জটিল সংখ্যা
(Complex Numbers)

ভূমিকা

গণনা পদ্ধতির উদ্ভাবন মানবজাতির অন্যতম কৃতিত্ব। আমাদেও চতুর্দিকে যে সব বিভিন্ন বস্তু আমরা দেখতে পাই তাদেও পরিমাণ নিরূপণ করার জন্য অতি প্রাচীনকালে যে প্রতীক সমূহের উদ্ভব হয় সেগুলোকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যা উদ্ভাবনের পর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যা ছাড়াও প্রকৃতি ভেদে সংখ্যাকে আরও অনেক প্রকারের শ্রেণী বিন্যাস করা হয়েছে। খ্রিষ্টীয় ষষ্ঠদশ শতাব্দির মাঝামাঝি দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান হিসেবে গণিতে জটিল সংখ্যার আবির্ভাব ঘটে। বর্তমান ইউনিটে জটিল সংখ্যা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- জটিল সংখ্যা সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে পারবেন,
- জটিল সংখ্যার গুণাবলি বর্ণনা ও প্রয়োগে করতে পারবেন,
- জটিল সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে পারবেন,
- এককের ঘনমূল সম্পর্কে বর্ণনা করতে এবং সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগ করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ২.১ জটিল সংখ্যা ও এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ (আরগঁ চিত্র)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- জটিল সংখ্যা কী বর্ণনা করতে পারবেন,
- আরগঁ চিত্রের সাহায্যে জটিল সংখ্যা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- i এর ঘাত ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সংগঠক হিসেবে i কিভাবে ব্যবহৃত হয় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	জটিল সংখ্যা, বাস্তব সংখ্যা, জ্যামিতিক প্রতিরূপ (আরগঁ চিত্র), ঘাত, সংগঠক

মূলপাঠ

জটিল সংখ্যার ধারণা: কোনো ধনাত্মক সংখ্যাকে বর্গমূল করলে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা পাওয়া যায়।যেমন $\sqrt{x^2} = +x$ বা $-x$। কিন্তু ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোনোটিই নয়।

মনে করুন $x^2 + 1 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করতে হবে। এক্ষেত্রে $x^2 = -1$, কিন্তু এমন কোন বাস্তব সংখ্যা নেই যার বর্গ ঋণাত্মক হয়। এ ধরণের সমীকরণ সমাধান করার জন্য নতুন এক ধরনের সংখ্যা প্রবর্তন করা হয়েছে। এ ধরণের সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বলা হয়। জটিল সংখ্যাকে প্রতীক i দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $i^2 = -1$ অর্থাৎ $i = \sqrt{-1}$ । এই $i = \sqrt{-1}$ কে জটিল সংখ্যার একক মনে করা হয়। a এবং b বাস্তব সংখ্যা হলে $a + ib$ আকারের যে কোন সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বলা হয়।

মন্তব্য: (i) $a = b = 0$ হলে $0 + i\,0$ কে জটিল সংখ্যা পদ্ধতির (system of complex number) শূন্য ধরা হয় এবং একে শূন্য দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

(ii) $a = 0$ কিন্তু $b \neq 0$ হলে, ib কে কাল্পনিক (Purely Imaginary) সংখ্যা ধরা হয়।

(iii) $a \neq 0$ কিন্তু $b = 0$ হলে জটিল সংখ্যাটি $a + i\,0$ হয়, যা বাস্তব সংখ্যা a এর চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য বহন করে তাই বলা যায় যে, **"সকল বাস্তব সংখ্যাই জটিল সংখ্যা কিন্তু সকল জটিল সংখ্যাই বাস্তব সংখ্যা নয়"।**

(iv) $i = \sqrt{-1}$ হলে $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, ...ইত্যাদি।

(v) $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} \neq \sqrt{ab}$ কিন্তু $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$; যখন $a > 0$, $b > 0$।

জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ(আরগঁ চিত্র) (Geometrical representation of Complex Numbers or Argand Diagram)

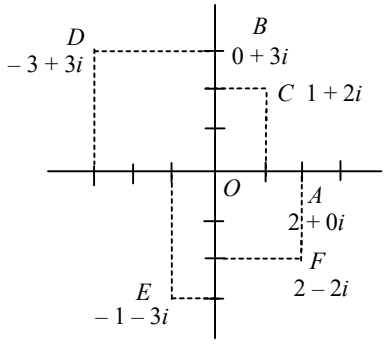
যেকোনো জটিল সংখ্যা $x + iy$এর ক্রমজোড় (x,y) কে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির ন্যায় বিন্দু বিবেচনা করে দ্বিমাত্রিক সমতলে দেখানো যায়। সর্বপ্রথম গণিতবিদ রবার্ট আরগঁ 1806 খ্রিষ্টাব্দে জটিল সংখ্যাকে চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করেন। তাঁর নাম অনুসারে জটিল সংখ্যার সমতলে স্থাপনের চিত্রকে **আরগঁ চিত্র**(Argand diagram) বলা হয়।

আরগঁ চিত্রের সাহায্যে জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা করা যায়। সমতলে যে বিন্দুর স্থানাংক (x, y) সেই বিন্দুকেই$x + iy$ জটিল সংখ্যাটির জ্যামিতিক প্রতিরূপ ধরা হয় এবং সমতলস্থ বিন্দুগুলো জটিল সংখ্যা হিসেবে বিবেচনা করলে সমতলটিকে Argand diagram বলা হয়। ধরুন$X'OX$এবংYOY' দুইটি পরস্পরছেদী লম্ব রেখা যাদেরকে আমরা জ্যামিতিতে আয়তস্থানাংক পদ্ধতিতে X অক্ষ এবং Y অক্ষ বলি। **আরগঁ** চিত্রে এই দুইটি অক্ষকে যথাক্রমে **বাস্তব অক্ষ ও কাল্পনিক অক্ষ** বলে চিহ্নিত করে থাকি। $z = x + iy$ বা, (x, y) জটিল সংখ্যাকে জ্যামিতিকভাবে আরগঁ চিত্রে দেখাতে হলে বাস্তব অক্ষ বরাবর x এবং কাল্পনিক অক্ষ বরাবর y পরিমাপিত হয় এবং আরগঁ চিত্রে $z = x + iy$সংখ্যাটিকে বিন্দু আকারে দেখানো হয়ে থাকে। আরগঁ চিত্রকে অনেক সময় Gaussian planeবা **জটিল সমতল** (Complex plane) বলা হয়ে থাকে এবং এ

সমতলের উপর বিন্দু সকল জটিল সংখ্যা। এখানে মূল বিন্দু $0 + i0$ বা $(0,0)$, $x + i\,0$ সংখ্যাটি বাস্তব অক্ষের উপর এবং $0 + iy$ সংখ্যাটি কাল্পনিক অক্ষের উপর অবস্থান করে।

$z_1 = x_1 + iy_1$এবং$z_2 = x_2 + iy_2$ হলে বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব, $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

পাশের চিত্রে O, A, B, C, D, E, Fবিন্দুগুলোর স্থানাংক যথাক্রমে $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ $(-3, 3)$, $(-1, -3)$ এবং $(2, -2)$। এদের যথাক্রমে $0 + 0i$, $2 + 0i$, $0 + 3i$, $1 + 2i$, $-3 + 3i$, $-1 - 3i$ এবং $2 - 2i$ জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ।



i এর ঘাত (power of$i$); সংঘটক হিসেবে ($i$is as operator)

$i^2 = -1$, $i^3 = i^2.i = -1.i = -i$,

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4.i = 1.i = i$ইত্যাদি

x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $i^{4x} = (i^4)^x = 1^x = 1$, $i^{4x+1} = i^{4x}i = 1.\ i = i$

$i^{4x+2} = i^{4x}.i^2 = 1.(-1) = -1$, $i^{4x+3} = i^{4x}.i^3 = 1.i^2.i = (-1).i = -i$

সুতরাং x যথাক্রমে $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$ আকারের সংখ্যা হলে i^x এর মান যথাক্রমে$1, i, -1, -i$হবে।

আবার, $i.(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$ বিধায় $i^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i.i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = -i$,

$i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = \dfrac{1}{-1} = -1$, $i^{-3} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{i}{i^4} = \dfrac{i}{(i^2)^2} = \dfrac{i}{(-1)^2} = i$

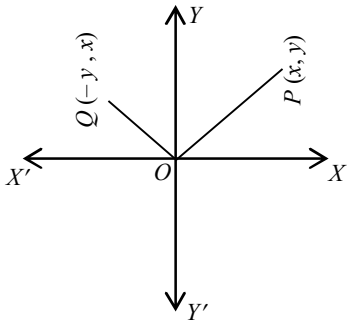
$i^{-4} = \dfrac{1}{i^4} = \dfrac{i}{(i^2)^2} = \dfrac{i}{(-1)^2} = \dfrac{1}{1} = 1$

সুতরাং i এর ঘাত ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলেও তার মান ± 1 বা $\pm i$ হবে।

$z = x + iy$ এর প্রতিরূপী বিন্দু P এবং$iz = ix + i^2y = -y + ix$এর প্রতিরূপী বিন্দু Q হলে OP এবং OQ রেখাংশদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে (যখন $z \neq 0$)।

z এর বাস্তব অথবা কাল্পনিক অংশ শূন্য হলে P এর অবস্থান হবে যথাক্রমে কাল্পনিক অথবা বাস্তব অক্ষের উপর এবং Q এর অবস্থান হবে যথাক্রমে বাস্তব এবং কাল্পনিক অক্ষের উপর।OP এর ঢাল হবে $\dfrac{y}{x}$ এবং OQ এর ঢাল হবে $\dfrac{-y}{x}$ ।

সংঘটক হিসেবে i- কে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে এক সমকোণে ঘুর্ণন হিসেবে বিবেচনা করা যায়।



এই সংঘটক পরপর প্রয়োগ করে i^2, i^3 ও i^4 কে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিক থেকে যথাক্রমে দুই সমকোণে, তিন সমকোণে ও চার সমকোণে ঘূর্ণন হিসেবে বিবেচনা করা যায়।ইহা$i^2 = -1$, $i^3 = -i$ এবং $i^4 = 1$ এর সাথে সংগতিপূর্ণ।

সারসংক্ষেপ

- জটিল সংখ্যাকে প্রতীক i দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $i^2 = -1$ অর্থাৎ $i = \sqrt{-1}$ । এই $i = \sqrt{-1}$ কে জটিল সংখ্যার একক মনে করা হয়। a এবং b বাস্তব সংখ্যা হলে $a + ib$ আকারের যে কোন সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বলা হয়।
- সকল বাস্তব সংখ্যাই জটিল সংখ্যা কিন্তু সকল জটিল সংখ্যাই বাস্তব সংখ্যা নয়।
- সমতলে যে বিন্দুর স্থানাংক (x, y) সেই বিন্দুকেই$x + iy$ জটিল সংখ্যাটির জ্যামিতিক প্রতিরূপ ধরা হয় এবং

সমতলস্থ বিন্দুগুলো জটিল সংখ্যা হিসেবে বিবেচনা করলে সমতলটিকে Argand diagram বলা হয়।

- $i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = 1,\quad i^5 = i$ইত্যাদি।
- $i^{-1} = -i,\quad i^{-2} = -1,\quad i^{-3} = i,\quad i^{-4} = 1$। সুতরাং i এর ঘাত ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলেও তার মান ± 1 বা $\pm i$ হবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.১

1. $A + iB$ আকারে প্রকাশ করুন

   (i) $\frac{5+2i}{4-3i}$, (ii) $\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$, (iii) $(2+i)\,(3+2i)\,(4+3i)$

2. সরল করুন: (i) $\frac{3+2i}{3-5i}$, (ii) $\frac{(x+iy)^2}{x-iy}+\frac{(x-iy)^2}{x+iy}$

3. আরগঁ চিত্রে জটিল সংখ্যাগুলোকে স্থাপন করুন: (i) $5+3i$, (ii) $-1-i$, (iii) $-8+5i$ (iv) $\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$

4. $z=4-3i$হলে প্রমাণ করুন যে,$z^2-8z+25=0$

পাঠ ২.২ জটিল সংখ্যার পরমমান ও নতি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

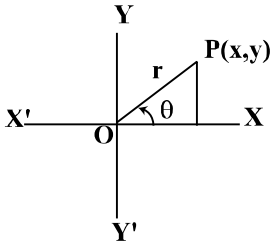
- জটিল সংখ্যার পরমমান কি তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- জটিল সংখ্যার নতি বা আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে পারবেন,
- জটিল সংখ্যার পোলার আকার বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	পরমমান (মডুলাস), নতি (আর্গুমেন্ট), পোলার আকার

মূলপাঠ

জটিল সংখ্যার পরমমান (মডুলাস), নতি (আর্গুমেন্ট) ও পোলার আকার

ধরুন জটিল সমতলে অবস্থিত $P\,(x, y)$ একটি বিন্দু, যাকে $z = x + iy$ জটিল সংখ্যা দ্বারা সূচিত করা যায়। স্থানাঙ্ক জ্যামিতি অনুসারে Pএর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে চিত্র অনুসারে, $OP = r$এবং$\angle XOP = \theta$



