বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

(Inverse Trigonometric Functions and Trigonometric Equations)

ভূমিকা

ইতোপূর্বে আপনারা ত্রিকোণমিতিক ফাংশন কী, ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন, রেঞ্জ, পর্যায় ইত্যাদি সম্পর্কে অবগত হয়েছেন। বর্তমান ইউনিটে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সম্পর্কে অবগত হবেন। ত্রিকোণমিতিক ফাংশনও বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এর মধ্যে সম্পর্ক কি সেই সম্পর্কে অবগত হবেন।

এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমন্বিত সমীকরণই ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ। একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধান করলে অজ্ঞাত কোণের অসংখ্য মান পাওয়া যায় অর্থাৎ কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের নির্দিষ্ট মানের জন্য যে কোণটির ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নেয়া হয় তার অনেক মান থাকতে পারে। কোন ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সমাধান করে অজ্ঞাত কোণের সকল মানকে কেবলমাত্র একটি রাশির সাহায্য কিরূপে প্রকাশ করা যায় সেই সম্পর্কে এই ইউনিটে আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বর্ণনা করতে পারবেন,
- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে এবং তা প্রয়োগ করতে পারবেন,
- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অভেদাবলী প্রমাণ ও প্রয়োগকরতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন,
- নির্দিষ্ট ব্যবধিতে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন,
- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২৫ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৬.১ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনঃ সংজ্ঞা ও ধারণা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মুখ্যমান সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মৌলিক সম্পর্ক ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, মুখ্যমান

মূলপাঠ

বিপরীতত্রিকোণমিতিকফাংশন

$\sin\theta = x (-1 \le x \le 1$ এবং $x \in \mathrm{P})$ হলে আমরা বুঝি θ একটি কোণ যার sine-এর মান x। এ সম্পর্কটি কোন কোন সময় বিপরীতক্রমে $\theta = \sin^{-1}x$ আকারে লেখা হয়। এখন $f(x) = \sin^{-1}x$ হলে $f(x)$ কে sine এ বিপরীত বৃত্তীয় বা বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলা হয়। মূলত$\sin^{-1}x$ প্রতীকটি একটি কোণ নির্দেশ করে যার sine এর মান x। অতএব $\sin\theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1}x$ এই দুটি সম্পর্ক অভিন্ন। যখন একটি সম্পর্ক দেয়া থাকে তখন অপরটি সরাসরি পাওয়া যায়। তবে মনে রাখতে হবে যে, $\sin^{-1}x$ একটি কোণ, কিন্তু $\sin\theta$ দুটি বাহুর অনুপাত বিধায় এটি একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা। $\sin^{-1}x$ সংকেতটিকে সাধারণত "সাইনইনভারস x (sine inverse x)" বা "ইনভারস সাইন অফ x (Inverse sine of x)" পড়া হয়। কোন কোন সময় এটাকে arc sin$x$-ও বলা হয়। $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\mathrm{cosec}^{-1}x$ প্রভৃতি সংকেতগুলো $\sin^{-1}x$ এর মত একই অর্থ বহন করে। অর্থাৎ $\cos^{-1}x$ একটি কোণ যার cosine x-এর সমান, $\tan^{-1}x$ একটি কোণ যার tangent x-এর সমান প্রভৃতি। এদের কে যথাক্রমে "কসইনভারস x", "ট্যানইনভারস x" প্রভৃতি পড়া হয়।

লক্ষণীয়ঃ $\sin^{-1}x$ এবং $(\sin x)^{-1}$ এই দুটি রাশি একনয়। কারণ, $\sin^{-1}x$ একটি কোণ নির্দেশ করে যার sine-এর মান x কিন্তু $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা।

বিপরীতত্রিকোণমিতিকফাংশনেরমুখ্যমান

$\sin\theta = x$ হলে, n এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $n\pi + (-1)^n\theta$ রাশি থেকে প্রাপ্ত সবগুলো কোণের সাইন (sine) অনুপাতের মান x হবে, অতএব দেখা যাচ্ছে $\sin^{-1}x$ এর অসংখ্য মান থাকতে পারে এবং এজন্যই $\sin^{-1}x$ একটি বহুমান বিশিষ্ট ফাংশন এবং $\sin^{-1}x$ এর সাধারণ মান $n\pi + (-1)^n\theta$. বা, $n\pi + (-1)^n (\sin^{-1}x)$.

উদাহরণস্বরূপ, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ হলে θ এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান $30°$

সুতরাং $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30° = \frac{\pi}{6}$

আবার $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ হলে $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, যখন n যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

এখন nএর মান 0, ±1, ±2, ±3,..... ইত্যাদি বসালে $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মান যথাক্রমে$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}$, ... ইত্যাদি হতে পারে। $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মান একটি যা $\frac{\pi}{6}$। এই $\frac{\pi}{6}$ কে $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান বলে।

অতএব θএরসকলমানেরজন্যক্ষুদ্রতম (ধনাত্মকঅথবাঋণাত্মক) সংখ্যাগতমানকেθএরমুখ্যমানবলে।

$\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{1}{2}$ হলে, θএরমূখ্যমান$30°$এবংতারসাধারণমান$n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

অনুরূপভাবে$\cos\theta = x$হলে, $\cos^{-1}x$এরসাধারণমান$2n\pi \pm \theta$এবং$\tan\theta = x$হলে, $\tan^{-1}x$-এরসাধারণমান$n\pi + \theta$.

