পাঠ ৬.৫ ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের ধারণা ও সংজ্ঞা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ, সমাধান

মূলপাঠ

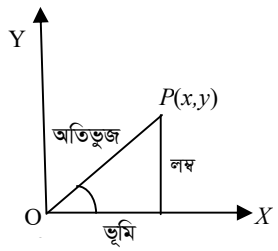
এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমন্বিত সমীকরণকে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বলে। একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাথে সংশ্লিষ্ট অজানা কোণের বা কোণ সমূহের কয়েকটি নির্দিষ্ট মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে। সুতরাং যেসমস্ত কোণ দ্বারা ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সিদ্ধ হয় তাদের মান নির্ণয় করাই ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্দিষ্ট থাকলে অনুপাতের সঙ্গেসংশ্লিষ্ট কোণের অসংখ্য মান পাওয়া যায়।

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে θএর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান 45°। সম্পুরক কোণের sine সমান বলে sin135°=sin45°। আবার 45° ও 135° কোণের সাথে যে সমস্ত কোণের পার্থক্য 360° অথবা 360° কোণের গুণিতক তাদের sine এবং 45° কোণের sine সমান অর্থাৎ $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$। সুতরাং এই সমীকরণের সমাধান θ=45°, 135°, 405°, 495°, 765°, – 225°, –315°, – 675°, ...ইত্যাদি। অন্য কোনো ত্রিকোণমিতিক অনুপাত দ্বারা গঠিত সমীকরণ হতে একইভাবে দেখান যায়, সমীকরণের অজানা কোণের জন্য অসংখ্য মান পাওয়া যায়।এখন ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান, অর্থাৎ অজানা কোণের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত মান একটি রাশির সাহায্যে কিভাবে প্রকাশ করা যায় তা নিম্নে আলোচনা করে দেখানো হলো।

$\sin\theta$= 0সমীকরণের সাধারণ সমাধান

যেহেতু,$\sin\theta$=0;∴ সংজ্ঞানুসারে$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ব্যাসার্ধভেক্টর}}$ = 0.



সুতরাং একটি কোণের সাইন অনুপাত শূন্য হলে লম্বের দূরত্ব শূন্য হবে। ইহা তখনই সম্ভব যখন কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘুরে এসে আদি অবস্থানের রেখাটির সাথে মিলিত হয়। ঘূর্ণায়মান রেখা আদি অবস্থানের রেখার সাথে পুনরায় মিলিত হবে, যদি তা আদি অবস্থানের রেখার সাথে0, $\pm\pi$, $\pm2\pi$, $\pm3\pi$, $\pm4\pi$;ইত্যাদি কোণ উৎপন্ন করে এবং তখন কোণগুলোর জন্য সাইন অনুপাতের মান শূন্য হবে।

∴ $\theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi$;ইত্যাদি।

যদিnএর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হয়, তবে $n\pi$রাশির সাহায্যে উপরে প্রাপ্ত সমস্ত কোণ, অর্থাৎ সমীকরণের সাধারণ সমাধান প্রকাশ করা যায়।

∴ $\sin\theta$= 0হলে,$\theta = n\pi$,যখনnএর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

$\cos\theta$ = 0সমীকরণের সমাধান

যেহেতু,$\cos\theta$ =0,∴সংজ্ঞানুসারে,$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{ব্যাসার্ধ ভেক্টর}}$ =0.

সুতরাং, একটি কোণের কোসাইন অনুপাত শূন্য হলে ভূমির দূরত্ব শূন্য হবে। ইহা তখনই সম্ভব যখন কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘুরে এসে আদি অবস্থানের রেখার উপর লম্ব হয়।

ঘূর্ণায়মান রেখা আদি অবস্থানের রেখার উপর লম্ব হবে, যদি তা আদি অবস্থানের রেখার সাথে $\pm\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 5\frac{\pi}{2}$, ...ইত্যাদি কোণ উৎপন্ন করে এবং তখন কোণগুলোর জন্য কোসাইন অনুপাতের মান শূন্য হয়।

$\therefore\ \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 5\frac{\pi}{2}$, ...

যদি kএর মান বিজোড় এবং অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) হয়, তবে $k\,.\,\frac{\pi}{2}$রাশির সাহায্যে উপরে প্রাপ্ত সমস্ত কোণ, অর্থাৎ সমীকরণের সাধারণ সমাধান প্রকাশ করা যায়।

$\therefore \cos\theta = 0$ হলে $\theta = k\,.\,\frac{\pi}{2}$

বা, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, যখন$n$এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

$\tan\theta = 0$ও$\cot\theta = 0$সমীকরণের সমাধান

যেহেতু, $\tan\theta = 0$অতএব, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0$ অর্থাৎ$\sin\theta = 0$বা $\theta = n\pi$

সুতরাং $\tan\theta = 0$হলে $\theta = n\pi$,যখনnএর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)

আবার, $\cot\theta = 0$অর্থাৎ,$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$অর্থাৎ$\cos\theta = 0$

$\therefore\quad \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

দ্রষ্টব্যঃ $\operatorname{cosec}\theta$ও$\sec\theta$এর মান কখনও 1অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা –1অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। ফলে তাদের মান কখনও শূন্য হতে পারে না।

উদাহরণ1:সমাধান করুন,$\sin3\theta + \sin5\theta + \sin7\theta + \sin9\theta = 0$

সমাধানঃ $\sin3\theta + \sin5\theta + \sin7\theta + \sin9\theta = 0$বা, $(\sin9\theta + \sin3\theta) + (\sin7\theta + \sin5\theta) = 0$

বা,$2\sin6\theta\cos3\theta + 2\sin6\theta\cos\theta = 0$বা,$2\sin6\theta(\cos3\theta + \cos\theta) = 0$

বা,$2\sin6\theta\,.\,2\cos2\theta\cos\theta = 0$বা,$4\sin6\theta\cos2\theta\cos\theta = 0$

$\therefore\ \sin6\theta = 0$ বা, $6\theta = n\pi$বা, $\theta = \frac{n\pi}{6}$

$\cos2\theta = 0$বা, $2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

এবং $\cos\theta = \theta$ $\therefore \theta = n\pi$.

যখন nএর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা।

উদাহরণ 2:সমাধান করুন,$\sin5\theta\cos\theta = \sin6\theta\cos2\theta$

সমাধানঃ $\sin5\theta\cos\theta = \sin6\theta\cos2\theta$বা,$2\sin5\theta\cos\theta = 2\sin6\theta\cos2\theta$

বা,$\sin6\theta + \sin4\theta = \sin8\theta + \sin4\theta$ বা,$\sin8\theta - \sin6\theta = 0$

বা,$2\cos7\theta\sin\theta = 0$

হয় $\cos7\theta = 0$ $\therefore\ 7\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ \theta = (2n+1)\frac{\pi}{14}$

অথবা, $\sin\theta = 0$ $\therefore\ \theta = n\pi$

যখন nএর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা।

উদাহরণ 3: সমাধান করুন, $\tan x+\tan 2x+\tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$

সমাধান: $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$.

বা, $\tan x + \tan 2x = -\tan 3x + \tan x\tan 2x\tan 3x$

বা, $\tan x + \tan 2x = -\tan 3x\,(1-\tan x\tan 2x)$ বা, $\dfrac{\tan x + \tan 2x}{1-\tan x\tan 2x} = -\tan 3x$

বা, $\tan(x + 2x) = -\tan 3x$ বা, $\tan 3x = -\tan 3x$

বা, $2\tan 3x = 0$ বা, $\tan 3x = 0$

$\therefore\ 3x = n\pi \ \Rightarrow x = \dfrac{n\pi}{3}$

যখন nএর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা।

সারসংক্ষেপ

- এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমন্বিত সমীকরণই ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।
- $\sin\theta = 0$হলে, $\theta = n\pi$, যখন nএর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।
- $\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, যখন nএর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।
- $\tan\theta = 0$হলে $\theta = n\pi$, যখন nএর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৫

সমাধান করুন:

1. $\cos 3\theta = \cos 2\theta$
2. $\sin m\theta + \sin n\theta = 0$
3. $\cos 9x \cos 7x = \cos 5x \cos 3x$

পাঠ ৬.৬ $\sin\theta = r$, $\cos\theta = r$, $\tan\theta = r$ সমীকরণের সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- $\sin\theta = r$, $\cos\theta = r$, $\tan\theta = r$ সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন,
- অপ্রাসঙ্গিক মূল চিহ্নিত করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অপ্রাসঙ্গিক মূল

মূলপাঠ

সাইন (sine)-এর অনুপাতের একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত কোণকে একটি সাধারণ রাশির সাহায্যে প্রকাশ

মনে করুন, αএকটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যার সাইন(sine)-এর মানr (r-এর মান1অপেক্ষা বৃহত্তর হবে না)। আবার মনে করুন, θযে কোনো একটি কোণ যারsine-এর মানওrঅর্থাৎ, $\sin\theta = r$.