$\therefore x = r\cos\theta$এবং$y = r\sin\theta$

সুতরাং $r = \sqrt{x^2+y^2}$এবং$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ কে বলা হয় z এর মডুলাস বা পরমমান এবং যাকে $|z|$ সূচিত করা হয় এবং θ কে বলা হয় বিস্তার (Amplitude)বা নতি বা আর্গুমেন্ট (Argument) যাকে amp zবা arg z দ্বারা সূচীত করা হয়।

$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ কে z জটিল রাশির পোলার আকার বলা হয়।এখানে $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ এবং $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$;Euler's Formulaনামে পরিচিত।

মন্তব্যঃ 1. x এবং y এর মান নির্দিষ্ট থাকলেও ত্রিকোণমিতি হতে আমরা জানি θ এর অসংখ্য মান বিদ্যমান।কিন্তু $-\pi \le \theta \le \pi$ ব্যবধিতে θ এর মান অনন্য (Unique) এবং এ মানকে argθ বা θ **এর মূখ্য মান(Principal value)** বলা হয় এবং θ এর সাধারণ মানকে argθ লেখা হয়, যখন$\arg\theta = \arg\theta + 2n\pi;\ n \in Z$ কোনো কিছু উল্লেখ না থাকলে মূখ্য আর্গুমেন্ট মানকে জটিল সংখ্যায় আর্গুমেন্ট ধরা হয়। θ কে সাধারণত রেডিয়ানে প্রকাশ করা হয়।

2. $z = 0$ অর্থাৎ মূলবিন্দুর বিন্দুর বেলায়$r = 0,\ \theta = 0$।

3. সাধারণভাবে আর্গমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$হতে নির্ণয় ভুল হতে পারে সে জন্য $-\ \pi < \theta \le \pi$ ব্যবধিতে$\cos\theta = \frac{x}{r}$এবং$\sin\theta = \frac{y}{r}$ সম্পর্কদ্বয় হতে θ নির্ণয় করলে নির্ভুল হয়। আর যদি আর্গুমেন্ট$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$সূত্র হতে নির্ণয় করতে হয়, তাহলে জটিল সংখ্যাটির অবস্থান চিত্র অঙ্কন করে θ নির্ণয় করা সুবিধাজনক।

নিচের তালিকা হতে θ এর অবস্থান নির্ণয় করা যায়ঃ

(i) $x > 0,\ y > 0$ হলে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(ii) $x > 0,\ y < 0$ হলে $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$

(iii) $x < 0,\ y > 0$ হলে$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

(iv) $x < 0,\ y < 0$ হলে $-\ \pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$

(v) $x = 0,\ y > 0$ হলে $\theta = \frac{\pi}{2}$

(vi) $x = 0,\ y < 0$ হলে$\theta = -\frac{\pi}{2}$

(vii) $x > 0,\ y = 0$ হলে $\theta = 0$

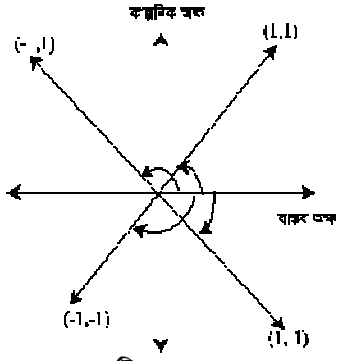
(viii) $x < 0,\ y = 0$ হলে$\theta = \pi$

উদাহরণঃ(i) $1+i$ এর মুখ্য নতি বা মুখ্য আর্গুমেন্ট$\theta = \frac{\pi}{4}$

(ii) $-1+i$এর মুখ্য নতি বা মুখ্য আর্গুমেন্ট$\theta = \frac{3\pi}{4}$

(iii) $-1-i$এর মুখ্য নতি বা মুখ্য আর্গুমেন্ট$\theta = -\frac{3\pi}{4}$

(iv) $1-i$এর মূখ্য নতি বা মুখ্য আর্গুমেন্ট$\theta = -\frac{\pi}{4}$



মন্তব্যঃ1. অনুবন্ধী নয় এমন দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল, ভাগফল জটিল সংখ্যা হবে।

2. অনুবন্ধী এমন দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফল, গুণফল বাস্তব সংখ্যা হবে।

3. কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা সূচক শক্তি (Power) বিশিষ্ট জটিল সংখ্যা একটি জটিল সংখ্যা।

4. যেকোনো জটিল সংখ্যার মূল (Root) একটি জটিল সংখ্যা।

উদাহরণ 1:$z = 1 + i\sqrt{3}$ জটিল সংখ্যাটির ক্ষেত্রে (i) মডুলাস, (ii) মুখ্য ও সাধারণ নতি (iii) পোলার আকার নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে$z = 1 + i\sqrt{3}$ সুতরাং

(i) মডুলাস$z \quad = |z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

(ii) $z = 1 + i\sqrt{3}$জটিল সংখ্যাটির অবস্থান **১ম** চতুর্ভাগে, সুতরাং মুখ্য নতি বা আর্গুমেন্ট$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$এবং সাধারণ নতি বা আর্গুমেন্ট$= 2n\pi + \frac{\pi}{3};\ n \in Z.$

(iii) আমরা জানি, $z = x + iy$ জটিল সংখ্যার পোলারআকার, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; যেখানে $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, যা জটিল সংখ্যার মডুলাস, $\therefore 1 + i\sqrt{3}$এর মডুলাস$= 2$এবং θএর যে মান $x = r\cos\theta$এবং $y =$

$r\sin\theta$কিংবা ক্ষেত্র বিশেষ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ কে সিদ্ধ করে সেই মান মুখ্য নতি। তাহলে $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $1 + i\sqrt{3}$এর পোলার আকার = $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

উদাহরণ 2: $\sqrt{3} + i$ কে পোলার আকারে (polar form) প্রকাশ করুন।

সামাধান: ধরুন, $\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ এখন উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমতা বিধান করে পাই,

$\sqrt{3} = r\cos\theta$ ---------- (i)এবং $1 = r\sin\theta$---------- (ii)

সুতরাং (i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই, $3 + 1 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \Rightarrow 4 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$,

$\therefore r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

(ii) কে(i)নং দ্বার ভাগ করে পাই,

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

সুতরাং নির্ণেয় পোলার আকারটি = $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

উদাহরণ3: $z = 2+2\sqrt{3}\,i$ জটিল সংখ্যাটির মডুলাস ও নতি নির্ণয় করুন এবং সংখ্যাটিকে পোলার আকারে প্রকাশ করুন।

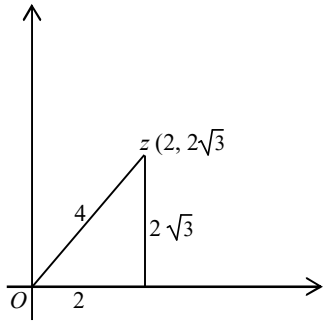
সমাধান: জটিল সংখ্যাটি $z = 2+2\sqrt{3}\,i$

$\therefore$ মডুলাস, $|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

নতি $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$

$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi/3$

$z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ এর পোলার আকার হবে, $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$



সারসংক্ষেপ

- জটিল সমতলে অবস্থিত $P(x, y)$একটি বিন্দু, যাকে $z = x + iy$ জটিল সংখ্যা দ্বারা সূচিত করা হলে $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ কে বলা হয় z এর মডুলাস বা পরমমান এবং যাকে $|z|$ সূচিত করা হয় এবং θ কে বলা হয় বিস্তার (Amplitude)বা নতি বা আর্গুমেন্ট (Argument) যাকে amp zবাarg z দ্বারা সূচীত করা হয়।
- $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$কে$z$জটিল রাশির পোলার আকার বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.২

1. নিচেরজটিল সংখ্যারমডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়করুন:
   (i) $5+2i$, (ii) $-7+8i$, (iii) $1+i\sqrt{3}$, (iv) $-7-6i$
2. $\frac{5-i}{2-3i}$ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়করুন।
3. নিচের জটিল সংখ্যাগুলোকে পোলার আকারে প্রকাশ করুন:
   (i) $-1+i\sqrt{3}$, (ii) $3-i5$, (iii) $-2-2i$
4. $\frac{a-ib}{a+ib}$ জটিল সংখ্যাটিকে $A+iB$আকারে প্রকাশ করুন এবং দেখান যে, $\left|\frac{a-ib}{a+ib}\right| = 1$

5. z_1, z_2 জটিল সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন, $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\{|z_1|^2+|z_2|^2\}$

পাঠ ২.৩ অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা কি তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

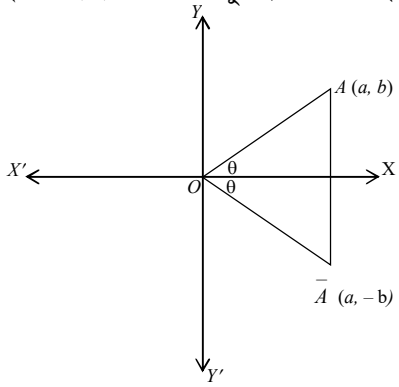
মুখ্য শব্দ	অনুবন্ধি

মূলপাঠ

অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা(Conjugate Complex Number)

$a + ib$ এবং $a - ib$ জটিল সংখ্যা দুটিকে অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা বলে। এদের একটিকে অপরটির অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা বলা হয়। $a + ib$ কে z দ্বারা প্রকাশ করলে $a - ib$ কে $\bar{z}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার $\bar{z}$ এর অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা z নিজেই। কারণ $\bar{z} = a - ib$, $\bar{\bar{z}} = a - (-ib) = a + ib = z$

সুতরাং দুটি অনুবন্ধি জটিল সংখ্যার পার্থক্য কেবল সংখ্যা দুটির কাল্পনিক অংশের চিহ্নে অর্থাৎ একটির কাল্পনিক অংশ অপরটির কাল্পনিক অংশের যৌগিক বিপরিতক।



চিত্রে z এবং $\bar{z}$ এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ দেখানো হলো :

$\bar{z}$ এর প্রতিরূপী বিন্দু বাস্তব অক্ষের প্রক্ষিতে

z এর প্রতিরূপী বিন্দু $A\,(a, b)$ এর প্রতিফলিত বিন্দু $\bar{A}\,(a, -b)$

উদাহরণ 1: z একটি জটিল সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে, $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

সমাধানঃ ধরুন $z = x + iy$ । তাহলে $-z = -x - iy$, $\bar{z} = x - iy$ এবং $-\bar{z} = -x + iy$

এখন, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|-\bar{z}| = \sqrt{(-x)^2 + (y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

সুতরাং, $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

সারসংক্ষেপ

- $a + ib$এবং $a - ib$জটিল সংখ্যা দুটিকে অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা বলে। এদের একটিকে অপরটির অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা বলা হয়।
- $a + ib$কে z দ্বারা প্রকাশ করলে $a - ib$কে $\bar{z}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- $\bar{z}$ এর অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা z নিজেই, কারণ $\bar{z} = a - ib$, $\bar{\bar{z}} = a - (-ib) = a + ib = z$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৩

1. যদি $z=3+5i$হয়, তবে প্রমাণ করুন, $\bar{\bar{z}} = z$
2. যদিzহয়, তবে প্রমাণ করুন, $z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
3. z একটি জটিল সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে, $|z|^2 = |-z|^2 = |\bar{z}|^2 = |-\bar{z}|^2 = z\bar{z}$

পাঠ ২.৪ জটিল সংখ্যার ধর্ম

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- জটিল সংখ্যার ধর্ম বর্ণনা করতে পারবেন,
- জটিল সংখ্যার পরমমানের ধর্ম বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ধর্ম, পরমমান

মূলপাঠ

জটিল সংখ্যার ধর্ম (Characteristics of Complex Numbers)

(i)কোনো জটিল সংখ্যা$x + iy = 0$ হবে, যদি $x = 0$ এবং$y = 0$ হয়।

প্রমাণ:$x + iy = 0$ যেখানে$x, y \in \mathrm{P} \therefore x = -iy$বা,$x^2 = -y^2$বা,$x^2 + y^2 = 0$

যেহেতু অশূন্য দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি কখনই শূন্য হয় না; সুতরাং সংখ্যা দুইটি পৃথকভাবে নিজেরাই শূন্য।অর্থাৎ,$x = 0$ এবং$y = 0$

(ii)দুইটি জটিল সংখ্যা x_1+iy_1ওx_2+iy_2 সমান হবে যদি এবং কেবল যদি $x_1 = x_2$ এবং $y_1=y_2$ হয়।

প্রমাণ:ধরুন, $x_1 + iy_1 = x_2+iy_2$বা, $x_1 - x_2 = iy_2 - iy_1$ বা, $(x_1 - x_2)^2 = i^2 (y_2 - y_1)^2$

