বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা
(Real Numbers and Inequalities)

ভূমিকা

মানবজাতি সৃষ্টির পর থেকে মানুষের চারপাশের যা কিছু দৃশ্যমান তার হিসাব রাখা এবং গণনার জন্যই মূলত সংখ্যার সৃষ্টি। সংখ্যার ধারণা অতি প্রাচীন। সংখ্যার উৎপত্তি কখন হয়েছিল তা সঠিকভাবে নিরূপন করা যায়নি। খ্রিষ্টপূর্ব ৭৫০-৬৯০ এর মধ্যে ভারতীয় এবং খ্রিষ্টপূর্ব ৫০০ এর মধ্যে গ্রিসের গণিতবিদগণ অমূলদ সংখ্যার ধারণা দেন। ১৮৭১ খ্রিষ্টাব্দে জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (George Cantor, ১৮৪৫-১৯১৮) বাস্তব সংখ্যা নির্ণয়ে কৃতিত্ব অর্জন করেন। তিনি প্রমাণ করেন যে, বাস্তব সংখ্যা স্বাভাবিক সংখ্যা হতে অনেক বেশি। তিনি দেখান যে, মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা নিয়ে বাস্তব সংখ্যা গঠিত।

ইংরেজ গণিতবিদ জন ওয়ালিস (John wallies)এবং ফ্রেন্স গণিতবিদ পিয়ারে বগার (Pierre Bouguer)যথাক্রমে ১৬৭০ এবং ১৭৩৪ খ্রিষ্টাব্দে সর্বপ্রথম অসমতার চিহ্নকে ($\leq$ এবং $\geq$) ব্যবহার করেন। এই ইউনিটে আমরা বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা সম্পর্কিত বিষয়াবলি নিয়ে আলোচনা করব।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- বাস্তব সংখ্যা ও বাস্তবসংখ্যার বিভিন্ন উপসেট বর্ণনা করতে পারবেন,
- বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য ভিত্তিক বর্ণনা করতে পারবেন,
- পরমমান কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- পরমমানের ধর্মাবলী বর্ণনা, প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- এক চলক সম্বলিত অসমতা কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- এক চলক সম্বলিত অসমতা সমাধান করতে পারবেন,
- পরমমান সম্বলিত অসমতা সমাধান করতে পারবেন,
- অসমতাকে সংখ্যারেখায় প্রকাশ করতে পারবেন,
- অসমতাকে সংখ্যারেখার সাহায্যে সমাধান করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২০ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১.১ বাস্তব সংখ্যা ও বাস্তব সংখ্যার উপসেট

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বাস্তব সংখ্যা কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা বর্ণনা করতে পারবেন,
- মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সেট ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- মৌলিক সংখ্যার সেট বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বাস্তব সংখ্যা, মূলদ সংখ্যা, অমূলদ সংখ্যা, মৌলিক সংখ্যা

মূলপাঠ

বাস্তব সংখ্যা সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণার জন্য প্রথমেই পূর্ণ সংখ্যা, স্বাভাবিক সংখ্যা, মৌলিক সংখ্যা, অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা, ঋণাত্মক সংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা সম্পর্কে ধারণা থাকা আবশ্যক। এজন্য প্রথমেই এগুলো সম্পর্কে নিম্নে আলোচনা করা হলো।

পূর্ণসংখ্যা (Integer): সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও শূন্য মিলে যে নতুন সংখ্যা গোষ্ঠী পাওয়া যায় তাকে পুর্ণসংখ্যার সেট (set of Integers) বলা হয়। পূর্ণ সংখ্যার সেটকেZ দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎZ ={....., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural number): সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে Nদ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ N = {1, 2, 3, ...}

মৌলিক সংখ্যা (Prime Number): 1 ব্যতিত যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা কেবলমাত্র ঐ সংখ্যা ও 1 দ্বারা বিভাজ্য সে সকল সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যা বলা হয়। সকল মৌলিকসংখ্যার সেটকে Pদ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ P={2, 3, 5, 7, 11, ...}

অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা(Non-negative Integer):শূন্য (0) সহ সকল স্বাভাবিক সংখ্যাকে অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। সকল অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা সেটকে $Z\geq 0$দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $Z\geq 0$ = {0, 1, 2, 3, ...}

ঋণাত্মক সংখ্যা (Negative number): শূন্য (0)অপেক্ষা ছোট সংখ্যাগুলোকে ঋণাত্মক সংখ্যা বলা হয়।যেমন: $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -0.214, -0.652,$ .....ইত্যাদি।

ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা (NegativeInteger): শূন্য (0)অপেক্ষা ছোট পূর্ণ সংখ্যাকে ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট $Z< 0$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $Z< 0$ = {....., –3, –2, –1}

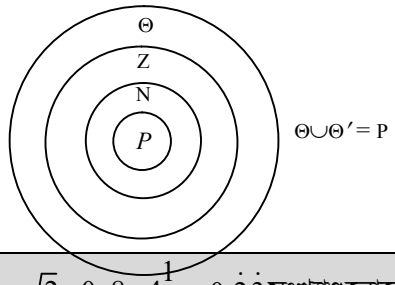
মূলদ সংখ্যা (Rational number): যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফলরূপে প্রকাশ করা যায় তাকে মূলদ সংখ্যা বলে। অর্থাৎ যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে $p,q\in Z$এবং $q\neq 0$ ।মূলদ সংখ্যার সেট Θদ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $\Theta=\left\{\frac{p}{q}: p, q\in Z$ও $(p, q) = 1$ এবং $q\neq 0\right\}$। প্রত্যেক পূর্ণসংখ্যাই মূলদ সংখ্যা কিন্তু সব মূলদ সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা নয়। অতএব $Z\subset\Theta$.

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number)

যে সকল সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফলরূপে প্রকাশ করা যায় না, তাকে অমূলদ সংখ্যা বলে। অর্থাৎ যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে $p, q \in Z$ও সহমৌলিক এবং $q \neq 0$, অমূলদ সংখ্যার সেট Θ'বা Θ^cদ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $\Theta' = \{x : x \in P$এবং $x \notin \Theta\}$ ।সুতরাং বাস্তব সংখ্যার সেটে মূলদ সংখ্যা বাদে অবশিষ্ট সংখ্যাগুলো অমূলদ সংখ্যা। যেমন: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \pi, e,$ .....ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা।উল্লেখ্য যে, মূলদ সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে তা সসীম দশমিক বা পৌণ:পুনিক হবে। যেমন-$\frac{3}{4} = 0.75, \frac{1}{3} = 0.33$ -------- $= 0.\dot{3}$

অমূলদ সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে তা সসীম দশমিক বা পৌন:পুণিক কোনো আকারেই প্রকাশ করা যায় না। যেমন-$\sqrt{2} = 1.4142135$.....

