$ $\therefore P = |\overrightarrow{OA}| = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ এবং $Q = |\overrightarrow{OB}| = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

মন্তব্যঃ $\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$ হতে প্রতীয়মান হয় যে, উপাংশদ্বয়ের এবং এদের লব্ধির মধ্যে এমন সম্পর্ক বিদ্যমান যে, প্রত্যেক বল অপর দুই বলের মধ্যবর্তী কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

উদাহরণ 1: একটি কণার উপর $2P$ও Pমানের দুইটি বল দুটিই ভিন্ন দিকে ক্রিয়ারত। যদি প্রথমটি দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয়টির মান 12Nবাড়ানো হয়, তবে তাদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P-এর মান নির্ণয় করুন।

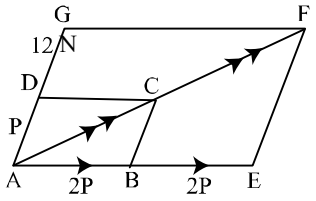
সমাধান: মনে করুন A বিন্দুতে $2P$ও Pবলদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং এদেরকে যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$এবং $\overrightarrow{AD}$দ্বারা এবং, লব্ধি $\overrightarrow{AC}$দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। যখন $\overrightarrow{AE}= 4P$হয়, তখন $\overrightarrow{AC}= (P + 12\text{N})$ এবং তাদের লব্ধি $\overrightarrow{AC}$বরাবর AFদ্বারা নির্দেশিত হয়।

এখন ΔABCথেকে Sine Rule অনুসারে পাই, $\frac{2P}{\sin C} = \frac{P}{\sin A}$ বা, $\frac{P}{2P} = \frac{\sin A}{\sin C}$ ---------- (i)

আবার ΔAEFথেকে Sine Rule অনুসারে পাই, $\frac{4P}{\sin F} = \frac{P+12\text{N}}{\sin A}$ বা, $\frac{P+12\text{N}}{4P} = \frac{\sin A}{\sin F} = \frac{\sin A}{\sin C}$ ---------- (ii)

এখন (i) এবং (ii) থেকে পাই, $\frac{P}{2P} = \frac{P+12\text{N}}{4P}$

বা, $4P = 2P + 24\text{N}$বা, $P = 12\text{N}$.



বিকল্প: ΔACDএবং ΔAFGপরস্পর সদৃশ।

$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AG}{GF} = \frac{P+12\text{N}}{4P}$ অর্থাৎ, $\frac{P}{2P} = \frac{P+12\text{N}}{4P}$; $\therefore P = 12\text{ N}$

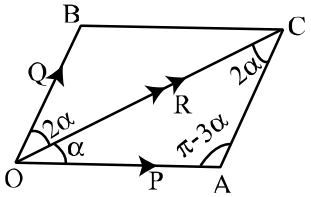
উদাহরণ 2: Pও Qদুইটি বলের $(2Q>P>Q)$ লব্ধি Rএবং Rবলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে 1 ঃ 2 অনুপাতে বিভক্ত করে। প্রমাণ করুন, লব্ধির মান$\left(\frac{P^2-Q^2}{Q}\right)$ এবং বল দুইটির অন্তর্গত কোণ $= 3\cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$।

সমাধান: মনে করুন P ও Qবল দুইটির অন্তর্গত কোণ 3α; সুতরাং প্রশ্নানুসারে লব্ধি বল R, Pবলের সাথে αকোণে ও Qবলের সাথে 2αকোণে নত (এখানে $P>Q$হওয়ায় লব্ধিবল বৃহত্তর বলের নিকটবর্তী হয়) রয়েছে।

তাহলে Sinc Rule অনুসারে, $\therefore \frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - 3\alpha)}$; বা, $\frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 3\alpha}$

$\therefore \frac{P}{Q} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \frac{P}{2Q}$ ---------- (i)



$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 3\alpha$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ\left(4\frac{P^3}{8Q^3} - 3\frac{P}{2Q}\right)$

$= P^2 + Q^2 + \frac{P^4}{Q^2} - 3P^2 = Q^2 + \frac{P^4}{Q^2} - 2P^2 = \frac{Q^4 + P^4 - 2P^2Q^2}{Q^2} = \left(\frac{P^2-Q^2}{Q}\right)^2 \therefore R = \frac{P^2-Q^2}{Q}$.

আবার (i) হতে $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right) \therefore P$ ও Q বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, $3\alpha = 3\cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$. প্রমাণিত।

শিক্ষার্থীর কাজ	Oবিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল Pও Q-বলদ্বয়ের লব্ধি R।একটি ছেদকরেখা তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M ও Nবিন্দুতে ছেদ করে। দেখান যে, $\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$.

সারসংক্ষেপ

- দুই বা ততোধিক বলের সংশ্লেষণে বা সংযোজনে যেমন একটি মাত্র বল বা লব্ধিবল পাওয়া যায়, তেমন একটিমাত্র বলকে ভেঙ্গে বা বিভাজন করে দুই বা ততোধিক বলে পরিণত করাকে **বলের বিশ্লেষণ** বলে। এভাবে বিশ্লিষ্ট বলগুলোকে প্রথমোক্ত ঐ বলটির **উপাংশ বা অংশক** ও প্রথমোক্ত বলটিকে এই উপাংশগুলোর **লব্ধি বল** বলে।

✪ কোনো প্রদত্ত বলকে দুইটি নির্দিষ্ট দিকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করলে, $\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৫

1. একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলোর সমান্তরালভাবে যথাক্রমে $3P$, $7P$ ও $5P$বল একটি বিন্দুতে সক্রিয়। তাদের লব্ধির দিক ও মান নির্ণয় করুন।
2. 1, 2, 3 ও 4 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বর্গক্ষেত্র $ABCD$-র কেন্দ্র O বিন্দুতে প্রযুক্ত হয়েছে এবং এরা যথাক্রমে A, B, Cও Dকৌণিক বিন্দুর অভিমুখে ক্রিয়া করে। বলসমূহের লব্ধি নির্ণয় করুন।
3. P এবং Qবল দুইটি ভিন্ন সরলরেখা $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ বরাবর ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধি $\overline{OA}$ -র উপর লম্ব। অপর দুইটি বল P'এবং Q'যথাক্রমে ঐ দুইটি সরলরেখায় ক্রিয়াশীল হলে, যদি তাদের লব্ধি $\overline{OB}$-র উপর লম্ব হয়। তাহলে প্রমাণ করুন যে, $PP' = QQ'$.

পাঠ ৭.৬ বলের লম্বাংশক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বলের লম্বাংশক সম্পর্কে বলতে পারবেন,
- একটি নির্দিষ্ট দিকে বলকে লম্বভাবে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করতে পারবেন,
- লম্বাংশকের উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ করতে পারবেন,
- লম্বাংশকের সাহায্যে সমতলীয় বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন,
- লম্বাংশকের সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	লম্বাংশক, সমতলীয় বলের লব্ধি

মূলপাঠ

লম্বাংশক:সাধারণতঃ একটি নির্দিষ্ট বলকে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করলে যে দুইটি উপাংশ বা অংশক বল পাওয়া যায় তাকে **লম্বাংশ বা লম্বাংশক** বল বলা হয়।

একটিনির্দিষ্টবলকেপরস্পরলম্বভাবেদুইটিউপাংশেবিশ্লেষণ

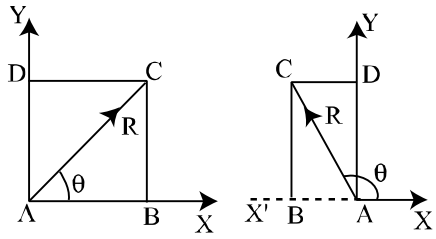
মনে করুনRবলটি$\overrightarrow{AC}$ রেখাদ্বারাদিকেওমানেনির্দেশিত।$\overrightarrow{AC}$ রেখা$\overrightarrow{AX}$-এরসাথেθকোণেনত।এখনCবিন্দুহতে$\overrightarrow{AX}$-এরউপর$\overrightarrow{CB}$ লম্বটানাহলোএবং$ABCD$সামান্তরিকসম্পূর্ণকরাহলো।তাহলে$\overrightarrow{AB}$ ও$\overrightarrow{AD}$ দ্বারানির্দেশিতবলদুইটিRবলেরউপাংশ।এদেরমধ্যে$\overrightarrow{AB}$ দ্বারানির্দেশিতউপাংশ$\overrightarrow{AX}$ বরাবরRবলেরলম্বাংশক বা বিশ্লেষিতঅংশএবং$\overrightarrow{AD}$ দ্বারানির্দেশিতউপাংশটি$\overrightarrow{AY}$বরাবরRবলের লম্বাংশক বাবিশ্লেষিতঅংশ।

১ম চিত্র: θসূক্ষ্মকোণ হলে$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cos\theta = R\cos\theta$

এবং$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\ \sin\theta = R\sin\theta$

$\therefore \overrightarrow{AX}$ বরাবর Rবলের লম্বাংশক বা বিশ্লেষিত অংশ $= R\cos\theta$

এবং $\overrightarrow{AY}$বরাবর Rবলের বিশ্লেষিত অংশ $= R\sin\theta$



২য় চিত্র: θস্থূলকোণহলেএটি $-\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}\cos(180° - \theta) = R\cos\theta$

$\overrightarrow{AX}$ -এরদিকেR-এরবিশ্লেষিতঅংশঋণাত্মকহবেএবং$\overrightarrow{AY}$-এরদিকেRবলের লম্বাংশক বাবিশ্লেষিতঅংশ$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ $\sin(180° - \theta) = R\sin\theta$

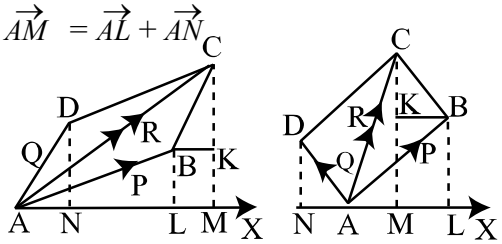
সুতরাং, উভয়ক্ষেত্রেইRবলের লম্বাংশক বাবিশ্লেষিতঅংশটিআনুভূমিক$\overrightarrow{AX}$ বরাবর= $R\cos\theta$এবংউলম্ব$\overrightarrow{AY}$ বরাবর=$R\sin\theta$

বলের লম্বাংশক সম্পর্কিত একটি উপপাদ্য

একই বিন্দুতেক্রিয়াশীল দুইটিসমবিন্দুবলের যেকোনো নির্দিষ্ট দিক বরাবরলম্বাংশকেরবীজগণিতীয় যোগফল ঐএকইদিকেবলগুলোরলব্ধিরলম্বাংশকেরসমান।

প্রমাণ:মনেকরুনAবিন্দুতেক্রিয়াশীলPওQমানেরবলদুইটিরলব্ধিরমানR; এখনP, QএবংRবলত্রয়কেযথাক্রমে$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$ ও$\overrightarrow{AC}$ দ্বারাদিকেওমানেনির্দেশিতকরুন এবং$ABCD$সামান্তরিকটিপূর্ণকরুন।তাহলে$\overrightarrow{AX}$ বরাবরP, QএবংRবলেরলম্বাংশককেযথাক্রমে$\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AN}$ ও$\overrightarrow{AM}$ দ্বারাসূচিত করা হলো।

প্রমাণকরতেহবেযে, $\overrightarrow{AX}$ বরাবরPওQমানেরবলেরলম্বাংশকেরবীজগণিতীয়যোগফল,ঐরেখাবরাবর লব্ধিRবলেরলম্বাংশকেরসমান, অর্থাৎ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AN}$



চিত্র (i) চিত্র (ii)

এখন Bবিন্দুহতে$\overrightarrow{AX}$ রেখারসমান্তরালকরেBKটানাহলো, যেনতা$\overrightarrow{CM}$-কেKবিন্দুতেছেদকরে।যেহেতু$BLMK$একটিআয়তক্ষেত্র, $\therefore \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{LM}$

আবার, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$-রসাথেসমান্তরালএবংসমানহওয়ায়ΔDANএবংΔCBKসদৃশ।

সুতরাং,$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AN}} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BK}}$ $\therefore \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BK}$কিন্তু$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{LM}$, $\therefore \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{LM}$.

এখন(i) চিত্রে$\overrightarrow{AX}$ বরাবরPওQঅর্থাৎ$\overrightarrow{AB}$ ও$\overrightarrow{AD}$ এরলম্বাংশকেরবীজগণিতীয় যোগফল = $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$

এবং(ii) চিত্রেAXবরাবরPওQবলদ্বয়েরলম্বাংশকের বীজগণিতীয়যোগফল=$\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AM}$

সুতরাং, উভয় চিত্রে$\overrightarrow{OX}$ বরাবরলব্ধিR-এরলম্বাংশ, PওQ-বলেরলম্বাংশেরবীজগণিতীয়সমষ্টিরসমান।

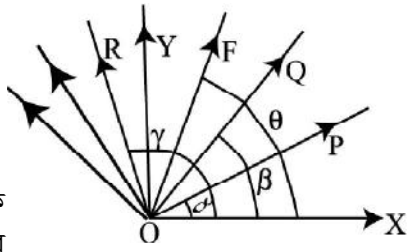
মন্তব্য: একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল যেকোনো সংখ্যক একতলীয় বলের ক্ষেত্রে লম্বাংশক সম্পর্কীয় উপপাদ্যটি সত্য হবে অর্থাৎ একই বিন্দুগামী যেকোনো সংখ্যক সমতলীয় বল ক্রিয়াশীল হলে নির্দিষ্ট দিক বরাবর বলগুলোর লম্বাংশকের বীজগাণিতিক যোগফল ঐ একই দিকে লব্ধির লম্বাংশকের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত: যদি P এবং Q বলদ্বয়ের লব্ধি R একটি নির্দিষ্ট রেখা OX এর সাথে যথাক্রমে α, β এবং θ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে OX বরাবর লম্বাংশক $R\cos\theta = P\cos\alpha + Q\cos\beta$ এবং OX এর সাথে লম্ব বরাবর লম্বাংশক $R\sin\theta = P\sin\alpha + Q\cos\beta$.

একইবিন্দুতেযুগপৎক্রিয়াশীলকয়েকটিসমতলীয়বলেরলব্ধি:

মনেকরুন P, Q, R, ... বলসমূহ একইসমতলে O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। O বিন্দুদিয়ে $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ দুইটিপরস্পরলম্বাভিমুখীরেখাঐসমতলেঅঙ্কিতকরাহলো।

মনেকরুন P, Q, R, ... বলসমূহ $\overrightarrow{OX}$-এরসহিতযথাক্রমে α, β, γ,..... কোণউৎপন্ন করে।ধরুন, বলসমূহেরলব্ধি F এবং এটি OX-এরসাথে θ কোণউৎপন্ন করে।তাহলে $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ বরাবরলব্ধি F এরলম্বাংশকযথাক্রমে $F\cos\theta$ এবং $F\sin\theta$।



আবার, $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$-এর দিক বরাবর P, Q, R বলসমূহকে বিশ্লেষণ করলে এদের লম্বাংশকসমূহের সমষ্টি নিয়ে পাই,

$P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma + \ldots\ldots = F\cos\theta = X$ (ধরুন)

$P\sin\alpha + Q\sin\beta + R\sin\gamma + \ldots\ldots = F\sin\theta = Y$ (ধরুন)

কিন্তু আমরা জানি একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল যেকোনো সংখ্যক বলেরলম্বাংশকসমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টি ঐ একই দিকে এদের লব্ধির লম্বাংশকের সমান।

এখন OX বরাবরবলগুলোরলম্বাংশকনিলেপাই, $F\cos\theta = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma + \ldots\ldots = X$ (ধরুন)

$\therefore F\cos\theta = X$ ---------- (i)

এবং OY বরাবরবলগুলোরলম্বাংশকনিলেপাই, $F\sin\theta = P\sin\alpha + Q\sin\beta + R\sin\gamma + \ldots\ldots = Y$ (ধরুন)

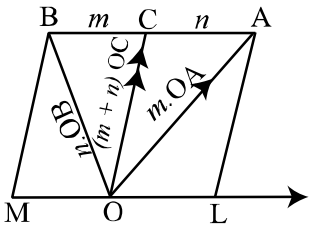
$\therefore F\sin\theta = Y$ ---------- (ii)

(i)এবং(ii)-এরবর্গেরসমষ্টিনিয়েপাই, $F^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = X^2 + Y^2 \therefore F = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ---------- (iii)

আবার, (ii)-কে(i)দ্বারাভাগকরেপাই, $\tan\theta = \frac{Y}{X}$ বা, $\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$ ---------- (iv)

সমীকরণ(iii) হতেবলসমূহেরলব্ধি F-এরমানএবং(iv)হতেলব্ধিএরদিকপাওয়াযাবে।

Oবিন্দুতে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ বরাবরক্রিয়াশীলদুইটিবলেরমানযথাক্রমে m. $\overrightarrow{OA}$ এবং $n.\overrightarrow{OB}$ দ্বারা সূচিত হলেএদেরলব্ধি $\overrightarrow{OC}$ বরাবরক্রিয়াশীলহবেএবংএরমান $(m+n)$ $\overrightarrow{OC}$ হবে, যেখানে $\overrightarrow{AB}$ -এরউপর C অবস্থিতএবং $m.\overrightarrow{AC} = n.\overrightarrow{BC}$. অর্থাৎ C বিন্দুটি $\overrightarrow{AB}$ কে n:m অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



প্রমাণ: মনে করুন, O বিন্দু দিয়ে $\overrightarrow{BA}$ -র সমান্তরাল করে $\overrightarrow{ML}$ অঙ্কন করা হল এবং $OCAL$ ও $OCBM$ সামান্তরিকদ্বয় সম্পূর্ণ করা হলো। এখন $\overrightarrow{OA}$ বরাবর ক্রিয়াশীল $m.\overrightarrow{OA}$ বলের উপাংশ $m.\overrightarrow{OL}$ এবং $m.\overrightarrow{OC}$ যথাক্রমে $\overrightarrow{OL}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

আবার $\overrightarrow{OB}$ বরাবরক্রিয়াশীল $n.\overrightarrow{OB}$ বলেরউপাংশ $n.\overrightarrow{OM}$ এবং $n.\overrightarrow{OC}$ যথাক্রমে $\overrightarrow{OM}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।যেহেতু, $m.\overrightarrow{AC} = n.\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LO}$ ও $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MO}$, $\therefore m.\overrightarrow{OL} = n.\overrightarrow{OM}$

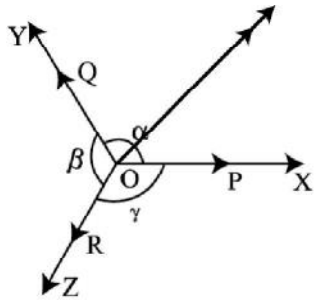
সুতরাং $m.$ $\overrightarrow{OA}$-এরউপাংশ $\overrightarrow{OL}$ বরাবরএবং $n.\overrightarrow{OB}$-এরউপাংশ $\overrightarrow{OM}$ বরাবরমানেসমান, কিন্তুবিপরীতদিকেক্রিয়াশীল।সুতরাং $m.\overrightarrow{OA}$ এবং $n.\overrightarrow{OB}$ বলেরলব্ধি $(m+n).\overrightarrow{OC}$ এবংতা $\overrightarrow{OC}$ বরাবরক্রিয়াশীল।

মন্তব্য: $m=n=1$ হলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$ অর্থাৎ $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ বলদুইটির লব্ধির ক্রিয়া রেখা ΔOAB এর AB বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা বরাবর ক্রিয়া করে এবং লব্ধির মান হবে মধ্যমাটির দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ।

উদাহরণ 1: একই কণায় যুগপৎ ক্রিয়ারত সামতলিক তিনটি বল P, Q ও R পরস্পরের সাথে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করুন, তাদের লব্ধি $= (P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\alpha + 2QR\cos\beta + 2RP\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}$