সংজ্ঞা:বিপরীতবৃত্তীয় বা বিপরীত ত্রিকোণমিতিকফাংশনেরক্ষুদ্রতমসংখ্যাসূচক (ধনাত্মকবাঋণাত্মক) মানকেতারমুখ্যমানবলে।

(i) সাইন (sine) ফাংশনের রেঞ্জ বদ্ধ ব্যবধি $[-1, 1]$। সাইন ফাংশনকে $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে সংকুচিত করলে তার রেঞ্জ হবে $[-1, 1]$ এবং উক্ত ব্যবধিতে সঙ্কুচিত সাইন ফাংশন এক-এক হবে। অতএব ফাংশন হিসেবে এই সঙ্কুচিত সাইন ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান, যার ডোমেন $[-1, 1]$ এবং রেঞ্জ$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$। এই বিপরীত ফাংশনও এক-এক ফাংশন। এই বিপরীত ফাংশনকে ইনভারস সাইন ফাংশনের মুখ্যমান বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{6}$, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{6}$ ।

(ii) কোসাইন (cosine) ফাংশনের রেঞ্জ বদ্ধ ব্যবধি $[-1, 1]$। কোসাইন ফাংশনকে $[0, \pi]$ ব্যবধিতে সংকুচিত করলে তার রেঞ্জ হবে $[-1, 1]$ এবং উক্ত ব্যবধিতে সঙ্কুচিত কোসাইন ফাংশন এক-এক হবে। অতএব ফাংশন হিসেবে এই সঙ্কুচিত কোসাইন ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান, যার ডোমেন $[-1, 1]$ এবং রেঞ্জ$[0, \pi]$। এই বিপরীত ফাংশনও এক-এক ফাংশন। এই বিপরীত ফাংশনকে ইনভারস কোসাইন ফাংশনের মুখ্যমান বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান $\frac{2\pi}{3}$।

(iii)ট্যানজেন্ট(tangent) ফাংশনের রেঞ্জ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট P ।ট্যানজেন্ট ফাংশনকে উন্মুক্ত$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে সংকুচিত করলে তার রেঞ্জ হবে P এবং উক্ত ব্যবধিতে সঙ্কুচিত ট্যানজেন্ট ফাংশন এক-এক হবে। অতএব ফাংশন হিসেবে এই সঙ্কুচিত ট্যানজেন্ট ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান, যার ডোমেন P এবং রেঞ্জ$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$। এই বিপরীত ফাংশনও এক-এক ফাংশন। এই বিপরীত ফাংশনকে ইনভারস ট্যানজেন্ট ফাংশনের মুখ্যমান বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ $\tan^{-1}1$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$, $\tan^{-1}(-1)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{4}$ ।

(iv) কোনো বাস্তব সংখ্যা x, $-1 \geq x \geq 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে ইনভারস কোসেকেন্ট $(\text{cosec}^{-1}x)$ ফাংশনের যে মান বিদ্যমান তাকে $\text{cosec}^{-1}x$-এর মুখ্যমান বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ $\text{cosec}^{-1}2$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{6}$, $\text{cosec}^{-1}(-2)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{6}$ ।

(v)কোনো বাস্তব সংখ্যা x, $-1 \geq x \geq 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $[0, \pi]$ ব্যবধিতে ইনভারস সেকেন্ট $(\sec^{-1}x)$ ফাংশনের যে মান বিদ্যমান তাকে $\sec^{-1}x$-এর মুখ্যমান বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ $\sec^{-1}2$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$, $\sec^{-1}(-2)$ এর মুখ্যমান $\frac{2\pi}{3}$।

(vi)কোনো বাস্তব সংখ্যা $x,\ -\infty < x < \infty$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে ইনভারস কোট্যানজেন্ট($\cot^{-1}x$) ফাংশনের যে মান বিদ্যমান তাকে $\cot^{-1}x$ -এর মুখ্যমান বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ $\cot^{-1}1$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$, $\cot^{-1}(-1)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{4}$ ।

মন্তব্য: (i) যদি $\sin^{-1}x$ এর মুখ্যমান $\text{Arc}\sin x = \alpha$ হয়, তবে $\sin^{-1}x$ এর সাধারণ মান $\text{Arc}\sin x = n\pi + (-1)^n\alpha$ । **(ii)**বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলো একাধিক মান বিশিষ্ট কোণ নির্দেশ করে এবং একাধিক কোণ গুলোর মধ্যে যে কোণটির মান সাংখ্যিকভাবে ক্ষুদ্রতম সেই কোণটিকে (ঋণাত্মক বা ধনাত্মক) বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মুখ্যমান ধরা হয়। যদি কোনো বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম মানটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভইয় হয় যাদের সাংখ্যমান সমান, সেক্ষেত্রে ধনাত্মক মানটিকে মুখ্যমান ধরা হয়। যেমন: $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ এবং $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ । সুতরাং $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$ ।

শিক্ষার্থীর কাজ	মুখ্যমান নির্ণয় করুন: (i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের সীমা