বাস্তব সংখ্যা (Real number): ঋণাত্মক সংখ্যা, শূন্য এবং ধনাত্মক সংখ্যা গোষ্ঠীকে একত্রে বাস্তব সংখ্যা বলে। যেমন;5, 1, 0, –8, $-\frac{3}{7}$, ...ইত্যাদি বাস্তব সংখ্যা। প্রত্যেক মূলদ বা অমূলদ সংখ্যাই এক একটি বাস্তব সংখ্যা, সকল মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেটকে বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of real numbers) বলা হয়। বাস্তব সংখ্যার সেটকেP দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ$P = \Theta \cup \Theta'$; Θএবং Θ'সেটগুলো প্রত্যেকেই বাস্তব সংখ্যা সেটের উপসেট। বাস্তব সংখ্যাP এর সাথে উপসেট সমূহের সম্পর্ক নিম্নরূপ: $P \subset N \subset Z \subset \Theta \subset P$এবং $P = \Theta \cup \Theta'$এই পারস্পরিক সম্পর্কগুলো নিচের ভেনচিত্রে দেখানো হলো:



শিক্ষার্থীর কাজ	$-7, -\frac{2}{3}, \sqrt{2}, 0, 8, 4\frac{1}{5}, 0.\dot{2}\dot{3}$ সংখ্যাগুলোকে $N \subset Z \subset \Theta \subset P$আকারে সাজান।

সারসংক্ষেপ

- সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও শূন্য মিলে যে নতুন সংখ্যা গোষ্ঠী পাওয়া যায় তাকে পূর্ণসংখ্যার সেট বলা হয়।
- সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়।
- 1 ব্যতীত যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা কেবলমাত্র ঐ সংখ্যা ও 1 দ্বারা বিভাজ্য সে সকল সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যা বলা হয়।
- যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার ভাগফলরূপে প্রকাশ করা যায় তাকে মূলদ সংখ্যা বলে। যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার ভাগফলরূপে প্রকাশ করা যায় না তাকে অমূলদ সংখ্যা বলে।
- সকল মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেটকে বাস্তব সংখ্যার সেট বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-4):

1. বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে সর্বপ্রথম ধারণা প্রদান করেন কে?
   (ক) জন ওয়ালিস (খ) জর্জ ক্যান্টর (গ) জন ভেন (ঘ) রামানুজন
2. নিচের কোনটি সত্য?
   (ক) $-5 \in N$ (খ) $\frac{2}{3} \in Z$ (গ) $\pi \in P$ (ঘ) $-\sqrt{2} \in \Theta$
3. নিচের কোনটি সত্য?
   (ক) $P \subset N \subset Z \subset \Theta$ (খ) $N \subset \Pi \subset Z \subset \Theta$ (গ) $\Theta \subset Z \subset N \subset \Pi$ (ঘ) $Z \subset \Pi \subset N \subset \Theta$
4. নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) সকল মূলদ সংখ্যা পূর্ণ সংখ্যা (খ) সকল স্বাভাবিক সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা
   (গ) সকল পূর্ণ সংখ্যা স্বাভাবিক সংখ্যা (ঘ) সকল বাস্তব সংখ্যা মূলদ সংখ্যা
5. বাস্তব সংখ্যা Pএর মৌলিক উপসেটগুলো উদাহরণ সহ ব্যাখ্যা করুন।

পাঠ ১.২ বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ, ব্যবধি ও সংখ্যারেখা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

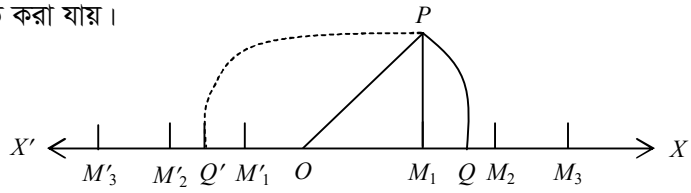
- বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বাস্তব সংখ্যার ব্যবধি কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- সংখ্যারেখা কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বাস্তব সংখ্যা, ব্যবধি, সংখ্যারেখা

মূলপাঠ

বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ (Geometrical interpretation of real number)

বাস্তব সংখ্যা বলতে মূলদ ও অমূলদ দুই ধরনের সংখ্যাকে বোঝায়। এখানে মূলদ ও অমূলদ এ দুই প্রকার সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ দেখানো হলো। বাস্তব সংখ্যার একটি উল্লেখযোগ্য ধর্ম হচ্ছে, বাস্তব সংখ্যাসমূহ একটি সরলরেখার বিভিন্ন বিন্দু দিয়ে চিহ্নিত করা যায়।



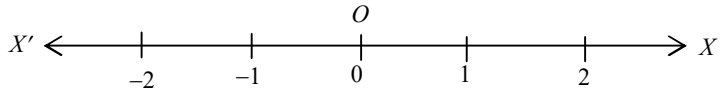
ধরুন, অসীম সরলরেখা $X'OX$এর উপর একটি স্থির মূলবিন্দু O। মূল বিন্দুর ডানদিকে যেকোনো দূরত্বকে একক ধরে সমান সমান ঐ দূরত্ব নিয়ে 1, 2, 3, ...সূচিত করা হয়। আবার মূল বিন্দুর বামদিকে সমান সমান ঐ দূরত্ব নিয়ে –1, –2, –3, ... সূচিত করা হয়। এখন মনে করুন $\frac{p}{q}$ একটি স্থির মূলদ সংখ্যা। এ সরলরেখার প্রতি একক দৈর্ঘ্যকে q সংখ্যক সমান অংশে ভাগ করলে $\frac{p}{q}$মূলদ সংখ্যাটিকে ঐ সরলরেখার উপর একটি বিন্দু Pদ্বারা সূচিত করা যেতে পারে যদি