বা, $(x_1 - x_2)^2 = -(y_2 - y_1)^2$বা, $(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 0$;

এটি সম্ভব যখন $x_1 - x_2 = 0$ এবং $y_2 - y_1 = 0$ হয়।

অর্থাৎ $x_1 = x_2$এবং $y_1 = y_2$ হলে $x_1 + iy_1$ এবং $x_2 + iy_2$ জটিল সংখ্যাদ্বয় সমান হবে।

(iii)কোনো জটিল সংখ্যার অনুবন্ধীর অনুবন্ধী ঐ জটিল সংখ্যাটিই অর্থাৎ $\bar{\bar{z}} = z$

প্রমাণ:ধরুন, $z = x + iy$ তাহলে $\bar{z} = x - iy$ বা, $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy \therefore \bar{\bar{z}} = z$

(iv)যেকোনো জটিল সংখ্যা এবং তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার সমষ্টি ও গুণফল উভয়ই বাস্তব সংখ্যা।

প্রমাণ: মনে করুন$z = x + iy$; এখানে$x, y \in$P; সুতরাং z এর অনুবন্ধী জটিল $\bar{z} = x - iy$

এখন $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$, যা বাস্তব সংখ্যা;

এবং $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$, যা বাস্তব সংখ্যা।

(v)যেকোনো দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার বিয়োগফল একটি কাল্পনিক সংখ্যা এবং ভাগফল একটি জটিল সংখ্যা।

প্রমাণ: মনে করুন, $z = x + iy$একটি জটিল সংখ্যা তাহলে zএর অনুবন্ধী জটিল$\bar{z} = x - iy$

$\therefore z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$, যা কাল্পনিক সংখ্যা

এবং $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x + iy}{x - iy} = \frac{(x + iy)^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{2xy}{x^2 + y^2}$, যা জটিল সংখ্যা

(vi)অনুবন্ধী নয় এরূপ দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল প্রতিটিই এক একটি জটিল সংখ্যা।

প্রমাণ: মনে করুন,$z_1 = x_1 + iy_1$এবং$z_2 = x_2 + iy_2$ তাহলে,

যোগফল :$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, যা একটি জটিল সংখ্যা।

বিয়োগফল :$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$, যা একটি জটিল সংখ্যা।

গুণফল :$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, যা একটি জটিল সংখ্যা নির্দেশ করে।

ভাগফল :$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$, যা একটি জটিল সংখ্যা নির্দেশ করে।

(vii) যেকোনো জটিল সংখ্যার মূল একটি জটিল সংখ্যা।

প্রমাণ: যদি সম্ভব হয় মনে করুন, $\sqrt[n]{a + ib} = p$, যখন $n, a, p, b \in$P এবং $a \neq 0, b \neq 0$,

$\therefore a + ib = p^n$---------- (i)

এখন p^nএকটি বাস্তব সংখ্যা। সুতরাং (i) থেকে $b = 0$। কিন্তু কল্পনা বিরুদ্ধ। সুতরাং জটিল সংখ্যার মূল বাস্তব হতে পারে না।

আবার, ধরুন, $\sqrt[n]{a + ib} = iq$, $\therefore a + ib = i^nq^n$ যদি $n = 4m$ হয় তাহলে সংখ্যাটি বাস্তব সংখ্যা এবং যদি $n \neq 4m$ হয় তাহলে সংখ্যাটি কাল্পনিক রাশি নয়।

সুতরাং প্রথম ক্ষেত্রে $b = 0$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $a = 0$ কিন্তু এ দুইটিই কল্পনা বিরুদ্ধ।

$\therefore$জটিল সংখ্যার মূল একটি বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা হতে পারে না। সুতরাং জটিল সংখ্যার যেকোনো মূল একটি জটিল সংখ্যা হবে।

(viii) কোনো জটিল সংখ্যার শক্তির সূচক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে শক্তিবিশিষ্ট জটিল সংখ্যাটিও একটি জটিল সংখ্যা।

প্রমাণ: মনেকরুন$z = x + iy$একটি জটিল সংখ্যা; যেখানে $x, y \in$P.

$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy$, যা একটি জটিল সংখ্যা।

$z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ যা, একটি জটিল সংখ্যা।

একইভাবে অগ্রসর হলে z^n একটি জটিল সংখ্যা হবে। যেখানে n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(ix)যেকোনো জটিল সংখ্যা ও তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার পরমমান পরস্পর সমান এবং তাদের গুণফল যেকোনোটির পরমমানের বর্গের সমান।

প্রমাণ: ধরুন$z = x + iy \therefore \bar{z} = x - iy$; সুতরাং $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$এবং$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

অর্থাৎ $|z| = |\bar{z}|$এবং $z\bar{z} = |z|^2$.

(x) যেকোনো দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফলের অনুবন্ধী জটিল, পৃথকভাবে সংখ্যা দুইটির অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার যোগফলের সমান। অনুরূপে দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফলের অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, পৃথকভাবে ঐ সংখ্যা দুইটির অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার গুণফলের সমান, অর্থাৎ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$, **এবং** $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\,\bar{z_2}$

প্রমাণ: ধরুন $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ তাহলে $\bar{z_1} = x_1 - iy_1$ এবং $\bar{z_2} = x_2 - iy_2$

সুতরাং $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

অতএব, $\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i\,(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + i(x_2 - iy_2) = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

আবার, $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)\ (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_2y_1 + y_2x_1)$

সুতরাং, $\overline{z_1 z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i\,(x_2y_1 + y_2x_1)$

আবার, $\bar{z_1}\,\bar{z_2} = (x_1 - iy_1)\,(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i\,(x_2y_1 + x_1y_2)$

অতএব, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\,\bar{z_2}$

জটিল সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ: $i^2 = -1$ ধরে বাস্তব সংখ্যার বীজগণিতীয় নিয়মে জটিল সংখ্যাসমূহের মধ্যে বিভিন্ন ক্রিয়া (Operation) ঘটে। $z_1 = a + ib$ এবং $z_2 = c + id$ হলে

1. যোগ : $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$
2. বিয়োগ : $z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i\,(b - d)$
3. গুণ : $z_1z_2 = (a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$
4. ভাগ : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + ib}{c + id} = \dfrac{(a + ib)\,(c - id)}{(c + id)\,(c - id)} = \dfrac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2};\ c + id \neq 0$

জটিল সংখ্যার পরমমানের ধর্ম

মনে করুন $z = a + ib$ একটি জটিল সংখ্যা। পরমমানের সংজ্ঞা হতে $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

আমরা জানি, $|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + ib)\,(a - ib) = z\bar{z}$

আরগঁ চিত্রে z এর প্রতিরূপী বিন্দু A হলে $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ হচ্ছে মূল বিন্দু হতে A বিন্দুর দূরত্ব।

(i) $|z| \geq 0$ সর্বদা এবং $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(ii) $|z_1z_2| = |z_1|.\ |z_2|$ এবং $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ যদি $z_2 \neq 0$

(iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(iv) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

প্রমাণ:(i) পরমমানের সংজ্ঞানুসারে সর্বদা $|z| \geq 0$

অধিকন্তু $|z|^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ এবং $y = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(ii) আমরা জানি, $|z|^2 = z\bar{z}$ এবং $\overline{z_1z_2} = \bar{z_1}\,\bar{z_2}$

$\therefore\ |z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\,(\overline{z_1z_2}) = (z_1z_2)\,(\bar{z_1}\,\bar{z_2}) = (z_1\bar{z_1})\,(z_2\bar{z_2})$

$\therefore\ |z_1z_2|^2 = |z_1|^2\,|z_2|^2$

উভয় পক্ষে অঋণাত্মক বর্গমূল নিয়ে পাই, $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$

বিকল্প প্রমাণ: মনে করুন

$z_1 = a_1 + ib_1$ এবং $z_2 = a_2 + ib_2$

$|z_1z_2|^2 = |(a_1 + ib_1)\,(a_2 + ib_2)|^2 = |a_1a_2 - b_1b_2 + i\,(a_1b_2 + a_2b_1)|^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2$

$= a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2$
$= a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$

$\therefore |z_1z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$

উভয় পক্ষে অঋণাত্মক বর্গমূল নিয়ে পাই $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

$z_2 \neq 0$ হলে $\frac{z_1}{z_2}.z_2 = z_1$

উপরের প্রমাণ হতে পাই, $\left|\frac{z_1}{z_2}.z_2\right| = |z_1| \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2| = |z_1|$

উভয় পক্ষে $|z_2|$ দ্বারা ভাগ করে পাই, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(iii) আমরা জানি,

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$ $[\because |z|^2 = z\bar{z}]$

$= (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2})$ $[\because \overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}]$

$= z_1\bar{z_1} + z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1} + z_2\bar{z_2}$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2})$ $[\because z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2})]$

$\therefore |z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z_2}|$ $[\because \mathrm{Re}(z) \leq |z|]$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\bar{z_2}|$ $[\because |z_1\bar{z_2}| = |z_1||\bar{z_2}|]$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$ $[\because |\bar{z_2}| = |z_2|]$

$= (|z_1| + |z_2|)^2$

$\therefore |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

শিক্ষার্থীর কাজ	**প্রমাণ করুন যেঃ** (a) $\lvert z_1 + z_2 + z_3\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert + \lvert z_3\rvert$, (b) $\lvert z_1 + z_2 + ... + z_n\rvert = \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert + ... + \lvert z_n\rvert$

(iv) আমরা জানি, $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$ $[\because |z|^2 = z\bar{z}]$

$= (z_1 - z_2)(\bar{z_1} - \bar{z_2})$ $[\because \overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}]$

$= z_1\bar{z_1} - z_1\bar{z_2} - z_2\bar{z_1} + z_2\bar{z_2} = |z_1|^2 - (z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1}) + |z_2|^2$ $[\because |z|^2 = z\bar{z}]$

$= |z_1|^2 - (z_1\bar{z_2} + z_2\overline{z_1}) + |z_2|^2$ $[\because \bar{z} = z]$

$= |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2}) + |\bar{z_2}|^2$ $[\because -x \leq \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow -\mathrm{Re}(z) \leq |z|]$

$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$

$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

$\Rightarrow |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

পাঠ ২.৫ জটিল সংখ্যার যোগফল ও বিয়োগফলের জ্যামিতিক প্রতিরূপ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

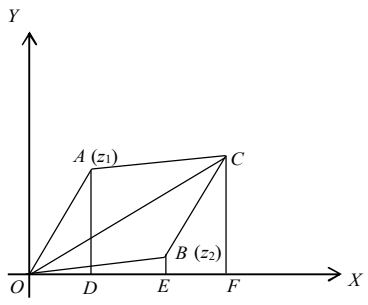
- জটিল সংখ্যার যোগফল চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- জটিল সংখ্যার বিয়োগফল চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	যোগফল, বিয়োগফল, জ্যামিতিক প্রতিরূপ

মূলপাঠ

জটিল সংখ্যার যোগঃ মনে করুন, $z_1 = x_1 + iy_1$এবং$z_2 = x_2 + iy_2$ দুইটি জটিল সংখ্যা। আরগঁ চিত্রে এদেরকে যথাক্রমে A এবং B বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

এখনOAএবংOBকে সন্নিহিতবাহু ধরে$OACB$ সামান্তরিক অঙ্কন করুন যার কর্ণ OC। অতঃপর A, B, C বিন্দু হতেOX এর উপর যথাক্রমেAD, BE, CF লম্ব অঙ্কন করুন।



তাহলে $OF = x_1 + x_2$এবং$CF = y_1 + y_2$,

সুতরাং $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ যা চিত্রে C বিন্দু দ্বারা সূচিত হয়। সুতরাং জ্যামিতিকভাবে জটিল সংখ্যার যোগ সামন্তরিকের সূত্র মেনে চলে।

উদাহরণ 1:$z_1 = 2 + 3i$ এবং $z_2 = 5 + i$ হলে $z_1 + z_2$ এর মান নির্ণয় করুন।

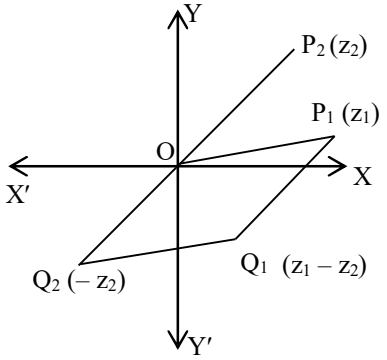
সমাধানঃ এখানে, $z_1= 2 + 3i$, $z_2 = 5 + i$

$\therefore z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5)+ (3 +1)i = 7 + 4i$

জটিল সংখ্যার বিয়োগফল

মনে করুন$z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ দুটি জটিল সংখ্যা, আরগঁ চিত্রে এদেরকে $P_1 (z_1)$ এবং $P_2 (z_2)$ বিন্দু দ্বারা চিহ্নিত করা হল। P_2 কে Q_2 পর্যন্ত বর্ধিত করুন যেন $OP_2 = OQ_2$ হয়। সুতরাং Q_2 বিন্দু $-z_2 = -x_2 - iy_2$ এর প্রতিরূপ। OP_1 এবং OQ_2 রেখাদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে $OP_1Q_1Q_2$ সামান্তরিক অঙ্কন করুন।