সমাধান: মনে করুন P বলের ক্রিয়ারেখা OX বরাবর ক্রিয়াশীল সুতরাং OX রেখা P, Q এবং R-বলের ক্রিয়ারেখার সাথে যথাক্রমে $0°$, α এবং $(2\pi - \gamma)$ কোণ উৎপন্ন করে।

মনে করুন, P, Q, R বল তিনটির লব্ধি F যা $\overrightarrow{OX}$-এর সাথে অর্থাৎ P-এর ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।
আমরা জানি যেকোনো নির্দিষ্ট দিকে দুই বা ততোধিক বলের উপাংশের বীজগণিতীয় সমষ্টি ঐ একই দিকে তাদের লব্ধির উপাংশের সমান। সুতরাং মনে করুন, P, Q, R বল ত্রয় চিত্রানুসারে যথাক্রমে $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এবং $\overrightarrow{OZ}$ বরাবর ক্রিয়াশীল।

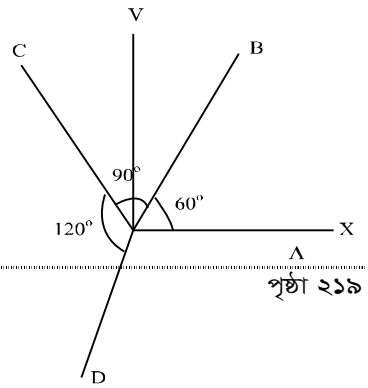


$F\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos\alpha + R\cos(2\pi - \gamma)$
$= P + Q\cos\alpha + R\cos\gamma$ ---------- (i)
আবার, $F\sin\theta = P\sin 0° + Q\sin\alpha + R\sin(2\pi - \gamma)$
$= Q\sin\alpha - R\sin\gamma$ ---------- (ii)
এখন, $(i)^2 + (ii)^2$ থেকে পাই,
$F^2 = (P + Q\cos\alpha + R\cos\gamma)^2 + (Q\sin\alpha - R\sin\gamma)^2$
$= P^2 + Q^2\cos^2\alpha + R^2\cos^2\gamma + 2PQ\cos\alpha + 2PR\cos\gamma + 2QR\cos\gamma\cos\alpha + Q^2\sin^2\alpha + R^2\sin^2\gamma - 2QR\sin\alpha\sin\gamma$
$= P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\alpha + 2PR\cos\gamma + 2QR\cos(\alpha + \gamma)$
$= P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\alpha + 2PR\cos\gamma + 2QR\cos\beta \quad [\because \alpha + \beta + \gamma = 2\pi]$
$\therefore F = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\alpha + 2QR\cos\beta + 2PR\cos\gamma}$
অর্থাৎ, $F = (P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\cos\alpha + 2QR\cos\beta + 2PR\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}$

শিক্ষার্থীর কাজ	একটি কণার উপর 10N এবং 6N বল পরস্পরের লম্বাভিমুখে একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং একটি 8N এদের অন্তর্বর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ক্রিয়া করছে; ক্রিয়াশীল বিন্দুটি হতে বহির্মুখী যে বলত্রয়কে সাম্যাবস্থায় রাখতে পারে তার মান নির্ণয় করুন। উত্তর: $P = \sqrt{200 + 128\sqrt{2}}$ N

উদাহরণ 2: একই সমতলে অবস্থিত $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ রেখা বরাবর P, $3P$, $\sqrt{3}P$, $\sqrt{3}P$ মানের বলগুলো ক্রিয়া করে। যদি $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = 90°$ এবং $\angle COD = 120°$ হয়, তাহলে বলসমূহের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন P, $3P$, $\sqrt{3}P$, $\sqrt{3}P$ যথাক্রমে OA, OB, OC ও OD অভিমুখে ক্রিয়াশীল।
ধরুন বলগুলো লব্ধি F যা OX বা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।
OX এবং OY বরাবর লম্বাংশের মান যথাক্রমে $F\cos\theta$ এবং $F\sin\theta$ হলে,



$F\cos\theta = P\cos0° + 3P\cos60° + \sqrt{3}P\cos150° + \sqrt{3}\,P\cos270°$

$= P + 3P.\frac{1}{2} - \sqrt{3}\,P.\frac{\sqrt{3}}{2} = P$ ----------(i) [$\because \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

এবং $\cos 270° = 0$]

এবং $F\sin\theta = P\sin0° + 3P\sin60° + \sqrt{3}P\sin150° + \sqrt{3}P\sin270°$

$= 3P\times\frac{1}{2} - \sqrt{3}P\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\,P\times 1 = \frac{3P}{2} - \frac{3P}{2} + \sqrt{3}P = \sqrt{3}P$ ----------(ii)

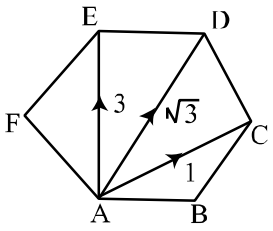
$\therefore F^2 = P^2 + (\sqrt{3}\,P)^2 = 4P^2 \therefore F = 2P$এবং $\tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60° \therefore \theta = 60°$

উদাহরণ 3: $ABCDEF$একটি সুষম ষড়ভুজের উপর 1, $\sqrt{3}$ এবং 3 মানের তিনটি বল যথাক্রমে $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{AE}$ বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল। লব্ধির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানিকোনো সুষম ষড়ভুজের ক্ষেত্রে $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \angle EAF = 30°$;

সুতরাং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AE}$ পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। ধরুন বলসমূহের লব্ধি F যা$\overrightarrow{AC}$ এর সাথে θকোণে ক্রিয়াশীল।

এখন $\overrightarrow{AC}$ এবং তার লম্বাভিমুখে বলগুলোকে বিশ্লেষণ করে।



$F\cos\theta = X = 1\,.\cos0° + \sqrt{3}\cos30° + 3\cos60°$

$= 1 + \sqrt{3}\,.\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\times\frac{1}{2} = 4$ ---------- (i)

এবং $F\sin\theta = Y = 1\sin0° + \sqrt{3}\sin30° + 3\sin60°$

$= 0 + \sqrt{3}\,.\frac{1}{2} + 3.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ---------- (ii)

(i) এবং (ii)-এর বর্গের সমষ্টি নিয়ে পাই,

$F^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 + 12 = 28 \quad \therefore F = 2\sqrt{7}$

সারসংক্ষেপ

- সাধারণতঃ একটি নির্দিষ্ট বলকে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করলে যে দুইটি উপাংশ বা অংশক বল পাওয়া যায় তাকে **লম্বাংশ বা লম্বাংশক** বল বলা হয়।
- Rবলের লম্বাংশক বা বিশ্লেষিত অংশটি আনুভূমিক অংশবরাবর $=R\cos\theta$এবং উলম্ব অংশ বরাবর $=R\sin\theta$
- একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি সমবিন্দু বলের যেকোনো নির্দিষ্ট দিক বরাবর লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফল ঐ একই দিকে বলগুলোর লব্ধির লম্বাংশকের সমান।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৬

1. উল্লম্বদিকেরসাথে60°কোণেনতএকটিবলেরউল্লম্বদিকেরবিশ্লেষিতাংশ5N; বলটিএবংতারআনুভূমিকদিকেরবিশিষ্টাংশনির্ণয়করুন।
2. ABCত্রিভুজেরA, B, Cকৌণিকবিন্দুরভিতরদিয়েক্রিয়াশীলতিনটিবলবিপরীতবাহুরলম্বাভিমুখেএবংবলগুলোর মানযথাক্রমেকোণগুলোরকোসাইনেরঅনুপাতে।দেখানযেলব্ধি$(1 - 8\cos A\cos B\cos C)^{\frac{1}{2}}$ -এরঅনুপাতে।
3. তিনটিসম-পরিমাণবলP, ΔABC-র$\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ -রবাহুরসমান্তরালভাবেএকটিকণারউপরক্রিয়াশীল।প্রমাণকরুনযেএইতিনটিবলেরলব্ধিP $\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$
4. সুষমষড়ভুজেরএকটিকৌণিকবিন্দুতেঅপরপাঁচটিকৌণিকবিন্দুরদিকেযথাক্রমে2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$ এবং2Nবিশিষ্টবলপ্রযুক্তহয়েছে।তাদেরলব্ধিরমানওদিকনির্ণয়করুন।

5. একটিসমবাহুত্রিভুজেরক্রমানুসারেগৃহীতবাহুগুলোরসমান্তরালভাবেযথাক্রমে$2P$, $3P$ও$4P$বলএকটিবিন্দুতেসক্রিয় ।তাদেরলব্ধিরমানওদিকনির্ণয়করুন ।
6. $P–Q$, Pএবং$P + Q$বল তিনটিএকটিবিন্দুতেক্রিয়াকরে; তাদেরদিকএকটিসমবাহুত্রিভুজেরক্রমানুসারেগৃহীততিনটিবাহুরসমান্তরাল হলে বলত্রয়েরলব্ধিনির্ণয়করুন ।

পাঠ ৭.৭ বলজোটের সাম্যাবস্থা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোনো কণাতে ক্রিয়াশীল বলজোটের সাম্যাবস্থা কী তা বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- কোনো কণাতে ক্রিয়াশীল সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার প্রয়োজনীয় শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন,
- সাম্যাবস্থায় বলের ত্রিভুজ সূত্র ও তার বিপরীত সূত্রের বর্ণনা ও প্রমাণ করতে পারবেন,
- সূত্রগুলো প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বলজোট, সাম্যাবস্থা, ত্রিভুজ সূত্র

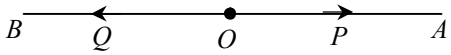
মূলপাঠ

বলজোটের সাম্যাবস্থা

একইবিন্দুতেক্রিয়ারতকোনকণারউপরকতগুলোবলক্রিয়াশীলথাকলেযদিবস্তুকণাটিতেকোনপ্রকারগতিরসৃষ্টিনাহয়অর্থাৎবস্তুকণাটিস্থিরথাকেতবেবলগুলো**সাম্যাবস্থায়**থাকবে ।এক্ষেত্রেক্রিয়ারতবলগুলোরলব্ধিশূন্যহবে ।সমবিন্দুবলসাম্যাবস্থায়থাকলে, এদেরযেকোনএকটিবলেরমানঅপরবলগুলোরলব্ধিরসমানওবিপরীতমুখীহবে ।সাম্যাবস্থায়থাকলেবলগুলোরলব্ধিশূন্যহওয়ায়যেকানরেখাবরাবরলব্ধিরলম্বাংশকশূন্যহবে ।সুতরাংপ্রদত্তবলগুলোরলম্বাংশকেরবীজগণিতীয়যোগফলওশূন্যহবে ।

দুটিবলেরক্ষেত্রেসাম্যাবস্থা:

মনেকরুনOবিন্দুতেক্রিয়াশীলP ওQবলদ্বয়একইরেখাAOBএরOAওOBবরাবরকার্যরত ।বলদ্বয়েরলব্ধিRহলে, $R = P - Q$ $(P>Q)$



সাম্যাবস্থায়লব্ধিবল$R = 0$, এক্ষেত্রে$P = Q$

অর্থাৎএকইবিন্দুতেদুটিসমানবলপরস্পরবিপরীতদিকেক্রিয়াশীলহলেএরাসাম্যাবস্থায়থাকবে ।সুতরাংকোনবিন্দুতেকোনবস্তুকণারউপরদুটিসমানওবিপরীতমুখীবলক্রিয়াশীলথাকলেবস্তুকণাটিসাম্যাবস্থায়থাকবে ।

একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল কয়েকটি সামতলিক বলের সাম্যাবস্থার শর্ত

কোনো বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল একাধিক বলের লব্ধি শূন্য হলে বলগুলো সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। বলের সাম্যাবস্থা বিভিন্নভাবে হতে পারে।

যেমন: (i)দুইটি সমান বিপরীতমুখী সমতলীয় বল কোনো বস্তুকণার উপর ক্রিয়া করলে বল দুইটি সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। (ii) কোনো বস্তুকণার উপর দুইয়ের অধিক ক্রিয়াশীল সমতলীয় বল যদি ক্রিয়াশীল বলের সমসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট কোনো বহুভুজ দ্বারা একই ক্রমে সূচীত করা যায় তাহলে বলগুলো সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। (iii) ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে যদি প্রত্যেকটি বল অপর দুইটি বলের অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হয়। আবার তিনটি বলের যেকোনো দুইটি বলের লব্ধি তৃতীয়টির সমান ও বিপরীত হলেও বলত্রয় সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে।

মনে করুন Oবিন্দুতে ক্রিয়াশীল কয়েকটি বলের লব্ধি Fএবংপরস্পর লম্বচ্ছেদী $\overrightarrow{OX}$ও $\overrightarrow{OY}$বরাবর প্রত্যেকটি বলের লম্বাংশক নির্ণয় করা হলো। মনে করুন $\overrightarrow{OX}$বরাবর বলগুলোর লম্বাংশকের বীজগণিতীয় সমষ্টি Xএবং $\overrightarrow{OY}$বরাবর বলগুলোর লম্বাংশকের বীজগণিতীয় সমষ্টি Y। তাহলে, $F^2 = X^2 + Y^2$

এখন যদি লব্ধি বল $F = 0$ হয়, অর্থাৎ বলগুলো সাম্যবস্থায় থাকে তাহলে, $X^2 + Y^2 = 0$। কিন্তু X^2ও Y^2উভয়েই বর্গসংখ্যা এবং বর্গসংখ্যা মাত্রই ধনাত্মক। কাজেই এদের সমষ্টি একমাত্র তখনই শূন্য হবে, যখন এরা প্রত্যেকে স্বতন্ত্রভাবে শূন্য হয়, অর্থাৎ যখন $X = 0$ এবং $Y = 0$ হয়।

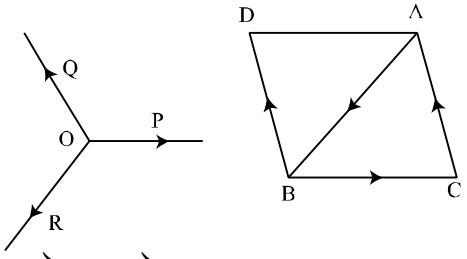
সুতরাং বলগুলোর সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত, (i) $X = 0$ এবং (ii) $Y = 0$.

একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল কতকগুলো সামতলিক বলের সাম্যাবস্থার জন্য ঐ বিন্দু দিয়ে পরস্পরের লম্ব-অভিমুখে যেকোনো দুইদিকে ঐ বলগুলোর লম্বাংশকের বীজগণিতীয় সমষ্টি স্বতন্ত্রভাবে শূন্য হওয়াই প্রয়োজনীয় শর্ত।

বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ-সূত্র (Triangle law of forces of equilibrium)

কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি সমতলীয় বলের মান ও দিক যদি কোনো ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা দিকেও মানে সূচিত হয়, তাহলে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

প্রমাণ:মনে করুনP, Q ও Rমানের তিনটি সমতলীয় বল একটি বিন্দু O-তে ক্রিয়া করছে এবং তাদের মান ও দিক ABCত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু BC, CA, AB-র দ্বারা নির্দেশিত। প্রমাণ করতে হবে, P, Qও Rমানের বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।



$BCAD$সামান্তরিক সম্পূর্ণ করা হলো। $\overrightarrow{BD}$রেখা $\overrightarrow{CA}$রেখার সমান ও সমান্তরাল। অতএব $\overrightarrow{BD}$রেখাংশQবলের মান ও দিক নির্দেশ করে। এখন $BCAD$সামান্তরিকের $\overrightarrow{BC}$এবং $\overrightarrow{BD}$বাহু Pএবং Qবলের মান ও দিক নির্দেশ করে। অতএব বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে BAরেখাংশ Pএবং Qবলের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে। কিন্তু Oবিন্দুতে প্রযুক্তRবলের মান ও দিক $\overrightarrow{AB}$রেখাংশ দ্বারা নির্দেশিত হয়। সুতরাং Pএবং Qবলের লব্ধি Rবলের সমান ও বিপরীতমুখী। অতএব P, Qও Rবল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

ভেক্টর পদ্ধতি: এখানে $P = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, $Q = \left|\overrightarrow{CA}\right|$ ও $R = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

সুতরাং ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$বা, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = 0$ $[\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}]$

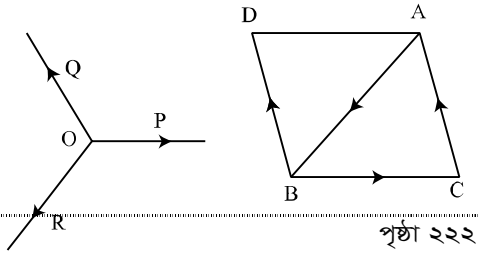
সুতরাং বল তিনটি সাম্যবস্থায় থাকবে।

মন্তব্য:বল তিনটি কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে,কিন্তু ত্রিভুজের তিনটি বাহু বরাবর ক্রিয়া করে না। ত্রিভুজের বাহু বরাবর ক্রিয়া করলে বলত্রয় সাম্যবস্থায় সৃষ্টি করতে পারে না।

বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ-সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of the Law of triangle of forces of Equilibium)

কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যবস্থার সৃষ্টি করলে বল তিনটির মান, দিক ও অভিমুখিতা একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যাবে।

প্রমাণ:মনে করুনO বিন্দুতে ক্রিয়াশীলP, Qও R তিনটি বল O বিন্দুতে সাম্যবস্থায় আছে।প্রমাণকরতেহবেযে, তাদেরমানওদিকএকইক্রমেকোনত্রিভুজেরতিনটিবাহুদ্বারাসূচিতকরাযাবে।



P ও Qবলের মান, দিক ও অভিমুখিতা নির্দেশ করে এরূপ নির্দিষ্ট স্কেল অনুযায়ী P ও Q-এর সমান্তরাল করে যথাক্রমে $\overrightarrow{BC}$ও $\overrightarrow{CA}$রেখাংশ অঙ্কন করুন এবং $BCAD$সামান্তরিক অঙ্কন করে এর কর্ণ $\overrightarrow{BA}$টানুন।

এক্ষণে BDও CAসমান ও সমান্তরাল হওয়ায়$\overrightarrow{BD}$রেখাংশ দ্বারা Q বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা নির্দেশ করবে। আবার BCও BDদ্বারা P ও Qবল দুইটি নির্দেশিত হওয়ায়, সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী কর্ণ $\overrightarrow{BA}$তাদের লব্ধি নির্দেশ করবে। কিন্তু যেহেতু P, Qও Rবলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং Rবলটি P ও Q-এর লব্ধিবলের সমান এবং বিপরীতমুখী হবে। অতএব ABকর্ণ লব্ধি Rএর মান, দিক এবং অভিমুখিতা নির্দেশ করবে।

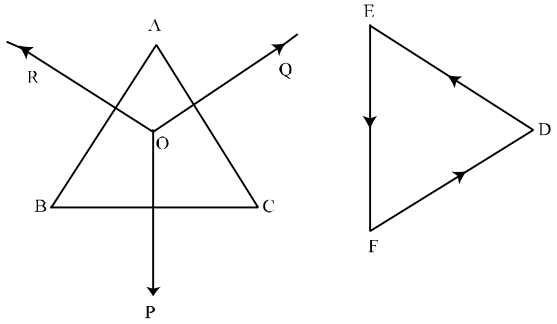
সুতরাং আমরা ABC এমন একটি ত্রিভুজ পাই যার $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ও $\overrightarrow{AB}$বাহুগুলো যথাক্রমে P, Qও Rবলগুলো নির্দেশ করবে। সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