$OP=p\times\frac{1}{q}$ হয় তাহলে এভাবে একটি সরলরেখার উপর সকল মূলদ একটি জ্যামিতিক প্রতিরূপ কল্পনা করা সম্ভব। কিন্তু দৈর্ঘ্য মাপের এমন কিছু সংখ্যা আছে যারা মূলদ সংখ্যা নয়। মূলদ সংখ্যা 1, 2, 3, ... এবং –1, –2, –3, ... জ্যামিতিক প্রতিরূপ যথাক্রমে M_1, M_2, M_3, ------ এবং M'_1, M'_2, M'_3,------ বিন্দুগুলো চিহ্নিত করুন।$PM_1=1$ একক ধরে$X'OX$রেখা M_1বিন্দুতে PM_1লম্ব অঙ্কন করা হলে OPM_1একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত হয়। যার অতিভুজ $OP=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; এখন Oবিন্দুকে কেন্দ্র করে $OP=\sqrt{2}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে M_1এর ডান পার্শ্বে এবং M'_1এর বাম পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অংকন করুন যা যথাক্রমে QওQ'বিন্দুতে সূচিত হয়। এ বিন্দু দুইটি যথাক্রমে $\sqrt{2}$ এবং $-\sqrt{2}$ এর প্রতিরূপ বিন্দু।

তাহলে বলা যায়, QওQ'বিন্দু দুইটি $\sqrt{2}$ এবং $-\sqrt{2}$ এর জ্যামিতিক প্রকাশ। কিন্তু আমরা জানি, $\sqrt{2}$ কোনো মূলদ সংখ্যা নয়। সুতরাং QওQ'বিন্দু দুইটি কোনো মূলদ সংখ্যার প্রতিরূপ বিন্দু নয়। এরা দুইটি অমূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ বলে বিন্দু দুইটিকে অমূলদ বিন্দু বলা হয়। একইভাবে $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1}$ বা $\sqrt{3}$ বা অন্যান্য অমূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ দেখানো যায়।

সুতরাং $X'OX$রেখাটির উপর অসংখ্যক মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার প্রতিরূপ বিন্দু অঙ্কন করা সম্ভব এবং এ সকল বিন্দু বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ।

সংখ্যারেখা (Numberline): সকল বাস্তব সংখ্যাই অসীম দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত। এ নির্দিষ্ট রেখাটিকে সংখ্যারেখা বা বাস্তব রেখা(Realline) বলা হয়।

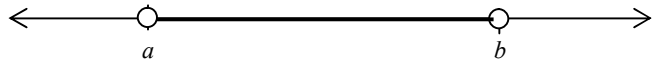


বাস্তব সংখ্যার ব্যবধি (Interval): বাস্তব সংখ্যার সেটের বিশেষ ধরনের উপসেটকে ব্যবধি বলা হয়। ব্যবধি প্রধানত দুই প্রকারের। যথা: (i) সসীম ব্যবধি (ii) অসীম ব্যবধি

সসীম ব্যবধি: $a<b$বাস্তব সংখ্যা হলে a ও b এর মধ্যবর্তী সকল সংখ্যার সেটকে সসীম ব্যবধি বলা হয়। প্রান্তবিন্দু a, bবিশিষ্ট চারটি সসীম ব্যবধি হতে পারে; যথা-

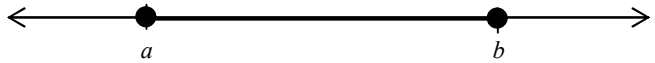
(i) $(a,b)=\{x\in P : a<x<b\}$, উন্মুক্ত ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:



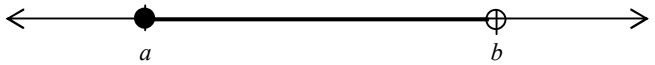
(ii) $[a, b]=\{x\in P : a\le x\le b\}$, বদ্ধ ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:



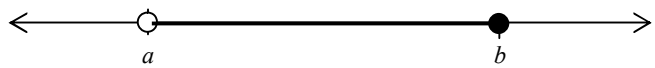
(iii) $[a, b)=\{x\in P : a\le x<b\}$, বদ্ধ-উন্মুক্ত ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:



(iv) $(a, b]=\{x\in P : a<x\le b\}$, উন্মুক্ত-বদ্ধ ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:

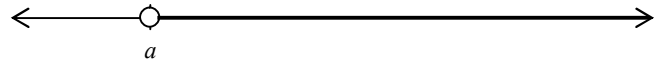


অসীম ব্যবধি

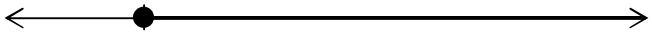
aযে কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে a এর চেয়ে বড়, কিংবা a এর চেয়ে ছোট, সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অসীম ব্যবধি বলা হয়। a সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত হতে পারে, আবার নাও হতে পারে। সুতরাং প্রান্তবিন্দু a বিশিষ্ট চারটি অসীম ব্যবধি হতে পারে। যথা:

(i) $(a, \infty)=\{x\in P : x>a\}$, ডানে অসীম উন্মুক্ত ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:

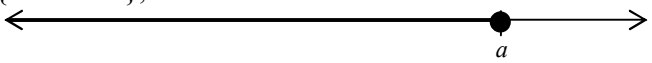


(ii) $[a, \infty) = \{x \in P : x \geq a\}$, ডানে অসীম বদ্ধ ব্যবধি
সংখ্যারেখায়:



(iii) $(-\infty, a) = \{x \in P : x < a\}$, বামে অসীম উন্মুক্ত ব্যবধি
সংখ্যারেখায়:

(iv)$(-\infty, a] = \{x \in P : x \leq a\}$, বামে অসীম বদ্ধ ব্যবধি
সংখ্যারেখায়:



শিক্ষার্থীর কাজ	(i) $x \in (-3, 5)$ হলে xএর মানের সেট নির্ণয় করুন। (ii) $x \in (2, 8)$ হলে xএর মানের সেট নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- সকল বাস্তব সংখ্যাই অসীম দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট সলরেখার উপর অবস্থিত। এ নির্দিষ্ট রেখাটিকে সংখ্যারেখা বলা হয়।
- বাস্তব সংখ্যার সেটের বিশেষ ধরনের উপসেটকে ব্যবধি বলা হয়। ব্যবধি দুই প্রকার। যথা (i) সসীম ব্যবধি (ii) অসীম ব্যবধি।
- $a<b$বাস্তব সংখ্যা হলে aএবংbএর মধ্যবর্তী সকল সংখ্যার সেটকে সসীম ব্যবধি বলা হয়।
- aযে কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে aএর চেয়ে বড়, কিংবা aএর চেয়ে ছোট, সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অসীম ব্যবধি বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-4):