সুতরাং Q_1 বিন্দু P_1 এবং P_2 বিন্দু দ্বারা নির্দেশিত জটিল সংখ্যা দুটির বিয়োগফল নির্দেশ করবে, কেননা $z_1- z_2 =z_1 + (-z_2)$।



উদাহরণ2:$z_1 = 4 + i$ এবং $z_2 = 2 + 3i$ হলে $z_1 - z_2$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃএখানে $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 2 + 3i$

$\therefore z_1 - z_2 = (4 + i) - (2 + 3i) = (4 - 2) + (1 - 3)i= 2 - 2i$

সারসংক্ষেপ

- $z_1 = x_1 + iy_1$এবং$z_2 = x_2 + iy_2$ হলে$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 = x_1 + iy_1$এবং$z_2 = x_2 + iy_2$ হলে$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৫

1. নিম্নলিখিত জটিল সংখ্যাগুলোর যোগফল ও বিয়োগফল নির্ণয় করুন।
   (i) $z_1=3+5i$, $z_2=2+7i$(ii) $z_1=9+4i$, $z_2=7+5i$ (iii) $z_1=6+11i$, $z_2=3+5i$

পাঠ ২.৬ জটিল সংখ্যার গুণফল ও ভাগফলের জ্যামিতিক প্রতিরূপ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

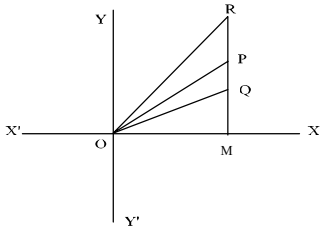
এই পাঠ শেষে আপনি-

- জটিল সংখ্যার গুণফল ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- আরগঁ চিত্রের সাহায্যে জটিল সংখ্যার গুণ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- জটিল সংখ্যার ভাগফল ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- আরগঁ চিত্রের সাহায্যে জটিল সংখ্যার ভাগ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	গুণফল, ভাগফল, জ্যামিতিক প্রতিরূপ

মূলপাঠ

জটিল সংখ্যার গুণফল: জটিল রাশিদ্বয়কে যথাক্রমে Pএবং Qবিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত করুন। এখন ধরুনz_1 এবং z_2 এর পোলার আকার $z_1 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ ও $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ তাহলে$|z_1| = OP = r_1$ এবং$|z_2| = OQ = r_2$



মনে করুন, $\angle XOP = \theta_1$এবং $\angle XOQ = \theta_2$

এখন, $\angle XOR$ এমন একটি কোণ অঙ্কন করা হলো যেন, $\angle XOR = \angle XOP + \angle XOQ = \theta_1 + \theta_2$।

এখন ORএমন দৈর্ঘ্য নেওয়া হলো যেন $OR = OP.OQ = r_1.r_2$

এখন $z_1z_2=r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$=r_1.r_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)$.

R থেকে X অক্ষের উপরRMলম্ব টানা হলো যা X অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে $OM = r_1.\ r_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$ এবং $RM = r_1.r_2\sin(\theta_1 + \theta_2)$

সুতরাং R বিন্দুটি $r_1.r_2\ \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$ জটিল রাশি দ্বারা সূচিত হয় অর্থাৎ z_1z_2কে সূচিত করে।

এখন $r_1.r_2 = r$ এবং $\theta_1 + \theta_2 = \theta$ ধরলে $z_1z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

মন্তব্য:(i) দুইটি জটিল রাশির গুণফলের মডুলাস রাশি দুইটির মডুলাসের গুণফলের সমান। অর্থাৎ$|z_1z_2|=|z_1|.\ |z_2|$

(ii) দুইটি জটিল রাশির গুণফলের আর্গুমেন্ট বা নতি রাশি দুইটির নতি বা এমপ্লিচুডের যোগফলের সমান।

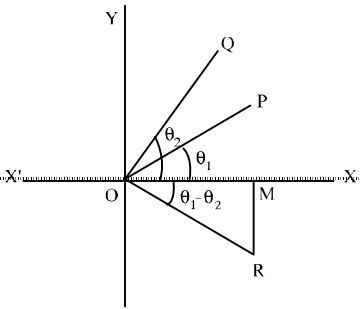
অর্থাৎ $\text{amp}\ (z_1z_2) = \text{amp}\ (z_1) + \text{amp}\ (z_2)$

জটিল সংখ্যার ভাগফলের জ্যামিতিকপ্রতিরূপ

মনে করুন আরগঁ সমতলে P, Q বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে z_1ও z_2রাশিদ্বয়কে সূচিত করে এবং

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ও $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

তাহলে $|z_1| = OP = r_1, |z_2| = OQ = r_2$



যেখানে, $\angle XOP = \theta_1$ এবং $\angle XOQ = \theta_2$

এখন $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)}$

$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$

$= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

এখন, $\theta_1 - \theta_2 = \angle XOR$, যখন $OR = \frac{r_1}{r_2}$: অত পর x অক্ষের উপর RM লম্ব অঙ্কন করা হলো।

তাহলে, $OM = \frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)$ এবং $RM = \frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)$

অতএব R বিন্দুইটি $\frac{r_1}{r_2}.\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$ কে অর্থাৎ $\frac{z_1}{z_2}$ কে সূচিত করে।

এখন $\frac{r_1}{r_2} = r$এবং $\theta_1 - \theta_2 = \theta$ ধরলে $\frac{z_1}{z_2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

মন্তব্য:(i) দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের মডুলাস রাশি দুইটির মডুলাসের ভাগফলের সমান। অর্থাৎ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(ii)দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের নতি বা আর্গুমেন্ট রাশি দুইটির নতির বিয়োগফল।
অর্থাৎ $\arg(z_1 \div z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

পাঠ ২.৭ জটিল সংখ্যার বর্গমূল

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- জটিল সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন,
- বর্গমূলের মাধ্যমে সমস্যা সমাধানের দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বর্গমূল

মূলপাঠ

জটিল সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় (Square root of complex number): মনেকরুন$a + ib$ একটি জটিল সংখ্যা, এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে। যেহেতু আমরা জানি কোনো জটিল সংখ্যার বর্গমূল একটি জটিল সংখ্যা, সুতরাং মনেকরুন, $\sqrt{a + ib} = x + iy$, এখানেa, b, x, y বাস্তব রাশি।

$\Rightarrow a + ib = x^2 - y^2 + 2ixy$[বর্গ করে]

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমতা বিধান করে পাই, $x^2 - y^2 = a$------ (i) এবং $2xy = b$------ (ii)

আমরা জানি, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = a^2 + b^2$

$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$---------- (iii) (যেহেতু বর্গ সংখ্যার সমষ্টি কখনই ঋণাত্মক হয় না)।

এখন (i) ও (iii) যোগ করে, $2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a \therefore x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}$

পুনরায় (iii) থেকে(i) বিয়োগ করে, $2y^2 = \sqrt{a^2+b^2} - a \therefore y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$

মন্তব্য: $2xy = b$সমীকরণ হতে স্পষ্ট বুঝা যায় যে, b ধনাত্মক হলে x এবং y উভয়ই একই চিহ্ন বিশিষ্ট হবে। সুতরাং $b > 0$ হলে x এবং yউভয়ই হয় ধনাত্মক হবে, না হয় ঋণাত্মক হবে।

অতএব সেক্ষেত্রে নির্ণেয় বর্গমূল $\sqrt{a+ib} = \pm\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + i\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}-a\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$

পুনরায় $b < 0$ হলে x এবং y বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

অতএব সেক্ষেত্রে নির্ণেয় বর্গমূল $\sqrt{a+ib} = \pm\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\right\}^{\frac{1}{2}} - i\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}-a\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$

উদাহরণ1: $1 + i$ সংখ্যাটির বর্গমূল নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন $\sqrt{1+i} = a + ib$

বা, $1 + i = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$

বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই

$a^2 - b^2 = 1$ এবং $2ab = 1$

এখন $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = 1^2+1^2 = 2$বা,$a^2 + b^2 = \sqrt{2}$

$\therefore \quad a^2 + b^2 = \sqrt{2}$ আবার $a^2 + b^2 = \sqrt{2}$

এবং$a^2 - b^2 = 1$ $a - b^2 = 1$

(+) $2a^2 = 1 + \sqrt{2}$ (–) $2b^2 = \sqrt{2} - 1$

বা,$a^2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ বা,$b^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$

$\therefore a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}$ $b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)}$

যেহেতু$2ab = 1$, সুতরাং aএবং b এর চিহ্ন একই হবে

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]$

উদাহরণ2: $7 - 30\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন $\sqrt{7-30\sqrt{-2}} = a + ib$

বা, $\sqrt{7-30i\sqrt{2}} = a + ib$

বা, $7 - 30i\sqrt{2} = (a + ib)^2$

বা, $7 - 30i\sqrt{2} = a^2 - b^2 + 2iab$

বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই

$a^2 - b^2 = 7$ ---------- (i)

এবং$2ab = -30\sqrt{2}$ ---------- (ii)

এখন $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2 = (7)^2 + (-30\sqrt{2})^2$

$= 49 + 900 \times 2 = 49 + 1800 = 1849 = (43)^2$

$\therefore \quad a^2 + b^2 = 43$ দুইটি বর্গ রাশির যোগফল সর্বদাই যোগফল।

$a^2 + b^2 = 43$ আবার,$a^2 + b^2 = 43$

$a^2 - b^2 = 7$ $a^2 - b^2 = 7$

(+) $2a^2 = 50$ (–) $2b^2 = 36$
$\therefore a^2 = 25$ $\therefore b^2 = 18$
$\therefore a = \pm 5$ $b = \pm 3\sqrt{2}$

যেহেতু $2ab = -30\sqrt{2}$
$\therefore ab = -15\sqrt{2}$ যা ঋণাত্মক
সুতরাং a এবং b বিপরীত চিহ্নের হবে।
$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $\pm (5 - i\,3\sqrt{2})$

পাঠ ২.৮ এককের ঘনমূল

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- এককের ঘনমূল কী বলতে পারবেন,
- এককের ঘনমূল নির্ণয়ের দক্ষতা অর্জন করবেন,
- এককের ঘনমূলের ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	একক, ঘনমূল

মূলপাঠ

এককের ঘনমূল (Cube Roots of unity) নির্ণয়:

ধরুন, $\sqrt[3]{1} = x \therefore x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$
$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \quad \therefore x - 1 = 0$ অর্থাৎ, $x = 1$
আবার, $x^2 + x + 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad [\because i = \sqrt{-1}]$$

সুতরাং একক-এর ঘনমূল তিনটি যা, $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$। এদের একটি বাস্তব এবং অপর দুইটি জটিল সংখ্যা।

যদি $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \omega$(ধরা হয়) তবে, $\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ হবে। সুতরাং এককের ঘনমূলত্রয় হল $1, \omega, \omega^2$

এককের ঘনমূলের গুণাবলী(Characteristic of cube roots of unity):

(i) একক-এর জটিল ঘনমূল দুইটির একটি অপরটির বর্গ

আমরা জানি, একক-এর জটিল ঘনমূল দুটি হল, $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ও $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

এখন, $\left\{\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right\}^2 = \frac{1}{4}(1-2i\sqrt{3}-3) = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

আবার, $\left\{\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right\}^2 = \frac{1}{4}(1+2i\sqrt{3}-3) = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

জটিল মূলদ্বয়ের যেকোনো একটিকে ω ধরলে অপরটি ω^2 হবে। অতএব এককের তিনটি ঘনমূলকে $1, \omega, \omega^2$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

(ii) একক-এর জটিল ঘনমূলদ্বয়ের গুণফল 1.