অতএব, $\sin\theta = r = \sin\alpha$

অথবা, $\sin\theta = \sin\alpha$বা, $\sin\theta - \sin\alpha = 0$

বা,$2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

হয়,$\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ বা,$\frac{\theta-\alpha}{2} = m\pi$

বা,$\theta - \alpha = 2m\pi$বা, $\theta = 2m\pi + \alpha$

বা,$\theta = 2m\pi + (-1)^{2m}\alpha$----------(1)

অথবা,$\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ বা, $\frac{\theta+\alpha}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$

বা,$\theta + \alpha = (2m+1)\pi$বা, $\theta = (2m+1)\pi - \alpha$

বা,$\theta = (2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\alpha$---------- (2)

(1)নং ও(2)নং সমীকরণ একত্রিত করে পাওয়া যায়,$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

n-এর মান শূন্য অথবা ধনাত্মক ও ঋণাত্মক যে কোন জোড় অথবা বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে।

যদি $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$হয় তবে$\sin\theta = \sin\alpha$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$,যেখানে$n$-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

কোসাইন(cosine)-এর অনুপাতের একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত কোণকে সাধারণ রাশির সাহায্যে প্রকাশ

মনে করুন,αএকটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যার কোসাইন(cosine)-এর মানr (r-এর সংখ্যামান1অপেক্ষা বৃহত্তর হবে না)। আবার ধরুনθযে কোনো একটি কোণ যারcosine-এর মানrঅর্থাৎ$\cos\theta = r$

অতএব,$\cos\theta = r = \cos\alpha$অর্থাৎ$\cos\theta = \cos\alpha$

বা,$\cos\alpha - \cos\theta = 0$ বা,$2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

হয়,$\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ অতএব, $\frac{\theta+\alpha}{2} = m\pi$

বা, $\theta + \alpha = 2m\pi$

$\therefore \theta = 2m\pi - \alpha$---------- (1)

অথবা,$\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$অতএব,$\frac{\theta-\alpha}{2} = m\pi$

বা, $\theta - \alpha = 2m\pi$

$\therefore \theta = 2m\pi + \alpha$---------- (2)

(1)ও (2)নং সমীকরণ একত্রিত করে পাওয়া যায়$\theta = 2n\pi \pm \alpha$

যেখানে,n-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)

$\sec\theta = \sec\alpha$হলে,$\cos\theta = \cos\alpha$,

সুতরাং $\theta = 2n\pi \pm \alpha$, যেখানে$n$-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

টেনজেন্ট(Tangent)-এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত কোণকে একটি সাধারণ রাশির সাহায্যে প্রকাশ

মনে করুন,α একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যার ট্যানজেন্ট(tangent)-এর মানr-এর সমান। আবার ধরুনθযে কোনো একটি কোণ যার ট্যানজেন্ট-এর মানওrঅর্থাৎ$\tan\theta = r$.

অতএব,$\tan\theta = r = \tan\alpha$ অর্থাৎ$\tan\theta - \tan\alpha = 0$

বা,$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$ বা,$\frac{\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

বা,$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$বা, $\sec\theta\sec\alpha\sin(\theta-\alpha) = 0$

কিন্তু $\sec\theta$বা,$\sec\alpha$কখনও শূন্য হতে পারে না।

অতএব,$\sin(\theta-\alpha) = 0$অতএব, $\theta - \alpha = n\pi$বা,$\theta = n\pi + \alpha$

যেখানেn-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।
যদি$\cot\theta = \cot\alpha$হয় তবে$\tan\theta = \tan\alpha$
$\therefore\ \theta = n\pi + \alpha$, যেখানে$n$-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা(ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

উদাহরণ 1:সমাধান করুন,$\operatorname{cosec}\theta\cot\theta = 2\sqrt{3}$

সমাধান: $\operatorname{cosec}\theta\cot\theta = 2\sqrt{3}$ বা,$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 2\sqrt{3}$

বা,$\cos\theta = 2\sqrt{3}\sin^2\theta = 2\sqrt{3}(1-\cos^2\theta)$

বা, $2\sqrt{3}\cos^2\theta + \cos\theta - 2\sqrt{3} = 0$বা, $(\sqrt{3}\cos\theta + 2)(2\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$

কিন্তু$\sqrt{3}\cos\theta + 2 \neq 0$,কারণ$\cos\theta$এর সংখ্যাসূচক মান$-1$অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম হতে পারে না।

$\therefore\ 2\cos\theta - \sqrt{3} = 0.$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

উদাহরণ 2:সমাধান করুন,$\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0$

সমাধান:$\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0$বা, $(2\sin\theta\cos\theta)^2 - 3\cos^2\theta = 0$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta - 3\cos^2\theta = 0$বা, $\cos^2\theta(4\sin^2\theta - 3) = 0$

হয়, $\cos^2\theta = 0 \therefore\ \cos\theta = 0$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

নাহয়,$4\sin^2\theta - 3 = 0$বা,$4\sin^2\theta = 3$বা,$\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

বা,$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\sin\frac{\pi}{3}$ বা,$\sin\theta = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$

অর্থাৎ$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

অপ্রাসঙ্গিক মূল (Extraneous roots):

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান একাধিক পদ্ধতিতে করা যায়। সমাধানের পদ্ধতিগুলো ভিন্ন হলেও প্রকৃতপক্ষে সমাধানগুলো থেকে অভিন্ন কোণসমূহ পাওয়া যায়। কিন্তু কোনো কোনো ক্ষেত্রে ত্রুটিপূর্ণ পদ্ধতির জন্য সমাধানের সাথে এমন কতকগুলো মূল পাওয়া যায় যেগুলো প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। এই মূলসমূহকে অপ্রাসঙ্গিক মূল বলে।

উদাহরণ 3:সমাধান করুন, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

সমাধান:প্রথম পদ্ধতি:$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

উভয় পক্ষকে $\cos\theta$ও$\sin\theta$এর সহগের বর্গের যোগফলের বর্গমূল অর্থাৎ $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়-

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = 1$বা, $\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = 1$

বা, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \cos 0$

$\therefore\ \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2n\pi \pm 0 \Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

দ্বিতীয় পদ্ধতি:উভয় পক্ষকে$\cos\theta$ও $\sin\theta$এর সহগের বর্গের যোগফলের বর্গমূল দ্বারা ভাগকরে,

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=1$ বা, $\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta=1$

বা, $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=1=\sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{2}$

মনে করুন, mজোড় সংখ্যা এবং$m=2n$

$\therefore\ \frac{\pi}{4}+\theta=2n\pi+(-1)^{2n}\frac{\pi}{2}$

$\therefore\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\therefore\theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$

mবিজোড় হলে মনে করুন, $m=2n+1$

$\therefore\ \frac{\pi}{4}+\theta=(2n+1)\pi+(-1)^{2n+1}\frac{\pi}{2}=2n\pi+\pi-\frac{\pi}{2}$

$\therefore\theta=2n\pi+\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$

অর্থাৎ$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$, যখন$n$এর মান শূন্য অথবা যেকোনো অখন্ড সংখ্যা(ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

তৃতীয় পদ্ধতিঃ $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}$বা, $\sin\theta=\sqrt{2}-\cos\theta$

বা, $\sin^2\theta=\left(\sqrt{2}-\cos\theta\right)^2$ বা, $\sin^2\theta=2-2\sqrt{2}\cos\theta+\cos^2\theta$

বা, $1-\cos^2\theta=2-2\sqrt{2}\cos\theta+\cos^2\theta$বা, $2\cos^2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta+1=0$

বা,$\left(\sqrt{2}\cos\theta-1\right)^2=0$বা,$\sqrt{2}\cos\theta-1=0$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

কিন্তু$\theta=2n\pi-\frac{\pi}{4}$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$

লক্ষণীয়ঃ তৃতীয় পদ্ধতিতে সমাধান করলে শুদ্ধ সমাধান$2n\pi+\frac{\pi}{4}$ ছাড়াও আরও একটি অপ্রাসঙ্গিক মূল$2n\pi-\frac{\pi}{4}$ পাওয়া যায়, যা সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। সমীকরণটিকে বর্গ করার ফলে এই সমস্যার সৃষ্টি হয়েছে। উভয় পক্ষকে বর্গ করার ফলে নির্দিষ্ট সমীকরণের$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}$সমীকরণটি অন্তর্ভুক্ত হয় এবং প্রকৃত পক্ষে$2n\pi+\frac{\pi}{4}$ মূলটি উক্ত সমীকরণটির সমাধান।

উদাহরণ 4:সমাধান করুন,$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2\sin2\theta}$