1. সংখ্যারেখায় চিহ্নিত করা যায়-
   (i) ঋণাত্মক সংখ্যা
   (ii) মূলদ সংখ্যা
   (iii) অবাস্তব সংখ্যা
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) iও iii (গ) iiও iii (ঘ) i, ii ও iii
2. (a, b) ব্যবধি বলতে বোঝায়-
   (ক) $\{x \in P: a \leq x < b\}$ (খ) $\{x \in P: a < x < b\}$ (গ) $\{x \in P: a < x \leq b\}$ (ঘ) $\{x \in P: a \leq x \leq b\}$
3. $[a, b)$ ব্যবধি বলতে বোঝায়-
   (ক) $\{x \in P: a < x < b\}$ (খ) $\{x \in P: a < x \leq b\}$ (গ) $\{x \in P: a \leq x < b\}$ (ঘ) $\{x \in P: a \leq x \leq b\}$
4. ব্যবধি সম্পর্কিত উদাহরণ হলো-
   (i) $x \in Z$এবং $x \in [1, 3]$হলে xএর মানের সেট $\{1, 2, 3\}$
   (ii) $x \in Z$এবং $x \in [1, 3]$ হলে xএর মানের সেট $\{2, 3\}$
   (iii) $x \in Z$এবং $x \in [1, 3]$ হলে xএর মানের সেট $\{1, 2\}$
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

5. বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ ব্যাখ্যা করুন।
6. ব্যবধি বলতে কী বোঝায়? সসীম ও অসীম ব্যবধি ব্যাখ্যা করুন।
7. সংখ্যারেখায় $-5, 9, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{1}$ সংখ্যাগুলো দ্বারা নির্দেশিত বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করুন।
8. সংখ্যারেখায় দেখান,
   (i) $[-3, 5] \cup [2, 6]$ (ii) $(-2, 5) \cap [0, 6]$ (iii) $(-\infty, -1] \cup [-4, \infty)$

পাঠ ১.৩ বাস্তব সংখ্যার বীজগণিতীয় স্বীকার্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বাস্তব সংখ্যার বীজগণিতীয় স্বীকার্য কী বর্ণনা করতে পারবেন,
- আবদ্ধতা ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অভেদক উপাদানের অস্তিত্ব ও বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- সংযোগ বিধি, বন্টন বিধি ও বিনিময় বিধি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	স্বীকার্য, আবদ্ধতা ধর্ম, অভেদক উপাদানের অস্তিত্ব, বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব, সংযোগ বিধি, বন্টন বিধি, বিনিময় বিধি

মূলপাঠ

বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্যকে মূলত দুইভাগে ভাগ করা যায়। যথা (i) বীজগণিতীয় স্বীকার্য ((ii) বাস্তব সংখ্যার ক্রম স্বীকার্য।
(i) বাস্তব সংখ্যার বীজগণিতীয় স্বীকার্য: বাস্তব সংখ্যা Pএর বীজগণিতীয় ধর্ম বা স্বীকার্য মূলত যোগ (+) এবং গুণন (.) এর উপর নির্ভরশীল। নিম্নে যোগ (Addition) ও গুণন (Multiplication) স্বীকার্য বর্ণনা করা হলো:

যোগ স্বীকার্য (Addition axioms):

(a) আবদ্ধতা ধর্ম: সকল $a, b \in P$এর জন্য $a + b \in P$

(b) সংযোগ বিধি: সকল $a, b, c \in P$এর জন্য $(a + b) + c = a + (b + c)$

(c) অভেদক উপাদানের অস্তিত্ব: Pএ একটি এবং কেবল মাত্র একটি সংখ্যা শূন্য (0)আছে, যেখানে সকল $a \in P$এর জন্য $a + 0 = 0 + a$হয়। '0'কে যোগের ক্ষেত্রে P এর অভেদক বলা হয়।

(d) বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব: সকল $a \in P$এর জন্য একটি মাত্র $-a \in P$পাওয়া যাবে যার জন্য $a+(-a) = (-a)+a = 0$হবে। এখানে $-a$কেaএর যোগের বিপরীত (additive inverse) বলা হয়।

(e) বিনিময় বিধি (Commutative law): সকল $a, b \in P$এর জন্য $a+b = b+a$

(f) অনন্যতা (Uniqueness): যদি $a, b, c, d \in P$এবং $a = b, c = d$হয় তবে $a+c=b+d$

গুণন স্বীকার্য (Multiple axioms):

(a) আবদ্ধতা ধর্ম: সকল $a, b \in P$এর জন্য $a.b \in P$

(b) সংযোগবিধি: সকল $a, b, c \in$ Pএর জন্য $a(bc) = (ab)c$

(c) অভেদক উপাদানের অস্তিত্ব: P এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি সংখ্যা এক (1) আছে, যেখানে সকল $a \in$ Pএর জন্য $a.1 = 1.a = a$হয়। '1'কে গুণনের ক্ষেত্রে Pএর অভেদক বলা হয়।

(d) বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব: সকল $a \in$ Pএবং $a \neq 0$ এর জন্য একটি মাত্র $a^{-1} \in$ Pপাওয়া যাবে যার জন্য $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$ হয় এখানে a^{-1} কে aএর গুণনের বিপরীতক (multiplicative inverse) বলা হয়।

(e) বিনিময়বিধি: সকল $a, b \in$ Pএর জন্য $ab = ba$

(f) অনন্যতা (Uniqueness): যদি $a, b, c, d \in$ Pএবং $a=b, c=d$হয় তবে $ac = bd$

(g) বণ্টনবিধি: সকল $a,b, c \in$ Pএর জন্য (i) $a(b+c) = ab+ac$, (ii) $(b+c)a = ba+ca$

বাস্তব সংখ্যার গুণাবলির স্বীকার্য ভিত্তিক কয়েকটি প্রমাণ

(a) বাস্তব সংখ্যার সেট Pএ যোগের অভেদক অনন্য

প্রমাণ: মনে করুন, বাস্তব সংখ্যার সেট Pএ 0এ 0′দুইটি যোগের অভেদক আছে যেমন সকল $a \in$ P এর জন্য $a+ 0 = a$এবং $a+ 0' = a$। 0 অভেদক হলে$0' + 0 = 0'$ --------- (i)

আবার 0′অভেদক হলে $0' + 0 = 0'$ ---------- (ii)

এখন (i) ও (ii)হতে পাওয়া যায়$0' = 0$

অতএব বাস্তব সংখ্যার সেট P এ যোগের অভেদক অনন্য।

(b) বাস্তব সংখ্যার সেট Pএ গুণের অভেদক অনন্য

প্রমাণ: মনে করুন, বাস্তব সংখ্যার সেট Pএeএবং e'দুইটি গুণের অভেদক আছে, যেন সকল $a \in$ Pএর জন্য $ae = a$এবং $ae' = a$।

e অভেদক হলে$ee' = e'$---------- (i)