মনে করুন একক-এর জটিল ঘনমূলদ্বয় $\omega = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ এবং $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$

$\therefore \omega.\omega^2 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2\} = \frac{1}{4}(1-i^2.3)$

$= \frac{1}{4}\{1-(-1).3\} = \frac{1}{4}(1+3)$

$\therefore \omega^3 = \frac{1}{4}.4 = 1$

(iii) একক-এর জটিল মূলদ্বয় একটি অপরটির উল্টা

একক-এর জটিল ঘনমূলদ্বয় $\omega = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ এবং $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$

$\therefore \frac{1}{\omega^2} = \frac{2}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{\left\{\left(i\sqrt{3}\right)^2-(1)^2\right\}}$

$= \frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{-\{-3-1\}} = \frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right) = \omega$

অনুরূপভাবে, দেখানো যায়, $\omega^2 = \frac{1}{\omega}$

(iv) একক-এর তিনটি ঘনমূলের সমষ্টি শূন্য।

একক-এর ঘনমূলত্রয় $1, \omega, \omega^2$ যেখানে $\omega = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$

$\therefore 1+\omega+\omega^2 = 1+\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})+\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3} = 1+\frac{1}{2}(-2) = 1-1 = 0$

(v) ω এর ঘাতসমূহ

$\omega^3 = 1$, $\omega^4 = \omega^3.\omega = 1.\omega = \omega$, $\omega^5 = \omega^3.\omega^2 = 1.\omega^2 = \omega^2$, $\omega^6 = \omega^3.\omega^3 = 1.1 = 1$ ইত্যাদি

এখন $\omega^{3n} = (\omega^3)^n = 1$, $\omega^{3n+1} = \omega^{3n}.\omega = \omega$, $\omega^{3n+2} = \omega^{3n}.\omega^2 = \omega^2$

এখন, $3n, 3n+1, 3n+2$ এ $n = 0, 1, 2$ ধরে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা পাওয়া যাবে।

সাধারণভাবে, $\omega^n = 1, \omega, \omega^2$ হবে যদি n কে 3 দ্বারা ভাগ করলে যথাক্রমে 0, 1, 2 অবশিষ্ট থাকে।

উদাহরণ1: i এর ঘনমূল নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন $(i)^{1/3} = a$

বা, $i = a^3$ বা, $a^3 = i = -i^3$

বা, $a^3 + i^3 = 0$ বা, $(a+i)(a^2 - ia + i^2) = 0$

বা, $(a+i)(a^2 - ia - 1) = 0$

হয়, $a + i = 0$ বা, $a = -i$

অথবা $a^2 - ia - 1 = 0$

$$\therefore a = \frac{i \pm \sqrt{(-i)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$

$$\therefore a = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$$

সুতরাং i এর ঘনমূল সমূহ $-i, \frac{1}{2}(i+\sqrt{3}), \frac{1}{2}(i-\sqrt{3})$

উদাহরণ 2: একক-এর একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, প্রমাণ করুন

$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^6) = 16$

সমাধান : আমরা জানি, একক-এর একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\omega^3 = 1$ এবং $1+\omega+\omega^2 = 0$

এখন, $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$

$= (1+\omega^2-\omega)(1-\omega^2+\omega^3.\omega)(1-\omega^3.\omega+\omega^6.\omega^2)(1-\omega^6.\omega^2+\omega^{15}.\omega)$

$= (1+\omega^2-\omega)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)$

$= \{(1+\omega^2-\omega)(1-\omega^2+\omega)\}^2$

$= \{(1+\omega+\omega^2-2\omega)(1+\omega+\omega^2-2\omega^2)\}^2$

$= \{(0-2\omega)(0-2\omega^2)\}^2 = (4\omega^3)^2 = 16\omega^6$

$= 16$

পাঠ ২.৯ বিবিধ সমস্যা ও সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- জটিল সংখ্যা সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মূলপাঠ

উদাহরণ1: $z_1 = 5+3i$ এবং $z_2 = 3-2i$ হলে নির্ণয় করুন

(i) z_1+z_2 (ii) z_1-z_2 (iii) z_1z_2 (iv) $\frac{z_1}{z_2}$

সমাধান: (i) $z_1+z_2 = 5+3i+3-2i = (5+3)+i(3-2) = 8+i$

(ii) $z_1-z_2 = (5+3i)-(3-2i) = 5-3+3i+2i = 2+5i$

(iii) $z_1z_2 = (5+3i)(3-2i) = 5\times 3 + i(3\times 3) + 5\times(-2)i - 6i^2$

$= 15+9i-10i-6(-1)$ $[\because i^2 = -1]$ $= 21-i$

(iv) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+3i}{3-2i} = \frac{(5+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{15+10i+9i+6i^2}{9-4i^2}$

$= \frac{15+19i-6}{9+4} = \frac{9+19i}{13} = \frac{9}{13}+\frac{19}{13}i$

উদাহরণ2: সরল করুন: $(1+i^3)(1+\frac{1}{i})^3(i^4+\frac{1}{i^4})$ যখন, $i = \sqrt{-1}$

সামাধানঃ যেহেতু$i^3 = i^2.i = -i$;$\frac{1}{i} = \frac{-i^2}{i} = -i$; $i^4 = 1$

সুতরাংপ্রদত্ত রাশি $=(1 + i^3)(1 + \frac{1}{i})^3 (i^4 + \frac{1}{i^4}) = (1 - i)(1 - i)^3 (1 + 1)$

$= 2(1 - i)^4 = 2(1 + i^2 - 2i)^2 = 2(1 - 1 - 2i)^2 = 2(-2i)^2 = -8$

উদাহরণ3: $\sqrt[3]{x + iy} = p + iq$এবং $p \neq 0$, $q \neq 0$ হলে প্রমাণ করুন যে,$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 4(p^2 - q^2)$.

সমাধানঃ এখানে$\sqrt[3]{x + iy} = p + iq$

$x + iy = (p + iq)^3$ [উভয় পক্ষকে তৃতীয় ঘাতে উন্নীত করে]

$= p^3 + 3p^2iq + 3pi^2q^2 + i^3q^3 = p^3 - 3pq^2 + i(3p^2q - q^3)$

উভয় পক্ষের বাস্তব অংশের এবং কাল্পনিক অংশের সমতা বিধান করে পাই, $x = p^3 - 3pq^2$এবং $y = 3p^2q - q^3$

অতএব$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = p^2 - 3q^2 + 3p^2 - q^2 = 4(p^2 - q^2)$

উদাহরণ 4:দেখান যে, $(-1 + \sqrt{-3})^4 + (-1 - \sqrt{-3})^4 = -16$

সমাধানঃ আমরা জানি, এককের কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয় $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$এবং$\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

সুতরাং $2\omega = -1 + \sqrt{-3}$এবং $2\omega^2 = -1 - \sqrt{-3}$

$(-1 + \sqrt{-3})^4 + (-1 - \sqrt{-3})^4 = (2\omega)^4 + (2\omega^2)^4 = 2^4(\omega^4 + \omega^8)$

$= 16(\omega^3.\omega + \omega^6.\omega^2) = 16(\omega + \omega^2)$ $[\because \omega^3 = \omega^6 = 1]$

$= 16(-1)$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

$= -16$

উদাহরণ5: $x = p + q$, $y = p + \omega q$এবং $z = p + \omega^2 q$ হলে দেখান যে, $x^3 + y^3 + z^3 = 3(p^3 + q^3)$

সমাধানঃ $x^3 + y^3 + z^3 = (p + q)^3 + (p + \omega q)^3 + (p + \omega^2 q)^3$

$= (p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3) + (p^3 + 3p^2\omega q + 3p\omega^2 q^2 + \omega^3 q^3) + (p^3 + 3p^2\omega^2 q + 3p\omega^4 q^2 + \omega^6 q^3)$

$= 3p^3 + 3p^2q(1 + \omega + \omega^2) + 3pq^2(1 + \omega^2 + \omega^4) + q^3(1 + \omega^3 + \omega^6)$

$= 3p^3 + 3q^3$[যেহেতু, $1 + \omega + \omega^2 = 0, 1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$ এবং $\omega^3 = \omega^6 = 1$]

$= 3(p^3 + q^3)$

উদাহরণ 6: $a + b + c = 0$ হলে প্রমাণ করুন যে,

$(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = (2a - b - c)(2b - c - a)(2c - a - b) = 27abc$

সমাধানঃধরুন,$x = a + b\omega + c\omega^2$এবং$y = a + b\omega^2 + c\omega$

বামপক্ষ $= (a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= (x + y)\{(x^2 + (\omega + \omega^2)xy + \omega^3 y^2\} = (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y)$

এখন$x + y = a + b\omega + c\omega^2 + a + b\omega^2 + c\omega = 2a + b(\omega + \omega^2) + c(\omega + \omega^2) = 2a - b - c$

$x + \omega y = a + b\omega + c\omega^2 + a\omega + b\omega^3 + c\omega^2 = \{a(1 + \omega) + b(1 + \omega) + 2c\omega^2\} = (2c - a - b)\omega^2$

এবং $x + \omega^2 y = a + b\omega + c\omega^2 + a\omega^2 + b\omega^4 + c\omega^3 = \{a(1 + \omega^2) + b(\omega + \omega^4) + c(\omega^2 + \omega^3)\}$

$= (2b - c - a)\omega$

$\therefore (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y) = (2a - b - c).(2c - a - b)\omega^2.(2b - c - a)\omega$

$= (2a - b - c)(2b - c - a)(2c - a - b) = 3a.3b.3c = 27abc$

দ্রষ্টব্যঃ$1 + \omega + \omega^2 = 0$ এবং $\omega^3 = 1$ সূত্র ব্যবহার করা হয়েছে।

উদাহরণ 7: $(a + b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$ হলে দেখান যে, $a = c$বা, $b = \frac{1}{2}(c + a)$.

সমাধানঃ $(a + b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$.

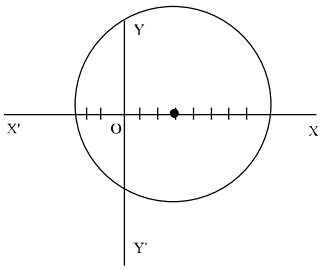
বা, $a^2(1+\omega^2+\omega^2)+b^2(\omega^2+1+\omega^4)+c^2(\omega^4+\omega^4+1)+2ab(\omega+\omega+\omega^3)$
$+2bc(\omega^3+\omega^2+\omega^2)+2ca(\omega^2+\omega^3+\omega)=0$
বা, $a^2(1+2\omega^2)+b^2(\omega^2+1+\omega)+c^2(2\omega+1)+2ab(1+2\omega)+2bc(1+2\omega^2)+2ca(\omega^2+1+\omega)=0$
বা, $a^2(1+\omega^2+\omega^2)+b^2.0+c^2(1+\omega+\omega)+2ab(1+\omega+\omega)+2bc(1+\omega^2+\omega^2)+2\,ca.0=0$
বা, $a^2(-\omega+\omega^2)+c^2(-\omega^2+\omega)+2ab(-\omega^2+\omega)+2bc(-\omega+\omega^2)=0$
বা, $(-\omega+\omega^2)(a^2-c^2-2ab+2bc)=0$
বা, $a^2-c^2-2ab+2bc=0 \qquad [\because -\omega+\omega^2\neq 0]$
বা, $(a+c)(a-c)-2b(a-c)=0$
বা, $(a-c)(a+c-2b)=0$
বা, $a=c$অথবা, $b=\frac{1}{2}(c+a)$

উদাহরণ8:প্রমাণ করুন যে, $|z-3|=5$ সমীকরণটি আরগঁ চিত্রে একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

সমাধান:ধরুন$z=x+iy$সুতরাং $|z-3|=5$

বা,$|x+iy-3|=5$ বা,$|(x-3)+iy|=5$
বা,$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=5$ বা, $(x-3)^2+y^2=5^2$
বা, $(x-3)^2+(y-0)^2=5^2$

যা(3, 0) কেন্দ্র এবং 5ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ।



উদাহরণ 9:$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots\ldots+a_nx^n$হলে প্রমাণ করুন যে,
$(a_0-a_2+a_4-\ldots)^2+(a_1-a_3+a_5-\ldots\ldots)^2=a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n$

সমাধান: দেওয়া আছে,$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots\ldots+a_nx^n$---------- (1)
এখন, $x=i$বসিয়ে পাই, $(1+i)^n=(a_0-a_2+a_4-\ldots\ldots)+i(a_1-a_3+a_5-\ldots\ldots)$ ---------- (2)
আবার $x=-i$বসিয়ে পাই, $(1-i)^n=(a_0-a_2+a_4-\ldots.)-i(a_1-a_3+a_5-\ldots\ldots)$ ---------- (3)
(2) এবং (3) গুণ করে পাই, $(1-i^2)^n=(a_0-a_2+a_4-\ldots\ldots\ldots)^2-i^2(a_1-a_3+a_5-\ldots\ldots)^2$
বা, $2^n=(a_0-a_2+a_4-\ldots\ldots)^2+(a_1-a_3+a_5-\ldots\ldots)^2$---------- (4)
আবার (1) নং সমীকরণে$x=1$ বসিয়ে পাই $2^n=a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n$---------- (5)
এখন (4) এবং (5) থেকেপাই $(a_0-a_2+a_4-\ldots.)^2+(a_1-a_3+a_5-\ldots.)^2=a_0+a_1+a_2+\ldots.+a_n$.