মন্তব্য: একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সাম্যাবস্থা উৎপন্নকারী তিনটি বল এদের ক্রিয়ার রেখার সমান্তরাল বাহু বিশিষ্ট যেকোনো ত্রিভুজের অনুসঙ্গীবাহুর একই ক্রমে দৈর্ঘ্যের সমানপাতিক।

তিনটি বলের লম্বাভিমুখী ত্রিভুজ (Perpendicular triangle of three forces)

একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল যদি কোনো ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহুর সমানুপাতিক হয় এবং ঐ বাহুগুলোর লম্বাভিমুখী (প্রত্যেকেই অন্তর্মুখী অথবা প্রত্যেকেই বহির্মুখী) ক্রিয়াশীল হয়, তাহলে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

প্রমাণ:মনে করুনP, Q ও Rবল তিনটি ABCত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে BC, CA ও AB-এর সমানুপাতিক এবং বাহুগুলো লম্বাভিমুখী। ABCত্রিভুজটিকে এক সমকোণে ঘুরালে DEFত্রিভুজটি পাওয়া যাবে। এই ত্রিভুজের বাহুগুলো ক্রমানুসারে P, Q ও Rবলগুলোর সমান্তরাল হবে। অতএব বাহুগুলোP, Q ও Rবলগুলোকে মানে ও দিকে প্রকাশ করবে। সুতরাং বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে।

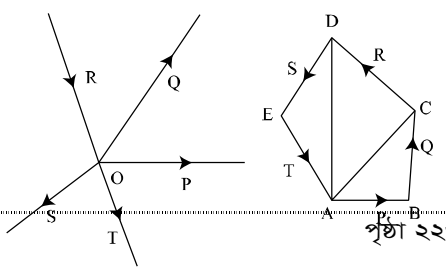


সাম্যাবস্থায়বলের বহুভুজ সূত্র (Polygon law of equilibrium forces)

কোনো বিন্দুতে প্রযুক্ত বহুসংখ্যক বলের মান ও দিক যদি একটি বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুসমূহের দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহলে ঐ বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকবে।

প্রমাণ: মনে করুন P, Q, R, Sও TবলগুলোOবিন্দুতে ক্রিয়াশীল রয়েছে এবং এ বলগুলোকে $ABCDE$বহুভুজের গৃহীত বাহু $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$দ্বারা ক্রমানুসারে এদের মান ও দিক নির্দেশিত করে। প্রমাণ করতে হবে যে, বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে। A,CওA,Dযুক্ত করা হলো।

যদি Pএবং Q বলের মান ও দিক ABএবং BCরেখা দ্বারা সূচিত হয়, তবে ACদ্বারা এই দুই বলের লব্ধি বল R_1এর মান ও দিক নির্দেশ করে। এই R_1বল Oবিন্দুর ভিতর দিয়ে যায়। আবার R_1এবং Rবলের লব্ধি R_2বলের মান ও দিক ADরেখার দ্বারা সূচিত হয়, অর্থাৎ ADরেখা P, Qও Rবলের



লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে এবং এই লব্ধি বল Oবিন্দুর ভিতর দিয়ে যায়।

এভাবে P, Q, Rও Sবলের লব্ধির মান ও দিক AEরেখার দ্বারা নির্দিষ্ট হয়।

এই লব্ধিবল Oবিন্দুর ভিতর দিয়ে যায়। কিন্তু Oবিন্দুতে ক্রিয়াশীল অবশিষ্ট Rবলের মান ও দিক EAরেখার দ্বারা নির্দিষ্ট হয়েছে।

সুতরাং এটি P, Q, Rও Sবলের লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী। অতএব বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

বল-বহুভুজের বিপরীত প্রতিজ্ঞা

দুইয়ের অধিক সমবিন্দু কতকগুলো বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে একটি পূর্ণ বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলো দ্বারা তাদেরকে দিকে ও মানে নির্দেশিত করা যাবে।

P, Q, R, Sও Tবলগুলো যেন Oবিন্দুতে ক্রিয়াশীল ও বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে (চিত্র নিজে অঙ্কন করুন)।

প্রমাণ করতে হবে যে, ঐ বলগুলোকে একটি পূর্ণ বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলো দ্বারা দিকে ও মানে নির্দেশিত করা যাবে।

P, Q, Rও Sবলের সমান্তরাল করে পরপর AB, BC, CDও DEরেখাগুলো এমনভাবে অঙ্কিত যে, এরা যথাক্রমে ঐ বলগুলোর মান সূচিত করে। সুতরাং ABও BCরেখা দ্বারা যথাক্রমে P ও Qবলের লব্ধি ACদ্বারা নির্দেশিত হয়; ACদ্বারা নির্দেশিত বল এবং CDদ্বারা নির্দেশিত Rবলের লব্ধি AE। সুতরাং P, Q, R ও Sবলের লব্ধিই AE দ্বারা নির্দেশিত হবে। যেহেতু বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে, সেজন্য AE দ্বারা নির্দেশিত বল নিশ্চয়ই অবশিষ্ট Tবলের সমান ও বিপরীতমুখী। সুতরাং EA অবশ্যই Tবলকে নির্দেশিত করবে।

এভাবে প্রমাণ হয় যে, সাম্যাবস্থায় ও সমবিন্দু P, Q, R, Sও Tএই বল কয়টিকে $ABCDE$বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলোর দ্বারা দিকে ও মানে নির্দেশিত করা যায়।

মন্তব্য: বলের বহুভুজের সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা ত্রিভুজ-সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞার ন্যায় ব্যাপক সত্য নয়। কোনো বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটির অধিক সংখ্যক বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে তাহলে ঐ বলসমূহের মান ও দিক নির্দিষ্ট হতে পারে এরূপ বাহু-বিশিষ্ট একটি বহুভুজ অঙ্কন করা যায়। কিন্তু ঐ বলসমূহের সমান্তরাল বাহু বিশিষ্ট যেকোনো বহুভুজের বাহুসমূহ এই বলসমূহের নির্দেশক হতে পারে না।

উদাহরণ 1: (i) 3, 7, 10; (ii) 5, 7, 10; (iii) 5, 7, 15 অনুপাতের বল তিনটি একটি কণাকে স্থিরাবস্থায় রাখতে পারে কি? উত্তরের স্বপক্ষে কারণ প্রদর্শন করুন।

সমাধান: (i) এখানে বলত্রয়ের অনুপাত 3 ঃ 7 ঃ 10 সুতরাং ধরুন বলসমূহ যথাক্রমে $3K$, $7K$, এবং $7K$। তাহলে $3K$, $7K$, $10K$বলত্রয় কোনো কণার উপর ক্রিয়াশীল হয়ে কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকবে। যখন $3K$, $7K$বল একই দিকে ক্রিয়া করে এবং তাদের লব্ধি বল $10K$বিপরীত দিকে।

(ii) $5K$, $7K$, $10K$বল প্রযুক্ত হয়ে কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকতে পারে। কারণ এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যেতে পারে যার ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু তিনটি বল তিনটিকে প্রদর্শন করবে।

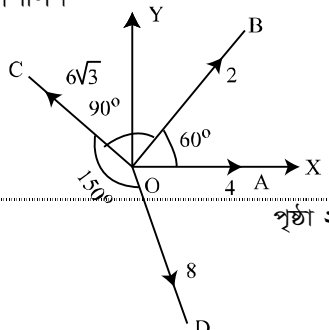
(iii) $5K$, $7K$, $15K$বল প্রযুক্ত হয়ে বলটি স্থিরাবস্থায় থাকতে পারে না। কারণ $5K$ ও $7K$বল দুইটির যোগফল $15K$অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলে এক রেখায় তারা ক্রিয়া করলেও সাম্যাবস্থায় থাকে না। আবার এমন ত্রিভুজ অঙ্কন করাও অসম্ভব, কেননা ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

উদাহরণ 2:একটি বিন্দুতে চারটি সামতলিক বল 4, 2, $6\sqrt{3}$এবং 8 ক্রিয়াশীল, যেখানে একই ক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয়, দ্বিতীয় ও তৃতীয় এবং তৃতীয় ও চতুর্থ বলের মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে 60°, 90°ও 150°; দেখান যে, বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।

সমাধান: মনে করুন, বলসমূহ O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং প্রথম বলটি OXবরাবর ক্রিয়াশীল।

এখন OXবরাবর এ বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় যোগফল

$= 4\cos 0° + 2\cos 60° + 6\sqrt{3}\cos(90° + 60°) + 8\cos(60° + 90° + 150°)$



$= (4 + 1 - 9 + 4) = 0$

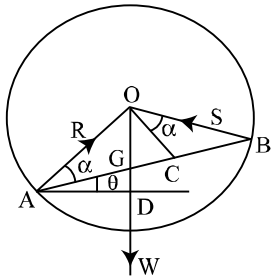
এখন OX-এর লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশের বীজগণিতীয় সমষ্টি

$= 4 \sin 0° + 2 \sin 60° + 6\sqrt{3} \sin (90° + 60°) + 8 \sin (60° + 90° + 150°)$

$= (\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) = 0$

সুতরাং বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

উদাহরণ3: একটি দন্ডের ভারকেন্দ্র দণ্ডটিকে a এবং b অংশে বিভক্ত করে। একে একটি মসৃণ গোলকের মধ্যে রাখা হল। যদি সাম্যাবস্থায় দণ্ডটি ভূমির সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে এবং গোলকের কেন্দ্রে 2α কোণ তৈরি করে, তবেপ্রমাণ করুন যে, $\tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$



সমাধান: মনে করুন, দণ্ডটি AB এবং এটি O কেন্দ্র বিশিষ্ট গোলকের মধ্যে ভূমির সাথে θ কোণে অবস্থিত। দণ্ডটির A এবং B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R এবং S যথাক্রমে AO এবং BO বরাবর ক্রিয়ারত। দণ্ডটির ওজন W দণ্ডটির G-বিন্দুতে খাঁড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করবে। যেহেতু দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং W এর ক্রিয়া রেখা O বিন্দুগামী হবে।

এখন, $AG = a$, $BG = b$, $\angle AOC = \angle BOC = \alpha$, $\angle BAD = \theta$

$\therefore \angle COG = 90° - \angle AGD = \theta$

সুতরাং, $\frac{a}{b} = \frac{AG}{BG} = \frac{AC - CG}{BC + CG} = \frac{OC\tan\angle AOC - OC\tan\angle COG}{OC\tan\angle BOC - OC\tan\angle COG} = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{\tan\alpha + \tan\theta}$

$\Rightarrow a\tan\alpha + a\tan\theta = b\tan\alpha - b\tan\theta \Rightarrow (b+a)\tan\theta = (b-a)\tan\alpha$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$

সারসংক্ষেপ

- একইবিন্দুতেক্রিয়ারতকোনকণারউপরকতগুলোবলক্রিয়াশীলথাকলেযদিবস্তুকণাটিতেকোনপ্রকারগতিরসৃষ্টিনাহয়অর্থাৎবস্তুকণাটিস্থিরথাকেতবেবলগুলোসাম্যাবস্থায়থাকবে।এক্ষেত্রেক্রিয়ারতবলগুলোরলব্ধিশূন্যহবে।
- সাম্যাবস্থায়থাকলেবলগুলোরলব্ধিশূন্যহওয়ায়যেকোনরেখাবরাবরলব্ধিরলম্বাংশকশূন্যহবে।সুতরাংপ্রদত্তবলগুলোরলম্বাংশকেরবীজগণিতীয়যোগফলওশূন্যহবে।
- কোনো বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল একাধিক বলের লব্ধি শূন্য হলে বলগুলো সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। বলের সাম্যাবস্থা বিভিন্নভাবে হতে পারে।
- (i) দুইটি সমান বিপরীতমুখী সমতলীয় বল কোনো বস্তুকণার উপর ক্রিয়া করলে বল দুইটি সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে।
  (ii) কোনো বস্তুকণার উপর দুইয়ের অধিক ক্রিয়াশীল সমতলীয় বল যদি ক্রিয়াশীল বলের সমসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট কোনো বহুভুজ দ্বারা একই ক্রমে সূচীত করা যায় তাহলে বলগুলো সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে।
  (iii) ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে যদি প্রত্যেকটি বল অপর দুইটি বলের অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হয়। আবার তিনটি বলের যেকোনো দুইটি বলের লব্ধি তৃতীয়টির সমান ও বিপরীত হলেও বলত্রয় সাম্যাবস্থার সুষ্টি করে।
- একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল কতকগুলো সামতলিক বলের সাম্যাবস্থার জন্য ঐ বিন্দু দিয়ে পরস্পরের লম্ব-অভিমুখে যেকোনো দুইদিকে ঐ বলগুলোর লম্বাংশকের বীজগণিতীয় সমষ্টি স্বতন্ত্রভাবে শূন্য হওয়াই প্রয়োজনীয় শর্ত।
- বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্র: কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি সমতলীয় বলের মান ও দিক যদি কোনো ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা দিকেও মানে সূচিত হয়, তাহলে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।
- বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্র: কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যবস্থার সৃষ্টি করলে বল তিনটির মান, দিক ও অভিমুখিতা একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যাবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৭

1. $ABCDE$একটি সুষম পঞ্চভুজ। এক বিন্দুতে প্রযুক্ত বলগুলোর মান ও দিক যথাক্রমে AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CEএবং DEদ্বারা প্রকাশিত হলে, প্রমাণ করুন যে এদের লব্ধির মান হবে $4AE + 2BD$।
2. ত্রিভুজ সূত্র হতে প্রমাণ করুন যে, যদি তিনটি বল একটি বিন্দু O-তে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় থাকে এবং বলগুলো পরস্পরের সাথে $120°$ কোণ করে, তবে বলগুলো সমান।
3. একটি চতুর্ভুজে একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত বলগুলোর মান ও দিক যথাক্রমে AB, $2BC$, $2CD$, DAও DB দ্বারা প্রকাশিত হলো। দেখান যে বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।
4.(i) 5N, 7Nও 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে 8Nও 5N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

(ii) কোনো বিন্দুতে 1, 2 ও$\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৭.৮ সাম্যাবস্থার লামির উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- লামির উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ করতে পারবেন,
- লামির উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ করতে পারবেন,
- সূত্রগুলো ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	লামির উপপাদ্য

মূলপাঠ

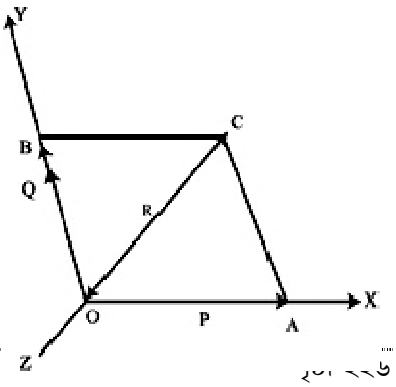
লামির উপপাদ্য (Lami's Theorem)

কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি সমতলীয় বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তাহলে প্রত্যেকটি বলের মান অপর দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণের সাইনের সমানুপাতিক হবে।

প্রমাণঃ মনে করুন O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P, Q এবং Rমানের বল তিনটি যথাক্রমে OX, OY, OZবরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{P}{\sin QOR} = \frac{Q}{\sin ROP} = \frac{R}{\sin POQ}$

এখন OX এবংOY রেখাংশ হতে OAএবং OB অংশ এমন স্কেলে কেটে নিন যেন $\overrightarrow{OA}$এবং $\overrightarrow{OB}$ দৈর্ঘ্য দ্বারা P এবং Qবল দুইটি দিকে ও মানে নির্দেশ করে। $OACB$সামান্তরিক সম্পূর্ণ করুন এবং OCযুক্ত করুন।

এখন বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OCরেখা Pএবং Qবলের লব্ধি নির্দেশ করে।



কিন্তু যেহেতু P, Qএবং Rবলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। অতএব Rবল Pএবং Qবলের লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী। সুতরাং COরেখা Rবলকে নির্দেশ করে। আবার ACরেখা OB-র সমান ও সমান্তরাল বলে ACরেখা Qবলের মান ও দিক নির্দেশ করে।

এখন OACত্রিভুজ হতে, $\frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin COA} = \frac{CO}{\sin CAO}$

কিন্তু $\sin OCA = \sin COB = \sin(180° - QOR) = \sin QOR$

$\sin COA = \sin ROP$এবং$\sin CAO = \sin(180° - \angle POQ) = \sin POQ$

আবার OA, AC ও COযথাক্রমে, P, Qও Rবলের মান ও দিক নির্দেশ করে।

$\therefore \frac{P}{\sin QOR} = \frac{Q}{\sin ROP} = \frac{R}{\sin POQ}$

সুতরাং প্রত্যেক বলের মান অপর বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

ভেক্টর পদ্ধতি:যেহেতু $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং $\overline{P} + \overline{Q} + \overline{R} = \overline{0}$

$\overline{\text{R}}$ দ্বারা উভয় পক্ষে ভেক্টর গুণন করে $\overline{R} \times \overline{P} + \overline{R} \times \overline{Q} + \overline{R} \times \overline{R} = \overline{R} \times 0$

বা, $\overline{R} \times \overline{P} - \overline{Q} \times \overline{R} + 0 = 0$ [$\because \overline{R} \times \overline{R} = |\overline{R}||\overline{R}| \sin 0° n = 0$]

বা, $\overline{R} \times \overline{P} = \overline{Q} \times \overline{R}$বা, $|\overline{R}||\overline{P}| \sin(R \wedge P)\,\hat{n} = |\overline{Q}||\overline{R}| \sin(Q \wedge R)\,\hat{n}$

এখানে $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যার দিক বলগুলোর সমতলের সাথে লম্ব।

$\therefore \frac{P}{\sin(Q \wedge R)} = \frac{Q}{\sin(R \wedge P)}$বা, $\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX}$

একইভাবে দেখানো যায়, $\frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$ $\therefore \frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$

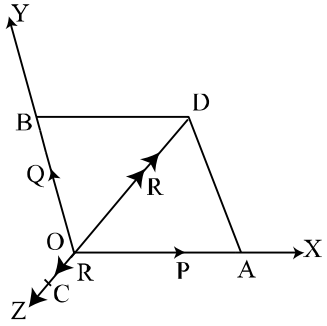
সুতরাং প্রত্যেক বলের মান অপর বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

লামির উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য

একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত সমতলীয় তিনটি বল যদি এরূপ হয় যে, তাদের প্রত্যেকটি বলের মান অপর দুইটির বলের অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতী, তবে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

প্রমাণ: মনে করুন, Oবিন্দুতে প্রযুক্ত P, Qও Rবল তিনটি যথাক্রমে OX, OY ও OZবরাবর ক্রিয়াশীল এবং

$\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$ ---------- (i)



প্রমাণ করতে হবে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।

ZO-কে Dপর্যন্ত বর্ধিত করুন যেন ODদ্বারাRবলের মান সূচিত হয়।

এখন$OADB$সামান্তরিক পূর্ণ করুন যার কর্ণ ODএবং OAও OBবাহুদ্বয় যথাক্রমে OXএবং OYবরাবর অবস্থিত হবে।

এখন OADত্রিভুজ হতে, $\frac{OA}{\sin ODA} = \frac{AD}{\sin AOD} = \frac{OD}{\sin OAD} = \frac{R}{\sin OAD}$

কিন্তু $\sin ODA = \sin BOD = \sin(180° - \angle YOZ) = \sin YOZ$

$\sin AOD = \sin(180° - \angle ZOX) = \sin ZOX$

এবং $\sin OAD = \sin(180° - \angle XOY) = \sin XOY$

সুতরাং $\frac{OA}{\sin YOZ} = \frac{DA}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$---------- (ii)

এখন (i) ও (ii) থেকে পাই, $P = OA$এবং $Q = AD = OB$

সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OAএবং OBদ্বারা নির্দেশিত Pএবং Qবলদ্বয়ের লব্ধি OCদ্বারা নির্দেশিত হবে এবং এটি R-এর সমান ও বিপরীত। অতএব P, Qও Rবলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে।

ভেক্টর পদ্ধতি: প্রমাণ করতে হবে যে বলগুলো সাম্যবস্থা সৃষ্টি করে, অর্থাৎ $\overline{P} + \overline{Q} + \overline{R} = 0$

এখন শর্তানুসারে, $\frac{P}{\sin YOZ} = \frac{Q}{\sin ZOX} = \frac{R}{\sin XOY}$

$\therefore P\sin ZOX = Q\sin YOZ$বা,$RP\sin ZOX = QR\sin YOZ$

বা, $|\overline{R}||\overline{P}|(\sin ZOX)\,\hat{n} = |\overline{Q}||\overline{R}|(\sin YOZ)\,\hat{n}$

এখানে $\hat{n}$ একটি একক ভেক্টর যাP, Q, R এর ক্রিয়ারেখার সমতলের সাথে লম্ব।

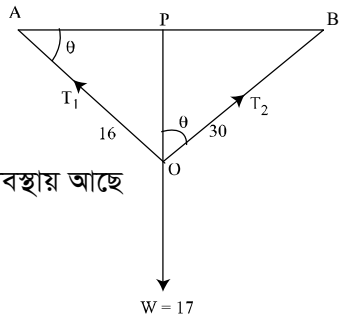
বা, $\overline{R}\times\overline{P} = \overline{Q}\times\overline{R}$বা, $\overline{R}\times\overline{P} = -\overline{R}\times\overline{Q}$বা, $\overline{R}\times\overline{P} + \overline{R}\times\overline{Q} + \overline{R}\times\overline{R} = 0$ [$\because \overline{R}\times\overline{R} = \overline{0}$]

বা, $\overline{R}\times(\overline{P}+\overline{Q}+\overline{R}) = 0 \therefore \overline{P}+\overline{Q}+\overline{R} = 0$

অতএব,P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

উদাহরণ 1: 17 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বস্তু 16 সে.মি. এবং 30 সে.মি. দীর্ঘ দুইটি রশির সাহায্যে ঝুলিয়ে রাখা হয়েছে। রশির দুইটির অপর প্রান্তদ্বয় আনুভূমিক রেখায় অবস্থিত 34 সে.মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। রশি দুইটির টান নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, AOএবং BOদুইটি রশির Aএবং B প্রান্ত 34 সে.মি.ব্যবধানে Aএবং B বিন্দুতে সংযুক্ত আছে এবং Oবিন্দুতে 17 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বস্তু ঝুলছে। ফলে OAএবংOBঅংশে রশির টান ধরুন যথাক্রমে T_1 এবং T_2।



তাহলে$AO = 16$ সে. মি., $BO = 30$ সে. মি. ও $AB = 34$ সে. মি.