আবার, e'অভেদক হলে $ee' = e$---------- (ii)

সুতরাং (i)ও (ii) হতে পাওয়া যায়, $e' = e$

অতএব বাস্তব সংখ্যার সেট Pএ গুণনের অভেদক অনন্য।

(c) বাস্তব সংখ্যার সেট Pএ যোগের বিপরীতক উপাদান অনন্য।

প্রমাণ: মনে করুন, প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা aএর জন্য Pএ দুইটি বাস্তব সংখ্যা bও cবিদ্যমান যেন $a+b=b+a=0$ এবং$a+c=c+a = 0$ [যোগের বিপরীতক উপাদান]

তাহলে, $c=c+0$ [যোগের অভেদকের অস্তিত্ব বিধি]

$= c+(a+b)$

$= (c+a)+b$

$= 0+b$ [$\because c+a=0$]

$= b$

$\therefore c=b$

সুতরাং বাস্তব সংখ্যার সেট Pএ যোগের বিপরীতক উপাদান অনন্য।

(d) বাস্তব সংখ্যার সেট Pএ গুণনের বিপরীতক উপাদান অনন্য

প্রমাণ: মনে করুন, প্রত্যেক অশূন্য বাস্তব সংখ্যা aএর জন্য Pএ দুইটি বাস্তব সংখ্যা bও cবিদ্যমান যেন $ab=ba=1$ ও$ac=ca=1$

এক্ষেত্রে, $c=c.1$ [গুণের অভেদকের অস্তিত্ব বিধি]

$= c(ab)$[$\because ab=1$]$= (ca)b = 1.b$ [$\because ca=1$]$= b$

$\therefore c=b$

সুতরাং বাস্তব সংখ্যার সেট P-এ গুণনের বিপরীতক উপাদান অন্যন্য

(e) যোগের বর্জন বিধি:$a+c=b+c \Rightarrow a=b$

প্রমাণ: দেওয়া আছে,$a+c=b+c$

$\Rightarrow (a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)$ [$-c$যোগ করে পাই]

$\Rightarrow a+[c+(-c)]=b+[c+(-c)]$[সংযোগ বিধি]

$\Rightarrow a+0=b+0$ [$\because c+(-c)=0$]

$\Rightarrow a=b$[$\because 0$যোগাত্মক অভেদক]

(f) গুণের বর্জন বিধিঃ ac =bc এবং c≠0 ⇒ a =b

প্রমাণঃ দেওয়া আছে,$ac=bc; c\neq 0 \ \therefore c^{-1}\in P$

উভয়পক্ষকে c^{-1}দ্বারা গুণ করে পাই-

$(ac)c^{-1}=(bc)c^{-1}\Rightarrow a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$ [সংযোগ বিধি]

$\Rightarrow a.1 = b.1$ [$\because cc^{-1}=1$]

$\Rightarrow a=b$

(g) প্রমাণ করুন, a যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে –(–a) = a

প্রমাণঃ $(-a)+(-(-a)) = 0$

আবার, $(-a)+a = 0$

সুতরাং $(-a)+(-(-a))=(-a)+a$

অতএব, যোগের বর্জনবিধি অনুযায়ী $-(-a)=a$

(h) a.0=0 যেখানে a∈P

প্রমাণঃ$0=0+0$

অতএব, $a.0=a(0+0) = a.0 + a.0$ [বন্টনবিধি অনুযায়ী]

আবার, $a.0=a.0+0$

সুতরাং $a.0+a.0=a.0+0$

$\therefore a.0 = 0$ [যোগের বর্জনবিধি অনুযায়ী]

(i) ab=0⇒a=0 অথবা, b=0, যেখানে a, b∈Pঅর্থাৎ দুইটি বাস্তব সংখ্যার গুণফল শূন্য হলে অন্তত একটি সংখ্যা শূন্য হবে।

প্রমাণঃ ধরুন$ab=0$ এবং $a\neq 0$ তাহলে $a^{-1}\in P \therefore a^{-1}(ab)=a^{-1}.0$

বামপক্ষ= $a^{-1}(ab)= (a^{-1}a)(b)= 1.b = b$

ডানপক্ষ $=0$ [$\because a.0=0; a\in P$]

সুতরাং $b=0$

অনুরূপভাবে, $ab=0$ এবং $b\neq 0$ হলে প্রমাণ করা যায় যে, $a=0$

(j) (i) a(–b)=(–a)b=–(ab) (ii) (–a)(–b) = ab

প্রমাণঃ (i)$ab+a(-b) = a[b+(-b)] = a.0 = 0$ [বণ্টন বিধি অনুযায়ী]

অন্যদিকে, $ab + (-ab) = 0$

$\therefore ab+a(-b)=ab+(-(ab))$

$\Rightarrow a(-b) = -(ab)$ [যোগের বর্জনবিধি]

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $(-a)b =-(ab)$

সুতরাং $a(-b) = (-a)b=-(ab)$

(ii) $(-a)(-b) =ab$

প্রমাণঃ $(-a)(-b) = -(-a)b$[$\because a(-b)=(-a)b=-(ab)$]

$=-(-ab)=ab$ [$\because -(-a)=a$]

সুতরাং $(-a)(-b)=ab$

শিক্ষার্থীর কাজ	(i) $a, b, c\in P$হলে প্রমাণ করুন যে, $a-(b+c) = a-b-c$ (ii)$a\in P$এবং $a\neq 0$ হলে প্রমাণ করুন যে, $a^2>0$

সারসংক্ষেপ

- আবদ্ধতা ধর্ম: সকল $a, b \in P$, এর জন্য $a + b \in P$, $a.b \in P$
- সংযোগ বিধি: সকল $a, b, c \in P$এর জন্য $(a + b) + c = a + (b + c)$এবং $a(bc) = (ab)c$
- অভেদক উপাদানের অস্তিত্ব: P-এ একটি এবং কেবলমাত্র একটি সংখ্যা শূন্য (0)আছে, যেখানে সকল $a \in P$এর জন্য $a + 0 = 0 + a$হয়। আবার, Pএ একটি এবং কেবলমাত্র একটি সংখ্যা এক (1)আছে, যেখানে সকল $a \in P$এর জন্য $a.1 = 1.a = a$ হয়।
- বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব: সকল $a \in P$এর জন্য একটি মাত্র $-a \in P$পাওয়া যাবে যার জন্য $a + (-a) = (-a) + a = 0$হবে। আবার সকল $a \in P$এবং $a \neq 0$এর জন্য একটি মাত্র $a^{-1} \in P$পাওয়া যাবে যার জন্য $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$হয়।
- বিনিময় বিধি: সকল $a, b \in P$এর জন্য $a + b = b + a$, $ab = ba$.
- অনন্যতা: যদি $a, b, c, d \in P$এবং $a = b$, $c = d$হয় তবে $a + c = b + d$এবং $ac = bd$.
- বন্টনবিধি: সকল $a, b, c \in P$এর জন্য (i) $a(b + c) = ab + ac$(ii) $(b + c)a = ba + ca$.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৩