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের সীমা নিম্নে দেওয়া হলো-

1. $-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}x\le\frac{\pi}{2}$ 2. $0\le\cos^{-1}x\le\pi$ 3. $-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$

4. $-\frac{\pi}{2}\le\text{cosec}^{-1}x\le\frac{\pi}{2},\ \text{cosec}^{-1}x\ne 0$ 5. $0\le\sec^{-1}x\le\pi,\ \sec^{-1}x\ne\frac{\pi}{2}$ 6. $-\frac{\pi}{2}<\cot^{-1}x<\frac{\pi}{2},\ \cot^{-1}x\ne 0$

বিশেষ কোনো কিছু উল্লেখ না থাকলে $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ ইত্যাদি প্রতীকগুলো ঐ ফাংশনের মুখ্যমান নির্দেশ করে।

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ	মৌলিক ধর্মাবলী
$\sin^{-1}x$ বা Arc sin$x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$-1\le x\le 1$ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$
$\cos^{-1}x$ বা Arc cos$x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$-1\le x\le 1$ $0\le y\le\pi$
$\tan^{-1}x$ বা Arc tan$x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	x, সকল বাস্তব সংখ্যা $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
$\cot^{-1}x$ বা Arc cot$x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$	x, সকল বাস্তব সংখ্যা, $x\ne 0$ $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},\ y\ne 0$
$\sec^{-1}x$ বা Arc sec$x$	$(-\infty,1]\cup[1,\infty)$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$	$x\le -1$ এবং $x\ge 1$ $0\le y<\frac{\pi}{2}$ অথবা $\frac{\pi}{2}<y\le\pi$

$\text{cosec}^{-1}x$ বা Arc csc$x$	$(-\infty,1]\cup[1,\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$	$x\le -1$ এবং $x\ge 1$ $-\frac{\pi}{2}\le y<0$ অথবা $0<y\le\frac{\pi}{2}$

বিপরীতত্রিকোণমিতিকফাংশনগুলোরমধ্যেমৌলিকসম্পর্ক

(i)মনে করুন, $\sin\theta=x$ $\therefore \theta=\sin^{-1}x=\sin^{-1}(\sin\theta)$

অতএব, $\theta=\sin^{-1}(\sin\theta)$

অনুরূপভাবে, $\theta=\cos^{-1}(\cos\theta)$, $\theta=\tan^{-1}(\tan\theta)$ইত্যাদি।

(ii)যদি$\sin\theta=x$হয়, তবে, $\theta=\sin^{-1}x$

$\sin\theta=x$সমীকরণে, θ-এরমানবসিয়ে,$x=\sin\theta=\sin(\sin^{-1}x)$

অতএব, $x=\sin(\sin^{-1}x)$

অনুরূপভাবে, $x=\cos(\cos^{-1}x)$, $x=\tan(\tan^{-1}x)$ইত্যাদি।

(iii) $\sin\theta=x$হলে$\theta=\sin^{-1}x$

আবার$\sin\theta=x\Rightarrow\text{cosec}\,\theta=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{\text{cosec}\theta}=x\Rightarrow\ \theta=\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

$\therefore\ \sin^{-1}x=\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

আবার, $\text{cosec}\,\theta=x$হলে$\theta=\text{cosec}^{-1}x$

এখন, $\text{cosec}\,\theta=x\Rightarrow\frac{1}{\sin\theta}=x\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{x}\Rightarrow\theta=\sin^{-1}\frac{1}{x}$

$\therefore\ \text{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}$

তাহলেআমরাপাই,$\sin^{-1}x=\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$, $\text{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}$

অনুরূপভাবে, $\cos^{-1}x=\sec^{-1}\frac{1}{x}$, $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x}$ এবং$\tan^{-1}x=\cot^{-1}\frac{1}{x}$, $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\frac{1}{x}$

সারসংক্ষেপ

- $\sin\theta=x$ হলে আমরা বুঝি θ একটি কোণ যার sine-এর মান x এবং বিপরীতক্রমে $\theta=\sin^{-1}x$ আকারে লেখা হয়। এখন $f(x)=\sin^{-1}x$ হলে $f(x)$ কে sine এ বিপরীত বৃত্তীয় বা বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলা হয়।
- $\sin^{-1}x$ এবং $(\sin x)^{-1}$ এই দুটি রাশি এক নয়। কারণ,$\sin^{-1}x$ একটি কোণ নির্দেশ করে যার sine-এর মান xকিন্তু $(\sin x)^{-1}=\frac{1}{\sin x}$ একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা।
- বিপরীত বৃত্তীয় বা বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা সূচক (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) মানকে তার মুখ্যমান বলে।
- $\sin\theta=x$ হলে$\theta=\sin^{-1}\sin\theta$ এবং $x=\sin\sin^{-1}x$। অনুরূপভাবে, $\theta=\cos^{-1}\cos\theta$, $\theta=\tan^{-1}\tan\theta$ ইত্যাদি এবং $x=\cos\cos^{-1}x$, $x=\tan\tan^{-1}x$ ইত্যাদি।
- $\sin^{-1}x=\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$, $\text{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}$, $\cos^{-1}x=\sec^{-1}\frac{1}{x}$, $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x}$, $\tan^{-1}x=\cot^{-1}\frac{1}{x}$, $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\frac{1}{x}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.১

1. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সম্পর্কে আলোচনা করুন।
2. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মুখ্যমান সম্পর্কে বর্ণনা করুন।
3. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোর মধ্যে মৌলিক সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

পাঠ ৬.২ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের রূপান্তর

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- যে কোন বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে অন্য যে কোন বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে রূপান্তর করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	রূপান্তর

মূলপাঠ

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের রূপান্তর

মনে করুন, $\sin^{-1}x=\theta$, তাহলে $\sin\theta=x$

(i) $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}\therefore\ \theta=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(ii) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\therefore\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{x}\ \therefore\ \theta=\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{x}$

(iv) $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad\therefore\ \theta=\sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(v) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\quad\therefore\ \theta=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

সুতরাং, $\theta=\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{x}=\sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

একই প্রক্রিয়ায় যেকোনবিপরীতত্রিকোণমিতিকফাংশনকেঅন্যযেকোনবিপরীতত্রিকোণমিতিকফাংশনেপরিবর্তিতকরাযায়।

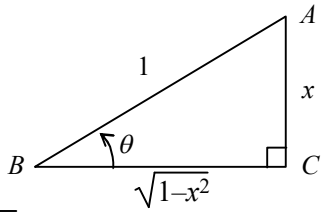
জ্যামিতিকপদ্ধতি:

মনে করুন$\sin^{-1}x=\theta$,অতএব, $\sin\theta=x$

মনেকরুন, ABCএকটিসমকোণীত্রিভুজযারCকোণসমকোণএবং$\angle ABC=\theta$

যেহেতু, $\sin\theta=x$, অতএব, $AC=x$, $AB=1$

অতএব$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{1-x^2}$



এখন, $\cos\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1}\qquad\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$\tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{x}$ $\therefore\ \theta = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

$\sec\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\therefore\ \theta = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\cot\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\therefore\ \theta = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

সারসংক্ষেপ

✪ $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

পাঠ ৬.৩ কতকগুলো বিশেষ সূত্র ও তাদের প্রমাণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের কতকগুলো বিশেষ সূত্র বর্ণনা করতে এবং প্রমাণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বিশেষ সূত্র

মূলপাঠ

সূত্র ১: (i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ (ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$

প্রমাণ: মনে করুন, $\tan^{-1}x=\alpha$ এবং $\tan^{-1}y=\beta$

তাহলে $\tan\alpha=x$ এবং $\tan\beta=y$

(i) এখন $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{x+y}{1-xy}$

$\therefore\ \alpha+\beta = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

(ii) আবার, $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{x-y}{1+xy}$

$\therefore\ \alpha-\beta = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{\frac{x+y}{1-xy}+z}{1-\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).z}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{x+y+z(1-xy)}{1-xy}}{\frac{1-xy-z(x+y)}{1-xy}} = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$$

দ্রষ্টব্য: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলো বহুমান বিশিষ্ট ফাংশন বলে ত্রিকোণমিতিক সমস্যা সমাধানে মুখ্যমান ব্যবহার করে সবসময় সঠিক সমাধান পাওয়া যায় না। (i) নং সূত্রে মুখ্যমান ব্যবহার করে সঠিক সমাধান পাওয়া যাবে যদি $xy \leq 1$ হয়। অনুরূপভাবে (iii) নং সূত্রে মুখ্যমান ব্যবহার করে সঠিক সমাধান পাওয়া যাবে যদি $yz+zx+xy \leq 1$ হয়।

সূত্র ২: (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ (ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ (iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

প্রমাণ: (i) মনে করুন, $\sin^{-1}x = \theta$ তাহলে $\sin\theta = x$

এখন $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = x$

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$

অতএব $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(ii) মনে করুন, $\tan^{-1}x = \theta$, তাহলে $\tan\theta = x$

এখন $\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = x$ অর্থাৎ, $\cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x$

অতএব $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(iii) মনে করুন, $\operatorname{cosec}^{-1}x = \theta$, তাহলে $\operatorname{cosec}\theta = x$

এখন $\operatorname{cosec}\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\therefore \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = x$

অর্থাৎ $\sec^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{cosec}^{-1}x$

অতএব $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

সূত্র ৩: $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

প্রমাণ: মনে করুন, $\tan^{-1}x = \theta$,

তাহলে, $\tan\theta = x$.

এখন, $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2x}{1+x^2}$

$\therefore\ 2\theta = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ অর্থাৎ $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

আবার, $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$\therefore\ 2\theta = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ অর্থাৎ $2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

এবং $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2x}{1-x^2}$

$\therefore\ 2\theta = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ অর্থাৎ $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

সুতরাং $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

সূত্র ৪: (i) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right\}$

(ii) $\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right\}$

(iii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

(iv) $\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

প্রমাণ: মনে করুন, $\sin^{-1}x = \alpha$ এবং $\sin^{-1}y = \beta$;

তাহলে, $\sin\alpha = x$ এবং $\sin\beta = y$.