যেহেতু $34^2 = 16^2 + 30^2$,

অর্থাৎ, $AB^2 = AO^2 + BO^2 \therefore \angle AOB = 90°$

ধরুন, O-র ভিতর দিয়ে উল্লম্ব রেখা PO, BO-র সঙ্গে θকোণ করে এবং

যেহেতু O বিন্দুতে OAও OBরশিতে টান যথাক্রমে T_1, T_2এবং 17কিলোগ্রাম বলত্রয় সাম্যবস্থায় আছে

$\therefore$লামির সূত্রানুসারে, $\frac{T_1}{\sin(180° - \theta)} = \frac{T_2}{\sin(90° + \theta)} = \frac{17}{\sin 90°}$

বা, $\frac{T_1}{\sin\theta} = \frac{T_2}{\cos\theta} = 17$

$\therefore T_1 = 17\sin\theta = 17 \times \frac{BO}{AB} = 17 \times \frac{30}{34} = 15$ কিলোগ্রাম ওজন।

$T_2 = 17\cos\theta = 17 \times \frac{16}{34} = 8$ কিলোগ্রাম ওজন।

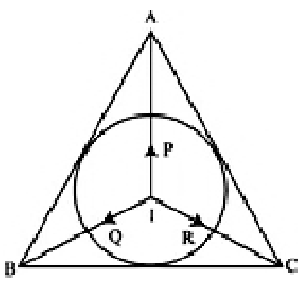
উদাহরণ 2: ABCত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র Iএবং IA, IBও ICবরাবর ক্রিয়াশীল P, Q, R মানের তিনটি বল P, Qও Rসাম্যাবস্থায় থাকলে, দেখান যে, $P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

সমাধান: এখানে ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin BIC} = \frac{Q}{\sin CIA} = \frac{R}{\sin AIB}$ ---------- (i)

যেহেতু ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I ত্রিভুজের কোণত্রয়ের অন্তর্দ্বিখন্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দু

$\therefore \angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle B$

$\angle ICB = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle C$



$\therefore \angle BIC = 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180° - \frac{1}{2}(B + C)$

$\sin BIC = \sin\{180° - \frac{1}{2}(B + C)\} = \sin\frac{1}{2}(B + C) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

অনুরূপে, $\sin CIA = \cos\frac{B}{2}$এবং $\sin AIB = \cos\frac{C}{2}$.

$\therefore$ (i) হতে পাই,$P:Q:R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

উদাহরণ 3: 3 মি. এবং 4 মি. দীর্ঘ দুইটি দড়ির সাহায্যে 20 কেজি ওজনের একটি বস্তু ঝুলিয়ে রাখা হয়েছে। দড়ি দুইটির অপর প্রান্তদ্বয় অনুভূমিক সরলরেখার উপর 5 মি. ব্যবধানে অবস্থিত দুই বিন্দুতে সংলগ্ন আছে। দড়ি দুইটির টান নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন এখানে $AB = 5$ মি., $AC = 3$ মি. এবং$BC = 4$ মি.। যেহেতু দড়ি দুইটির সাহায্যে C বিন্দুকে 20 কেজি ওজনের বস্তুটি CE বরাবর ঝুলছে। সুতরাং DEউল্লম্ব রেখায় থাকবে। মনে করুন $\angle CBA = \theta$;

যেহেতু $5^2 = 3^2 + 4^2$, সুতরাং $\angle ACB$একটি সমকোণ।

সুতরাং $\angle ACD = 90° - \angle BCD = \angle CBD = \theta$.

মনে করুন, CAএবং CBদড়ির টান যথাক্রমে T_1এবং T_2

এখন লামির সূত্রানুসারে, $\frac{T_1}{\sin ECB} = \frac{T_2}{\sin ECA} = \frac{20}{\sin ACB}$

কিন্তু $\sin ECB = \sin(180° - \angle DCB) = \sin DCB$

এবং $\sin ECA = \sin(180° - \angle ACD) = \sin ACD = \sin\theta$

$\frac{T_1}{\sin BCD} = \frac{T_2}{\sin\theta} = \frac{20}{\sin 90°}$

কিন্তু $\sin BCD = \sin(90° - \theta) = \cos\theta$

এবং $\cos\theta = \frac{4}{5}$ [ABCসমকোণী ত্রিভুজ হতে]

$\therefore T_1 = 20\sin BCD = 20\cos\theta = 20 \times \frac{4}{5} = 16$ কেজি ওজন।

এবং $T_2 = 20\sin\theta$ [$\because \sin 90° = 1$] $= 20 \times \frac{3}{5} = 12$ কেজি ওজন।

উদাহরণ 4: সাম্যাবস্থায় অবস্থিত তিনটি বল কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাত্রয় বরাবর সক্রিয়। প্রমাণ করুন যে, বল তিনটি $\sin A$, $\sin B$ও $\sin C$-র সমানুপাতী। আরও দেখান যে, বল তিনটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমানুপাতিক।

সমাধান: মনে করুন P, Qও Rবল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ O বিন্দুতে OD, OEও OFএই লম্ব সরলরেখাত্রয় বরাবর ক্রিয়শীল।

এখন P ও Qবল দুইটি Oবিন্দুতে সক্রিয়। তাহলে P ও Qবলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থায় অবস্থিত, সুতরাং P ও Qবলের লব্ধি তৃতীয় বল R-এর সাথে সাম্যাবস্থায় থাকবে। অতএব লামির উপপাদ্যানুসারে,

$\frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin FOD} = \frac{R}{\sin DOE}$ ---------- (i)

এখন $\sin EOF = \sin(180° - A) = \sin A$,

এবং $\sin FOD = \sin(180° - B) = \sin B$

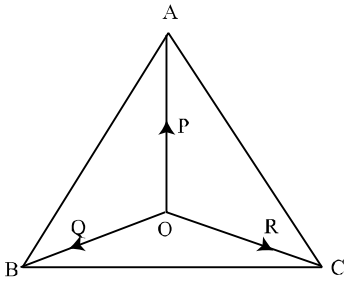
এবং $\sin DOE = \sin(180° - C) = \sin C$

(i) হতে পাই, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$

$\therefore$ বল তিনটি $\sin A$, $\sin B$এবং $\sin C$- এর সমানুপাতী।
এখন ABCত্রিভুজ হতে পাই,
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\therefore \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$.
অতএব বলত্রয় ত্রিভুজটির বাহুত্রয়ের সমানুপাতিক।

উদাহরণ 5: ABCত্রিভুজের পরিকেন্দ্র Q।Oবিন্দুতেOA, OB, OCবরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করুন যে, $\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$

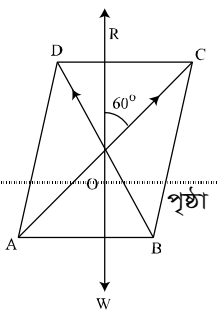
সমাধানঃ মনে করুন, P,Q, Rমানের বলত্রয় ত্রিভুজ ABC এর পরিকেন্দ্র O তে যথাক্রমে OA, OBএবং OC বরাবর ক্রিয়াশীল রয়েছে। সুতরাং সাম্যাবস্থার জন্য লামির সূত্র অনুসারে



$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin COA} = \frac{R}{\sin AOB}$
বা, $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$
[$\because$কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধির কোণের দ্বিগুণ,
অতএব $\angle BOC = 2A$, $\angle COA = 2A$, $\angle AOB = 2C$]
বা, $\frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$
বা, $\frac{P}{\sin A\cos A} = \frac{Q}{\sin B\cos B} = \frac{R}{\sin C\cos C}$
বা, $\frac{P}{\frac{2\Delta}{bc}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \frac{Q}{\frac{2\Delta}{ca}\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)} = \frac{R}{\frac{2\Delta}{ab}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$
$\left[\because \sin A = \frac{2\Delta}{bc}\ ,\ \sin B = \frac{2\Delta}{ca}\ ,\ \sin C = \frac{2\Delta}{ab}\right.$ এবং $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\left.\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\ ,\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right]$
বা, $\frac{P}{\Delta\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2c^2}\right)} = \frac{Q}{\Delta\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2a^2}\right)} = \frac{R}{\Delta\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2b^2}\right)}$
বা, $\frac{P}{\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2c^2}} = \frac{Q}{\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2a^2}} = \frac{R}{\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2b^2}}$
প্রত্যেকটি পদকে $a^2b^2c^2$দ্বারা ভাগ করে পাই,
$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$

উদাহরণ 6:রম্বসাকৃতি একটি সমপাতের একটি কোণ $120°$ এবংএর এক বাহু অনুভূমিকভাবে অবস্থিত। রম্বসের কেন্দ্রে দুই কর্ণের দিকে P ও Qবল প্রয়োগের ফলে রম্বসাকৃতি পাতটি সাম্যাবস্থায় অবস্থিত। P ও Qবলদ্বয়ের মধ্যে Pবৃহত্তর হলে, দেখান যে, $P^2 = 3Q^2$.

সমাধানঃ মনে করুন $ABCD$একটি রম্বস, এর AB বাহু অনুভূমিক এবং $\angle ABC = 120°$। ধরুন, রম্বসের কেন্দ্র O; এর কেন্দ্রে ক্রিয়াশীল P ও Qবল দুইটি ODএবং OCবরাবর ক্রিয়াশীল হওয়ায় এটি সাম্যাবস্থায় আছে। রম্বসের ওজন Wযা O বিন্দুতে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়ারত।
যেহেতু রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে, অতএব $\angle DOC = 90°$.
আবার যেহেতু P, Q,Wবলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং P, Qবলদ্বয়ের লব্ধি রম্বসের ওজন W-এর সাথে সমান এবং তা ROবরাবর ক্রিয়াশীল। এখানে $\angle DOR = 30°$
$\therefore$লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin COW} = \frac{Q}{\sin DOW}$



বা, $\frac{P}{\sin(180^\circ - 60^\circ)} = \frac{Q}{\sin(180^\circ - 30^\circ)}$; বা, $\frac{P}{\sin 60^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}$

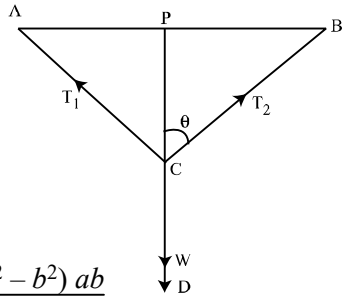
বা, $P.\sin 30^\circ = Q.\sin 60^\circ$; বা, $P.\frac{1}{2} = Q.\frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $P = \sqrt{3}Q$

$\therefore P^2 = 3Q^2.$

উদাহরণ 7: একটি রশি ACB-র দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখায় A এবং B বিন্দুতে সংলগ্ন আছে। রশির Cবিন্দুতে Wভার বেঁধে দেয়া হয়েছে। প্রমাণ করুন যে, রশির CAঅংশে টান $= \frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$

সমাধান: মনে করুন ACBরশি C-র ভিতর দিয়ে উল্লম্ব PCরেখা CB-র সঙ্গে θকোণ করে। CAএবং CBঅংশে রশির টান T_1এবং T_2ধরলে,



$\frac{T_1}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{W}{\sin C}$;

$\therefore \frac{T_1}{\sin(90^\circ + B)} = \frac{W}{\sin C}$; এখানে $\theta = 90^\circ - B.$

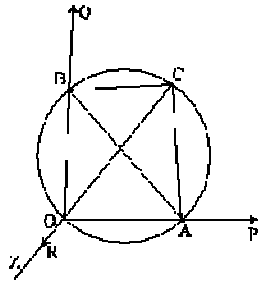
বা, $\frac{T_1}{\cos B} = \frac{W}{\sin C}$

$\therefore T_1 = \frac{W\cos B}{\sin C} = W.\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca\sin C}$ $\left[\because \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right]$ $= W.\frac{(c^2 + a^2 - b^2)\,ab}{2ca.\,2\Delta}$

$= \frac{Wb\,(c^2 + a^2 - b^2)}{4c\Delta}$ $[\because ab\sin C = 2\Delta]$

উদাহরণ 8: Oবিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Qও Rসাম্যাবস্থায় আছে। Oবিন্দু দিয়ে একটিবৃত্ত অঙ্কন করা হলো, যাতে বৃত্তটি বলগুলোর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, Bও Cবিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, বলগুলোABCত্রিভুজের বাহুগুলোর সাথে সমানুপাতিক।

সমাধান: যেহেতু P, Qও Rবলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।



$\therefore$ লামির উপপাদ্য অনুসারে $\frac{P}{\sin QOZ} = \frac{Q}{\sin ZOP} = \frac{R}{\sin POQ}$

এখন $\angle QOZ = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - \angle BAC$[$\because AOBC$বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।]

$\therefore \sin QOZ = \sin(180^\circ - \angle BAC) = \sin BAC = \sin A$

অনুরূপে, $\sin ZOP = \sin(180^\circ - \angle COA) = \sin COA = \sin B$

এবং $\sin POQ = \sin(180^\circ - \angle BCA) = \sin BCA = \sin C.$

$\therefore \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$

কিন্তু যেকোনো ত্রিভুজ ABC হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\therefore \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$

অর্থাৎ, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$.

উদাহরণ 9: Wওজনের একটি কণাকে একটি মসৃণ নততলের উপর অনুভূমিক রেখায় ক্রিয়াশীল কোনো বল Pঅথবা নততল বরাবর ক্রিয়াশীল একটি বল Qপ্রয়োগে স্থিতাবস্থায় থাকে। প্রমাণ করুন যে, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$

সমাধান ঃ মনে করুন তলটির নতকোণ α। সুতরাং, প্রথম ক্ষেত্রে নত তল বরাবর বিশ্লেষণ করলে পাই $P = W\sin\alpha$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$\frac{Q}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90° + \alpha)}$ বা, $\frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha}$; বা, $Q = W\tan\alpha$

$\therefore \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2\sin^2\alpha} - \frac{1}{W^2\tan^2\alpha} = \frac{1}{W^2}(\text{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha) = \frac{1}{W^2}$ [$\because \text{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$)

সারসংক্ষেপ

- **লামির সূত্র:** কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি সমতলীয় বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তাহলে প্রত্যেকটি বলের মান অপর দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণের সাইনের সমানুপাতিক হবে।
- **লামির সূত্রের বিপরীত সূত্র:** একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত সমতলীয় তিনটি বল যদি এরূপ হয় যে, তাদের প্রত্যেকটি বলের মান অপর দুইটির বলের অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতী, তবে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৮

1. 3 কিলোগ্রাম একটি বস্তু কোনো স্থির বিন্দু হতে 25 মি.লম্বা হাল্কা দড়িতে বাঁধা আছে। অনুভূমিক বল Fপ্রযুক্ত হলে এটি ঐ স্থির বিন্দুর উলম্ব রেখা হতে 20 মি.দূরে স্থিরাবস্থায় থাকে। Fবলের মান ও দড়ির টান নির্ণয় করুন।
2. 7কেজি ওজনএবং 24 মি.দীর্ঘ একটি ভারহীন দড়ি 25 মি.দীর্ঘ একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে বেঁধে 10 পাউন্ড ভরের একটি বস্তুকে এমনভাবে ঝুলিয়ে রাখা হয়েছে যে বস্তুটি দন্ডের মধ্যবিন্দুর অব্যবহিত নিম্নে অবস্থিত। দড়ি দুইটির টান নির্ণয় করুন।
3. 10 মি. দীর্ঘ এবং 25কেজি ওজনেরএকটি সমদন্ডের একপ্রান্ত একটি কব্জায় আটকান আছে এবং অপর প্রান্ত16 মি. দীর্ঘ একটি দড়িতে যুক্ত করে কব্জার সোজা 10 মি. উপরে একটি বিন্দুতে বেঁধে দেওয়া আছে। দড়ির টান এবং কব্জার প্রতিক্রিয়া নির্ণয় করুন।
4. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি দড়ির দুইপ্রান্তে একটি অনুভূমিক দন্ডের a (a< 1) দূরত্বের A এবং B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। এতে Wভারের একটি আংটি গড়াইয়া চলতে পারে এবং অনুভূমিক বল Pপ্রযুক্ত হয়ে এটি B বিন্দুর সোজা নীচে স্থিরাবস্থায় আছে। প্রমাণ করুন$P = a.\frac{W}{l}$
5. 6 মি. এবং 8 মি. দীর্ঘ দুইটি দড়িতে বেঁধে একটি 80কেজি ওজনেরবস্তু ঝুলান হয়েছে; দড়ি দুইটিরঅপর প্রান্তদ্বয় 10 মি. দীর্ঘ একটি দন্ডের দুই প্রান্তে সংযুক্ত হয়েছে। যদি দন্ডটি এরূপভাবে রাখা হয় যে, বস্তুটি দন্ডের মধ্যবিন্দুর ঠিক নীচে থাকে, তাহলে দড়ি দুইটির টান কি হবে ?
6. দুইটি বলের অর্ন্তবর্তী কোণ 150° এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর উপাংশের সাথে লম্বাভিমুখে ক্রিয়ারত। বৃহত্তর উপাংশটি 100কেজি ওজনবিশিষ্ট। অপর উপাংশটি এবং তাদের লব্ধি নির্ণয় করুন।
7. l-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি দড়ির দুইপ্রান্ত একই অনুভূমিক তলে a দূরত্বে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। একটি মসৃণ ভারহীন আংটি দড়িতে গড়াইয়া চলতে পারে এবং আংটিহতে Wওজন অবাধে ঝুলতে পারে। দেখান যে, দড়ির টান $\frac{lW}{2\sqrt{1-a^2}}$
8. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারতP, Q, Rবলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। Pও Qএর অন্তর্গত কোণ P ও Rএর অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ করুন যে, $R^2 = Q(Q–P)$.
9. ABCত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র Oথেকে OA, OB, OCবরাবর কার্যরত যথাক্রমে P,Q, Rবল তিনটি সাম্যবস্থায় আছে। প্রমাণ করুন যে, $P:Q:R = \cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$
10. কোনো লম্বিক তলে 10 kg-wt পরিমাণের একটি বস্তুকে 5kg-wt পরিমাণের একটি অনুভূমিক বল, অনুভূমির সাথে 60°কোণে কার্যরতF kg-wt বল এবং F-এর উপর লম্বভাবে কার্যরত R kg-wt বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে।

দেখান যে, $F = \sqrt{3}R + 10 = 0$ এবং $\sqrt{3}F + R - 20 = 0$.