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-5):

1. সংযোজন যোগ্যতা প্রকাশ করে-
   (i) $(a+b)+c = a+(b+c)$
   (ii) $ab = ba$
   (iii) $a(bc)=(ab)c$
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) iও ii (খ) i ও ii (গ) ii ও iii (ঘ) i, iiও iii
2. সংখ্যার স্বীকার্য অনুযায়ী-
   (i) Pও Θ যোজন ও গুণন স্বীকার্য মেনে চলে
   (ii) Θও P এর গুণাত্মক বিপরীত বিদ্যমান
   (iii)Nও Z এর গুণাত্মক বিপরীত বিদ্যমান নেই
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও iii (খ) i ও ii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii
3. বিনিময় যোগ্যতা প্রকাশ করে-
   (i) $a+b=b+a$
   (ii) $a+c=b+d$
   (iii) $ab=ba$
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) iiও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, iiও iii
4. $c < 0$ এবং$a>b$হলে-
   (i) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
   (ii) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
   (iii)$ac>bc$
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) iiও iii (ঘ) i, ii ও iii
5. অনন্যতা যোগ্যতা প্রকাশ করে- $a=b$, $c=d$হয় তবে,

(i) $a+b=b+a$
(ii)$a+c=b+d$
(iii)$ac=bd$
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) iiও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

6. $a\in P$হলে দেখান যে, (i) $(-1)a=-a$এবং (ii) $-(a+b)=-a-b$
7. a, b, cবাস্তব সংখ্যা, $ac=bc$কিন্তু cশূন্য নয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $a=b$
8. a, b, cবাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে, (i) $a<b$হলে $a+c<b+c$(ii) $a>b$হলে, $a+c>b+c$

পাঠ ১.৪ বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য ভিত্তিক বর্ণনা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অসমতা কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- অসমতা সম্পর্কিত স্বীকার্য সমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অসমতা সম্পর্কিত মৌলিক স্বীকার্যের প্রমাণ করতে পারবেন,
- বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে সম্পূর্ণতা স্বীকার্য কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্ণতা স্বীকার্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্ণতা স্বীকার্য সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অসমতা, অসমতার স্বীকার্য, সম্পূর্ণতা স্বীকার্য

মূলপাঠ

অসমতা (Inequalities):অসমতা এক ধরনের গাণিতিক বাক্যের প্রকাশ যা সংখ্যা, পরিমাপ বা গাণিতিক বাক্যের ক্রমের সম্পর্ক (orderrelation) নির্দেশ করে। গাণিতিকভাবে অসমতাকে '<' '>' '≤' '≥'ইত্যাদি সম্পর্ক প্রতীকদ্বারা প্রকাশ করা হয়। অসমতার সমাধান নির্দিষ্ট কোন সংখ্যা বা মানের জন্য স্থির না থেকে সমাধানের ব্যাপ্তি নির্দেশ করে। অর্থাৎ নির্দিষ্ট সেটে বা অঞ্চলে বিদ্যমান সকল মানের জন্য অসমতা সিদ্ধ হয়।

বাস্তব সংখ্যার অসমতা (Inequalities of Real number):যদি aও bবাস্তব সংখ্যা হয় তাহলে aওbএর মধ্যে তিনটি সম্পর্ক বিদ্যমান। যথা : (i) $a>b$, (ii) $a=b$এবং (iii) $a<b$; এখানে$a>b$এবং $a<b$সম্পর্কদ্বয়কে অসমতা বলা হয়। $a>b$কে পড়তে হয় $a$is greater then$b$এখানে $a-b$ধনাত্মক। আবার $a<b$পড়তে হয় $a$is less then$b$এখানে $a-b$ ঋণাত্মক।
লক্ষণীয়:≤ও≥প্রতীকদ্বয় দুর্বল (Weak) অসমতার প্রতীক।

অসমতা সম্পর্কিত স্বীকার্য (Axioms of Inequalities):

(ক) যোগের ধর্ম (Properties of addition): $a, b, c\in$Pএর জন্য (i)যদি $a<b$হয় তবে $a+c<b+c$, (ii) যদি $a>b$হয় তবে$a+c>b+c$

(খ) বিয়োগের ধর্ম (Properties of subtraction): $a, b, c\in$Pএর জন্য (i) যদি $a<b$হয় তবে $a-c<b-c$, (ii) যদি $a>b$হয় তবে $a-c>b-c$

(গ) গুণের ধর্ম (Properties of multiplication): $a, b, c\in$Pএর জন্য (i)যদি $a<b$এবং $c>0$হয়, তবে $ac<bc$, (ii) যদি $a<b$এবং $c<0$হয় তবে $ac>bc$

(ঘ) ভাগের ধর্ম (Properties of Division): $a, b, c\in$Pএর এর জন্য (i)যদি $a<b$এবং $c>0$হয়, তবে $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$(ii) যদি $a<b$এবং $c<0$হয়, তবে$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

অসমতা সম্পর্কিত কয়েকটি মৌলিক স্বীকার্যের প্রমাণ:

1.যদি $a, b, c\in$Pহয়, $a<b$এবং $b<c\Rightarrow a<c$

প্রমাণ:$a, b\in$P পরস্পর অসমান হলে,

$a<b$বা $b>a\Rightarrow b-a>0$ ----- (i)

আবার, $b, c\in$Pএবং$b<c$বা, $c>b\Rightarrow c-b>0$ ---------- (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই-
$(b-a)+(c-b)>0+0$
$\Rightarrow c-a>0$
$\Rightarrow c-a+a>0+a$[উভয়পক্ষেaযোগ করে পাই]
$\Rightarrow c>a \therefore a<c$