সমাধানঃ $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2\sin2\theta}$ বা, $\left(\sqrt{\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{\cos\theta}\right)^2=\sqrt{2.2\sin\theta\cos\theta}$

বা, $\left(\sqrt{\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{\cos\theta}\right)^2-2\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}=0$

বা, $\left(\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta}\right)^2=0$ বা, $\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta}=0$

বা, $\sqrt{\sin\theta}=\sqrt{\cos\theta}$ বা, $\sin\theta=\cos\theta$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1$ বা, $\tan\theta=1=\tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta=k\pi+\frac{\pi}{4}$

কিন্তু k এর মান বিজোড় হলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান $\theta=k\pi+\frac{\pi}{4}$ যখন k এর মান শুন্য অথবা k জোড় সংখ্যা।

$\therefore\ \theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$

উদাহরণ 5: সমাধান করুন, $\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta=2\sqrt{2}$

সমাধান: $\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta=2\sqrt{2}$ বা, $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$

বা, $\cos\theta+\sin\theta=2\sqrt{2}\ \sin\theta\cos\theta$ বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$

বা, $\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta=\sin2\theta$

বা, $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\sin2\theta$

$\therefore\ \frac{\pi}{4}+\theta=k\pi+(-1)^k2\theta$

যখন k জোড়, মনে করুন, $k=2m$

$\therefore\frac{\pi}{4}+\theta=2m\pi+(-1)^{2m}.2\theta=2m\pi+2\theta$

$\therefore\theta=-2m\pi+\frac{\pi}{4}=2n\pi+\frac{\pi}{4}=(8n+1)\frac{\pi}{4}$ [$m=-n$ বসিয়ে]

যখন k বিজোড়, মনে করুন, $k=2m+1$

$\therefore\theta+\frac{\pi}{4}=(2m+1)\pi-2\theta$

বা, $3\theta=2m\pi+\pi-\frac{\pi}{4}=2m\pi+\frac{3\pi}{4}=(8m+3)\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta=(8m+3)\frac{\pi}{12}$ [$m=n$ বসিয়ে]

উদাহরণ 6: সমাধান করুন, $\sin x+\sin2x+\sin3x=0$

সমাধান: $\sin x+\sin2x+\sin3x=0$ বা, $(\sin x+\sin3x)+\sin2x=0$

বা, $2\sin2x\cos x+\sin2x=0$ বা, $\sin2x\,(2\cos x+1)=0$

হয়, $\sin2x=0$ $\therefore\ 2x=n\pi\Rightarrow x=\frac{n\pi}{2}$

নাহয়, $2\cos x+1=0$ বা, $\cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore\ x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

অতএব, $x = \frac{n\pi}{2},\ 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

উদাহরণ 7: সমাধান করুন, $\sin^2 2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{3}\sin 3\theta$

সমাধানঃ $\sin^2 2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{3}\sin 3\theta$

বা, $(2\sin\theta\cos\theta)^2 - \sin^2\theta = \frac{1}{3}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta = \sin\theta - \frac{4}{3}\sin^3\theta$

বা, $4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta - \sin\theta + \frac{4}{3}\sin^3\theta = 0$

বা, $4\sin^2\theta - 4\sin^4\theta - \sin^2\theta - \sin\theta + \frac{4}{3}\sin^3\theta = 0$

বা, $3\sin^2\theta - 4\sin^4\theta - \sin\theta + \frac{4}{3}\sin^3\theta = 0$

বা, $3\sin^2\theta\ (1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta) - \sin\theta\ (1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta) = 0$

বা, $(3\sin^2\theta - \sin\theta)\ (1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta) = 0$

বা, $\sin\theta(3\sin\theta - 1)\ (1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta) = 0$

যখন $\sin\theta = 0$ তখন $\theta = n\pi$

যখন $3\sin\theta - 1 = 0$ তখন $3\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{3} = \sin\alpha$, যেখানে $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

আবার, যখন $1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta = 0$ বা, $\frac{4}{3}\sin^2\theta = 1$ বা, $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore\ \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

অতএব, $\theta = n\pi,\ n\pi + (-1)^n\alpha$ যখন $\sin\alpha = \frac{1}{3},\ n\pi + (-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

উদাহরণ 8: সমাধান করুন, $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta$

সমাধানঃ $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta$

বা, $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 2\theta = \cos\theta + 1 + \cos 2\theta$

বা, $2\sin 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta = \cos\theta + 2\cos^2\theta$

বা, $2.2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta - 2\cos^2\theta = 0$

বা, $4\sin\theta\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta - 2\cos^2\theta = 0$

বা, $2\cos\theta\sin\theta - \cos\theta + 4\cos^2\theta\sin\theta - 2\cos^2\theta = 0$

বা, $\cos\theta(2\sin\theta-1)+2\cos^2\theta(2\sin\theta-1)=0$

বা, $(2\cos^2\theta+\cos\theta)(2\sin\theta-1)=0$

বা, $\cos\theta(2\cos\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$

যখন $\cos\theta=0$ তখন $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

যখন $2\sin\theta-1=0$ তখন $\sin\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

যখন $2\cos\theta+1=0$ তখন $\cos\theta=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

অতএব, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ 2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

উদাহরণ 9: সমাধান করুন, $a\cos\theta+b\sin\theta=c$, যখন a, b, c ধ্রুবক।

সমাধান: মনে করুন, $a=r\cos\alpha$ এবং $b=r\sin\alpha$, যেখানে α একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ এবং r ধনাত্মক।

$\therefore r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

এখন প্রদত্ত সমীকরণে a ও b এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$r\cos\alpha\cos\theta+r\sin\alpha\sin\theta=c$

বা, $r(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)=c$

বা, $r\cos(\theta-\alpha)=c$

$\therefore \cos(\theta-\alpha)=\frac{c}{r}=\cos\beta$

যেখানে β একটি ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যার cosine অনুপাত $\frac{c}{r}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ অর্থাৎ $\cos\beta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

অতএব, $\theta-\alpha=2n\pi\pm\beta \Rightarrow \theta=2n\pi\pm\beta+\alpha$

উদাহরণ 10: সমাধান করুন, $\sin7\theta-\sqrt{3}\cos4\theta=\sin\theta$

সমাধান: $\sin7\theta-\sqrt{3}\cos4\theta=\sin\theta$ বা, $\sin7\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos4\theta=0$

বা, $2\cos\left(\frac{7\theta+\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{7\theta-\theta}{2}\right)-\sqrt{3}\cos4\theta=0$

বা, $2\cos4\theta\sin3\theta-\sqrt{3}\cos4\theta=0$ বা, $\cos4\theta(2\sin3\theta-\sqrt{3})=0$

হয়, $\cos4\theta=0\ \therefore\ 4\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=(2n+1)\frac{\pi}{8}$

অথবা, $2\sin3\theta-\sqrt{3}=0$ বা, $\sin3\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ 3\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\Rightarrow\ \theta=\frac{n\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{9}\Rightarrow\theta=\left\{3n+(-1)^n\right\}\frac{\pi}{9}$

উদাহরণ 11: $m\tan\theta+n\sec\theta=p$ সমীকরণের দুইটি মূল α ও β হলে প্রমাণ করুন যে, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2mp}{m^2-n^2}$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণটি, $m\tan\theta+n\sec\theta=p$

বা, $n\sec\theta=p-m\tan\theta$ বা, $(n\sec\theta)^2=(p-m\tan\theta)^2$

বা, $n^2(1+\tan^2\theta)=p^2-2mp\tan\theta+m^2\tan\theta^2$

বা, $(m^2-n^2)\tan^2\theta-2mp\tan\theta+(p^2-m^2)=0$ ---------- (i)

(i) হল $\tan\theta$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। যেহেতু শর্তানুসারে α ও β প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি মূল, সুতরাং, $\tan\alpha$ ও $\tan\beta$ এ সমীকরণের দুইটি মূল।

$\therefore \tan\alpha + \tan\beta = \frac{2mp}{m^2-n^2}$ এবং $\therefore \tan\alpha\tan\beta = \frac{p^2-n^2}{m^2-n^2}$

এখন, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{2mp}{m^2-n^2}}{1-\frac{p^2-n^2}{m^2-n^2}} = \frac{2mp}{m^2-p^2}$

সারসংক্ষেপ

- $\sin\theta = r = \sin\alpha$, হলে $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$,যেখানে$n$-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।
- $\cos\theta = r = \cos\alpha$,হলে $\theta = 2n\pi \pm \alpha$, যেখানে$n$-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।
- $\tan\theta = r = \tan\alpha$, হলে $\theta = n\pi + \alpha$, যেখানেn-এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৬

সমাধান করুন:

1. $\tan^3 - \sec^2\theta = 4\tan^2\theta - 5\tan\theta$
2. $\cot 2\theta = \cos\theta + \sin\theta$
3. $5\sin^2 x + \cos^2 x = 4$
4. $\sec^2\theta + \tan^2\theta = 3\tan\theta$
5. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = 2$
6. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$
7. $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$
8. $2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$