11. একটি হেলানো সমতলের দৈর্ঘ্যে ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়াশীল যথাক্রমে Pও Q বলদ্বয় প্রত্যেকে এককভাবে W ওজনের কোনো বস্তুকে তলের উপর স্থির রাখতে পারে। প্রমাণ করুন যে, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$

12.(i) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমান বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

(ii) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, Rবলত্রয় সাম্যাবস্থা আছে। Pও Qএর অন্তর্গত কোণ $60°$এবং P ও Rএর অন্তর্গত কোণ $150°$হলে দেখান যে, $P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$

পাঠ ৭.৯ সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার শর্ত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সমান্তরাল বল সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি ও এর প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় করতে পারবেন এবং পর্যায়ক্রমে এ তত্ত্ব প্রয়োগ করে যে কোনো সংখ্যক সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন,
- দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি ও এর প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমান্তরাল বল সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সমান্তরাল বল, সদৃশ, অসদৃশ, সমান, অসমান

মূলপাঠ

সমান্তরাল বল (Parallel forces)

কোনো বস্তুকণা বা কঠিন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল একাধিক সমবিন্দু বল সম্পর্কে পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। কোনো কঠিন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল ও বলগুলো সমবিন্দু (যে বলগুলোর ক্রিয়ারেখা পরস্পর একটি বিন্দুতে ছেদ করে) না হয়ে সমান্তরালও হতে পারে।

যদি কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহের ক্রিয়ারেখা পরস্পরসমান্তরাল হয়, তাহলে ঐ বল সমূহকে **সমান্তরাল বল** বলে।

চিত্রে কয়েকটি সমান্তরাল বল দেখানো হলো।

সমান্তরাল বলসমূহ দুই প্রকার যথা:

(i) সদৃশ (like) বা সমমুখী সমান্তরাল বলও (ii) অসদৃশ (unlike)বা বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল।

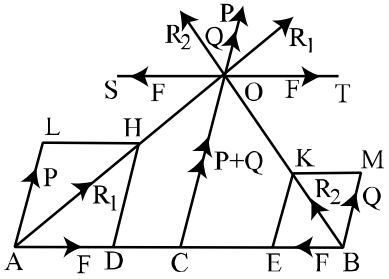
দুইটি সমান্তরাল বল পরস্পর একই অভিমুখে ক্রিয়াশীল হলে তাদেরকে **সদৃশ বা সমমুখী (like) সমান্তরাল বল** বলে এবং দুইটি সমান্তরাল বল পরস্পর বিপরীত অভিমুখে ক্রিয়াশীল হলে তাদেরকে **অসদৃশ বা বিপরীতমুখী (unlike) সমান্তরাল** বল বলে।

চিত্রে P এবং, Q বলদুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল, আবারচিত্রে R এবংS বল দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল।

দুইটি সদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি ও এর প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় (Resultant of two like and Parallel Forces)

মনে করুন, Pএবং Q মানের দুইটি অসমান সদৃশ সমান্তরাল বল কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর A এবং B-তে ক্রিয়া করছে। Pএবং Q (অসমান) বল দুইটিকে মানে ও দিকে যথাক্রমে ALএবং BMরেখা দ্বারা সূচিত করা হলো।

এখন A এবং B বিন্দুতে AB এবং BA-র দিকে দুইটি সমান বল Fপ্রয়োগ করা হলো। এ দুইটি বলকেADএবং BEদ্বারা নির্দেশিত হলো। এ বল দুইটি বিপরীতমুখে একই সরলরেখাতে ক্রিয়া করছে ফলে বস্তুর উপর এদের কোনো প্রভাবনেই।



$ADHL$এবং $BEKM$সামান্তরিকদ্বয় সম্পূর্ণ করা হলো। তাহলে AHরেখার A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল Pএবং Fবলের লব্ধি R_1 এবং BKরেখার Bবিন্দুতে ক্রিয়াশীল Qএবং Fবলের লব্ধি R_2 ।

এখন ধরুনAHএবং BKরেখা বর্ধিত করলে এরা Oবিন্দুতে ছেদ করে। ALঅথবা BM-এর সমান্তরাল OCরেখা অঙ্কন করা হলো যা AB-কে Cবিন্দুতে ছেদ করে। আবার AB-র সমান্তরাল SOTরেখা অঙ্কন করা হলো।

এখন R_1বলের প্রয়োগ-বিন্দুকে এর ক্রিয়ারেখার উপরিস্থিত O বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হলো। অনুরূপে R_2বলের প্রয়োগ বিন্দুকে O বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হলো। তাহলে O বিন্দুতে R_1বলকে ALএবং AB-র সমান্তরাল দিকে বিশ্লেষণ করলে COরেখার বর্ধিত দিকে Pএবং OTরেখার দিক বরাবর Fউপাংশ পাই।

অনুরূপে R_2-কে BMএবং BE-র সমান্তরাল দিকে বিশ্লেষণ করলে বর্ধিত COরেখার দিকে Qএবং OSরেখার দিক বরাবর Fউপাংশ পাই।

যেহেতু Oবিন্দুতে ক্রিয়াশীল Fবলদ্বয় সমানও বিপরীতমুখী বলে এদের কোনো ক্রিয়া নেই। এখন অবশিষ্ট দুইটি বল P ও Q উভয়েই COরেখা বরাবর একই দিকে সক্রিয়।

সুতরাং A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল Pবল এবং Bবিন্দুতে ক্রিয়াশীল Qবলের লব্ধি একটি সদৃশ সমান্তরালে বল $(P+Q)$, যা P ও Q-এর প্রয়োগ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত এবং AB-র উপরিস্থিত Cবিন্দুতে বলদ্বয়ের সমান্তরালে প্রদত্ত সক্রিয়। ফলে এদের মধ্যবর্তী কোণ $0°$। এখন বলদ্বয়ের লব্ধি R হলে $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°} = P + Q$

লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C এর অবস্থানঃ

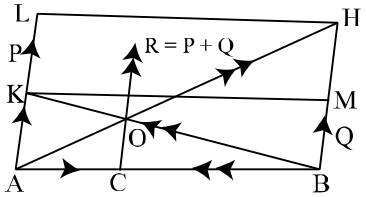
সদৃশ ত্রিভুজ ADHএবং ACOহতে পাই, $\frac{AD}{DH} = \frac{AC}{CO}$ $\therefore \frac{F}{P} = \frac{AC}{CO}$, অর্থাৎ $P.AC = F.CO$---------- (i)

আবার সদৃশ ত্রিভুজ BEKএবং BCOহতে $\frac{BE}{EK} = \frac{BC}{CO}$. $\therefore \frac{F}{Q} = \frac{BC}{CO}$; অর্থাৎ, $Q.BC = FCO$---------- (ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) হতে পাই, $P.AC = Q.BC$; বা, $\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}$

অর্থাৎ C বিন্দুটি AB-কে P ও Q বলদ্বয়ের ব্যস্তানুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

ভেক্টর পদ্ধতিঃকোন অনড় বস্তুর Aও B বিন্দুতে P ও Q মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে AL ওBM বরাবর ক্রিয়াশীল।$ABHL$ ও$BAKM$ সামান্তরিকদ্বয় এবং তাদেরAH ও BK কর্ণদ্বয় অঙ্কন করুন।AH ওBK কর্ণদ্বয় পরস্পরO বিন্দুতে ছেদ করে।O বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$বলের ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল রেখাAB কেC বিন্দুতে ছেদ করে। মনে করুন $\vec{P}$, $\vec{Q}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $\vec{R}$ ।



তাহলে, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = \vec{AL} + \vec{BM} = \vec{AL} + \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{BA}$ $(\because \vec{AB} + \vec{BA} = 0)$

$= \vec{AL} + \vec{LH} + \vec{BM} + \vec{MK} = \vec{AH} + \vec{BK} = \vec{AO} + \vec{OH} + \vec{BO} + \vec{OK}$

$= \vec{AO} + \vec{OK} + \vec{BO} + \vec{OH}$= O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $(\vec{AK} + \vec{BH})$ = O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $(\vec{BM} + \vec{AL})$

= Oবিন্দুতে ক্রিয়ারত $(\vec{Q} + \vec{P}) = \vec{P} + \vec{Q}$

লব্ধি $\vec{R}$ বলটির ক্রিয়াবিন্দু O হতে C বিন্দুতে স্থানান্তর করুন। সুতরাং প্রদত্ত $\vec{P}$, $\vec{Q}$ সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি R বলটি C বিন্দুতে CO বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

***C*বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়:** ΔABHওΔAOC সদৃশকোণী $\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{CO}$ ---------- (i)

আবার ΔABKও ΔBOC সদৃশকোণী, $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AK}{CO}$ ---------- (ii)

(i) ও (ii) হতে $\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{BH} = \frac{Q}{P} \therefore P.AC = Q.BC$, বা, $\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$

C বিন্দুটিAB রেখাকে তার প্রান্তীয় বলদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

সুতরাং কোনো অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল দুইটি পরস্পর সমমুখী সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধি P+Q যার দিক P ও Q বলদ্বয়ের প্রত্যেকের দিকের সমান্তরাল এবং যার ক্রিয়াবিন্দু P ও Q বলদ্বয়ের ক্রিয়াবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর অবস্থিত এবং ঐ রেখাংশকে বলদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

দ্রষ্টব্য: দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল সমান বা অসমান হতে পারে। কোনো বস্তুর প্রত্যেকটি কণার ওজননিম্নমুখী, তাই তারা সমমুখী সমান্তরাল বল। তাদের লব্ধি বা সমষ্টিই ঐ বস্তুর ওজন। সমরূপ দণ্ডের ওজন ঐ দণ্ডের মধ্যবিন্দুতে খাড়া নিম্নদিকে ক্রিয়াশীল। সমরূপ দণ্ডের মধ্যবিন্দুই তার ভারকেন্দ্র (centre of gravity)।

অনুসিদ্ধান্ত:(1) P এবং Q-এর সাধারণ দিক যাই হোক না কেন, Cবিন্দুর অবস্থান অপরিবর্তিত থাকবে, অর্থাৎ Cবিন্দুর অবস্থান P ও Q বলদ্বয়ের দিকের উপর নির্ভর করে না।

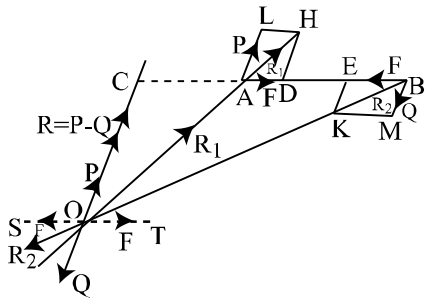
(2) $P = Q$হলে Cহবে AB-র মধ্যবিন্দু। (3) $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AC+BC} = \frac{R}{AB} \therefore P = R \times \frac{BC}{AB}$এবং$Q = R \times \frac{AC}{AB}$

দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি ও এর প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় (Resultant of two unlike and unequal parallel forces)

মনে করুন, P ও Q; $(P>Q)$ মানের দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। ALএবং BMরেখাদ্বারা এদের সূচিত করা হলো। A ও B বিন্দুতে ABও BA-বরাবর দুইটি বিপরীতমুখী সমান বল Fপ্রয়োগ করা হলো। বলদ্বয় সমান ও বিপরীতমুখী হওয়ায় বস্তুর উপর এদের কোনো ক্রিয়া নেই। এখন বলদ্বয়কে ADএবং BE-র দ্বারা সূচিত করা হলো।

$ADHL$এবং $BEKM$সামান্তরিক সম্পূর্ণ করা হলো। তাহলে AHরেখা Aবিন্দুতে প্রযুক্ত P ও Fবলের লব্ধি R_1নির্দেশক এবং BKরেখা Bবিন্দুতে প্রযুক্ত Qও Fবলের লব্ধিR_2 নির্দেশক।

HAএবং BKরেখা বর্ধিত করা হলো এবং (P ও Q অসমান বলে) এরা O বিন্দুতে ছেদ করল। এখন R_1বলের প্রয়োগ বিন্দুকে এর ক্রিয়া রেখার উপরিস্থিত O বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হলো এবং R_2বলের প্রয়োগ বিন্দুকে Bহতে Oবিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হলো। আবার O বিন্দু দিয়ে ALঅথবা BM-এর সমান্তরাল OCরেখা অঙ্কিত করা হলো। এটি যেন বর্ধিত BA-কে Cবিন্দুতে ছেদ করে। AB-র সমান্তরাল করে SOTরেখা টানা হলো।



এখন O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল R_1বলকে ALএবং ABরেখার সমান্তরাল দিকে বিশ্লেষণ করলে OCরেখার দিকে Pএবং OTরেখার দিকে Fউপাংশ পাওয়া যায়।

অনুরূপে R_2 বলকে বিশ্লেষণ করলে বর্ধিত CO রেখার দিকে Qএবং QSরেখার দিক বরাবর Fউপাংশ পাওয়া যায়।

Oবিন্দুতে Fবলদ্বয় সমান ও বিপরীতমুখী বলে এদের কোনো ক্রিয়া নেই। এখন অবশিষ্ট P ও Q বলদ্বয় OCও COবরাবর অর্থাৎ একই রেখায় পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হওয়ার বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ$180°$।

এখন বলদ্বয়ের লব্ধিR হলে$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,PQ\cos 180°} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2.P.Q.(-1)} = \sqrt{(P-Q)^2} = P - Q$ যা বৃহত্তর বল P এর দিকের সাথে সদৃশ।

অতএব A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বল Pএবং Bবিন্দুতে ক্রিয়াশীল বল Q-এর লব্ধি একটি সমান্তরাল বল $(P–Q)$, যা P ও Q-এর প্রয়োগ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা AB এর বর্ধিতাংশের উপরিস্থিত Cবিন্দুতে সক্রিয় এবং বৃহত্তর বল P এর সাথে সদৃশ সমান্তরাল।

লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু Cএর অবস্থান নির্ণয়ঃ

সদৃশ ত্রিভূজ ACOএবং ADHহতে পাই, $\frac{AC}{CO} = \frac{AD}{DH} = \frac{F}{P}$; অথবা, $P.AC = F.OC$---------- (i)

আবার সদৃশ ত্রিভুজ BCOএবং BEKহতে $\frac{BC}{OC} = \frac{BE}{EK} = \frac{F}{Q}$; অথবা, $Q.BC = F.OC$---------- (ii)

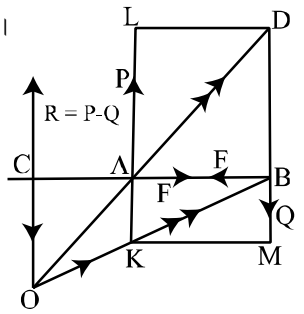
(i) এবং (ii) হতে পাই, $P.AC = Q.BC$; বা, $\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}$

অর্থাৎ Cবিন্দু AB-কে P ও Q বল দুইটির ব্যস্তানুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

সুতরাং কোনো অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল দুইটি পরস্পর বিপরীতমুখী অসমান সমান্তরাল বল P ও $Q(P>Q)$ এর লব্ধি$P–Q$; যার দিক বৃহত্তর বলPএর সমান্তরাল ও সমমুখী এবং যার ক্রিয়াবিন্দু P ও Qবলদ্বয়ের ক্রিয়াবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত এবং ঐ রেখাংশকে বলদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

মন্তব্যঃP ও Qসমান ও বিপরীতমুখী হলে বলদ্বয় একটি জোড় বা যুগল সৃষ্টি করে।

ভেক্টর পদ্ধতিঃ কোন অনড় বস্তুর Aও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ $(P>Q)$ মানের দুইটি অসমান অসদৃশ সমান্তরাল বলের মান ও দিক যথাক্রমে যথাক্রমে $\vec{AL}$ ও$\vec{BM}$ দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। বলদ্বয় অসদৃশ সমান্তরাল হওয়ায়, $\vec{AL} = \vec{P}$ হলে, $\vec{BM} = \vec{Q}$ হবে।A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে $\vec{AB}$ও$\vec{BA}$ বরাবর দুইটি সমান বলF প্রয়োগ করুন। $ABDL$ ও$BAKM$ সমান্তরিকদ্বয় ও তাদের কর্ণদ্বয়AD ও BK অঙ্কন করুন।বর্ধিত DA ওBK কর্ণদ্বয় পরস্পরO বিন্দুতে ছেদ করে।O বিন্দুতে অঙ্কিত প্রদত্ত বলের ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল রেখা বর্ধিতBA কেC বিন্দুতে ছেদ করে। মনে করুন$\vec{P}$, $\vec{Q}$ বলদ্বয়ের লব্ধি$\vec{R}$ ।



তাহলে, $\vec{R} = \vec{AL} + \vec{BM} = \vec{AL} + \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{BA}$

$= \vec{AL} + \vec{LD} + \vec{BM} + \vec{MK} = \vec{AD} + \vec{BK}$

$= \vec{OD} - \vec{OA} + \vec{BO} - \vec{KO} = \vec{BO} + \vec{OD} + \vec{AO} + \vec{OK}$

$= O$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত$(\vec{BD} + \vec{AK}) = O$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত $(\vec{AL} + \vec{BM})$

$= O$বিন্দুতে ক্রিয়ারত $(\vec{P} - \vec{Q})$(OC বরাবর P এবং CO বরাবর Q) $= \vec{P} - \vec{Q}$

লব্ধি R এর প্রয়োগ বিন্দু O হতে C বিন্দুতে স্থানান্তর করুন। Cবিন্দুতে ক্রিয়ারত$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $180°$; তাই তাদের লব্ধি $\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q}$এর দিক বৃহত্তর বল P এর দিক অর্থাৎ CO বরাবর ক্রিয়ারত।

Cবিন্দুর অবস্থান নির্ণয়:ΔABDওΔAOC সদৃশকোণী $\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CO}$---------- (i)

আবার ΔABKও ΔBOC সদৃশকোণী, $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AK}{CO}$---------- (ii)

(i) ও (ii) হতে $\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{BD} = \frac{Q}{P} \therefore P.AC = Q.BC.$

$\therefore$ লব্ধির ক্রিয়ারেখাAB কে C বিন্দুতে P, Q বলদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

সুতরাং কোনো অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল দুইটি পরস্পর বিপরীতমুখী অসমান সমান্তরাল বল P ও Q $(P>Q)$ এর লব্ধি $P-Q$; যার দিক বৃহত্তর বল P এর সমান্তরাল ও সমমুখী এবং যার ক্রিয়াবিন্দু P ও Q বলদ্বয়ের ক্রিয়াবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত এবং ঐ রেখাংশকে বলদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