(i) এখন, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \sin\alpha.\sqrt{1-\sin^2\beta} + \sin\beta.\sqrt{1-\sin^2\alpha} = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$

$\therefore\ \alpha+\beta = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right\}$

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right\}$

(ii) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta} - \sin\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha} = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \alpha-\beta = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right\}$

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right\}$

আবার মনে করুন, $\cos^{-1}x = \gamma$ এবং $\cos^{-1}y = \delta$;

তাহলে, $\cos\gamma = x$ এবং $\cos\delta = y$.

(iii) এখন, $\cos(\gamma+\delta) = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta$

$= \cos\gamma\cos\delta - \sqrt{1-\cos^2\gamma}\,.\sqrt{1-\cos^2\delta} = xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

$\therefore \gamma+\delta = \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

(iv) আবার $\cos(\gamma-\delta) = \cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta$

$= \cos\gamma\cos\delta + \sqrt{1-\cos^2\gamma}.\sqrt{1-\cos^2\delta} = xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

$\therefore\ \gamma-\delta = \cos^{-1}\left\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$

সূত্র ৫: (i) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ (ii) $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$

(iii) $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

প্রমাণঃ(i)মনে করুন, $\sin^{-1}x=\alpha$

$\therefore \sin\alpha=x \quad \therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$

এখন $\sin2\alpha= 2\sin\alpha\cos\alpha= 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}= 2x\sqrt{1-x^2}$

$\therefore 2\alpha= \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

অর্থাৎ, $2\sin^{-1}x= \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

(ii)মনে করুন$\cos^{-1}x=\alpha \quad \therefore \cos\alpha=x$

এখন $\cos2\alpha= 2\cos^2\alpha-1 = 2x^2-1$

$\therefore 2\alpha= \cos^{-1}(2x^2-1)$

অর্থাৎ, $2\cos^{-1}x= \cos^{-1}(2x^2-1)$

(iii)মনে করুন $\tan^{-1}x=\alpha \quad \therefore \tan\alpha=x$

এখন $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} =\frac{2x}{1-x^2}$

$\therefore 2\alpha= \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

অর্থাৎ, $2\tan^{-1}x= \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

সূত্র ৬ঃ (i) $3\sin^{-1}x= \sin^{-1}(3x-4x^3)$ (ii) $3\cos^{-1}x= \cos^{-1}(4x^3-3x)$ (iii) $3\tan^{-1}x= \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

প্রমাণঃ(i) মনে করুন, $\sin^{-1}x=\alpha \quad \therefore \sin\alpha=x$

এখন$\sin3\alpha= 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha = 3x-4x^3$

$\therefore 3\alpha= \sin^{-1}(3x-4x^3)$

অর্থাৎ, $3\sin^{-1}x= \sin^{-1}(3x-4x^3)$

(ii)মনে করুন,$\cos^{-1}x=\alpha \quad \therefore \cos\alpha=x$

এখন$\cos3\alpha= 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha= 4x^3-3x$

$\therefore 3\alpha=\cos^{-1}(4x^3-3x)$

অর্থাৎ, $3\cos^{-1}x= \cos^{-1}(4x^3-3x)$

(iii)মনে করুন,$\tan^{-1}x=\alpha \quad \therefore \tan\alpha=x$

এখন$\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} = \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

$\therefore 3\alpha= \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

অর্থাৎ, $3\tan^{-1}x= \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

লক্ষণীয়ঃবিপরীতবৃত্তীয়ফাংশনগুলোবহুমানবিশিষ্টফাংশন ।একারণেএইউনিটেপ্রতিষ্ঠিতসূত্রগুলোব্যবহারকরেঅনেকসময়সকলসংখ্যাবাচকঅংকেরসমাধানপাওয়াযায়নাএবংসূত্রগুলোরপরিবর্তনপ্রয়োজনহয় ।পরিবর্তনগুলোনিম্নরূপ

(i) যদি$x>0,y>0$এবং$xy>1$হয়তবে,$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y=\pi+ \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

(ii) যদি$x<0, y<0$এবং$xy>1$হয়তবে,$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y= -\pi +\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

(iii) যদি$yz + zx + xy>1$হয়তবে,$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z =\pi+ \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$

(iv) যদি$x^2+y^2>1$হয়তবে, $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\pi- \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$

(v) যদি $x<0, y<0$ এবং $x^2+y^2>1$ হয়, তবে, $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y = -\pi - \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$

(vi) যদি $x+y<0$ হয়, তবে, $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y = 2\pi - \cos^{-1}(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$

পাঠ ৬.৪ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনঃ সমস্যা ও সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সমস্যা ও সমাধান

মূলপাঠ

উদাহরণ 1: মুখ্যমান নির্ণয় করুন: (i) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$

সমাধানঃ (i) মনে করুন $\theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$, তাহলে θ এর মুখ্যমান একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ।

এখন, $\theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}, \ \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

(ii) মনে করুন $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, তাহলে θ এর মুখ্যমান একটি ধনাত্মক স্থূলকোণ।

এখন, $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}, \ \therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$

(iii) মনে করুন $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ তাহলে θ এর মুখ্যমান একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ।

এখন, $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

উদাহরণ2: প্রমাণ করুন, $\tan^{-1}\frac{5}{6} - \tan^{-1}\frac{1}{11} = \tan^{-1}\frac{49}{71}$