উদাহরণ10:$-8-6i$ এর বর্গমূল করুন।

সমাধান: মনে করুন, $\sqrt{-8-6i}=a+ib$বা,$-8-6i=(a+ib)^2$
বা, $-8-6i=a^2-b^2+2iab$
বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই
$a^2-b^2=-8$ ---------- (1)
$2ab=-6$ ----------(2)
এখন $(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=(-8)^2+(2ab)^2=64+(-6)^2=64+36=100$বা,$a^2+b^2=10$
$\therefore a^2+b^2=10$ আবার,

(1)নং হতে $\underline{a^2-b^2=-8}$ $a^2+b^2=10$
$(+)\ 2a^2=2$ (1) নং হতে $\underline{a^2-b^2=-8}$
$\therefore a^2=1$ $(-)\ 2b^2=18$
$\therefore a=\pm 1$ $b^2=9$
$\therefore b=\pm 3$

যেহেতু $ab=-3$ যা ঋণাত্মক।সুতরাং a এবং b পরস্পর বিপরীত চিহ্ন বিবেচ্য হবে।
$\therefore$ নির্ণেয় $-8-6i$ এর বর্গমূল হবে $\pm(1-3i)$

উদাহরণ 11:একক-এর একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে প্রমাণ করুন যে, $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10}) = 9$

সমাধান: আমরা জানি, একক-এর একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\omega^3 = 1$ এবং $1+\omega+\omega^2 = 0$

এখন, $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10}) = (1-\omega^2)(1-\omega^3.\omega)(1-\omega^6.\omega^2)(1-\omega^9.\omega)$

$= (1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega) = (1-\omega^2)^2(1-\omega)^2 = (1-2\omega^2+\omega^4)(1-2\omega+\omega^2)$

$= (1-2\omega^2+\omega)(1-2\omega+\omega^2) = (1+\omega+\omega^2-3\omega^2)(1+\omega+\omega^2-3\omega)$

$= (0-3\omega^2)(0-3\omega) = 9\omega^3 = 9$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 12: যদি $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\sqrt[3]{a-ib} = x-iy$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy$

বা, $a+ib = (x+iy)^3$ বা, $a+ib = x^3+3x^2.iy+3x(iy)^2+(iy)^3$

বা, $a+ib = x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3 = (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x^3-3xy^2 = a$ এবং $3x^2y-y^3 = b$

এখন $a-ib = x^3-3xy^2-i(3x^2y-y^3) = x^3-3ix^2y-3xy^2+iy^3$

$= x^3-3ix^2y+3x(iy)^2-i^3y^3 = (x-iy)^3$

$\therefore \sqrt[3]{a-ib} = x-iy$ (প্রমাণিত)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৯

1. $a+ib$ আকারে প্রকাশ করুন:

   (i) $(-1+\sqrt{-3})(-1-\sqrt{-2})$ (ii) $(1+i)^2+(1-i)^2$ (iii) $\dfrac{a+ib+1}{a-ib-1}$ (iv) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$

2. প্রমাণ করুন:

   (i) $\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1+i)^2-(1-i)^2} = 0$ (ii) $\dfrac{(1-i)^2-(1+i)^2}{(1-i)^3+(1+i)^3} = i$ (iii) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2 = -2$

   (iv) $(2+3i)^4+(2-3i)^4 = -238$ (v) $z_1=3+4i$ এবং $z_2=2+3i$ হলে $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

3. আরগঁ চিত্রে জটিল সংখ্যাগুলোকে স্থাপন করুন এবং আর্গুমেন্ট চিহ্নিত করুন:

   (i) $5+2i$ (ii) $-3+4i$ (iii) $15-8i$ (iv) $\sqrt{3}+i$ (v) $-1-i$ (vi) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (vii) $\dfrac{8+i}{12-5i}$

4. মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করুন:

   (i) $1+i$, (ii) $\sqrt{3}-i$, (iii) $-1-i$, (iv) $\dfrac{1}{1+i\sqrt{3}}$

5. পোলার আকারে প্রকাশ করুন:

   (i) $1+i\sqrt{3}$, (ii) $2-\sqrt{3}i$ (iii) $1+i$ (iv) $-2+2i$

6. বর্গমূল নির্ণয় করুন:(i) $3+4i$ (ii) $1+i$ (iii) $x+i\sqrt{1-x^2}$ (iv) $-8-6\sqrt{-1}$,

   (v) $-7+24i$ (vi) $2x+i(x^2-1)$ (vii) $2+i\sqrt{a^2-4}$ (viii) $-5+12i$ (ix) $1+i\sqrt{x^4-1}$

7. মান নির্ণয় করুন: (i) $\sqrt[3]{-1}$ (ii) $\sqrt[3]{i}$ (iii) $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ (iv) $\sqrt[3]{-i}$ (v) $\sqrt[6]{-64}$

   (vi) $\sqrt[4]{-16}$ (vii) $\sqrt[4]{-81}$ (ix) $\sqrt[4]{1}$

8. যদি $a = \dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ এবং $b = \dfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$ হয় তবে দেখান যে,

   (i) $a^3+a^{-3} = 2$ (ii) $a^4+a^2b^2+b^4 = 0$ (iii) $a^4+b^4 = -1$ (iv) $a^2+ab+b^2 = 0$

(v) $\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{-1}{3}$ (vi) $(1-a)(1-b)=3$ (vii) $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1=0$ (viii) $a^6+b^{-6}=2$

9. ω এককের একটি জটিল ঘনমূল হলে প্রমাণ করুন যে

(i) $(a+\omega b)(a+\omega^2 b)=a^2-ab+b^2$ (ii) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$

(iii) $(1-\omega+\omega^2)^2+(1+\omega-\omega^2)^2=-4$ (iv) $(k+k\omega-\omega^2)^3-(k+k\omega^2-\omega)^3=0$

(v) $(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2=6xy$ (vi) $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})=9$

(vii) $(1+\omega)\,1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=1$ (viii) $(a\omega+b\omega^2)(a\omega+b\omega)=a^2-ab+b^2$

(ix) $(1+\omega-\omega^2)(-1+\omega+\omega^2)(1-\omega+\omega^2)=-8$

(x) $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=a^3+b^3+c^3-3abc$

(xi) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)$ ..... $2n$ উৎপাদক পর্যন্ত $=2^{2n}$

(xii) $\sqrt{-1-\sqrt{-1-\sqrt{-1-}}}$ ..... $=\omega$বা ω^2 (xiii) $\sqrt{[-2+2\sqrt{\{-2+\sqrt{(-2+}}}$ ..... $=1\pm i$

10. $x=a+b,\ y=a\omega+b\omega^2$এবং$z=a\omega^2+b\omega$ হলে দেখান যে,

(i) $x+y+z=0$ (ii) $x^2+y^2+z^2=6ab$ (ii) $xyz=a^3+b^3$ (vi) $x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3)$

11. উৎপাদকে বিশেষণ করুন:(i) a^2-ab+b^2 (ii) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

(iii) x^3-1 (iv) x^4+1

12. দুইটি বর্গের অন্তর রূপে প্রকাশ করুন:(i) $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ (ii) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)$

13.দুইটি বর্গের সমষ্টি রূপে প্রকাশ করুন:(i) $(1+x^2)(1+y^2)$ (ii) $(x^2+y^2)(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

14. a, b বাস্তব সংখ্যা এবং $a^2+b^2=1$হলে দেখান যে x এর একটি বাস্তব মান

(i) $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ (ii) $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ সমীকরণদ্বয়কে সিদ্ধ করবে।

15. (i) $x=\frac{a+ib}{a-ib}$ হলে দেখান যে, $(a^2+b^2)x^2+a^2+b^2=2(a^2-b^2)x$

(ii) $(a-ib)(c-id)=x-iy$ হলে দেখান যে, $(a+ib)(c+id)=x+iy$এবং$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=x^2+y^2$

(iii) $\frac{x+iy}{a+ib}=\frac{m}{n}$ হলে দেখান যে, $(a^2+b^2)m^2+2(ax+by)mn+(x^2+y^2)n^2=0$

(iv) $x=\frac{2b}{b^2+1}$ $(b>1)$ হলে দেখান যে, $\frac{\sqrt{1+x}-i\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}}=\frac{2b-(b^2-1)i}{b^2+1}$

(v) যদি$z=x+iy$, $(1+p)z=q+ir$ এবং $\frac{p+iq}{1+r}=\frac{1+iz}{1-iz}$ হলে দেখান যে,$p^2+q^2+r^2=1$

16.(i) $x=2+i$হলে দেখান যে,$x^4-4x^3+6x^2-4x+5=0$ ।$x=2-i$ হলে রাশিটির মান কত?

(ii) $x=3+2\sqrt{-1}$হলে দেখান যে,$x^4-4x^3+4x^2+4x^2+8x+39=0$

(iii) $x=2+3i$এবং$y=2-3i$ হলে $\frac{x^2+xy+y}{x^2-xy+y^2}$এর মান নির্ণয় করুন।

17. (i) $z_1=2+i4$ এবং$z_3=3-i$ হলে দেখান যে, $|2z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+4|z_2|^2+2$

(ii)$z=xiy$এবং$|2z+1|=|z-2i|$ হলে দেখান যে, $3(x^2+y^2)+4(x+y)=3$

(iii) প্রমাণ কর যে, (ক)$\left|\frac{x+iy}{x-iy}\right|=1$ (খ)$|z|=|\bar{z}|$ (গ)$|z-2|=|2z-1|$হলে দেখান যে,$x^2+y^2=1$

18. $z_1=a+ib$, এবং$z_2=c+id$ হলে দেখান যে,

(ক)$z_1+z_2=z_1+z_2$, (খ) $|z_1z_2|=|z_1|.|z_2|$

(গ)$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

19. (i) $(a+ib)+(c+id)$ একটি বাস্তব রাশি হলে দেখান যে, $b+d=0$

(ii) $x=1+i$এবং$y=1-i$হলে দেখান যে,$x^2+xy+y^2=2$

(iii) $z=x+iy$এবং$|z-1|+|z+1|=4$ হলে দেখান যে, $3x^2+4y^2=12$

(iv) $z = x + iy$হলে $|z-3| = 5$ এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং এটি কি নির্দেশ করে?

(v) $z = x+iy$হলে $|z+8| + |z-8| = 20$ এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং এটি কি নির্দেশ করে?

20. x এবং yএর বাস্তব মান নির্ণয় করুন: (i) $(x + iy)(2 - 3i) = 4 + i$

(ii) $(x^4 + 2xi) - (3x^2 + yi) = (3 - 5i) + (1 + i2y)$ (iii) $\frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2+3i)y + i}{3-i} = i$

21. $z_1 = 3i, z_2 = -1 - i$হলে দেখান যে, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$

22. $\sqrt[3]{x+iy} = a + ib$হলে দেখান যে, $\sqrt[3]{x-iy} = a - ib$

23. (i) x, yএর কোন বাস্তব মানের জন্য $-3 + ix^2y$ এবং $x^2 + y + 4i$ পরস্পর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হবে?

(ii) $5 + 3i$এর সাথে কত গুণ করলে গুণফল $3 - 4i$ হবে?

(iii) $x + iy = 3(2 + \cos\theta + i\sin\theta)^{-1}$হলে দেখান যে, $(x-1)(x-3) + y^2 = 0$

24. $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$হলেদেখান যে, $(a_0 - a_2 + a_4 - ..)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - ....)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$

25. $(1 + x + x^2)^n = p_0 + p_1x + p_2x^2 + ... + p_{2n}x^{2n}$হলে দেখান যে,

(i) $p_0 + p_3 + p_6 + ... = 3^{n-1}$ (ii) $p_1 + p_4 + p_7 + ... = 3^{n-1}$

26. দেখান যে, $\left\{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right\}^n + \left\{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}^n = 2$ বা -1 যখন nএর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য বা n অপর যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

পাঠ ২.১০ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- লেখচিত্রের সাহায্যে জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে পারবেন।

মূলপাঠ

আরগঁ চিত্রে দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফল, যোগফলের মডুলাস এবং তার আর্গুমেন্ট নির্ণয়

সমস্যা নং - ২.১	তারিখ:

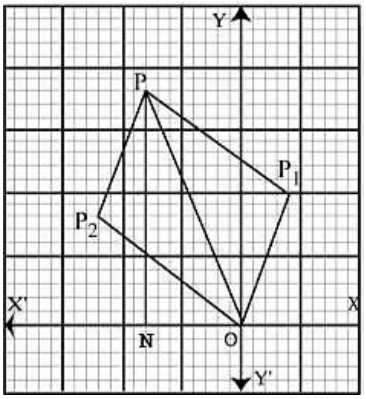
সমস্যা: আরগঁ চিত্রে $2 + 5i$ও $-6 + 4i$ জটিল সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল ও যোগফলের মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব: $z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$ জটিল সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল, $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

ধরুন আরগঁ চিত্রে z_1এবং z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু যথাক্রমে P_1, P_2হলে $P_1(x_1, y_1)$ এবং $P_2(x_2, y_2)$। সুতরাং এদের যোগফলের প্রতিরূপী বিন্দু $P(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$। তাহলে OP_1এবংOP_2 কে সন্নিহিত বাহু ধরে OP_1PP_2সামান্তরিক অঙ্কন করলে OP কর্ণের P বিন্দুই হবে $z_1 + z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু।

যোগফলের মডুলাস OP এর দৈর্ঘ্য $= |z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ এবং আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, চাঁদা, কম্পাস,শার্পনার ওক্যালকুলেটর ইত্যাদি।