মন্তব্য:P ও Q সমান ও বিপরীতমুখী হলে বলদ্বয় একটি জোড় বা যুগল উৎপন্ন করে।

অনুসিদ্ধান্ত:(i)Pএবং Qদুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল $(P>Q)$-এর লব্ধির পরিমাণ Rহলে $R = P - Q$এবং এর অভিমুখিতা বৃহত্তর বল P-এর অভিমুখিতায় হবে। আবার লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C(যেখানে Pঃ$Q = BC$ঃ AC) বর্ধিত BA-র উপর বৃহত্তর বল P এর ক্রিয়াবিন্দু A-র নিকটতর হবে।

(ii) যদি P ও Q সমান্তরাল বলদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ $P = Q$হয়, তবে ADHও BEKত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান তখন $\angle DAH = \angle EBK$।সুতরাং AHও BKপরস্পর সমান্তরাল হবে এবং কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বের মধ্যে তারা মিলিত হতে পারে না। সুতরাং এক্ষেত্রে জ্যামিতিক অঙ্কনের সাহায্যে এদের লব্ধি নির্ণয় করা যাবে না। সুতরাং দুইটি সমান অসদৃশ সমান্তরাল বলকে সংযোজিত করে একটি বলে পরিণত করা যায় না। তখন বল দুইটিকে যুগল বা দ্বন্দ্ব (couple) বলে। কোনো বস্তুর উপর যুগল বল ক্রিয়া করায় বস্তুটিতে ঘূর্ণন গতির সৃষ্টি হয়।

(iii)$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{BC-AC} = \frac{R}{AB}$

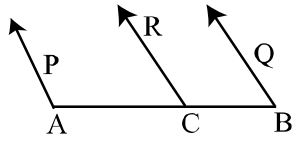
সুতরাং তিনটি সমান্তরাল বল সাম্যাবস্থায় থাকলে একটি অপর দুইটির লব্ধির সমান ও বিপরীত এবং প্রত্যেকটি অপর দুইটির দূরত্বের সমানুপাতিক হয়।

(iv)C-বিন্দুর অবস্থান P ও Q বলদ্বয়ের দিকের উপর নির্ভর করে না। এটি A ও B-এর অবস্থানের উপর এবং QঃPএই অনুপাতের উপর নির্ভর করে।

কোনো বস্তুতে ক্রিয়ারত একটি বলকে ঐ বস্তুর দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল অংশকে বিভাজন

মনে করুন প্রদত্ত R বল কোনো একটি দৃঢ় বস্তুর Cবিন্দুতে ক্রিয়াশীল। ঐ বস্তুর উপরAওBদুইটি সমতলীয় বিন্দুতেRবলের সমান্তরাল অংশক নির্ণয় করতে হবে।

মনে করুন সমান্তরাল অংশদ্বয় যথাক্রমে P ও Q।



সুতরাংA ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারতP ও Q বলদ্বয়ের লব্ধিR হবে। অতএব$R = P + Q$

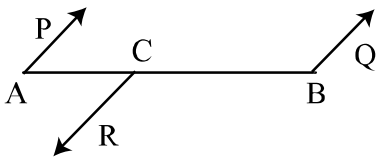
এবং $P.AC = QBC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{BC+AC} = \frac{R}{AB}$

সুতরাং$P = \frac{R}{AB} \times BC$এবং$Q = \frac{R}{AB} \times AC$

কোনো বস্তুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমান্তরাল বলের সুস্থিতি

কোনো একটি দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত তিনটি সমান্তরাল বল P, Q, R ভারসাম্য সৃষ্টি করলে এরা সকলে সদৃশ হতে পারে না। এদের মধ্যে একটি অবশ্যই বিসদৃশ হবে।

মনে করুন P, Qসদৃশ এবং R বিসদৃশ বলত্রয় যথাক্রমে বস্তুটিরA, B, Cবিন্দুত্রয়ে ক্রিয়ারত।



এখন যেহেতু বলত্রয় সুস্থিত সুতরাং সদৃশP, Q বলদ্বয়ের লব্ধি$P + Q$ অবশ্যই C বিন্দুতে অবস্থিত এবংR এর সমান হবে।

$\therefore P.\ AC = Q.BC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{BC+AC} \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$

সুতরাং তিনটি সমান্তরাল বল কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়া করে সুস্থিতি রক্ষা করলে বলত্রয়ের প্রত্যেকে অপর দুটির দূরত্বের সমানুপাতিক এবং একমুখী বলটি বিপরীতমুখী দুটির মধ্যে অবস্থিত হবে।

যেকোনো সংখ্যক সমান্তরাল বলের লব্ধি

(i) যখন সকল বল সদৃশ সমান্তরাল: মনে করুনP_1, P_2, ...,P_n,nসংখ্যক সদৃশ সমান্তরাল বল কোনো দৃঢ় বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। প্রথমতঃ P_1ও P_2-এর লব্ধি R_1নির্ণয় করা হলো। তাহলে R_1একটি সদৃশ সমান্তরাল বল এবং$R_1 = (P_1 + P_2)$। আবার R_1এবং P_3-র লব্ধি R_2বের করা হলো। তাহলে $R_2 = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$এবং R_2একটি সদৃশ সমান্তরাল বল।

এভাবে চূড়ান্ত লব্ধি Rপাওয়া যাবে এবং এটি একটি সদৃশ সমান্তরাল বল যার মান, $R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + P_n$

(ii)যখন সকল বলগুলো সদৃশ সমান্তরাল নয়

মনে করুনP_1, P_2, P_3, ..., P_n, n সংখ্যক সমান্তরাল বল কোনো একটি দৃঢ় বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল রয়েছে। এখানে n সংখ্যক বলের কিছু সংখ্যক সদৃশ সমান্তরাল এবং বাকিগুলো বিসদৃশ সমান্তরাল। এখন এ n সংখ্যক বলদেরকে সদৃশ ও বিসদৃশ দুইটি গ্রুপে বিভক্ত করুন এবং পূর্বের উপায়ে দুই গ্রুপের বলের লব্ধি নির্ণয় করুন, ধরুন এ লব্ধি R_1এবং R_2। এখানে R_1এবং R_2 লব্ধিদ্বয় বিসদৃশ। সুতরাং R_1এবং R_2 এর চূড়ান্ত লব্ধি = R_1~R_2অর্থাৎ R_1 এবং R_2 এর অন্তরফলের সমান এবং এর দিক R_1এবং R_2 এর মধ্যে যেটি বড় সেটির দিক বরাবর হবে।

মন্তব্য: যদি $R_1 \neq R_2$ হয়, একই বিন্দুতে এই রেখার পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়ার ফলে বস্তুটি সুস্থিতি থাকবে। আর যদি $R_1 = R_2$ এবং এরা একই বস্তুর ভিন্ন দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয় তাহলে বলদ্বয় যুগল গঠন করবে এবং বস্তুটিতে ঘূর্ণন গতির সৃষ্টি হবে।

উদাহরণ1: কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল সমান্তরাল বল P একক এবং Q একক বলদ্বয়ের লব্ধি R একক। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব ।dএকক P হতে R এর দূরত্ব d_1 একক এবংQহতে R এর দূরত্ব d_2 একক এবং লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুC অন্তঃস্থ কিংবা বহিঃস্থ হলেP, Q, R, d, d_1, d_2 ইত্যাদির বিভিন্ন মানের জন্য নিম্নের খালি ঘরগুলো পূরণ করুন।

	P	Q	R	d	d_1	d_2	অন্তঃস্থ	বহিঃস্থ
(i)	5	4		10				
(ii)	6	9			10			
(iii)	10		15			20		

সমাধান:(i) লব্ধি, $R = P + Q = 5 + 4 = 9$ একক; আবার$\frac{P}{d_2} = \frac{Q}{d_1} = \frac{R}{d} \therefore \frac{5}{d_2} = \frac{4}{d_1} = \frac{9}{10}$

$\therefore d_1 = \frac{40}{9}$ একক, $d_2 = \frac{50}{9}$ একক,লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু C অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে।

(ii)লব্ধি,$R = P + Q = 6 + 9 = 15$ এককআবার $\frac{P}{d_2} = \frac{Q}{d_1} = \frac{R}{d}$বা,$\frac{6}{d_2} = \frac{9}{10} = \frac{15}{d}$

$\therefore d = \frac{150}{9}$একক, $d_2 = \frac{60}{9}$একক,লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু C অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে।

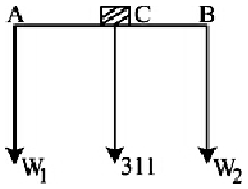
(iii) লব্ধি,$R = P + Q \therefore\ 15 = 10 + Q$বা,$Q = 5$ এককআবার$\frac{P}{d_2} = \frac{Q}{d_1} = \frac{R}{d}$বা,$\frac{10}{20} = \frac{5}{d_1} = \frac{15}{d_2}$

$\therefore d_1 = 10$ একক, $d_2 = 30$ একক,লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু C অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে।

উদাহরণ 2:দুই ব্যক্তি একটি হালকা কাঠের তক্তার উপর অবস্থিত 311 কেজি ওজন বিশিষ্ট একখানি পাথর এমনভাবে বহন করেন যে একজন অপরজন অপেক্ষা 205 কেজি অধিক ওজন বহন করে। তক্তাটির উপর পাথরখানির অবস্থান নির্ণয় করুন।

সমাধান:ধরুনAB তক্তা এবং এর C বিন্দুতে পাথরটি আছে।

আরও মনে করুন A ও B-তে অবস্থিত দুই ব্যক্তিকে যথাক্রমে W_1এবং W_2 ওজন বহন করতে হয় $(W_1>W_2)$।$\therefore C$ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল পাথরখানির ওজন হবে W_1ও W_2সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি $= W_1 + W_2$।



$\therefore W_1 + W_2 = 311$ ---------- (i) এবং $W_1.AC = W_2.BC$---------- (ii)

আবার শর্তানুসারে $W_1 - W_2 = 205$ ---------- (iii)

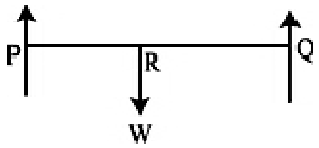
(i) ও (iii) হতে, $W_1 = 258$ এবং $W_2 = 53$ $\therefore$ (ii) হতে $\frac{AC}{CB} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{53}{25}$;

$\therefore$ পাথরখানি তক্তার উপর এমন বিন্দুতে রাখতে হবে যে, ঐ বিন্দু যেন তক্তাকে 53ঃ25 অনুপাতে বিভক্ত করে।

উদাহরণ 3:8 মিটার দীর্ঘ একটি সরল ওজনহীন বাঁশ যার দুই প্রান্ত দুইটি কীলক (পেরেক) Pএবং Q-এর উপর অনভূমিক ভাবে অবস্থিত এবং PQদন্ডের Rবিন্দুতে একটি ভারি বস্তু ঝুলছে। যদি $PR = 3RQ$ হয় এবং Pঅপেক্ষাQ-তে 325 কেজি বেশি ওজন পড়ে, তাহলে ঐ বস্তুটির ওজন নির্ণয় করুন।

সমাধান:মনে করুন কীলক Pএর উপর চাপ $=W$কেজি ওজন, তাহলে Q-এর উপর চাপ $=W + 325$ কেজি ওজন।

তাহলে P এবং Q এর উপর চাপ (বল) দ্বয়ের লব্ধিই হবে ভারী বস্তুর ওজন।



সুতরাং লব্ধি $R= W + W + 325 = 2W + 325$ ---------- (i)

এবং $W.PR = (W + 325).\ RQ$বা,$\frac{W}{RQ} = \frac{W + 325}{PR} = \frac{W + W + 325}{\text{RQ} + \text{PR}}$

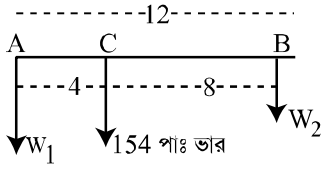
অথবা, $W.4RQ = (2W + 325)\ RQ$ $[\because PR = 3RQ]$

বা, $2W = 325$

এখন (i) হতে $R = 325 + 325 = 650$, $\therefore$বস্তুটির ওজন$R = 650$ কেজি ওজন।

উদাহরণ 4:এক ব্যক্তি 12 একক দীর্ঘ একটি ওজনহীন দণ্ডের দুই প্রান্তে দুইটি বস্তু ঝুলিয়ে কাঁধের উপর বহন করছে। যদি তার কাঁধের উপর 154 কেজি ওজন পড়ে এবং তার কাঁধ হতে এক প্রান্ত4 একক দূরে হয়, তাহলে বস্তু দুইটির ওজন নির্ণয় করুন।

সমাধান:মনে করুন12 একক দীর্ঘ দণ্ডটি AB, যার A এবং B বিন্দুতে যথাক্রমে W_1 ও W_2কেজি ওজন ঝুলছে এবং ধরুন লোকটির কাঁধC তে রয়েছে যেন, W_1 ওজন কাঁধ হতে 4 একক দূরের A প্রান্তে থাকে। তাহলে, A এবং B ঝুলানো ওজনের লব্ধি ওজনই লোকটির কাধের উপর চাপ দিবে।



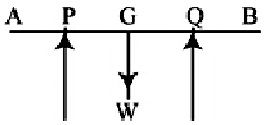
অর্থাৎ লব্ধি $W_1 + W_2 = 154$ ---------- (i)

$W_1AC = W_2BC$অর্থাৎ $4W_1 = 8W_2$, বা, $\frac{W_1}{8} = \frac{W_2}{4} = \frac{W_1 + W_2}{8 + 4} = \frac{154}{12}$

$\therefore W_2 = \frac{154}{3} = 51\frac{1}{3}$কেজি ওজন এবং $W_1 = 102\frac{2}{3}$কেজি ওজন।

উদাহরণ 5:আনুভূমিক ভাবে এক মিটার দূরত্বে অবস্থিত দুইটি কীলকের উপর 4 মিটার দীর্ঘ একটি সমরূপদন্ড রাখা আছে। দন্ডটির একপ্রান্তে10 কেজি ওজন অথবা অপর প্রান্তে4 কেজি ওজন ঝুলন্ত অবস্থায় দন্ডটিকে উল্টিয়ে দিতে সক্ষম হয় । দণ্ডটির ওজন ও তার মধ্যবিন্দু হতে কীলক দুইটির দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান:মনে করুন দন্ডটি AB যার ওজন W কেজি। যেহেতু দণ্ডটি আনুভূমিকভাবে আছে, তাহলে এর ওজন W,AB-দণ্ডটির মধ্যবিন্দু Gতে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে।



সুতরাং $AG = GB = 2$ মিটার। মনে করুন Pএবং Qদুইটি কীলক, যেখানে $PQ = 1$ মিটার এবং $GQ = x$মিটার। তাহলে $PG = (1 - x)$ মিটার।

আবার $AP = (1 + x)$ মিটার এবং $BQ = (2 - x)$ মিটার।

মনে করুন10 কেজি ওজন যখন A বিন্দুতে ঝুলানো হয় তখন দন্ডটি উল্টিয়ে যেতে সক্ষম । সুতরাং তখন কেবলP-এর উপর চাপই দন্ডটিকে সাম্যাবস্থায় রাখে, তখন Q-এর উপর কোনো চাপ থাকে না। $\therefore A$বিন্দুতে 10 কেজি ওজন এবং Gবিন্দুতে Wকেজি ওজনের লব্ধি Pবিন্দুতে ক্রিয়া করবে। $\therefore 10(1 + x) = W\ (1 - x)$ ---------- (i)

অনুরূপে, যখন B বিন্দুতে 4 কেজি ওজন ঝুলানো হবে তখন কেবলমাত্র Qবিন্দুতেই চাপ দন্ডটিকে সাম্যাবস্থায় রাখবে এ অবস্থায় P বিন্দুতে কোনো চাপ থাকে না। $\therefore 4(2-x) = Wx$---------- (ii)

সুতরাং (i) এবং (ii) হতে পাই, $10x(1+x) = 4(2-x)(1-x)$; বা, $10x+10x^2 = 8-12x+4x^2$

বা, $3x^2 + 11x - 4 = 0$; বা, $(3x-1)(x+4) = 0$. $\therefore x = \frac{1}{3}$বা -4.

$\therefore x = \frac{1}{3}$মিটার ($\because$ দূরত্ব ঋণাত্মক মান সম্ভব নয় সুতরাং $x = -4$ গ্রহণযোগ্য নয়)।

$\therefore 4(2-\frac{1}{3}) = W.\frac{1}{3}$বা, $4\times\frac{5}{3} = W.\frac{1}{3}$; বা, $W = 20$ কেজি ওজন।

সুতরাং দণ্ডটির ওজন = 20 কেজি এবং Gবিন্দু হতে Q এবং P কীলকদ্বয়ের দূরত্ব যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ মিটার এবং $\frac{2}{3}$ মিটার।

উদাহরণ 6:16 ফুট দীর্ঘ একটি ঢেঁকিকলের ওজন 1 হন্দর। ঢেঁকিটির কোথায় অবলম্বন (support) স্থাপন করলে 44 কেজি ওজন এবং 68 কেজি ওজনের দুইটি বালক এর দুই প্রান্তে বসে ঢেঁকিটিকে আনুভূমিক রেখায় রাখতে পারে?

সমাধান:মনে করুন ঢেঁকিটি ABএবং মধ্যবিন্দু G, যেখানে ঢেঁকিটি আনুভূমিক থাকা অবস্থায় $(68+44) = 112$ কেজি ওজন ওজন ক্রিয়া করবে। ঢেঁকিটির দৈর্ঘ্য $AB = 16$ মিটার। মনে করুনA বিন্দুতে 44 কেজি ওজনের এবং Bবিন্দুতে 68 কেজি ওজনের বালক দুইটি বসে। ধরুনC বিন্দুতে অবলম্বনটি স্থাপন করা হলে ঢেঁকিটির আনুভূমিকভাবে থাকে, এখানে, $BC = x$। এখন যেহেতু G, ABএর মধ্যবিন্দু, সুতরাংGবিন্দুতে 112 কেজি ওজনকে দুইটি সমান বল 56 কেজি ওজন এবং 56 কেজি ওজনে বিশ্লেষণ করা যায় যা যথাক্রমে ঢেঁকিটির দুই প্রান্ত A এবং B তে ক্রিয়াশীল বলে ধরা যায়। তাহলে A এবং B-তে মোট ওজন যথাক্রমে $(56+44) = 100$ কেজি ওজন এবং $(56+68) = 124$ কেজি ওজন।

এখন লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। সুতরাং

$\therefore 100.AC = 124.BC$; বা, $100(16-x) = 124x \therefore x = \frac{50}{7}$ বা, $7\frac{1}{7}$ফুট।

$\therefore$ ঢেঁকিটির অবলম্বন B প্রান্ত হতে $7\frac{1}{7}$ফুট দূরে রাখলে ঢেঁকিটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

উদাহরণ 7: (i)P এবং $Q(P>Q)$ দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর দুইটি বিন্দু A এবং B-তে ক্রিয়া করে। P এবং Q পরস্পর স্থান বিনিময় করলে দেখান যে, এদের লব্ধির প্রয়োগবিন্দু AB বরাবর dপরিমাণ দূরে সরে যায়, যেখানে $d = \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)AB$.