সমাধানঃ $\tan^{-1}\frac{5}{6}-\tan^{-1}\frac{1}{11}=\tan^{-1}\frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{11}}{1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{11}}=\tan^{-1}\frac{\frac{55-6}{66}}{\frac{66+5}{66}}=\tan^{-1}\frac{49}{71}$

উদাহরণ3:প্রমাণকরুন,$\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{1}{18}=\cot^{-1}3.$

সমাধানঃ $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{1}{18}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}+\tan^{-1}\frac{1}{18}=\tan^{-1}\frac{15}{55}+\tan^{-1}\frac{1}{18}$

$=\tan^{-1}\frac{3}{11}+\tan^{-1}\frac{1}{18}=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{18}}=\tan^{-1}\frac{54+11}{198-3}=\tan^{-1}\frac{65}{195}=\tan^{-1}\frac{1}{3}=\cot^{-1}3$

উদাহরণ4:প্রমাণকরুন,$4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$

সমাধানঃ $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=2.2\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$

$=2\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}-\tan^{-1}\frac{1}{239}\quad[\because 2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}]$

$=2\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=2\tan^{-1}\frac{5}{12}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\tan^{-1}\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\tan^{-1}\frac{120}{119}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\tan^{-1}\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}$

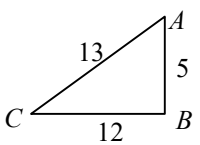
$=\tan^{-1}\frac{\frac{120\times239-119}{199\times239}}{\frac{119\times239+120}{119\times239}}=\tan^{-1}\frac{28680-119}{28441+120}=\tan^{-1}\frac{28561}{28561}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$

উদাহরণ5:প্রমাণ করুন,$\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sec^{-1}\sqrt{5}-\tan^{-1}\frac{13}{7}=\tan^{-1}\frac{177}{391}$

সমাধানঃ$\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sec^{-1}\sqrt{5}-\tan^{-1}\frac{13}{7}$

$=\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}2-\tan^{-1}\frac{13}{7}$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{5}{12}+2}{1-\frac{5}{12}.2}-\tan^{-1}\frac{13}{7}$

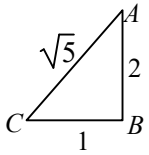


$\therefore\cos^{-1}\frac{12}{13}=\tan^{-1}\frac{5}{12}$

$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}$
$=\sqrt{169-144}$
$=\sqrt{25}=5$

$$= \tan^{-1}\frac{29}{2} - \tan^{-1}\frac{13}{7} = \tan^{-1}\frac{\frac{29}{2}-\frac{13}{7}}{1+\frac{29}{2}\cdot\frac{13}{7}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{29\times7-13\times2}{14+29\times13} = \tan^{-1}\frac{203-26}{14+377} = \tan^{-1}\frac{177}{391}$$



$AB = \sqrt{AC^2-BC^2}$
$= \sqrt{5-1}$
$= \sqrt{4} = 2$

$\therefore \sec^{-1}\sqrt{5} = \tan^{-1}2$

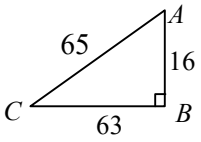
উদাহরণ6: প্রমাণ করুন, $\cos^{-1}\frac{63}{65} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

সমাধানঃ $\cos^{-1}\frac{63}{65} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{16}{63} + \tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}$

$$= \tan^{-1}\frac{16}{63} + \tan^{-1}\frac{5}{12} = \tan^{-1}\frac{\frac{16}{63}+\frac{5}{12}}{1-\frac{16}{63}\cdot\frac{5}{12}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{192+315}{756-80} = \tan^{-1}\frac{507}{676}$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4}$$



$\therefore AB = \sqrt{AC^2-BC^2}$
$= \sqrt{65^2-63^2}$
$= \sqrt{(65+63)(65-63)}$
$= \sqrt{128\times2} = \sqrt{256} = 16$

$\therefore \cos^{-1}\frac{63}{65} = \tan^{-1}\frac{16}{63}$

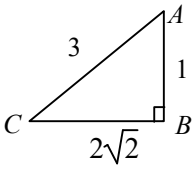
উদাহরণ7: প্রমাণকরুন, $\sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\sqrt{2}$

সমাধানঃ প্রথমে Arc sin এবং Arc cos কে Arc tan এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

Arc sin কে Arc tan এর মাধ্যমে প্রকাশ

$BC = \sqrt{AC^2-AB^2}$
$= \sqrt{3^2-1^2} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

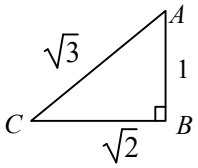
$\therefore \sin^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$



Arc cos কে Arc tan এর মাধ্যমে প্রকাশ

$AB = \sqrt{AC^2-BC^2}$
$= \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1$

$\therefore \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$



এখন, $\sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \tan^{-1}\frac{3\sqrt{2}}{3} = \tan^{-1}\sqrt{2}$

উদাহরণ8: প্রমাণ করুন, $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$

সমাধানঃ $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}} = \tan^{-1}\frac{\frac{17}{36}}{\frac{34}{36}} = \tan^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$$

উদাহরণ9: প্রমাণকরুন, $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2 = \tan^{-1}\frac{28}{29}$

সমাধান: মনে করুন, $\cos^{-1}\frac{5}{13} = \theta \;\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