কার্যপদ্ধতি:1.ছক কাগজে$X'OX$এবং এবং YOY' পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করুন, যা যথাক্রমে Xএবং Yঅক্ষ। কিন্তু আরগঁ চিত্রে এ দুইটি অক্ষকে যথাক্রমে বাস্তব অক্ষ এবং কাল্পনিক অক্ষ বলা হয়। ছক কাগজের দুই বর্গের দৈর্ঘ্য = 1 একক এবং x-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ, y-অক্ষকে কাল্পনিক অক্ষ এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরুন।

2.$z_1 = 2 + 5i$ এবং $z_2 = -6 + 4i$জটিল সংখ্যা দুইটিকে উপরিউক্ত অক্ষ ও মূলবিন্দু সাপেক্ষে যথাক্রমে P_1 (2,5) এবংP_2(– 6, 4) বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত করুন এবং লেখচিত্রে চিহ্নিত করুন।

3.এখন OP_1এবং OP_2 যোগ করুন। তাহলে মনে করুন$|z_1| = OP_1 = r_1$ এবং$|z_2| = OP_2 = r_2$

4.OP_1রেখাংশের P_1বিন্দুতে এবং OP_2এর রেখাংশের P_2বিন্দুতে যথাক্রমে OP_2এবং OP_1 এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করুন, যা পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে OP_1PP_2সামান্তরিকটি উৎপন্ন হলো। এ সামান্তরিকে চতুর্থ শীর্ষ বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক হবে $z_1 + z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু।

5. এখন ছক কাগজ হতে P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যা, (– 4, 9)।

6.OP রেখাংশের দৈর্ঘ্য $|z_1 + z_2|$অর্থাৎ জটিল সংখ্যাটির পরমমান নির্দেশ করে। এখন P বিন্দুহতে OX এর উপরPN লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে ON হবেP বিন্দুর ভুজ= –4একক এবংPN হবেP বিন্দুর কোটি = 9 একক

7.**নতি নির্ণয়:**ধরুনOP রেখাংশ X অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে, চাঁদার সাহায্যে এই কোণের মান নির্ণয়করুন।

ফল সংকলন:

$z_1 + z_2 = 2 + 5i + (-6 + 4i) = -4 + 9i$, $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{9}{4}\right) = 180° - 66.04 = 113.86°$

P_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P বিন্দুর স্থানাঙ্ক	OP_1	OP_2	OP	প্রকৃত মাপে OP এর দৈর্ঘ্য
(2, 5)	(– 6,4)	(–4, 9)	$\sqrt{2^2 + 5^2} = 5.39$	$\sqrt{6^2 + 4^2} = 7.21$	$\sqrt{(-4)^2 + 9^2} = 9.85$	9.85 একক

নতি নির্ণয়: চিত্র হতে z_1ওz_2 এর যোগফলের প্রতিরূপ বিন্দু P এর নতি $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{9}{-4}\right) = 113.86°$

আবার চাঁদার সাহায্যে পরিমাপে $\angle XOP = 113.5$

মন্তব্য:$OP_1 + OP_2 = 5.39 + 7.21 = 12.6$ এবং $OP = 9.85 \therefore OP_1 + OP_2 > OP$

সুতরাং $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ সূত্রের সত্যতা পরীক্ষিত।

আরগঁ চিত্রে দুইটি জটিল সংখ্যার বিয়োগফল চিহ্নিত করণ এবং এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়

সমস্যা নং - ২.২	**তারিখ:**

সমস্যা: আরগঁ চিত্রে $2 + 5i$ও $-6 + 4i$জটিল সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফল ও বিয়োগফলের মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব:$z_1 = x_1 + iy_1$ এবং $z_2 = x_2 + iy_2$সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফল,

$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$

ধরুন আরগঁ চিত্রে z_1এবং z_2এর প্রতিরূপী বিন্দু যথাক্রমে P_1 ও P_2, তাহলে $z_1 - z_2$ এর প্রতিরূপী বিন্দু ধরুনP। বিয়োগফলের মডুলাস $= |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$; বিয়োগফলের আর্গুমেন্ট. $\theta = \tan^{-1}\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

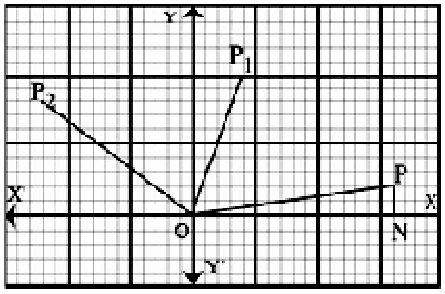
প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, চাঁদা, শার্পনার,ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:1.ছক কাগজে$X'OX$এবং এবং YOY' পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করুন, যা যথাক্রমে Xএবং Yঅক্ষ। কিন্তু আরগঁ চিত্রে এ দুইটি অক্ষকে যথাক্রমে বাস্তব অক্ষ এবং কাল্পনিক অক্ষ বলা হয়।ছক কাগজের 2 বর্গের দৈর্ঘ্য = এক একক এবং xঅক্ষকে বাস্তব অক্ষ, yঅক্ষকে কাল্পনিক অক্ষ এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরুন।

2.$z_1 = 2 + 5i$এবং $-6 + 4i$ জটিল সংখ্যা দুইটিকে উপরিউক্ত অক্ষ ও মূলবিন্দুর সাপেক্ষে যথাক্রমে $P_1(2,5)$এবং$P_2(-6, 4)$ বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত করুন।

3.OP_1এবং OP_2 যোগ করুন। তাহলে মনে করুন, $|z_1| = OP_1 = r_1$ এবং$|z_2| = OP_2 = r_2$ (মনে করুন।)

4.OP_1রেখাংশের P_1বিন্দুতে P_2Oএর সমান ও সমান্তরাল P_1P রেখাংশ অঙ্কন করুন এবংOP যোগ করুন। তাহলেP বিন্দুটি$z_1 - z_2$জটিল সংখ্যা নির্দেশ করে, অর্থাৎ$|z_1 - z_2| = OP = r$(ধরুন) ।P বিন্দু হতেx-অক্ষের উপরPN লম্ব আঁকুন এবংON ওPN এর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করুন। সুতরাং ON, P বিন্দুর ভুজ এবং PN কোটি নির্দেশ করে।



5. এখন ছক হতে P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন যা, (8, 1)$ON = 8$, $PN = 1$

ফল সংকলন:$z_1 - z_2 = (2+5i) - (-6 + 4i) = 8 + i$

চিত্রে $|z_1 - z_2| = OP = \sqrt{8^2 + 1^2} = 8.06$

P_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P বিন্দুর স্থানাঙ্ক	OP_1	OP_2	OP	প্রকৃত মাপে OP	PN	ON
(2, 5)	(– 6, 4)	(8, 1)	5.39	7.21	8.06	8.06	8	1

নতি নির্ণয়: নতি $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = 7.13°$

মন্তব্য:$OP_1 - OP_2 = 5.39 - 7.21 = -1.82$, $OP = 8.06$. $\therefore OP > OP_1 - OP_2$

সুতরাং $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ সূত্রের সত্যতা পরীক্ষিত।

আরগঁ চিত্রে দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফল এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়

সমস্যা নং - ২.৩	**তারিখ:**

সমস্যা: আরগঁ চিত্রে $2 + 5i$এবং $-6 + 4i$জটিল সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল ও গুণফলের মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: তত্ত্ব:$z_1 = x_1 + iy_1$ এবং$z_2 = x_2 + iy_2$ সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল

$$z_1.z_2 = (x_1 + iy_2)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

ধরুন আরগঁ চিত্রেz_1এবং z_2 এর প্রতিরূপীবিন্দু যথাক্রমে P_1ও P_2। তাহলেz_1z_2 এর প্রতিরূপী বিন্দু ধরুনP।

z_1z_2এর মডুলাস $= |z_1z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$এবং z_1z_2 এর আর্গুমেন্ট$\theta = \tan^{-1}\frac{(x_1y_2 + x_2y_1)}{x_1x_2 - y_1y_2}$

আবার $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ এবং $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, চাঁদা, শার্পনার,ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি: 1.ছক কাগজে$X'OX$এবং এবং YOY' পরস্পর লম্বভাবে ছেদকারী দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করুন, যা যথাক্রমে Xএবং Yঅক্ষ। কিন্তু আরগঁ চিত্রে এ দুইটি অক্ষকে যথাক্রমে বাস্তব অক্ষ এবং কাল্পনিক অক্ষ বলা হয়। ছক কাগজের দুই বর্গ =1 একক স্কেল এবং x-অক্ষকে বাস্তব অক্ষ,y-অক্ষকে কাল্পনিক অক্ষ এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরুন।

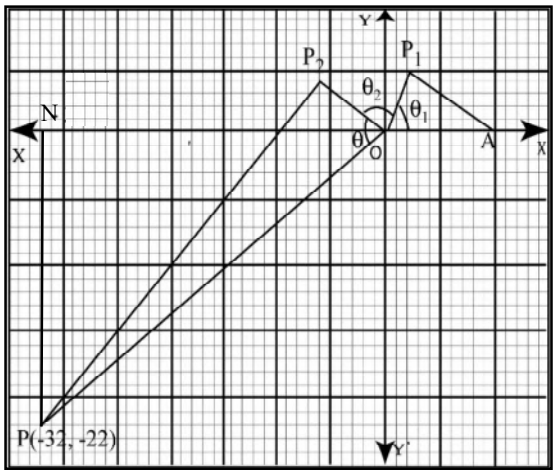
2.$z_1 = 2 + 5i$এবং $-6 + 4i$জটিল সংখ্যা দুইটিকে উপরিউক্ত অক্ষ ও মূলবিন্দুর সাপেক্ষে যথাক্রমে $P_1(2,5)$ এবং$P_2(-6, 4)$ বিন্দুদ্বয় দ্বারা সূচিত করুন।এর আর্গুমেন্ট যথাক্রমে $\angle XOP_1 = \theta_1$ এবং $\angle XOP_2 = \theta_2$ মনে করুন।

3.O, P_1এবং O, P_2 যোগ করুন। মনে করুন$OP_1 = |z_1| = r_1$ এবং$OP_2 = |z_2| = r_2$

4.OXবরাবর যে কোন OAদৈর্ঘ্যকে একক দৈর্ঘ্য ধরুন এবং P_1A যোগ করুন।

5.OP_2এর যে পার্শ্বে OP_1 আছে তার বিপরীত পার্শ্বে $\angle P_2OP = \angle P_1OA$অঙ্কন করুন। এর ফলে ΔOPP_2উৎপন্ন হল। মনে করুন$OP = r$.

7.P বিন্দু হতেx-অক্ষের উপরPN লম্ব অঙ্কন করুন এবংON ওPN এর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করুন।তাহলেz_1z_2এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট যথাক্রমে OP এবং$\angle XOP$ দ্বারা নির্দেশিত হবে।



প্রমাণঃ ΔP_1OA এবং ΔPOP_2 ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ, কারণ $\angle P_2OP = \angle P_1OA$ এবং $\angle OP_2P = \angle P_1AO$

$\therefore \frac{OP_1}{OA} = \frac{OP}{OP_2}$ বা, $OP = OP_1.OP_2$, কারণ $OA = 1$.

আবার $\angle AOP = \angle AOP_2 + \angle P_2OP = \theta_2 + \theta_1$.

ফল সংকলনঃ চিত্রে $ON = 22$ একক এবং $PN = 32$ একক।

P_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক	P বিন্দুর স্থানাঙ্ক	$OP_1 = r_1$	$OP_2 = r_2$	$OP = r$	$\angle XOP_1 = \theta_1$	$\angle XOP_2 = \theta_2$	$\theta_1 + \theta_2 = \theta$	প্রকৃত পরিমাপে $\theta = \angle XOP$
(2, 5)	(– 6, 4)	(–32, –22)	5.39	7.21	38.83 একক	68.2°	146.30°	214.5°	214.5°

শুদ্ধি পরীক্ষাঃ $z_1z_2 = (2 + 5i)(-6 + 4i) = -32 - 22i$

$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{5}{2} = 68.2°$, $\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{6}\right) = 146.30$, এবং $\theta = 214.50°$; সুতরাং $\theta = \theta_1 + \theta_2$ পরীক্ষিত।

লেখচিত্রে $OA = 1$ একক দৈর্ঘ্য = 10

$r_1 = 5.39$ একক $= \frac{5.39}{10} = 0.539 = 0.54$ একক দৈর্ঘ্য। $r_2 = 7.21$ একক $= \frac{7.2}{10} = 0.729 = 0.72$ একক দৈর্ঘ্য।

$r = 38.83$ একক $= \frac{38.83}{10} = 3.883$ একক দৈর্ঘ্য।

আবার $r_1r_2 = 0.539 \times 0.729 = 3.883$; সুতরাং $r_1r_2 = r$ পরীক্ষিত।

z_1z_2 এর প্রতিরূপ বিন্দু P এর নতি $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-22}{-32}\right) = 180° + 34.5 = 214.50°$

চাঁদার সাহায্যে $\angle XOP = 214.5°$.