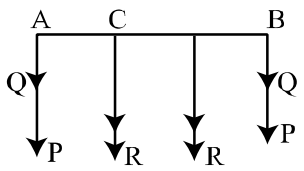
(ii) দেখান যে বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে, লব্ধির ক্রিয়ারেখা এবং Q-কে $\frac{P^2}{Q}$ তে পরিবর্তন করলে যে লব্ধি পাওয়া যায় তার ক্রিয়াবিন্দু একই।

সমাধান:মনে করুনA ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও Q সদৃশ ও সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি AB-র উপরিস্থিত C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore P.AC = Q.BC.$

$\therefore \frac{AC}{Q} = \frac{BC}{P} = \frac{AC+BC}{Q+P} = \frac{AB}{P+Q}$ $\therefore AC = \frac{Q}{P+Q}.AB$

আবার বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে ধরুন, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল Q ও P সদৃশ ও সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি ABএর উপরিস্থ Dবিন্দুতে ক্রিয়া করে।



$\therefore Q.AD = P.BD \therefore \frac{AD}{P} = \frac{BD}{Q} = \frac{AD+BD}{P+Q} = \frac{AB}{P+Q}$

$\therefore AD = \frac{P}{P+Q}AB$. এখন যেহেতু $P>Q$, সুতরাং$AD>AC$হবে

$\therefore d = AD - AC = \frac{P}{P-Q}.AB - \frac{Q}{P+Q}.AB = \frac{P-Q}{P+Q}.AB$. (প্রমাণিত)।

(ii) মনে করুন, যখন সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় Pএবং $\frac{P^2}{Q}$; তখন A বিন্দু হতে ABরেখার উপর লব্ধির প্রয়োগ বিন্দুর দূরত্ব x।

তাহলে, $P\times x=\frac{P^2}{Q}\times(AB-x)$বা, $\left(P+\frac{P^2}{Q}\right)\times x=\frac{P^2}{Q}\times AB$; বা, $\left(\frac{PQ+P^2}{Q}\right)x=\frac{P^2}{Q}.AB$

বা, $(P+Q)\,x=P.\,AB$বা, $x=\frac{P}{P+Q}AB$---------- (i)

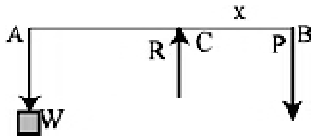
যখন A এবং B বিন্দুতে Qএবং Pসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে, তখন A হতে লব্ধির প্রয়োগ বিন্দুর দূরত্ব y হলে,

$Q\times y=P\times(AB-y)$ বা , $\frac{Q}{AB-y}=\frac{P}{y}=\frac{P+Q}{AB-y+y}$; বা, $y=\frac{P}{P+Q}AB$---------- (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) নং হতে পাই, $x=y$.

উদাহরণ 8:এক ব্যক্তি একটি লাঠির প্রান্তে একটি বোঝা ঝুলিয়ে এটি কাঁধের উপর বহন করছে। সে লাঠির অপর প্রান্ত হাত দিয়ে চেপে ধরেছে। কাঁধ ও হাতের মধ্যে দূরত্ব পরিবর্তন করলে কিভাবে কাঁধের উপর চাপের পরিবর্তন হয়?

সমাধান:মনে করুন লঠিটি ABযার দৈর্ঘ্যlএবং দন্ডটির A প্রান্ততে যে বোঝা ঝুলান আছে তার ওজন W। এখন AB লাঠিটির C তে কাঁধ রেখে লাঠির অপর প্রান্তB-তে হাত দিয়ে নিম্নাভিমুখে যে চাপ দেওয়া হচ্ছে তা Pএবং কাঁধের উপর প্রতিক্রিয়া Rঊর্ধ্বাভিমুখে সক্রিয়।



মনে করুন কাঁধ ও হাতের মধ্যবর্তী দূরত্ব $(BC)=x$.

লাঠির উপর ক্রিয়াশীল বলগুলো হলো (i)ঝুলান বোঝার ওজন Wনিম্নাভিমুখে,

(ii) কাঁধের প্রতিক্রিয়া Rঊর্ধ্বাভিমুখে,

(iii) হাতের চাপ P নিম্নদিকে।

সাম্যাবস্থার জন্য Rএবং Wবিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি P-এর সমান ও বিপরীতমুখী।

বিসদৃশ সমান্তরাল বলের সুত্রানুসারে $R\times CB=W\times AB$বা, $R\times x=W\times l$বা, $R=\frac{l}{x}\times W$

$\therefore$ কাঁধের উপর চাপ কাঁধ ও হাতের মধ্যবর্তী দূরত্বের বিপরীত অনুপাতে পরিবর্তিত হয়।

উদাহরণ 9:P ওQ মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি O বিন্দৃতে ক্রিয়া করে। বল দুইটির মান যথাক্রমেRও S দ্বারা বর্ধিত করলে অথবা বল দুইটিকে যথাক্রমেQ ওR মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল দ্বারা প্রতিস্থাপন করলে লব্ধিO বিন্দু দিয়ে গমন করে। প্রমাণ করুন যে,$R=S+\frac{(Q-R)^2}{P-Q}$

সমাধান: মনে করুনP ওQ মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোনো দৃঢ়বস্তুর Aও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

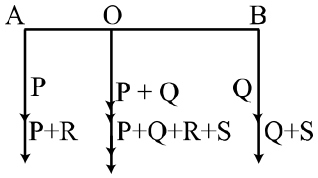
এদের লব্ধি $P+Q$, AB রেখার উপরস্থO বিন্দু দিয়ে গমন করে।

$\therefore P.\,AO=Q.\,BO$---------- (i)

আবার প্রশ্নমতে বল দুটিকে R ও S দ্বারা বর্ধিত করলেও এদের লব্ধি O বিন্দু দিয়ে গমন করে।

$\therefore\ (P+R).\,AO=(Q+S).\,BO$---------- (ii)

P ওQ বল দুইটিকে Q, R মানের দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল দ্বারা প্রতিস্থাপন করলেও এদের লব্ধিO বিন্দু দিয়ে গমন করে।



$\therefore Q.\,AO=R.\,BO$---------- (iii)

এখন সমীকরণ (i) কে (ii) হতে বিয়োগ করে পাই,$R.\,AO=S.\,BO$---------- (iv)

এবং সমীকরণ (iii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,$\frac{Q}{P}=\frac{R}{Q}\Rightarrow\frac{Q}{P}=\frac{R}{Q}=\frac{Q-R}{P-Q}$---------- (v)

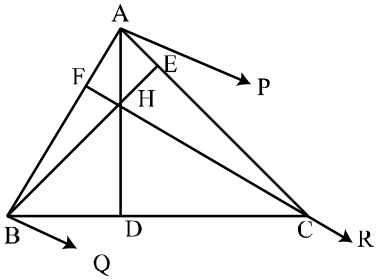
(iv) ÷ (iii) $\Rightarrow\frac{R}{Q}=\frac{S}{R}\Rightarrow\frac{R}{Q}=\frac{S}{R}=\frac{R-S}{Q-R}$---------- (vi)

এখন সমীকরণ (v)ও (vi) হতে পাই,$\frac{Q-R}{P-Q}=\frac{R-S}{Q-R}$বা,$\frac{(Q-R)^2}{P-Q}=R-S$

সুতরাং $R = S + \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 10: P, Q, Rমানের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে ABC ত্রিভুজেরA, B, C কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। বলগুলোর যেকোনো সাধারণ দিকের জন্য লব্ধি যদি ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র দিয়ে গমন করে তবে প্রমাণ করুন যে,
$P(b^2+c^2-a^2) = Q(c^2+a^2-b^2) = R(a^2+b^2-c^2)$

সমাধান:মনে করুনABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয়A, B, C-তেP, Q, R মানের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত যাদের লব্ধি ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্রH দিয়ে গমন করে।



এখনB বিন্দুতে ক্রিয়ারতQ এবংC বিন্দুতে ক্রিয়ারতR বলদ্বয়ের লব্ধিBC এর উপরD বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হবে, যেখানেD, E, F হলো যথাক্রমেA, B, C বিন্দুত্রয় হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলোর পাদবিন্দু।

সুতরাং$Q.BD = R.CD$ ---------- (i)

$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} = \frac{CD/AD}{BD/AD} = \frac{\cot C}{\cot B} = \frac{\tan B}{\tan C}$ ---------- (ii)

একইভাবে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারতP ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি AB এর উপর Fবিন্দু দিয়ে যায়।

সুতরাং, $\frac{P}{Q} = \frac{\tan A}{\tan B}$---------- (iii)

এখন সমীকরণ (ii) এবং (iii) হতে পাই, $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$

বা, $\frac{P\cos A}{\sin A} = \frac{Q\cos B}{\sin B} = \frac{R\cos C}{\sin C}$---------- (iv)

এখন যেহেতু ABC ত্রিভুজ হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\lambda$ এবং $\cos A = \frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}$

$\therefore \frac{P.2\lambda(b^2+c^2-a^2)}{2abc} = \frac{Q.2\lambda(c^2+a^2-b^2)}{2abc} = \frac{R.2\lambda(a^2+b^2-c^2)}{2abc}$

সুতরাং $P(b^2+c^2-a^2) = Q(c^2+a^2-b^2) = R(a^2+b^2-c^2)$

শিক্ষার্থীর কাজ	1.কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর 0.5 মি. ব্যবধানে 15 N এবং 10 N মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করলে এদের লব্ধির মান ও ক্রিয়াবিন্দু নির্ণয় করুন। উত্তর: লব্ধি = 25 N যা প্রদত্ত বলদ্বয়ের সাথে সদৃশ সমান্তরাল। লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 10 N বল হতে 0.3 মি. দূরে এবং 15 N বল হতে 0.2 মি. দূরে। 2.20 সে. মি. ব্যবধানে 10 N এবং 5 N মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল কোনো দৃঢ়বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হলে বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও ক্রিয়া বিন্দু নির্ণয় করুন। উত্তর: লব্ধি = 15 N যার দিক 10 N মানের বলের দিক বরাবর, লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু 10N বল হতে 0.4মি. এবং 5 N বল হতে 0.8 মি. দূরে ক্রিয়া করে।

সারসংক্ষেপ

- যদি কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহের ক্রিয়ারেখা পরস্পরসমান্তরাল হয়, তাহলে ঐ বল সমূহকে **সমান্তরাল বল** বলে। সমান্তরাল বলসমূহ দুই প্রকার যথা:(i) সদৃশ (like) বা সমমুখী সমান্তরাল বল ও (ii) অসদৃশ (unlike)বা বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল।
- দুইটি সমান্তরাল বল পরস্পর একই অভিমুখে ক্রিয়াশীল হলে তাদেরকে **সদৃশ বা সমমুখী সমান্তরাল বল** বলে এবং দুইটি সমান্তরাল বল পরস্পর বিপরীত অভিমুখে ক্রিয়াশীল হলে তাদেরকে **অসদৃশ বা বিপরীতমুখী সমান্তরাল** বল বলে।
- কোনো অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল দুইটি পরস্পর সমমুখী সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধি $P+Q$ যার দিক P ও

Q বলদ্বয়ের প্রত্যেকের দিকের সমান্তরাল এবং যার ক্রিয়াবিন্দু P ও Q বলদ্বয়ের ক্রিয়াবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের উপর অবস্থিত এবং ঐ রেখাংশকে বলদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

- দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল সমান বা অসমান হতে পারে। কোনো বস্তুর প্রত্যেকটি কণার ওজন নিম্নমুখী, তাই তারা সমমুখী সমান্তরাল বল। তাদের লব্ধি বা সমষ্টিই ঐ বস্তুর ওজন। সমরূপ দণ্ডের ওজন ঐ দণ্ডের মধ্যবিন্দুতে খাড়া নিম্নদিকে ক্রিয়াশীল। সমরূপ দণ্ডের মধ্যবিন্দুই তার ভারকেন্দ্র(centre of gravity)।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৯

1. (i) কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল P এবং Q দুইটি সমান্তরাল বলের লব্ধি R, বলদ্বয়ে মধ্যবর্তী দূরত্ব dএকক। P হতেRএর দুরত্বd_1একক এবং QহতেRএর দুরত্ব d_2 একক। লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু C অন্তঃস্থ কিংবা বহিঃস্থ হলে P, Q, R, d, d_1, d_2 ইত্যাদি বিভিন্ন মানের জন্য নিম্নের খালি ঘরগুলো পূরণ করুন।

	P	Q	R	d	d_1	d_2	অন্তঃস্থ/বহিঃস্থ
(i)	10	8		20			
(ii)		5	10	15			
(iii)			20	30	5		
(iv)	10	– 5		10			
(v)	15		20			10	
(vi)	– 30		40	50			

(ii) 6 মিটার লম্বা একটি হালকা আনুভূমিক লাঠির উপর যথাক্রমে A ও B প্রান্তে সক্রিয় 7N ও 5N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান ও প্রয়োগবিন্দু নির্ণয় করুন।

2. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল 2 মিটার ও4 মিটার দূরত্বে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধিবল 35N হলে এবং একটি বলের ক্রিয়ারেখা লব্ধির ক্রিয়ারেখা হতে 16 সে.মি দূরে থাকলে বল দুইটি নির্ণয় করুন।
3. কোনো দৃঢ় বস্তুর উপর 16 মিটার ব্যবধানে অবস্থিত A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়ামান 20 কেজি ওজন এবং 10 কেজি ওজনের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় করুন।
4. দুইজন লোক একটি সরল সমরূপদণ্ড বহন করছে। এর ওজন 160 কি. গ্রা. এবং এটি 16 মিটার দীর্ঘ। যদি একজন লোক একপ্রান্ত হতে 2 মিটার দূরে এবং অপর লোক অন্যপ্রান্ত হতে 3 মিটার দূরে থেকে দণ্ডটি বহন করে তাহলে প্রত্যেকে কত ভার বহন করে?
5. 0.2 সে.মি দীর্ঘ এবং 8 কেজি ভারী একটি লোহার সমদন্ড এক প্রান্তে বাঁধা উল্লম্ব দড়ির দ্বারা ঝুলানো রয়েছে। দড়ির টান 3 কেজি ওজনের হলে, দন্ডটির কোথায় একটি খুঁটি স্থাপন করলে তা অনুভূমিক রেখায় স্থির থাকবে? খুঁটির উপর তখন কত চাপ পড়বে?
6. দুই মিটার দীর্ঘ একটি ওজনহীন দণ্ড0.8 সে.মি. ব্যবধানে দুইটি কীলকের মধ্যেআছে। একটি কীলক দণ্ডের একপ্রান্ত আছে এবং দণ্ডের অপর প্রান্তে5 কেজি ওজন ঝুলান আছে। কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় করুন।
7. দুই ব্যক্তি 5 মিটার দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ডের একটি বিন্দু হতে 50 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বোঝা ঝুলিয়ে দুই প্রান্তে বহন করছে। একজন যে প্রান্তে আছে তার দূরত্ব ভার হতে 3 মিটার। প্রত্যেকে কি পরিমাণ ওজন বহন করে?
8. এমন দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল নির্ণয় করুন যা 0.72 মি. ব্যবধানে থাকলে তাদের লব্ধি 30 কেজি হবে, যখন বৃহত্তর বলটি লব্ধি হতে 0.32 মি. দূরে থাকে।
9. Pও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির অবস্থান এবং বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলেও লব্ধির অবস্থান একই থাকে। দেখান যে P ও Qএর মান সমান।
10. দুই ব্যক্তি একটি 6 মিটার দীর্ঘ তক্তার উপর 300 কেজি ওজন বহনে সমর্থ। বোঝাটি কোথায় রাখলে তার উপর ঠিক এই পরিমাণ চাপ পড়বে?

11. দুই ব্যক্তি 16 মিটার দীর্ঘ এবং 160 কেজি ওজনের একটি সমদন্ড বহন করছে। এক ব্যক্তি একপ্রান্ত হতে 2 মিটার দূরে এবং অপর ব্যক্তি অপর প্রান্ত হতে 3 মিটার দূরে উহা বহন করছে। প্রত্যেক ব্যক্তি কত ভার বহন করছে?
12. 2 মিটার লম্বা এবং 30 কেজি ভারী একটি সমদন্ড একই আনুভূমিক রেখায় পরস্পর হতে 1 মিটার ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর রক্ষিত আছে। পেরেক দুইটির উপর চাপের অনুপাত 2 ঃ 3 হলে, দন্ডের অবস্থান নির্ণয় করুন।
13. দুই ব্যক্তিকে একটি তক্তার সাহায্যে 200 কেজি ওজনবিশিষ্ট একটি প্রস্তর খণ্ডকে সরাতে হবে। এক ব্যক্তিকে 140 কেজি ওজন বহন করতে হলে প্রস্তর খন্ডটিকে তক্তার কোথায় স্থাপন করতে হবে?
14. 9 একক লম্বা হাল্কা একখানি বাঁশের দুই প্রান্ত দুই ব্যক্তির কাঁধে স্থাপিত। বাঁশের একটি বিন্দুতে 225 কেজি ওজনের একটি বস্তু ঝুলিতেছে, সেই বিন্দুটি এক ব্যক্তি অপেক্ষা অপর ব্যক্তির 1 একক নিকটতম। তাদের প্রত্যেকের কাঁধে কত চাপ পড়ে?
15. 60 সে.মি. ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি কীলকের উপর 2 মিটার লম্বা একটি সরল দণ্ড অনুভূমিকভাবে রক্ষিত রয়েছে। কীলক দুইটি একটি দন্ডের একপ্রান্তে অবস্থিত। দন্ডের ওজন 1 কেজি ওজন হলে কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় করুন।
16. AB-র উপর C একটি বিন্দু এবং AC ও BC-এর মধ্যবিন্দুতে যথাক্রমে Pও Qসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করলে, তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি Pও Qএর অবস্থান পরিবর্তন করা হয়, কিন্তু অভিমুখিতা পূর্বের মত থাকে, তবে দেখান যে তাদের লব্ধি AB-এর মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করবে।
17. একজন অপরজন অপেক্ষা বলবান এরূপ দুই ব্যক্তিকে 60 cm. লম্বা একটি হাল্কা দন্ডের সাহায্যে 270 কেজি ওজনবিশিষ্ট একটি প্রস্তরখণ্ডকে সরাতে হবে। বলবান ব্যক্তি 180 কেজি ওজন বহন করতে পারে। প্রস্তরখণ্ডটিকে দন্ডের কোন্ বিন্দুতে স্থাপন করলে তার উপর ঠিক ঐ পরিমাণ ওজন পড়বে?
18. একটি বস্তুর উপর P ও Qদুইটি সদৃশ বল সক্রিয় এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব b; যদি সমান ও অসদৃশ বল S, P ও Qএর প্রত্যেকের সাথে সংযুক্ত হয়, তবে দেখান যে তাদের লব্ধি $\frac{bS}{P+Q}$ দূরত্বের সরে যাবে।
19. 0.3মি. দূরত্বে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল একটি বস্তুতে ক্রিয়া করে। যদি বল দুইটির স্থান পরিবর্তিত হয়, তখন লব্ধি বল 0.5 মি. সরে যায়। বল দুইটির অনুপাত নির্ণয় করুন।
20. একটি ভারহীন দণ্ডের একপ্রান্ত হতে যথাক্রমে 20, 80 ও 60 সে. মি. দূরে যথাক্রমে, P, Qও Rতিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। দণ্ডটি যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তাহলে দেখান যে, PঃQঃR = 1 ঃ 2 ঃ 3.
21. একটি আনুভূমিক রাস্তায় 36 মিটার দীর্ঘ একটি সেতুর (AB) ওজন 5 টন এবং এটি দুই প্রান্তে দুইটি খুঁটির উপর অবস্থিত। 3 টন ভারের একটি মালবাহী ট্রাক A হতে রওনা হয়ে সেতুর দুই-তৃতীয়াংশ অতিক্রম করে থামল। তখন খুঁটি দুইটির উপর কত চাপ পড়বে?
22. দুই ব্যক্তি একটি 4 মিটার লম্বা প্রায় ভারহীন সমদন্ডের সাহায্যে 4 হন্দরের একটি ভার বহন করে। দন্ডটির এক প্রান্ত হতে $1\frac{1}{2}$মিটার দূরে একজন এবং অপর প্রান্ত হতে $\frac{1}{2}$ফুট দূরে আরেকজন থাকলে এবং তার মধ্যবিন্দু হতে ওজনটি ঝুলানো হলে, প্রত্যেক ব্যক্তি কি পরিমাণ ভার বহন করবে?
23. দুই ব্যক্তি একটি 4 মিটার লম্বা ওজনশূন্য দন্ডের সাহায্যে 60 কি. গ্রা.ওজন বহন করছে এবং ভারটি দন্ডের মাঝখানে ঝুলান আছে। এক ব্যক্তি দন্ডের একপ্রান্ত হতে $\frac{1}{2}$ মিটার দূরে এবং অপর ব্যক্তি অপর প্রান্ত হতে 1 মিটার দূরে রয়েছে। প্রত্যেকে কত ভার বহন করছে তা নির্ণয় করুন।
24. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Qও Rএকটি ত্রিভুজ ABC-র কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ করুন যে, বল তিনটি যে অভিমুখেই থাকুক না কেন $P = Q = R$হলে লব্ধির ক্রিয়ারেখা ভরকেন্দ্র দিয়ে যায়।
25. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Qও Rএকটি ত্রিভূজের কৌণিক বিন্দু তিনটিতে ক্রিয়া করে। যদি তাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা (i) ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র দিয়ে যায় তাহলে $P = Q = R$

    (ii) ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে যায়, তাহলেপ্রমাণ করুন, $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$; বা, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$

(iii) পরিকেন্দ্র দিয়ে যায়, তাহলে, প্রমাণ করুন, $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$ বা, $\frac{P}{a\cos A} = \frac{Q}{b\cos B} = \frac{R}{c\cos C}$

বা, $\frac{P}{a^2(b^2 + c^2 - a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2 + a^2 - b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}$

(iv) লম্ববিন্দু দিয়ে যায়, তাহলে প্রমাণ করুন, $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$

বা, $P : Q : R = a\sec A : b\sec B : c\sec C$ বা, $P(b^2 + c^2 - a^2) = Q(c^2 + a^2 - b^2) = R(a^2 + b^2 - c^2)$

26. একজন লোক 6 সে. মি. লম্বা একটি লাঠির এক প্রান্তে একটি বোঝা ঝুলিয়ে তা কাঁধের উপর বহন করছে। কাঁধ ও হাতের মধ্যে দূরত্ব কত হলে কাঁধের উপর চাপ ক্ষুদ্রতম হবে?