এখন, $\tan\frac{1}{2}\theta = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\frac{12}{13}}{1+\frac{5}{13}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

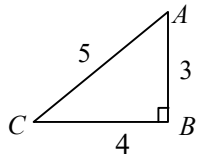
$\therefore \frac{1}{2}\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

$\therefore \sin^{-1}\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13} - \cot^{-1}2$

$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} - \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{17}{6} - \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{17}{6}-\frac{1}{2}}{1+\frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\frac{\frac{14}{6}}{\frac{29}{12}} = \tan^{-1}\frac{28}{29}$



$\therefore \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$
$= \sqrt{25-9}$
$= \sqrt{16} = 4$

উদাহরণ10: প্রমাণ করুন, $\tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

সমাধান: বামপক্ষ $= \tan(2\tan^{-1}x) = \tan\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{2x}{1-x^2}$

ডানপক্ষ $= 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3) = 2\tan\left\{\tan^{-1}\frac{x+x^3}{1-x.x^3}\right\} = 2\tan\left\{\tan^{-1}\frac{x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}\right\}$

$= 2\tan\left(\tan^{-1}\frac{x}{1-x^2}\right) = 2.\frac{x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}$

$\therefore \tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

উদাহরণ11: প্রমাণকরুন, $\{\cos(\sin^{-1}x)\}^2 = \{\sin(\cos^{-1}x)\}^2$

সমাধান: বামপক্ষ $= \{\cos(\sin^{-1}x)\}^2 = \{\cos(\cos^{-1}\sqrt{1-x^2})\}^2 = \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 1-x^2$

ডানপক্ষ $= \{\sin(\cos^{-1}x)\}^2 = \{\sin(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2})\}^2 = (\sqrt{1-x^2})^2 = 1-x^2$

$\therefore \{\cos(\sin^{-1}x)\}^2 = \{\sin(\cos^{-1}x)\}^2$

উদাহরণ12: প্রমাণ করুন, $\tan\left\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\} = \frac{2x}{1-x^2}$

সমাধান: $\tan\left\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\} = \tan\left\{\frac{1}{2}.2\tan^{-1}x + \frac{1}{2}.2\tan^{-1}x\right\}$

$$= \tan\{\tan^{-1}x + \tan^{-1}x\} = \tan\{2\tan^{-1}x\} = \tan\left\{\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right\} = \frac{2x}{1-x^2}$$

উদাহরণ13: প্রমাণ করুন, $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$

সমাধানঃ মনে করুন, $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}} = \theta \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{x-b}{a-b}}$

এখন $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{x-b}{a-b}} = \sqrt{\frac{a-x}{a-b}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}$

আবার $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}}{\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}} = \sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$

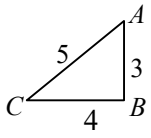
উদাহরণ14: প্রমাণ করুন, $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

সমাধানঃ $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$= \cot\cos^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{3}{5}$

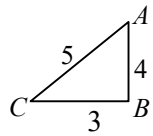
$= \cot\cos^{-1}\frac{3}{5}$

$= \cot\cot^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$



$AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore \tan^{-1}\frac{3}{4} = \sin^{-1}\frac{3}{5}$



$AB = \sqrt{AC^2-BC^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

$\therefore \cos^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1}\frac{3}{4}$

উদাহরণ15: প্রমাণকরুন, $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3) = 15$

সমাধানঃ $\sec^2(\tan^{-1}2) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3) = 1+\tan^2(\tan^{-1}2) + 1+\cot^2(\cot^{-1}3)$

$= 1+\{\tan(\tan^{-1}2)\}^2 + 1+ \{\cot(\cot^{-1}3)\}^2 = 1+2^2+1+3^2 = 1+ 4+1+9 = 15$

উদাহরণ16: যদি $\cos^{-1}x +\cos^{-1}y +\cos^{-1}z = \pi$ তবে প্রমাণ করুন, $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$

সমাধানঃ $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z = \pi$

বা, $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y = \pi - \cos^{-1}z$

বা, $\cos^{-1}\left\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\} = \pi - \cos^{-1}z$

বা, $xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \cos(\pi - \cos^{-1}z)$

বা, $xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = -\cos\cos^{-1}z$

বা, $xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = -z$

বা, $xy + z = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

বা, $(xy+z)^2 = (1-x^2)(1-y^2)$

বা, $x^2y^2 + 2xyz+z^2 = 1-x^2-y^2+x^2y^2$

বা, $x^2+y^2+z^2 +2xyz = 1$

উদাহরণ17: যদি $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ হয় তবে, প্রমাণ করুন $yz+zx+xy=1$.