পাঠ ৬.৭ কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- $\sin\theta = \pm 1$ হলে সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন,
- $\cos\theta = \pm 1$ হলে সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অনুপাত

মূলপাঠ

sine অথবা cosine অনুপাতের মান 1 বা –1 এর সমান হলে, সেই সমীকরণ সমাধান করে অজানা কোণের জন্য যে মানসমূহ পাওয়া যায় তাদেরকে একটি আলাদা ধরনের রাশির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। নিম্নে এই ধরনের চারটি দৃষ্টান্তের আলোচনা করা হলো।

(i) মনে করুন, $\sin\theta = 1$ তাহলে, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{2}$, যখন m এর মান শূন্য, অথবা একটি অখন্ড সংখ্যা।

যদি m এর মান জোড় হয়, অর্থাৎ $m = 2n$ (n একটি অখন্ড সংখ্যা) হয়, তাহলে,

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$$

যদি m এর মান বিজোড় হয়, অর্থাৎ $m = 2n+1$ (n একটি অখন্ড সংখ্যা) হয়, তাহলে,

$$\theta = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2n\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$$

সুতরাং $\sin\theta = 1$ হলে $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

(ii) মনে করুন, $\sin\theta = -1$

তাহলে, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \theta = m\pi + (-1)^m.\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, যখন m এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

যদি m এর মান জোড় হয়. অর্থাৎ $m = 2n$ (n একটি অখন্ড সংখ্যা) হয়, তাহলে,

$$\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2} = (4n-1)\frac{\pi}{2}$$

যদি m এর মান বিজোড় হয়, অর্থাৎ $m = 2n-1$ (n একটি অখন্ড সংখ্যা) হয়, তাহলে

$$\theta = (2n-1)\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi - \pi + \frac{\pi}{2} = 2n\pi - \frac{\pi}{2} = (4n-1)\frac{\pi}{2}.$$

সুতরাং, $\sin\theta = -1$ হলে, $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

অনুরূপভাবে সহজেই দেখানো যায়,

(iii) যদি $\cos\theta = 1$ হয়, তবে $\theta = 2n\pi$;

(iv) যদি $\cos\theta = -1$ হয়, তবে $\theta = (2n+1)\pi$.

উদাহরণ1: সমাধান করুন, $\cos\theta + \sin\theta + \sqrt{2} = 0$

সমাধান: $\cos\theta + \sin\theta + \sqrt{2} = 0$ বা, $\cos\theta + \sin\theta = -\sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = -1$ বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = -1$

বা, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\therefore\ \theta - \frac{\pi}{4} = (2n+1)\pi \Rightarrow \theta = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = 2n\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \theta = (8n+5)\frac{\pi}{4}$

উদাহরণ 2: সমাধান করুন, $\sin\theta - 2 = \cos 2\theta$

সমাধান: $\sin\theta - 2 = \cos 2\theta$

বা, $\sin\theta - 2 = 1 - 2\sin^2\theta$ বা, $2\sin^2\theta + \sin\theta - 3 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$ বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) + 3(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 3) = 0$

কিন্তু $2\sin\theta + 3 \neq 0$, কারণ $\sin\theta$ এর সংখ্যামূলক মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

$\therefore \sin\theta - 1 = 0$ বা, $\sin\theta = 1$

$\therefore \theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$

সারসংক্ষেপ

- $\sin\theta = 1$ হলে $\theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।
- $\sin\theta = -1$ হলে, $\theta = (4n - 1)\frac{\pi}{2}$, যখন n এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।
- যদি $\cos\theta = 1$ হয়, তবে $\theta = 2n\pi$, যখন n এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।
- যদি $\cos\theta = -1$ হয়, তবে $\theta = (2n + 1)\pi$, যখন n এর মান শূন্য, অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৭

সমাধান করুন:

1. $\tan\theta + \cot\theta = 2$
2. $\cot x - \tan x = 2$
3. $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 2$
4. $\sin 2x \tan x + 1 = \sin 2x + \tan x$

পাঠ ৬.৮ নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোনো নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধানকরতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ব্যবধি, সমাধান নির্ণয়

মূলপাঠ

পূর্ববর্তী পাঠগুলোতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান অর্থাৎ অজানা কোণের জন্য প্রাপ্ত সমস্ত মান একটি রাশির সাহায্যে প্রকাশ করা হয়েছিল। বর্তমানে পাঠে নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান অর্থাৎ নির্দিষ্ট ব্যবধির মধ্যে প্রাপ্ত কোণের মানসমূহ কিভাবে নির্ণয় করা হয় তা আলোচনা করা হবে।

উদাহরণ 1: সমাধান করুন, $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$ যখন $0 < \theta < \pi$

সমাধান: $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$

বা, $(\cos 7\theta + \cos\theta) + (\cos 5\theta + \cos 3\theta) = 0$

বা, $2\cos4\theta\cos3\theta + 2\cos4\theta\cos\theta = 0$বা, $2\cos4\theta(\cos3\theta + \cos\theta) = 0$

বা, $2\cos4\theta.\ 2\cos2\theta\cos\theta = 0$বা, $4\cos4\theta\ \cos2\theta\ \cos\theta = 0$

$\cos4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

$\cos2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

এবং $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

যেখানে $n = 0, 1, 2, 3, ...$

যখন $n = 0$, তখন $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

যখন $n = 1$, তখন $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

যখন $n = 2$, তখন $\theta = \frac{5\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}$

যখন $n = 3$, তখন $\theta = \frac{7\pi}{8}, \frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}$

কিন্তু $0 < \theta < \pi$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ এবং $\frac{\pi}{2}$

উদাহরণ 2:সমাধান করুন,$2\sin x \sin3x = 1$ যখন $0<x<2\pi$

সমাধান:$2\sin x \sin3x = 1$বা, $\cos(3x - x) - \cos(3x + x) = 1$

বা, $\cos2x - \cos4x = 1$ বা, $\cos2x - (1 + \cos4x) = 0$

বা, $\cos2x - 2\cos^2 2x = 0$বা, $\cos2x\ (1 - 2\cos2x) = 0$

এখন $\cos2x = 0$ হলে$2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

যখন $1 - 2\cos2x = 0$বা, $\cos2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

যখন$n = 0$, তখন $x = \frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{6}$

যখন $n = 1$, তখন $x = 3\frac{\pi}{4},\ \pi \pm \frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

যখন $n = 2$, তখন $x = \frac{5\pi}{4}, 2\pi \pm \frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $x = \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$

যখন $n = 3$, তখন $x = \frac{7\pi}{4}, 3\pi \pm \frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $x = \frac{7\pi}{4}, \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$

কিন্তু $0<x<2\pi$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$

উদাহরণ 3:সমাধান করুন, $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ যখন $-\pi < x < \pi$

সমাধান:$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$বা, $2\sin^2 x - 2 + \sin^2 2x = 0$

বা, $-2(1 - \sin^2 x) + (2\sin x \cos x)^2 = 0$

বা, $-2\cos^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x = 0$বা, $-2\cos^2 x (1 - 2\sin^2 x) = 0$

বা, $-2\cos^2 x . \cos 2x = 0$

হয় $\cos^2 x = 0$বা, $\cos x = 0$

$\therefore\ x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

আবার, $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

যখন $n = 0$, তখন $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$

যখন $n = 1$, তখন $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$

যখন $n = -1$, তখন $x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}$

যখন $n = 2$, তখন $x = \frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}$

যখন $n = -2$, তখন $x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}$

কিন্তু $-\pi < x < \pi$

$\therefore\quad x = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{4}$

উদাহরণ 4:সমাধান করুন, $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$, যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$

সমাধান:$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 1$

বা, $\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = 1$

বা, $\sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = 1$

$\therefore\quad \theta - \frac{\pi}{6} = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{4\pi}{6} = 2n\pi + \frac{2\pi}{3} = (6n + 2)\frac{\pi}{3}$

যখন $n = 0$, তখন $\theta = \frac{2\pi}{3}$

যখন $n = 1$, তখন $\theta = \frac{8\pi}{3}$

যখন $n = -1$, তখন $\theta = -\frac{4\pi}{3}$

কিন্তু $-2\pi < \theta < 2\pi$

$\therefore\ \theta = -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

উদাহরণ 5: সমাধান করুন, $1+\sqrt{3}\tan^2\theta = (1+\sqrt{3})\tan\theta$ যখন $0<\theta<360°$

সমাধান: $1+\sqrt{3}\tan^2\theta = (1+\sqrt{3})\tan\theta$ বা, $1+\sqrt{3}\tan^2\theta = \tan\theta+\sqrt{3}\tan\theta$