পাঠ ৭.১০ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- লেখচিত্রের সাহায্যে একাধিক বেগের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন।

মূলপাঠ

লেখচিত্রের সাহায্যে একাধিক বলের লব্ধি নির্ণয়

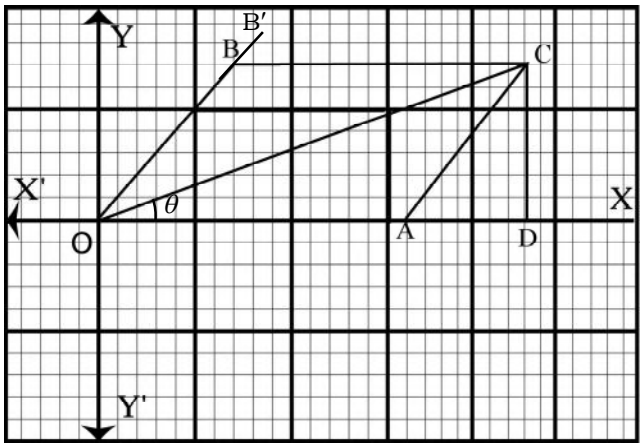
সমস্যা নং - ৭.১	তারিখ:

সমস্যা:একই সময়ে কোনো বিন্দুতে 45° কোণে ক্রিয়ারত 160N এবং 100N বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন।

সমাধান:তত্ত্ব:একই সময়ে কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধিR যদিP এর দিকের সাথেθ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে,$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$, এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, চাঁদা, শার্পনার,ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:1.ছক কাগজে$X'OX$ এবং$Y'OY$ পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী রেখাদ্বয় অঙ্কন করুন যা, যথাক্রমেX এবংY অক্ষ।



2. বলদ্বয়ের মান ও দিক নির্দেশ করার জন্য ছক কাগজের ক্ষুদ্র 1 বর্গ ঘরের দৈর্ঘ্য, বা 1 সে. মি.= 10N বল স্কেল নির্বাচন করুন।

3.OX রেখাংশ থেকেOA = 16 সে.মি. দীর্ঘ অংশ কেটে নিন এবংOX রেখাংশের সাথে ঘড়ির কাঁটার আবর্তনের বিপরীত দিকে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপOB' রেখাংশ অঙ্কন করুন।

4. এখন OB' থেকেOB = 10 সে.মি. অংশ কেটে নিন। সুতরাং OA এবংOBদ্বারা যথাক্রমেO বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত 160N এবং 100N বলদ্বয়ের মান ও দিক সূচিত হয়।

5.এখনOA এবং OB কে সন্নিহিত বাহু ধরে$OACB$সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন। যার একটি কর্ণOC। সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারেOC কর্ণ দ্বারা প্রদত্ত বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ হবে।

6.C বিন্দু থেকেOX এর উপরCD লম্ব অঙ্কন করুন এবং ধরুন$\angle DOC = \theta$।

7.এখনOC, OD এবংCD এর প্রকৃত দৈর্ঘ্য সেন্টিমিটারে নির্ণয় করুন এবং চাঁদার সাহায্যে$\angle COD$ কোণের পরিমাণ ডিগ্রিতে নির্ণয় করুন। এখানে $\angle COD = 17°$

ফল সংকলন:লব্ধি বলের মান নির্ণয়

P	Q	α	$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$	OC	OD	CD	$OC = \sqrt{OD^2 + CD^2}$
160 N	100 N	45°	$\sqrt{(160)^2 + (100)^2 + 2.160.100.\cos45°}$ = 241.30N	24cm	22.96cm	7cm	$\sqrt{(22.96)^2 + (7)^2}$ = 24

স্কেলের মাপে OC এর প্রকৃত দৈর্ঘ্য = 24 সে. মি. দ্বারা$24\times10 = 240$ N বল সূচিত হয়।

জ্যামিতিকভাবেOC=$24\times10 = 240$Nএবং লব্ধি বল = 241.30 N; সুতরাং লেখচিত্র অঙ্কনের যথার্থতা পরীক্ষিত হলো।

লব্ধি বলের দিক নির্ণয়

P	Q	α	$\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$	OD	CD	$\theta = \tan^{-1}\frac{CD}{OD}$	θ কোণ প্রকৃত মাপে
160 N	100 N	45°	$\tan^{-1}\frac{100\sin 45°}{160 + 100\cos 45°} = 17.04°$	22.96cm	7cm	$\tan^{-1}\frac{7}{22.96} = 16.955$	16.96

সূত্রের সাহায্যে $\theta = 17.04°$এবং চাঁদার মাপে মাপে$\theta = 17°$।
সুতরাং লব্ধির মান ও দিক প্রায় সঠিক পরীক্ষিত হল।

সমস্যা নং - ৭.২	**তারিখ:**

সমস্যা:কোনো বিন্দুতে 6, 10, 12 এবং 8N পরিমাণ চারটি বল একই সময়ে এমনভাবে ক্রিয়াশীল যে ঐ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার সাথে বলগুলো যথাক্রমে 15°, 30°, 55°, এবং 100° কোণ উৎপন্ন করে। বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে। লেখচিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ করুন।

সমাধান: তত্ত্ব:মনেকরুন একই সময়ে কোনো বিন্দুতে $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ বলগুলো যথাক্রমে কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার সাথে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে ঐ রেখা বরাবর ও ঐ রেখার সাথে লম্ব বরাবর বলগুলোর লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি যথাক্রমে $\Sigma P_1\cos\alpha_1 = X$ এবং$\Sigma P_1\sin\alpha_1 = Y$ ধরলে।

লব্ধি $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ এবং ঐ রেখার সাথে লব্ধি যে কোণ উৎপন্ন করে তার পরিমাণ$\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$.

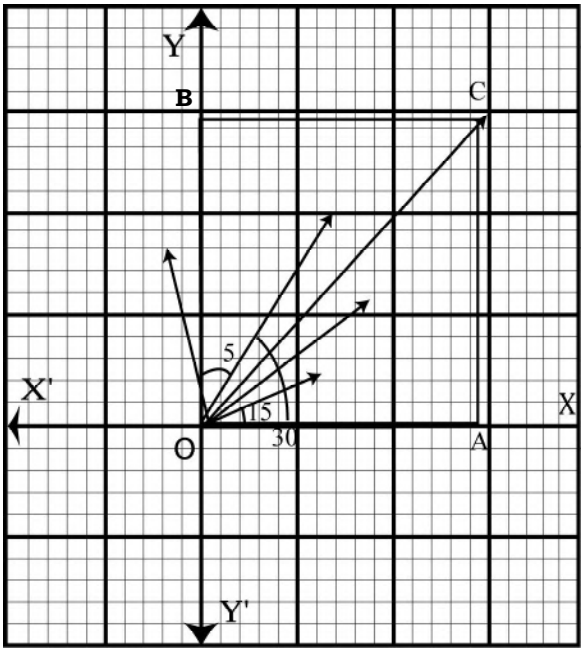
প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, চাঁদা, শার্পনার,ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

1.OX এবংOY অক্ষদ্বয় অঙ্কন করুন।

2.1N বল = 1 সে. মি. বর্গ ঘরের দৈর্ঘ্য স্কেলে বলগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6cm, 10cm 12cmএবং 4cm নির্ণয় করুন।

3.OX এর সাথে 15° কোণে 6 সে.মি. দীর্ঘ রেখাংশ অঙ্কন করে 6N বলের মান ও দিক নির্দেশ করুন।



4.একইভাবে OX এর সাথে 30° কোণে10 সে.মি. এবং 55° কোণে12 সে.মি. এবং 100° কোণে8 সে.মি. দীর্ঘ রেখাংশগুলো অঙ্কন করে যথাক্রমে 10,12 ও 8N বলগুলোর মান ও দিক নির্দেশ করুন।

5.এখন OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নির্ণয় করে যোগ করুন এবংOY বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নির্ণয় করে যোগ করুন।

6.OX ওOY বরাবর লম্বাশগুলোর পৃথক পৃথক যোগফলকে যথাক্রমেXওYধরুন এবংX ওY এর অন্তর্গত কোণ 90° হওয়ায়$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ নির্ণয় করুন।

7.মনে করুন, XওY বলদ্বয় পূর্বোক্ত স্কেলে (অর্থাৎ$2N$ = 1 সে. মি. = 1 বর্গ ঘরের দৈর্ঘ্য) OX ওOY বরাবর যথাক্রমেOA ওOB রেখাংশদ্বয় দ্বারা সূচিত করুন।

8.এখনOA এবং OB কে সন্নিহিত বাহু ধরে$OACB$ আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করুন এবং OC কর্ণ আঁকুন।

তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারেOC কর্ণ দ্বারা প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে ।

ফল সংকলন:OX বরাবর লম্বাংশগুলোর সমষ্টি

$= 6\cos 15° + 10\cos 30° + 12\cos 55° + 8\cos 100° = 19.95$ N = X (ধরুন)।

OY বরাবর লম্বাংশগুলোর সমষ্টি

= 6 sin 15° + 10 sin 30° + 12 sin 55° + 8 sin 100° = 24.26 N = Y (ধরুন)।

P	Q	$\sqrt{P^2 + Q^2} = R$	প্রকৃত মাপে OC এর দৈর্ঘ্য
19.95 N	24.26 N	$\sqrt{(19.95)^2 + (24.26)^2} = 31.41$ N	15.7 সে. মি.

OC রেখা লব্ধির মান ও দিক সূচীত করে। সূত্রানুসারে লব্ধি31.41N

আবার দৈর্ঘ্য মাপে OC= 15.7 × 2 = 31.4 সে. মি. দ্বারা = 31.4 N পরিমাণ বল সূচিত।

OC ওOX এর অন্তর্গত কোণ$\theta = \tan^{-1}\frac{24.26}{19.95} = 50.57°$প্রকৃত মাপে (চাঁদার সাহায্যে) $\theta = 50°$

সুতরাং দেখা যায় যে, সূত্রের সাহায্যে ও প্রকৃতমাপে নির্ণীত লব্ধির মান ও θ কোণের পরিমাণ প্রায় কাছাকাছি। সুতরাং অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণিত হল।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.১০

1. কোনো বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত নিম্নোক্ত বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন। প্রত্যেক ক্ষেত্রে লৈখিক পদ্ধতিতে আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ করুন।
   (i) 45°কোণে 15N এবং 6 N. (ii) 50°কোণে 11Nএবং 7 N.
   (iii) 125°কোণে 35N এবং 70 N. (vi) 145°কোণে 68N এবং 37 N.
   (v) 43°কোণে ক্রিয়ারত 128N ও 223 N. (vi) 65°কোণে ক্রিয়ারত 80N এবং 40 N.
2. 13 মিটার দীর্ঘ একটি রডের দুই প্রান্তে 7 মি. ও 14 মি. দীর্ঘ দুইটি রশির সাহায্যে 65 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে ঝুলানো হয়েছে। রডটি এমনভাবে রাখা হয়েছে যে বস্তুটি ঠিক রডের মধ্যবিন্দুর খাড়া নিচে অবস্থান করে। লেখচিত্রের সাহায্যে রশিদ্বয়ের টান নির্ণয় করুন।
3. $ABCDEF$ সুষম ষড়ভুজেরA বিন্দুতেAB, AC, AD, AE, AF বরাবর যথাক্রমে 3, $\sqrt{2}$, 6, $\sqrt{2}$, 3 কেজি ওজনের বলগুলো ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন।
4. কোনো বস্তুকণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বেগকে uএবং v দ্বারা এবং তাদের অন্তর্ভূত কোণ α দ্বারা প্রকাশ করা হলে প্রতিক্ষেত্রে লব্ধি বেগ নির্ণয় করুন।
   (i) u = 25 সেন্টিমিটার/সেকেন্ড, v = 35 সেন্টিমিটার/সেকেন্ড, $\alpha = 60°$
   (ii) u = 135 সেন্টিমিটার/সেকেন্ড, v = 75 সেন্টিমিটার/সেকেন্ড, $\alpha = 45°$
   (iii) u = 42 সেন্টিমিটার/সেকেন্ড, v = 34 সেন্টিমিটার/সেকেন্ড, $\alpha = 130°$
5. 7, 13 ও 15 কেজি ওজনের তিনটি বল পরস্পর 130° কোণে এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত। লৈখিক পদ্ধতিতে বলগুলোর লব্ধি নির্ণয় করুন।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-10):

1. কোনো বিন্দুতে P ও $2P$মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে দ্বিগুণ করে দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান কত?
   (ক) 8 একক (খ) 12 একক (গ) 4 একক (ঘ) 16 একক
2. $3P$ এবং $2P$বলদ্বয়ের লব্ধি R। প্রথম বল দ্বিগুণ করলে লব্ধির পরিমাণও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ কত?
   (ক) 30° (খ) 120° (গ) 110° (ঘ) 100°
3. $\sqrt{3}$ এককের দুইটি সমান বল 120° কোণে এক বিন্দুতে কাজ করে। তাদের লব্ধির মান কত?
   (ক) $\sqrt{3}$units (খ) $4\sqrt{3}$units (গ) 3 units (ঘ) $2\sqrt{3}$units
4. কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্য রাখলে বলদ্বয়ের প্রতিটির মান কত?
   (ক) $3\sqrt{3}$N (খ) 3 N (গ) $\sqrt{3}$ N (ঘ) 9 N
5. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের একটির মান অপরটির দ্বিগুণ হলে এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতরটির উপর লম্ব হলে বলদ্বয়ের অন্তর্ভক্ত কোণ কত হবে?
   (ক) 60° (খ) 120° (গ) 90° (ঘ) 210°
6. p এবং $4p$ মানের দুইটি বল একটি কণার উপর α কোণে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধি $\sqrt{21}p$ হলে α এর মান কত?
   (ক) 30° (খ) 60° (গ) 90° (ঘ) 120°
7. একটি বিন্দুতে 3N, 5N ও 7N মানের তিনটি বল ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত থেকে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করেছে। ক্ষুদ্রতর বল দুইটির অর্ন্তভুক্ত কোণ কত?
   (ক) 30° (খ) 60° (গ) 90° (ঘ) 120°
8. 8 ও 3 ডাইনের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল একটি দণ্ডের 12 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। একটিমাত্র বলের ক্রিয়ায় রডটি সাম্যাবস্থায় রাখতে হলে রডের নূন্যতম দৈর্ঘ্য কত?
   (ক) 15.2 cm (খ) 17.2 cm (গ) 18.2 cm (ঘ) 19.2 cm
9. 7N, 13N ও 19N এর তিনটি বল পরস্পরের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে। 7N বলের দিকে লব্ধির লম্বাংশ কত?
   (ক) 0 (খ) –9 (গ) 4 (ঘ) 9
10. Pও Qদুইটি বল একবিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত?
    (i) বল দুইটি একই সরলরেখায় একই দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি বৃহত্তম হয়।
    (ii) বল দুইটির অর্ন্তভুক্ত কোণ $\alpha = \pi$ হলে লব্ধি ক্ষুদ্রতম হয়।
    (iii) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ হলে লব্ধি বলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি বর্গমূল হয়।
    উপরের তথ্যের আলোকে কোনটি সঠিক
    (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন

11. একই অনুভূমিক রেখায় C একক দূরত্বে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে $a+b$ একক দীর্ঘ একটি সরু রশির প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে। অবাধে ঝুলানো W একক ওজন বিশিষ্ট একটি বস্তুকে বহন করে এমন একটি মসৃণ ওজনবিহীন আংটি ঐ রশির উপর দিয়ে গড়িয়ে চলাচল করতে পারে।
    (ক) চিত্রের সাহায্যে সমস্যাটি উপস্থাপন করুন।

(খ) দেখান যে, রশির টান $= \dfrac{W(a+b)}{2\sqrt{(a+b)^2 - c^2}}$

(গ) বস্তুটিকে এমন একটি বিন্দুতে আটকে দেওয়া হলো যেন রশিটি ও অনুভূমিক রেখা দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের বাহু a, b ও c এবং ক্ষেত্রফল Δ হয়। দেখান যে, b অংশের টান $= \dfrac{Wb}{4c\Delta}\left(c^2 + a^2 - b^2\right)$

12. 5 মিটার লম্বা অনুভূমিক একটি ভরহীন দন্ডের দুই প্রান্তে দুইটি খুঁটি রয়েছে। এক প্রান্ত থেকে ভিতরের দিকে 4 মিটার দূরে 500 কেজি ওজনের একটি ভারী বস্তু ঝুলানো রয়েছে।

(ক) বস্তুটিকে কোন অবস্থানে ঝুলালে খুঁটিদ্বয়ের উপরে সমান চাপ পড়বে?

(খ) খুঁটির ঠেস বিন্দু দুইটির প্রতিক্রিয়া নির্ণয় করুন।

(গ) একটি খুঁটি যদি 200 কেজি চাপ সহ্য করতে পারে তবে খুঁটি না ভেঙ্গে অপর খুঁটি থেকে সর্বোচ্চ কত দূরে উক্ত বস্তুটি ঝুলানো যাবে?

উত্তরমালা

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. গ	2. খ	3. ক	4. ক	5. ঘ	6. ঘ	7. খ
8. ঘ	9. খ	10. ঘ				