2. যদি $a, b, c \in P$হয় তবে, $a<b \Rightarrow a+c<b+c$
প্রমাণ:$a, b \in P$এবং পরস্পর অসমান হলে, $a<b$বা, $b>a \Rightarrow b-a>0$
$\Rightarrow b-a+c>0+c$[উভয়পক্ষে cযোগ করে পাই]
$\Rightarrow b+c>a+c$[উভয়পক্ষে aযোগ করে পাই]
$\therefore a+c<b+c$
অনুরূপভাবে, $a, b, c \in P$হলে, প্রমাণ করা যায় যে, $a-c<b-c$, যখন $a<b$

3. যদি $a, b, c \in P$হয় তবে, $a<b \Rightarrow ac<bc$যখন $c>0$
প্রমাণ:$a, b \in P$এবং পরস্পর অসমান হলে,
$a<b$বা, $b>a \Rightarrow b-a>0$
$\Rightarrow (b-a).c>c.0$ যখন$c>0$
$\Rightarrow bc-ac>0$
$\Rightarrow bc-ac+ac>0+ac$ [উভয়পক্ষে acযোগ করে পাই]
$\Rightarrow bc>ac$
$\therefore ac<bc$
অনুরূপভাবে, $a, b, c \in P$এর জন্য প্রমাণ করা যায়, $ac>bc$, যখন $c<0$

4. যদি $a, b, c \in P$হয় $a+c<b+d$যেখানে $a<b$এবং $c<d$
প্রমাণ: মনে করুন,$a, b, c \in P$এবং $a<b$এবং$c<d$তাহলে, $a-b<b-b \Rightarrow a-b<0$----------(i)
এবং $c-d<d-d \Rightarrow c-d<0$---------- (ii)
(i) ও (ii) যোগ করে পাওয়া যায়,
$(a-b)+(c-d)<0+0$
$\Rightarrow (a+c)-(b+d)<0$
$\Rightarrow (a+c)-(b+d)+(b+d)<0+(b+d)$ [উভয় পক্ষে $(b+d)$ যোগ করে]
$\Rightarrow a+c<b+d$

5. যদি $a, b, c \in P$হয় $a<b$এবং $a>0, b>0$ হয় তবে$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
প্রমাণ: যেহেতু$a, b, \in P$এবং $a>0, b>0$ তাহলে$a<b$
$\Rightarrow \frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$[উভয়পক্ষকে $\frac{1}{ab}$দ্বারা গুণ করে]
$\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$
$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

শিক্ষার্থীর কাজ	(i) $a, b, c \in P$হলে প্রমাণ কর যে, $a-c<b-c$যখন $a<b$ (ii) $a, b, c \in P$এর জন্য প্রমাণ কর যে, $ac>bc$, যখন$c<0$

বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্ণতা স্বীকার্য (Completeness Axiom for Real Numbers)
প্রত্যেকটি ফাঁকা সেট নয় এমন উর্ধ্ব সীমিত বাস্তব সংখ্যার উপসেটের একটি অনন্য সুপ্রিমাম$x \in P$বিদ্যমান এবং প্রত্যেকটি

ফাঁকা সেট নয় এরূপ নিম্নসীমিত বাস্তব সংখ্যার উপসেটের একটি অনন্য ইনফিমাম $x \in P$বিদ্যমান। এই বৈশিষ্ট্যকে বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্ণতা ধর্ম বলা হয়। মূলদ সংখ্যার সেটে সম্পূর্ণতা ধর্ম খাটে না। বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্ণতা বর্ণনার জন্য বাস্তব সংখ্যার উর্ধ্ব সীমিত সেট ও নিম্নসীমিত সেট এবং এ সকল সেটের সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম সম্পর্কে নিম্নে আলোচনা করা হলো:

উর্ধ্বসীমিত সেট (Bounded above set):বাস্তব সংখ্যার কোনো সেট S কে উর্ধ্বসীমিতবলা হয় যদি এমন একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা mবিদ্যমান থাকে যেন $x \le m$সকল $x \in S$। অর্থাৎ যদিSএর কোনো উপাদান mএর চেয়ে বড় না হয়। এরূপ প্রত্যেক সংখ্যা mকে S এর উর্ধ্বসীমা (upper bound) বলা হয়। m যদি Sএর উর্ধ্বসীমা হয়, তবে m এর চেয়ে বড় প্রতিটি সংখ্যাও S এর উর্ধ্বসীমা হবে।

যেমন, $S = \{-1, 1, -2, \frac{1}{2}, -3, \frac{1}{3}, ...\}$ সেটটি উর্ধ্বসীমিত, কেবল এর প্রতিটি উপাদান ≤ 1 কিন্তু সেটটি নিম্নসীমিত নয়। এখানে 1 সেটটির একটি উর্ধ্বসীমা।

নিম্নসীমিত সেট (Bounded below set):বাস্তব সংখ্যার কোনো সেট Sকে নিম্নসীমিত (bounded below) সেট বলা হয় যদি এমন একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা nবিদ্যমান থাকে যেন $x \ge n$সকল $x \in S$এর জন্য খাটে। অর্থাৎ যদিS এর কোনো উপাদানই n এর চেয়ে ছোট না হয়। এরূপ প্রত্যেক সংখ্যা nকেS এর নিম্নসীমা (lower bound) বলা হয়। nযদি S এর নিম্নসীমা হয়, তবে n এর চেয়ে ছোট প্রতিটি সংখ্যাও S এর নিম্নসীমা হবে।

যেমন, $S = \{2, 1, 3, \frac{3}{2}, 4, 3, \frac{4}{3}, ...\}$সেটটি নিম্নসীমিত, কেননা এর প্রতিটি উপাদান≥ 1; কিন্তু সেটটি উর্ধ্বসীমিত নয়। এখানে 1 একটি নিম্নসীমা।

সীমিত সেট (Bounded set):বাস্তব সংখ্যার কোনো সেট Sকে সীমিত সেট (bounded set) বলা হয় যদি S উর্ধ্বসীমিত এবং নিম্নসীমিত হয়।

মনে করুন, বাস্তব সংখ্যার সেট Pএবং এর একটি উপসেট S। এখন যদি m এবং n দুইটি বাস্তব সংখ্যা বিদ্যমান যেন $n \le x \le m$, (xএর সকল মানের জন্য $x \in S$) তবে Sসেটটিকে সীমিত সেট বলা হয়। যেমন, $S=\{1, 4, 8, 10, 11, 16\}$ ।এখানে সেটটির নিম্নসীমা1 এবং উর্ধ্বসীমা 16, অর্থাৎ $1 \le x \le 16 \ \forall x \in S$।

সুপ্রিমাম (Supremum):উর্ধ্বসীমিত বাস্তব সংখ্যার কোনো সেট S এর একটি ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা থাকলে তাকে সেট Sএর সুপ্রিমান বা লঘিষ্ট উধ্বসীমা বলা হয় এবং একে sup$S$দ্বারা সূচিত করা হয়।