বা, $1-\tan\theta+\sqrt{3}\tan^2\theta-\sqrt{3}\tan\theta = 0$ বা, $(1-\tan\theta)(1-\sqrt{3}\tan\theta) = 0$

যখন $1-\tan\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi+\frac{\pi}{4}$

আবার যখন, $1-\sqrt{3}\tan\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi+\frac{\pi}{6}$

যেখানে $n = 0, 1, 2, 3, ...$

যখন $n = 0$, তখন $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$

যখন $n = 1$, তখন $\theta = \pi+\frac{\pi}{4}, \pi+\frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $\theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}$

যখন $n = 2$, তখন $\theta = 2\pi+\frac{\pi}{4}, 2\pi+\frac{\pi}{6}$ অর্থাৎ $\theta = \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{6}$

কিন্তু, $0°<\theta<2\pi$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৮

1. সমাধান করুন, যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$
   (i) $\cot\theta+\tan\theta = 2\sec\theta$ (ii) $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta = 1$
   (iii) $\sin\theta-2 = \cos\theta$ (iv) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{3}$
   (v) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{2}$ (vi) $4(\sin^2\theta+\cos\theta) = 5$
   (vii) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta = 2$
2. $4\sin\theta\cos\theta = 1-2\sin\theta+2\cos\theta$ যখন $0°<\theta<180°$
3. $\cos7\theta = \cos3\theta+\sin5\theta$ যখন $-90°<\theta<90°$
4. $4\cos x\cos2x\cos3x = 1$ যখন $0<x<\pi$
5. $4\cot2\theta = \cot^2\theta-\tan^2\theta$ যখন $0°<\theta<360°$
6. $\sec^2\frac{x}{2} = 2\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}$ যখন $0<x<2\pi$

পাঠ ৬.৯ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন,
- একই ছক কাগজে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং এর বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, লেখচিত্র

মূলপাঠ

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং - ৬.১	**তারিখ:**

সমস্যা: শুধু মুখ্যমান নিয়ে $y=\sin^{-1}x$ এর ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধান: মূলতত্ত্ব: সাইন (sine) ফাংশনটির রেঞ্জ $[-1,1]$এবং $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে সঙ্কুচিত সাইন ফাংশন এক-এক।

অতএব সাইন ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $y=\sin^{-1}x$, যার ডোমেন $[-1,1]$ এবং রেঞ্জ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$।

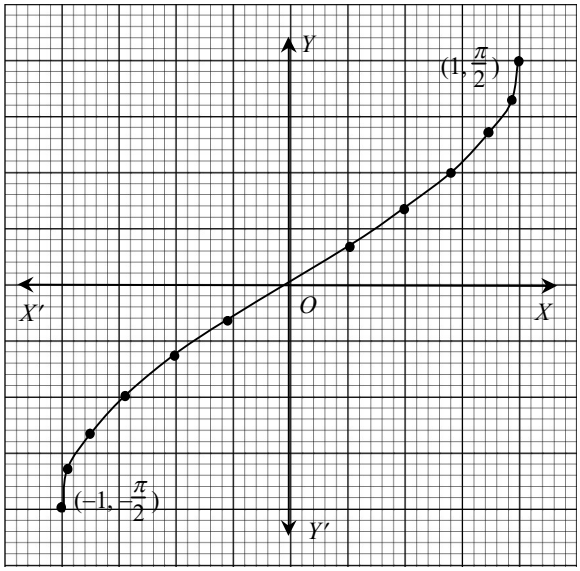
প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, শার্পনার, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি: 1. $y=\sin^{-1}x$ সমীকরণ হতে x-এর ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব মান $[-1,1]$ ব্যবধির জন্য y-এর মান নির্ণয় করুন এবং x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর প্রাপ্ত মানের ছক সংকলন করুন।

2.একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা XOX' ও YOY' অঙ্কন করুন।

3. ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের দৈর্ঘ্য =1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের দৈর্ঘ্য $=\frac{\pi}{2}=90^{\circ}$ ধরে স্কেল নির্বাচন করুন।

4. প্রাপ্ত সকল (x,y) বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলো মুক্তহস্তে সংযুক্ত করুন। সংযুক্ত রেখাই নির্ণেয় $y=\sin^{-1}x$-এরলেখচিত্র নির্দেশ করে।



ফল সংকলন:

x	-1	$-.97$	$-.87$	$-.71$	$-.50$	$-.26$	0	$.26$	$.50$	$.71$	$.87$	$.97$	1
$y=\sin^{-1}x$	-90°	-75°	-60°	-45°	-30°	-15°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্যঃ

1. লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী।
2. লেখচিত্রটি **১ম** ও ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।
3. লেখচিত্রটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।
4. $[-1,1]$ ব্যবধিতে লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন।
5. $-1 \le x \le 1$ ব্যবধিতে লেখচিত্রটি সীমাবদ্ধ।

সমস্যা নং - ৬.২	**তারিখঃ**

সমস্যাঃ শুধু মুখ্যমান নিয়ে $y = \cos^{-1} x$ এর ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধানঃ মূলতত্ত্বঃ কোসাইন (cosine) ফাংশনটির রেঞ্জ $[-1,1]$এবং $[0,\ \pi]$ ব্যবধিতে সঙ্কুচিত কোসাইন ফাংশন এক-এক। অতএব কোসাইন ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $y = \cos^{-1} x$, যার ডোমেন $[-1,1]$ এবং রেঞ্জ $[0,\ \pi]$।

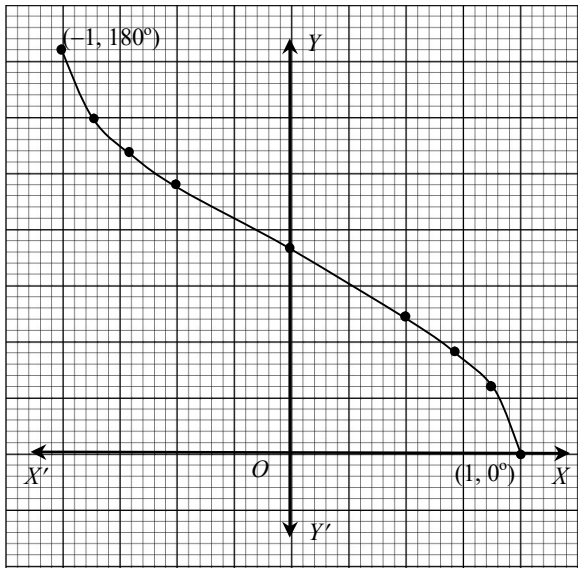
প্রয়োজনীয় উপকরণঃ ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, শার্পনার, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতিঃ 1. $y = \cos^{-1} x$ সমীকরণ হতে x-এর ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব মান $[-1,1]$ ব্যবধির জন্য y-এর মান নির্ণয় করুন এবং x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর প্রাপ্ত মানের ছক সংকলন করুন।

2.একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা XOX' ও YOY' অঙ্কন করুন।

3. ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের দৈর্ঘ্য =1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গের দৈর্ঘ্য $= \frac{\pi}{36} = 5^{\circ}$ ধরে স্কেল নির্বাচন করুন।

4. প্রাপ্ত সকল (x, y) বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলো মুক্তহস্তে সংযুক্ত করুন। সংযুক্ত রেখাই নির্ণেয় $y = \cos^{-1} x$ -এরলেখচিত্র নির্দেশ করে।



ফল সংকলনঃ

x	−1	−.87	−.71	−.50	0	.50	.71	.87	1
$y = \cos^{-1} x$	180°	150°	135°	120°	90°	60°	45°	30°	0°

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্যঃ

1. লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী নয়।
2. লেখচিত্রটি **১ম** ও ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।
3. লেখচিত্রটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।
4. $[-1,1]$ ব্যবধিতে লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন।

সমস্যা নং - ৬.৩	**তারিখঃ**

সমস্যাঃ শুধু মুখ্যমান নিয়ে $y = \tan^{-1} x$ এর ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধান: মূলতত্ত্ব: টেনজেন্ট (tangent) ফাংশনটির রেঞ্জ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট Pএবং $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে সঙ্কুচিত টেনজেন্ট ফাংশন এক-এক। অতএব টেনজেন্ট ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $y=\tan^{-1}x$, যার ডোমেনPএবংরেঞ্জ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, শার্পনার, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