সমস্যা নং - ২.৪	**তারিখঃ**

সমস্যাঃ আরগঁ চিত্রে $z_1 = 3 + 5i$ এবং $z_2 = 1 + i$ জটিল সংখ্যা দুইটি চিহ্নিত কর এবং এদের ভাগফলের মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে হবে।

সমাধানঃ তত্ত্বঃ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ এবং $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ দুইটি জটিল সংখ্যা হলে

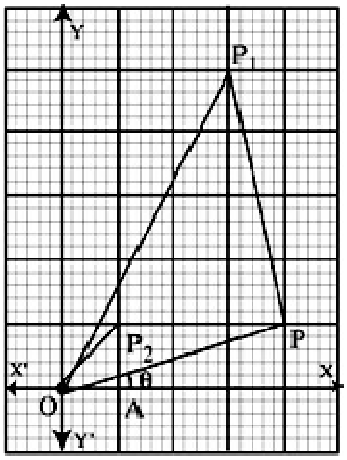
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_1)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}.\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}.\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$

$\therefore \text{mod}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{r_1}{r_2}$ এবং $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$ অথবা $\text{mod}\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ এবং$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

প্রয়োজনীয় উপকরণ: ছক কাগজ, সরু শিষযুক্ত পেন্সিল, ইরেজার, স্কেল, চাঁদা, শার্পনার,ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি: 1.ছক কাগজেX অক্ষ ও Y অক্ষ-নির্বাচন করুন যা যথাক্রমে বাস্তব ও কাল্পনিক অক্ষ। অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু O (মূলবিন্দু) নির্ধারণ করুন।



2. স্কেল: ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ধরুন।

3.$z_1 = 2 + 5i$এর প্রতিরূপী বিন্দু P_1 (2,5), $z_2 = 3 + 2i$ এর প্রতিরূপী বিন্দুP_2 (3,2) ছক কাগজে চিহ্নিত করুন।

4.X অক্ষ বরাবর $OA = 1$ একক ধরুন।

5.P_1বিন্দুতে $\angle OP_2A$ এর সমান করে $\angle OPP_1$অঙ্কন করুন। OP রেখা P_1P কে P বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে ΔOPP_1এবংΔOAP_2 সদৃশকোণী। তাহলে $\frac{z_1}{z_2}$ এর প্রতিরূপী বিন্দু Pলেখচিত্র থেকে দেখা যায় P (4,–1)

ধরুন$\angle XOP_1 = \theta_1$, $\angle XOP_2 = \theta_2$ এবং $\angle XOP = \theta$

6.যেহেতু ΔOPP_1 এবংΔOAP_2সদৃশকোণী

$\therefore \frac{OP}{OP_1} = \frac{OA}{OP_2} = \frac{1}{OP_2} \because OA = 1 \qquad \therefore OP = \frac{OP_1}{OP_2} = \frac{r_1}{r_2}$

$\therefore \frac{z_1}{z_2}$ এর মডুলাস $= OP = \frac{r_1}{r_2} = r$ (ধরুন)

ফল সংকলন:

P_1	P_2	P	r_1	r_2	r	θ_1	θ_2	θ
(3,5)	(1,1)	(4,1)	$\sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$	$\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$	$\sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$	$\tan^{-1}\frac{5}{3}$ $= 59.03°$	$\tan^{-1}\frac{1}{1}$ $= 45°$	$\tan^{-1}\frac{1}{4}$ $= 14.03°$

সুতরাং নির্ণেয় মডুলাস $= \sqrt{17}$ একক এবং আর্গুমেন্ট= 14.03°

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+5i}{1+i} = \frac{(3+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3+5i-3i+5}{1+1} = 4 + i = (4, 1)$ যা লেখচিত্র হতে প্রাপ্ত মানের সমান,

$r = OP = \text{mod}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 \times 17}}{\sqrt{2}} = \sqrt{17}$

z_1এর আর্গুমেন্ট, $\theta_1 = \tan^{-1}\frac{5}{3} = 54.05°$এবং z_2এর আর্গুমেন্ট, $\theta_2 = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45°$

$\frac{z_1}{z_2}$এর আর্গুমেন্ট, $\theta = \angle XOP = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14.03°$ যা, $\theta_1 - \theta_2$ এর সমান।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1 - 7):

1. $|z+1|=2|z-1|$ দ্বারা প্রকাশিত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

   (ক) $\left(0,\frac{5}{3}\right)$ (খ) $\left(\frac{5}{3},0\right)$ (গ) $\left(0,-\frac{5}{3}\right)$ (ঘ) $\left(-\frac{5}{3},0\right)$

2. $|z-3|=2|z+3|$ সমীকরণ কী নির্দেশ করে?

   (ক) বৃত্ত (খ) অধিবৃত্ত (গ) পরাবৃত্ত (ঘ) উপবৃত্ত

3. $-1-i$ এর আর্গুমেন্ট কত?

   (ক) $\frac{\pi}{4}$ (খ) $\frac{2\pi}{3}$ (গ) $\frac{5\pi}{4}$ (ঘ) $\frac{5\pi}{3}$

4. $-8-6i$ এর বর্গমূল কত?

   (ক) $\pm(-1+3i)$ (খ) $\pm(1+3i)$ (গ) $\pm(1-3i)$ (ঘ) $\pm(-1-3i)$

5. $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ এর মান কত?

   (ক) -2 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) $\sqrt{2}$

6. $-i$ এর পোলার আকার কোনটি?

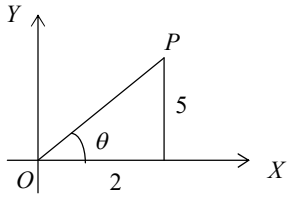
   (ক) $\cos\pi-i\sin\pi$ (খ) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ (গ) $\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$ (ঘ) $\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}$

7. $2-3i$ এর মডুলাস কত?

   (ক) 13 (খ) $\sqrt{13}$ (গ) $\sqrt{5}$ (ঘ) $\sqrt{11}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

8. পাশের চিত্রটি লক্ষ্য করুন এবং চিত্র সাপেক্ষে নিচের প্রশ্নের উত্তর দিন।



   (ক) P বিন্দুতে জটিল সংখ্যাটি কত এবং এর পরমমান নির্ণয় করুন।

   (খ) জটিল সংখ্যাটির পোলার আকার লিখুন।

   (গ) P প্রতিসম বিন্দুতে অবস্থিত জটিল সংখ্যাটির বর্গমূল নির্ণয় করুন।

9. $a+ib$ ও $x+iy$ জটিল সংখ্যা দুইটি পরস্পরের সাথে $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$ আকারে সম্পর্কিত।

   (ক) জটিল সংখ্যা $a+ib$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করুন।

   (খ) উদ্দীপক হতে প্রমাণ করুন $\sqrt[3]{a-ib}=x-iy$ ।

   (গ) দেখান যে, $4\left(x^2-y^2\right)=\frac{a}{x}-\frac{b}{y}$ ।

10. $2a=1+i$ এবং $\left(1+x+x^2\right)^n=P_0+P_1x+P_2x^2+.....+P_nx^{2n}$

    (ক) $2i$ এর বর্গমূল নির্ণয় করুন।

    (খ) প্রমাণ করুন যে, $a^6+a^4+a^2+1=0$

    (গ) উদ্দীপকের দ্বিতীয় অংশ হতে প্রমাণ করুন যে, $P_0+P_1+P_3+.....=3^{n-1}$

11. $x^3-1=0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ এবং $z=-7-24\sqrt{-1}$ একটি জটিল সংখ্যা।

    (ক) প্রমাণ করুন যে, $\sqrt{-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

(খ) $\frac{1}{z}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করুন।

(গ) প্রমাণ করুন যে, ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয়ের সমষ্টি শূন্য।

12. এককের একটি ঘনমূল ω এবং $z=1+\cos 2x+i\sin 2x$ একটি জটিল সংখ্যা।

(ক) প্রমাণ করুন যে, $\omega^3=1$

(খ) z^{-1} এর বাস্তব অংশের মান নির্ণয় করুন।

(গ) $x+y+z=0$ হলে প্রমাণ করুন যে, $\left(x+y\omega+z\omega^2\right)^3+\left(x+y\omega^2+z\omega\right)^3=27xyz$

13.

(ক) জটিল সংখ্যার সমষ্টি কি নির্দেশ করে? একটি জটিল সংখ্যার অনুবন্ধি যুগল আরগঁ চিত্রে কার সাপেক্ষে প্রতিসাম্য হয় এবং কেন?

(খ) দেখান যে, একটি জটিল সংখ্যার পরমমান তার অনুবন্ধি যুগলের পরমমানের সমান। সমান পরমমানের কারণ ব্যাখ্যা করুন।

(গ) z ও $\bar{z}$ এর সমষ্টি ও গুণফল প্রত্যেকে বাস্তব সংখ্যা- উক্তিটি প্রতিষ্ঠা করুন। z-এর মুখ্যনতি θ হলে $\bar{z}$-এর মুখ্যনতি $-\theta$ হবে, এ উক্তিটি কী সর্বদা সত্য? আপনার উত্তরের সাপেক্ষে যুক্তি দিন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.১

1. (i) $\frac{2}{25}+i\frac{23}{25}$ (ii) $\frac{4}{7}+i\frac{\sqrt{6}}{14}$ (iii) $0+i$

2. (i) $-\frac{8}{9}$ (ii) $\frac{2x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.২

1.(i) $\sqrt{29}$, $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ (ii) $\sqrt{113}$, $\tan^{-1}(-\frac{8}{7})$ (iii) 2, $\frac{\pi}{3}$ 2. $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$

3. (i) $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$ (ii) $\sqrt{34}(\cos\theta+i\sin\theta)$ (iii) $2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৫

(i) $5+12i$, $1-2i$ (ii) $16+9i$, $2-i$ (iii) $9+16i$, $3+6i$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৯

1. (i) $(\sqrt{6}+1)+i(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ (ii) $0+i\,0$ (iii) $\frac{a^2-b^2-1}{a^2+b^2-2a+1}+\mathrm{i}\frac{2ab}{a^2+b^2-2a+1}$ (iv) $0-i$

3. (iv) $2,\frac{\pi}{6}$ (v) $-\frac{3\pi}{4}$

4. (i) $\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$; (ii) $2, \frac{-\pi}{6}$; (iii) $\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}$; (iv) $\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{3}$

5. (i) $2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)$ (ii) $2\frac{\cos\pi}{6}+\frac{\sin\pi}{6}$ (iii)$\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$
(iv) $2\sqrt{2}(\cos3\pi/4 + i\sin3\pi/4)$

6. (i) $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3 + i)$ (ii) $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{x^2} + \sqrt{2-1}\}^{1/2}$ (iii) $\frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + i\sqrt{1-x})^2$
(iv) $\pm(1-3\sqrt{-1})$ (v) $\pm(3 + 4i)$ (vi) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(x + 1) + (x - 1i\}$;
(vii) $\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ (viii) $\pm(2 + 3i)$ (ix) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{x+1} + i\sqrt{x-1}\}$;

7. (i) $1/2(1+\sqrt{-3}), 1/2(1-\sqrt{-3})$ (ii) $-i, 1/2(i\pm\sqrt{3}), 1/2(-1\pm\sqrt{3})$, (iii) $\sqrt{2}$
(iv) $\pm 2i, \pm\sqrt{3}\pm i$ (v) $\pm 2i, \pm\sqrt{3}\pm i$ (vi) $\pm\sqrt{6}(1\pm i)$; (vii) $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ 4/5; (ix) $i, -i, 1, -1$;

11. (i) $(a - b\omega)(a - b\omega^2)$ (ii) $(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$; (iii) $(x - 1)(x - \omega)(x - \omega^2)$;
13. (i) $(1 - xy - yz - zx)^2 + (x + y + z - xyz)^2$;
(ii) $\{(ac - bd)x - (ad + bc)y\}^2 + \{(ac - bd)y + (ad + bc)x\}^2$;
20 (i)$x = 5/13, y = 14/13$(ii) $x = 2, y = 3$ বা,$x = -2, y = 1/3$; (iii) $x = 3; y = -1$;
23 (i) $x = 1, y = -4$ বা,$x = -1, y = -4$; (ii) $3/34 - i29/34$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1.খ 2. ক 3. গ 4. গ 5. ঘ 6.ঘ 7. খ

8. (ক) $\sqrt{29}$ (খ) $\sqrt{29}\left[\cos\left(\tan^{-1}\frac{5}{2}\right)+i\sin\left(\tan^{-1}\frac{5}{2}\right)\right]$ (গ) $\pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{29}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{29}-2}{2}}\right)$

9. (ক) $\sqrt{a^2+b^2}$, $\tan^{-1}\frac{a}{b}$ 10. (ক) $\pm(1+i)^2$ 11. (খ) $\pm\frac{3-4i}{25}$ 12. (খ) $\frac{1}{2}$