সমাধানঃ $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$

বা, $\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}=\frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}=\tan\frac{\pi}{2}=\infty$

$\therefore\ 1-yz-zx-xy=0$

$\therefore yz+zx+xy=1$

উদাহরণ18: যদি $\sin(\pi\cos\alpha)=\cos(\pi\sin\alpha)$ হয় তবে দেখান যে, $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}+\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

সমাধানঃ $\sin(\pi\cos\alpha)=\cos(\pi\sin\alpha)\Rightarrow\sin(\pi\cos\alpha)=\sin(\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\alpha)$

$\Rightarrow\pi\cos\alpha=\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\pm\sin\alpha\Rightarrow\cos\alpha\pm\sin\alpha=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha\pm\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\cos(\alpha\mp\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha\mp\frac{\pi}{4}=\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\alpha=\pm\frac{\pi}{4}+\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

উদাহরণ19: সমাধান করুন, $\tan^{-1}(x-2)+\tan^{-1}(x+2)=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

সমাধানঃ $\tan^{-1}(x-2)+\tan^{-1}(x+2)=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

বা, $\tan^{-1}\frac{x-2+x+2}{1-(x-2)(x+2)}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

বা, $\frac{2x}{1-(x^2-4)}=\frac{1}{2}$

বা, $\frac{2x}{1-x^2+4}=\frac{1}{2}$

বা, $1-x^2+4=4x$

বা, $x^2+4x-5=0$

বা, $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5, 1$

কিন্তু $x=-5$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। $\therefore x=1$.

উদাহরণ20: সমাধানকরুন, $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$

সমাধানঃ $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1}\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x+1}{x+2}}=\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1}\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)}=\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1}\frac{x^2+x-2+x^2-x-2}{(x^2-4)-(x^2-1)}=\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1}\frac{2x^2-4}{-3}=\tan^{-1}1$বা, $\frac{2x^2-4}{-3}=1$বা, $2x^2-4=-3$

বা, $2x^2=1$বা, $x^2=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৪

প্রমাণকরুন (1-12):

1. (i)$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ (ii)$\tan^{-1}\frac{1}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{3}{11}$
   (iii)$2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$ (iv)$\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$
   (v)$\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}+\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{\pi}{4}$ (vi)$\tan^{-1}a-\tan^{-1}c=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}$
   (vii) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{xr}{yz}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{yr}{zx}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{zr}{xy}}=\pi$যেখানে$r=x+y+z$
2. (i) $\tan^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$ (ii) $\sec^{-1}\frac{13}{5}-\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}=\tan^{-1}\frac{2}{29}$
   (iii) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}2$ (iv) $\tan^{-1}\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$
3. (i) $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$ (ii) $\sin^{-1}\frac{5}{13}+\cot^{-1}\frac{17}{7}=\frac{\pi}{4}$
   (iii) $\sin^{-1}\frac{3}{\sqrt{73}}+\cos^{-1}\frac{11}{\sqrt{146}}+\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{12}$ (iv) $\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$
4. (i) $4\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}}-\tan^{-1}\frac{79}{401}=\frac{\pi}{4}$ (ii) $\cos^{-1}\frac{41}{49}=2\sin^{-1}\frac{2}{7}$
   (iii) $3\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{47}{52}$ (iv)$4(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3)=\pi$
   (v) $4(\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$
5. (i)$\sin(2\sin^{-1}x)=2x\sqrt{1-x^2}$ (ii)$\sin(3\sin^{-1}x)=3x-4x^3$
   (iii)$2\sin^{-1}x=\sin(2x\sqrt{1-x^2})$
6. $\cos(2\tan^{-1}\frac{1}{7})=\sin(4\tan^{-1}\frac{1}{3})$
7. $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2\theta)+\tan^{-1}(\cot\theta)+\tan^{-1}(\cot^3\theta)=0$
8. (i) $\tan^{-1}x=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$ (ii) $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

(iii) $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x = x$ (iv) $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$

(v) $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$ (vi) $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x = x$

9. (i) $2\tan^{-1}\left[\tan\frac{\alpha}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right] = \tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}$

(ii) $\sin^2(\cos^{-1}\frac{1}{3}) - \cos^2(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{9}$ (iii) $\tan\left\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\} = \frac{2x}{1-x^2}$

10. $\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan\alpha\} = \tan^{-1}(\sin 2\alpha)$

11. $2\tan^{-1}(\text{cosec}\tan^{-1}x - \tan\cot^{-1}x) = \tan^{-1}x$

12. যদি $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, (i) $x^2+y^2=1$ (ii) $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$

13. যদি $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, (i) $x^2+y^2=1$ (ii) $xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=0$

14. যদি $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z = \pi$ হয়, তবে দেখাও যে, $x+y+z=xyz$.

15. যদি $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z = \pi$ হয় তবে দেখাও যে, $x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$

16. (i) যদি $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

(ii) যদি $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b} = \theta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy\cos\theta}{ab}+\frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$

17. যদি $A+B+C=\pi$, $\tan^{-1}2 = A$ এবং $\tan^{-1}3 = B$ হয় তবে দেখাও যে, $C = \frac{\pi}{4}$

18. সমাধান করুন:

(i) $\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}+\tan^{-1}\frac{2x-1}{2x+1} = \tan^{-1}\frac{23}{36}$ (ii) $2\cot^{-1}2+\cos^{-1}\frac{3}{5} = \text{cosec}^{-1}x$

(iii) $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$ (iv) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$

(v) $\sec^{-1}\frac{x}{a}-\sec^{-1}\frac{x}{b} = \sec^{-1}b-\sec^{-1}a$ (vi) $\tan(\cos^{-1}x) = \sin(\tan^{-1}2)$

(vii) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}+\cot^{-1}\frac{1-x^2}{2x} = \frac{\pi}{3}$