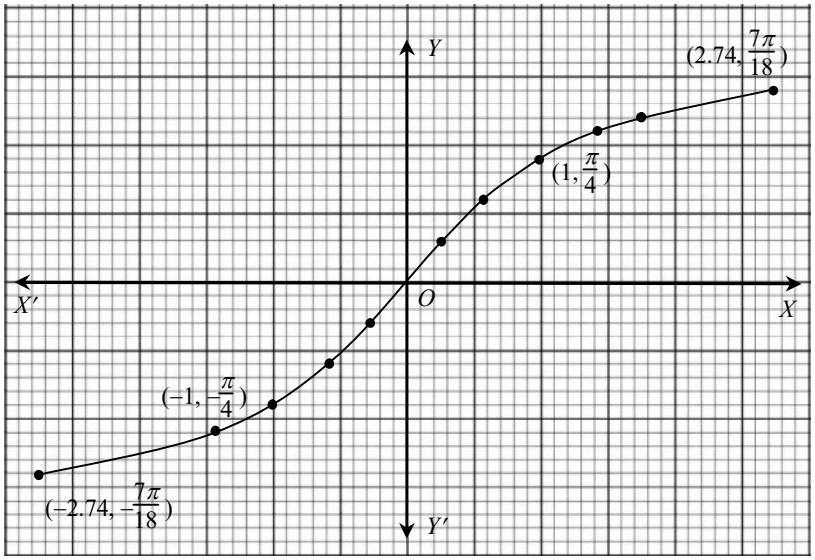
কার্যপদ্ধতি: 1. $y=\tan x$ সমীকরণে $x=0,\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{36},\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{18}$ ইত্যাদি নিয়ে মান $y=\tan x$ এর মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন। $\tan(-x)=-\tan x$ সূত্র প্রয়োগ করে $x=-\frac{\pi}{12},-\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{4},-\frac{11\pi}{36},-\frac{\pi}{3},-\frac{7\pi}{18}$ মানগুলোর জন্য সংশ্লিষ্ট $\tan x$ এর মানগুলো নির্ণয় করুন।

2. $y=\tan x\Rightarrow x=\tan^{-1}y$ বিধায় উপরিউক্ত প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত মানগুলোর x-এর স্থানে y এবং y-এর স্থানে x লিখে ইনভার্স টেনজেন্ট ($\tan^{-1}x$) ফাংশনের মানের ছক সংকলন করুন।

2.একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা XOX' ও YOY' অঙ্কন করুন।

3. ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গের দৈর্ঘ্য =1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গের দৈর্ঘ্য $=\frac{\pi}{36}=5^{\circ}$ ধরে স্কেল নির্বাচন করুন।

4. প্রাপ্ত সকল (x,y) বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলো মুক্তহস্তে সংযুক্ত করুন। সংযুক্ত রেখাই নির্ণেয় $y=\tan^{-1}x$ -এরলেখচিত্র নির্দেশ করে।



ফল সংকলন:

x	0	$\pm.27$	$\pm.58$	±1	±1.43	±1.76	±2.74
$y=\tan^{-1}x$	0°	$\pm\frac{\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{11\pi}{36}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{7\pi}{18}$

একই ছক কাগজে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং এর বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

একই ছক কাগজে কোনো ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং এর বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হলে নিম্নের বিষয়ের প্রতি লক্ষ্য রাখা প্রয়োজন।

- মূল ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ এবং সেটি কোন কোন ব্যবধিতে এক-এক তা নির্ধারণ করতে হবে।
- মূল ফাংশন যে ব্যবধির জন্য এক-এক শুধুমাত্র সেই ব্যবধিতেই ফাংশনের বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।
- $y = x$ রেখার সাপেক্ষে কোনো ফাংশনের লেখচিত্রের প্রতিফলিত চিত্রই তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র।

সমস্যা নং - ৬.৪	**তারিখ:**

সমস্যা: একই ছক কাগজে $y = \sin x$ এবং $y = \sin^{-1} x$ (মুখ্যমান) ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধান: মূলতত্ত্ব: $y = \sin x$ ফাংশনটির ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং রেঞ্জ $[-1, 1]$। কিন্তু $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে সঙ্কুচিত $y = \sin x$ ফাংশনটি এক-এক। সুতরাং বিপরীত ফাংশন $y = \sin^{-1} x$-এর ডোমেন $[-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ এবং ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, শার্পনার, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি: 1. $y = \sin x$ সমীকরণে $x = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ ইত্যাদি মান নিয়ে $y = \sin x$ এর মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন। $\sin(-x) = -\sin x$ সূত্র প্রয়োগ করে $x = -15^\circ, -30^\circ, -45^\circ, -60^\circ, -75^\circ, -90^\circ$ মানগুলোর জন্য সংশ্লিষ্ট $\sin x$ এর মানগুলো নির্ণয় করুন।

2. প্রাপ্ত সাইন ($\sin x$) ফাংশনের মানের ছক সংকলন করুন।

ফল সংকলন - ১:

x	-90°	-75°	-60°	-45°	-30°	-15°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$y = \sin x$	-1	$-.97$	$-.87$	$-.71$	$-.50$	$-.26$	0	.26	.50	.71	.87	.97	1

3. $y = \sin x \Rightarrow x = \sin^{-1} y$ বিধায় উপরিউক্ত প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত মানগুলোর x-এর স্থানে y এবং y-এর স্থানে x লিখে ইনভার্স সাইন ($\sin^{-1} x$) ফাংশনের মানের ছক সংকলন করুন।

ফল সংকলন - ২:

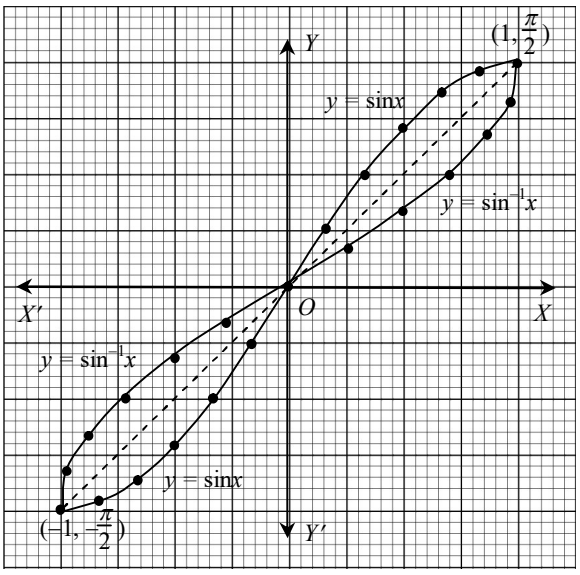
x	-1	$-.97$	$-.87$	$-.71$	$-.50$	$-.26$	0	.26	.50	.71	.87	.97	1
$y = \sin^{-1} x$	-90°	-75°	-60°	-45°	-30°	-15°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°

4.একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা XOX' ও YOY' অঙ্কন করুন।

5. ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের দৈর্ঘ্য $= \frac{\pi}{2}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের দৈর্ঘ্য =1একক ধরে স্কেল নির্বাচন করুন।

6. ফল সংকলন - ১ এ প্রাপ্ত সকল (x, y) বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলো মুক্তহস্তে সংযুক্ত করুন। সংযুক্ত রেখাই নির্ণেয় $y = \sin x$-এর লেখচিত্র নির্দেশ করে।

7. আবার ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের দৈর্ঘ্য =1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 20 বর্গের দৈর্ঘ্য $= \frac{\pi}{2}$ ধরে স্কেল নির্বাচন করুন।



8. ফল সংকলন - ২ এ প্রাপ্ত সকল (x, y) বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলো মুক্তহস্তে সংযুক্ত করুন। সংযুক্ত রেখাই নির্ণেয় $y = \sin^{-1} x$ -এর লেখচিত্র নির্দেশ করে।

মন্তব্যঃ লেখচিত্র হতে দেখা যায়, প্রত্যেকে $y = x$ রেখার প্রেক্ষিতে প্রতিসম (কারণ, প্রতিটি ফাংশন অপরটির বিপরীত ফাংশন)।

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্যঃ

1. লেখচিত্রগুলো মূলবিন্দুগামী।
2. লেখচিত্রটি **১ম** ও **৩য়** চতুর্ভাগে অবস্থিত।
3. $y = \sin x$ এবং এর বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র দুইটি $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

সতর্কতাঃ

1. লেখচিত্রগুলো একই স্কেলে অঙ্কন করতে হবে।
2. বিন্দুগুলোর প্রতিচ্ছবি অত্যন্ত সতর্কতার সাথে নির্ণয় করতে হবে, তা না হলে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র সঠিকভাবে পাওয়া যাবে না।

সমস্যা নং - ৬.৫	**তারিখঃ**

সমস্যাঃ একই ছক কাগজে $y = \cos x$ এবং $y = \cos^{-1} x$ (মুখ্যমান) ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধানঃ মূলতত্ত্বঃ $y = \cos x$ ফাংশনটির ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং রেঞ্জ $[-1, 1]$। কিন্তু $[0, \pi]$ ব্যবধিতে সঙ্কুচিত $y = \cos x$ ফাংশনটি এক-এক। সুতরাং বিপরীত ফাংশন $y = \cos^{-1} x$ -এর ডোমেন $[-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $[0, \pi]$ এবং ফাংশনদ্বয়ের লেখচিত্র $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

প্রয়োজনীয় উপকরণঃ ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, শার্পনার, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতিঃ 1. $y = \cos x$ সমীকরণে $x = 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 120^o, 135^o, 150^o, 180^o$ ইত্যাদি মান নিয়ে $y = \cos x$ এর মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

2. প্রাপ্ত কোসাইন ($\cos x$) ফাংশনের মানের ছক সংকলন করুন।

ফল সংকলন - ১ঃ

x	180^o	150^o	135^o	120^o	90^o	60^o	45^o	30^o	0^o
$y = \cos x$	–1	–.87	–.71	–.50	0	.50	.71	.87	1

3. $y = \cos x \Rightarrow x = \cos^{-1} y$ বিধায় উপরিউক্ত প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত মানগুলোর x-এর স্থানে y এবং y-এর স্থানে x লিখে ইনভার্স কোসাইন ($\cos^{-1} x$) ফাংশনের মানের ছক সংকলন করুন।

ফল সংকলন - ২ঃ

x	–1	–.87	–.71	–.50	0	.50	.71	.87	1
$y = \cos^{-1} x$	180^o	150^o	135^o	120^o	90^o	60^o	45^o	30^o	0^o

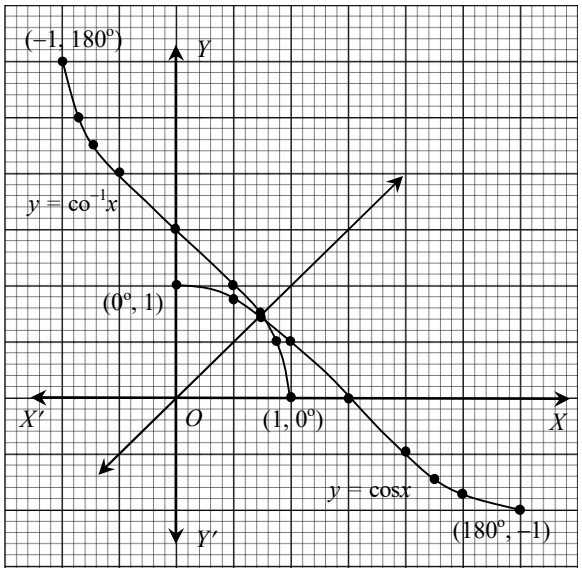
4.একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা XOX' ও YOY' অঙ্কন করুন।

5. ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 15 বর্গের দৈর্ঘ্য $= \frac{\pi}{2}$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গের দৈর্ঘ্য =1একক ধরে স্কেল নির্বাচন করুন।

6. ফল সংকলন - ১ এ প্রাপ্ত সকল (x, y) বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলো মুক্তহস্তে সংযুক্ত করুন। সংযুক্ত রেখাই নির্ণেয় $y = \cos x$ -এর লেখচিত্র নির্দেশ করে।

7. আবার ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গের দৈর্ঘ্য =1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 15 বর্গের দৈর্ঘ্য = $\frac{\pi}{2}$ ধরে স্কেল নির্বাচন করুন।

8. ফল সংকলন - ২ এ প্রাপ্ত সকল (x, y) বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলো মুক্তহস্তে সংযুক্ত করুন। সংযুক্ত রেখাই নির্ণেয় $y = \cos^{-1} x$ -এর লেখচিত্র নির্দেশ করে।



মন্তব্যঃ লেখচিত্র হতে দেখা যায়, প্রত্যেকে $y = x$ রেখার প্রেক্ষিতে প্রতিসম (কারণ, প্রতিটি ফাংশন অপরটির বিপরীত ফাংশন)।

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্যঃ

1. $\cos x$-এর লেখচিত্র $(0,1)$ বিন্দুতে y-অক্ষকে ছেদ করে এবং এর বিপরীত ফাংশন $\cos^{-1} x$-এর লেখচিত্র $(1, 0)$ বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে।
2. $y = \cos x$ এবং এর বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র দুইটি $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

সমস্যা নং - ৬.৬	**তারিখঃ**

সমস্যাঃ একই ছক কাগজে $y = \tan x$ এবং $y = \tan^{-1} x$ (মুখ্যমান) ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধানঃ মূলতত্ত্বঃ $y = \tan x$, ফাংশনটির রেঞ্জ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট Pএবং $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে সঙ্কুচিত টেনজেন্ট ফাংশন এক-এক। অতএব টেনজেন্ট ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $y = \tan^{-1} x$, যার ডোমেন P এবং রেঞ্জ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$।

প্রয়োজনীয় উপকরণঃ ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, শার্পনার, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতিঃ1. $y = \tan x$ সমীকরণে $x = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{36}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{18}$ ইত্যাদি নিয়ে মান $y = \tan x$ এর মান দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন। $\tan(-x) = -\tan x$ সূত্র প্রয়োগ করে $x = -\frac{\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{11\pi}{36}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{7\pi}{18}$ মানগুলোর জন্য সংশ্লিষ্ট $\tan x$ এর মানগুলো নির্ণয় করুন।

2. প্রাপ্ত টেনজেন্ট ($\tan x$) ফাংশনের মানের ছক সংকলন করুন।

ফল সংকলন - ১:

x	0^o	$\pm\frac{\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{11\pi}{36}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{7\pi}{18}$
$y=\tan x$	0	$\pm.27$	$\pm.58$	±1	±1.43	±1.76	±2.74

3. $y=\tan x \Rightarrow x=\tan^{-1} y$ বিধায় উপরিউক্ত প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত মানগুলোর x-এর স্থানে y এবং y-এর স্থানে x লিখে ইনভার্স টেনজেন্ট $(\tan^{-1} x)$ ফাংশনের মানের ছক সংকলন করুন।

ফল সংকলন - ২:

x	0	$\pm.27$	$\pm.58$	±1	±1.43	±1.76	±2.74
$y=\tan^{-1} x$	0^o	$\pm\frac{\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{11\pi}{36}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{7\pi}{18}$

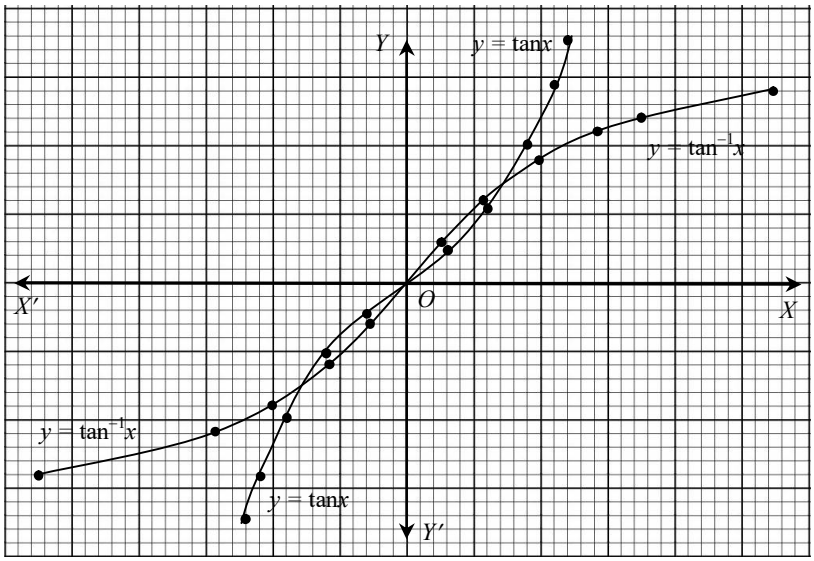
4.একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা XOX' ও YOY' অঙ্কন করুন।

5. ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গের দৈর্ঘ্য $=\frac{\pi}{36}=5^o$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গের দৈর্ঘ্য =1একক ধরে স্কেল নির্বাচন করুন।

6. ফল সংকলন - ১ এ প্রাপ্ত সকল (x,y) বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলো মুক্তহস্তে সংযুক্ত করুন। সংযুক্ত রেখাই নির্ণেয় $y=\tan x$ -এর লেখচিত্র নির্দেশ করে।

7. আবার ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গের দৈর্ঘ্য =1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গের দৈর্ঘ্য = $\frac{\pi}{36}=5^o$ ধরে স্কেল নির্বাচন করুন।

8. ফল সংকলন - ২ এ প্রাপ্ত সকল (x,y) বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং বিন্দুগুলো মুক্তহস্তে সংযুক্ত করুন। সংযুক্ত রেখাই নির্ণেয় $y=\tan^{-1} x$ -এর লেখচিত্র নির্দেশ করে।



মন্তব্য: লেখচিত্র হতে দেখা যায়, প্রত্যেকে $y=x$ রেখার প্রেক্ষিতে প্রতিসম (কারণ, প্রতিটি ফাংশন অপরটির বিপরীত ফাংশন)।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৯

1. লেখচিত্র অঙ্কন করুন:

   (i) $y = 2\sin^{-1} x$ (ii) $y = 2\cos^{-1} x$ (iii) $y = \cot^{-1} x$

2. একই ছক কাগজে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং এর বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন:

   (i) $y = \sin\frac{x}{2}$ ও $y = \sin^{-1}\frac{x}{2}$ (ii) $y = \cos\frac{x}{2}$ ও $y = \cos^{-1}\frac{x}{2}$ (iii) $y = \tan\frac{x}{2}$ ও $y = \tan^{-1}\frac{x}{2}$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1 - 19):

1. $\tan^{-1}(-1)$এর মুখ্য মান নিচের কোনটি?

   (ক) $\frac{\pi}{4}$ (খ) $-\frac{\pi}{4}$ (গ) $\frac{3\pi}{4}$ (ঘ) $-\frac{3\pi}{4}$

2. $\tan^{-1} 6 + \tan^{-1}\frac{7}{5}$ এর মান কত?

   (ক) $\frac{\pi}{2}$ (খ) $\frac{3\pi}{2}$ (গ) $\frac{3\pi}{4}$ (ঘ) $\frac{\pi}{4}$

3. $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ এর মান কত?

   (ক) $\frac{\pi}{2}$ (খ) $\frac{3\pi}{2}$ (গ) π (ঘ) $\frac{\pi}{4}$

4. $\sin\tan^{-1} 2$ এর মান কত?

   (ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\sqrt{5}$ (গ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ঘ) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

5. $\sin\cos^{-1}\tan\cos^{-1} x =$ কত?

   (ক) x (খ) $x\sqrt{1-x^2}$ (গ) $\sqrt{1-x^2}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

6. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে-

   (i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্য মান $= 30^\circ$

   (ii) $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\frac{x}{1-x^2}$

   (ii) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

7. $x=\cos\theta$ হলে-

(i) $\theta=\cos^{-1}x$

(ii) $\theta=\cos^{-1}(\cos\theta)$

(ii) $\theta=\cos^{-1}(\cos x)$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

▶নিচের তথ্যের আলোকে 8 - 9নং প্রশ্নের উত্তর দিন:

$A=\sin^{-1}x,\ B=\sin^{-1}y$

8. $A=0$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $x=0$ (খ) $x=1$ (গ) $x=2$ (ঘ) $x=3$

9. $A+B=\frac{\pi}{2}$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ (খ) $xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

(গ) $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ (ঘ) $x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$

10. $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত হলে θ -এর সাধারণ মান কোনটি?

(ক) $2n\pi+\pi$ (খ) $(2n-1)\pi$ (গ) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (ঘ) $(2n-1)\frac{\pi}{2}$

11. $\cot x=\cot\alpha$ হলে x -এর মান কোনটি?

(ক) $2n\pi+\alpha$ (খ) $2n\pi-\alpha$ (গ) $n\pi-\alpha$ (ঘ) $n\pi-\alpha$

12. $2\tan^2\theta-x\tan\theta+1=0$ ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ হলে এর সংশ্লিষ্ট চলরাশি কোনটি?

(ক)0 (খ) θ (গ) x (ঘ) $\tan\theta$

13. নিচের কোনটি $\cos\theta=0$ সমীকরণের সমাধান?

(ক) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (খ) $2n\pi$ (গ) $2n\pi\pm\alpha$ (ঘ) $(4n+1)\frac{\pi}{2}$

14. নিচের কোনটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ?

(ক) $2x^2+3x-1=0$ (খ) $2x+3y=9$ (গ) $x\sin 45^o+2=0$ (ঘ) $3\sin\theta+2=0$

▶নিচের তথ্যের আলোকে 15 ও 16 নং প্রশ্নের উত্তর দিন

$f(x)=\cos x+1$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

15. $f(x)=0$ হলে সাধারণ সমাধান কোনটি?

(ক) $x=0$ (খ) $x=n\pi, n\in Z$ (গ) $x=2n\pi, n\in Z$ (ঘ) $x=(2n+1)\pi$

16. $f(x)=1$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $x=\frac{\pi}{2}$ (খ) $(2n-1)\frac{\pi}{2}, n\in Z$ (গ) $x=45^o$ (ঘ) $x=180^o$

17. $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ হলে $-2\pi<\theta<2\pi$ ব্যবধিতে $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান কোনটি?

(ক) $\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (খ) $\theta=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (গ) $\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ঘ) $\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. $\sin 3\theta=\cos 3\theta$ হলে θ এর মান কোনটি?

(ক) $(4n+1)\frac{\pi}{12}, n\in Z$ (খ) $(4n+1)\frac{\pi}{6}, n\in Z$ (গ) $(4n+1)\frac{\pi}{4}, n\in Z$ (ঘ) $(4n+1)\frac{\pi}{2}, n\in Z$

19. $\sin x = \frac{1}{2}$ হলে x এর মান-

(i) $x = \frac{\pi}{6}$ যখন $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (ii)$x = n\pi + (-)^n \frac{\pi}{6}$ যখন $n \in Z$ (iii)$x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ যখন n জোড় সংখ্যা

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i , ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্নঃ

20. (i) $4\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta + 2\cos\theta$ (ii) $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \theta$

(ক) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হলে দেখান যে $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ ।

(খ)(ii) নং থেকে প্রমাণ করুন যে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy\cos\theta}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$

(গ)(i) নং সমীকরণটি $0 < \theta < \pi$ ব্যবধিতে সমাধান করুন।

21. ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $f(x) = \sin 2x$

(ক)যদি $\tan^2\theta + \sec\theta = -1;\quad 0 < \theta < 2\pi$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয়করুন।

(খ)সমাধান করুন, $2\sin^2 x + f^2(x) = 2$ যখন $-\pi < \theta < \pi$

(গ)সমাধান করুন, $\frac{\cos 2x}{f(x)} = \cos x + \sin x$ ।

22. ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, $f(\theta) = \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta$

(ক) θ এর লঘিষ্ঠ কোন মানের জন্য $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ তা হয় নির্ণয় করুন।

(খ) $f(\theta) = 0$ হলে সমীকরণটির সমাধান করুন।

(গ) $f(\theta) = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta$ হলে সমীকরণটির সমাধান করুন।

23. নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ করুন এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দিন:

$A = \cos\theta, B = \sin\theta, C = \cos 2\theta, D = \sin 2\theta$

(ক)মান নির্ণয় করুন: $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}\theta$

(খ) $\sqrt{3}A - B = 2$ হলে, সমীকরণটি সমাধান করুন।

(গ) $A + B = C + D$ হলে সমীকরণটির $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে সমাধান আছে কিনা যাচাই করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৪

18. (i)$\frac{4}{3}$ (ii)$\frac{25}{24}$ (iii)$\sqrt{3}$ (iv)$\frac{1}{14}\sqrt{21}$ (v)ab (vi)$\frac{\sqrt{5}}{3}$

(vii) $2-\sqrt{3}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৫

1. $\frac{2}{5}n\pi, 2n\pi$ 2. $\frac{2k\pi}{m+n}, \frac{(2k+1)\pi}{m-n}$ 3. $\frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{12}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৬

1. $n\pi+\frac{\pi}{4}, n\pi+\alpha$ যখন $\tan\alpha = 2+\sqrt{3}$ এবং $n\pi+\beta$ যখন $\tan\beta = 2-\sqrt{3}$

2. $n\pi-\frac{\pi}{4}, \frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\alpha}{2}$ যখন $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 3. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 4. $n\pi+\frac{\pi}{4}, n\pi+\alpha$ যখন $\tan\alpha = \frac{1}{2}$

5. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 6. $2n\pi+\frac{5\pi}{12}, 2n\pi-\frac{\pi}{12}$ 7. $\frac{\pi}{3}, n\pi\pm\alpha$ যখন $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. $n\pi+\frac{\pi}{4}, n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৭

1. $(4n+1)\frac{\pi}{4}$ 2. $(4n+1)\frac{\pi}{8}$ 3. $2n\pi-\frac{\pi}{6}$ 4. $(4n+1)\frac{\pi}{4}, n\pi+\frac{\pi}{4}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৮

1. (i) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (ii). $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ (iii). $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

(iv). $-\frac{5\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$ (v). $-\frac{\pi}{12}, -\frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$ (vi). $\pm\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

2. $30^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ 3. $-75^\circ, -72^\circ, -36^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 36^\circ, 72^\circ$

4. $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ 5. $45^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

6. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. খ 2. গ 3. ক 4. ঘ 5. ক 6.খ
7. ক8. ক 9. গ 10. গ 11. গ 12. খ 13. ক
14. ঘ
15. ঘ 16. ক 17. গ 18. ক 19. ঘ