ইনফিমাম(Infimum):নিম্নসীমিত বাস্তব সংখ্যার কোনো সেট Sএর একটি বৃহত্তম নিম্নসীমা থাকলে তাকে সেট Sএর ইনফিমাম বা গরিষ্ট নিম্নসীমা বলা হয় এবং একে inf$S$দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেমন,$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ এর সুপ্রিমাম হলো 8 এবং ইনফিমাম হলো1, অর্থাৎ sup$S$=8 এবং inf$S$=1

উদাহরণ 1: $S=\{x: 3<x<7\}$ এর সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় করুন।

সমাধান: $S=\{x: 3<x<7\} = (3, 7)$

sup$S=7 \notin S$ এবং inf$S=3 \notin S$

উদাহরণ 2: $S=\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}\right\}$ এর সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় করুন।

সমাধান: $S=\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$

সুতরাং sup$S=1, 1 \in S$এবং inf$S= 0 \notin S$

(i)কোনো সেটের যদি সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন উপাদান বিদ্যমান থাকে তবে তা সেটের অন্তর্ভূক্ত হবে।

(ii)কোনো সেটের যদি Supremumবা Infimumবিদ্যমান থাকে তাহলে উহা সেটের অন্তর্ভূক্ত হতেও পারে আবার নাও হতে পারে।

(iii)যদি কোনো সেটের সর্বোচ্চ উপাদান ও Supremumবিদ্যমান থাকে তাহলে উহা সেটের অন্তর্ভূক্ত হবে। এক্ষেত্রে সেটের বৃহত্তম উপাদান= সেটটির সুপ্রিমাম।

(iv)যদি কোনো সেটের নিম্ন উপাদান ও Infimum বিদ্যমান থাকে তাহলে উহা সেটের অন্তর্ভুক্ত হবে। এক্ষেত্রে সেটের ক্ষুদ্রতম উপাদান= সেটটির ইনফিমাম।
(v)উর্ধ্ব সীমার চেয়ে বড় সকল সংখ্যাই ঐ সেটের এক একটি উর্ধ্বসীমা
(vi)নিম্নসীমার চেয়ে ছোট সকল সংখ্যাই ঐ সেটের এক একটি নিম্নসীমা।

শিক্ষার্থীর কাজ	নিম্নের সেটগুলো সুপ্রিমাম ও ইনফিসাম নির্ণয় করন: (i) $S=\left\{\frac{n}{1+n}: \ n\in N\right\}$ (ii) $S=\{x\in P: 3x^2-10x+3<0\}$

সারসংক্ষেপ

- যদি aও bবাস্তব সংখ্যা হয় তাহলে aও bএর মধ্যে তিনটি সম্পর্ক বিদ্যমান যথা: (a) $a>b$,(b) $a=b$,(c) $a<b$;এখানে $a>b$এবং $a<b$সম্পর্কদ্বয়কে অসমতা বলা হয়।
- $a, b, c\in P$এর জন্য (a)যদি $a<b$ হয় তবে $a+c<b+c$,(b)যদি $a>b$ হয় তবে $a+c>b+c$
- $a, b, c\in P$এর জন্য (a)যদি $a<b$ হয় তবে $a-c<b-c$, (b)যদি $a>b$ হয় তবে $a-c>b-c$
- $a, b, c\in P$এর জন্য (a)যদি $a<b$ এবং$c>0$ হয় তবে $ac<bc$, (b)যদি $a<b$ এবং$c<0$ হয় তবে $ac>bc$
- $a, b, c\in P$এর জন্য (a)যদি $a<b$ এবং$c>0$ হয় তবে $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$, (b)যদি $a<b$ এবং$c<0$ হয় তবে $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
- প্রত্যেকটি ফাঁকা সেট নয় এমন উর্ধ্বসীমিত বাস্তব সংখ্যার উপসেটের একটি অনন্য সুপ্রিমাম $x\in P$বিদ্যমান এবং প্রত্যেকটি ফাঁকা সেট নয় এরূপ নিম্নসীমিত বাস্তব সংখ্যার উপসেটের একটি অনন্য ইনফিমাম $x\in P$বিদ্যমান। এই বৈশিষ্ট্যকে বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্ণতা ধর্ম বলা হয়।
- উর্ধ্বসীমিত বাস্তব সংখ্যার কোনো সেট S এর একটি ক্ষুত্রতম উর্ধ্বসীমা থাকলে তাকে সেট S এর সুপ্রিমাম বা লঘিষ্ট ঊর্ধ্বসীমা বলা হয় এবং একে $\sup S$দ্বারা সূচিত করা হয়।
- নিম্নসীমিত বাস্তব সংখ্যার কোনো সেট Sএর একটি বৃহত্তম নিম্নসীমা থাকলে তাকে সেট S এর ইনফিমাম বা গরিষ্ঠ নিম্নসীমা বলা হয় এবং একে$\inf S$দ্বারা সূচিত করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৪

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1 - 5):

1. $S=\{x\in P: x\le 4\}$ সেটটির সুপ্রিমাম কোনটি?
   (ক) -4 (খ) 0 (গ) 1 (ঘ) 4
2. $S=[1, 5)$এর উর্ধ্বসীমার সেট কোনটি?
   (ক) $[5, \infty)$ (খ) $(5, \infty)$ (গ) $(-\infty, 1]$ (ঘ) $(-\infty, 1)$
3. $S=\{x: x=1-\frac{1}{n}, n\in N\}$
   (i) সেটটির সুপ্রিমাম বিদ্যমান ii) সেটটি স্বাভাবিক সংখ্যা iii) সেটটি সীমিত
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
4. $S=\{x: x\in P, 2<x\le 5\}$ সেটটির ইনফিমাম কত?
   (ক) 5 (খ) 2 (গ) 4 (ঘ) 3
5. $S=\{x: x=2^n, n\in N\}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) সুপ্রিমাম2 (খ) ইনফিমাম1 (গ) সুপ্রিমাম নাই (ঘ)ঊর্ধ্বসীমা 1

6. $S=\{(-1)^n : x\in \mathrm{N}\}$ এর সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় করুন।
7. অসমতা সম্পর্কিত স্বীকার্য সমূহ ব্যাখ্যা করুন।
8. বাস্তব সংখ্যার সেটে সম্পূর্ণতা ধর্ম ব্যাখ্যা করুন।

পাঠ ১.৫ পরমমান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

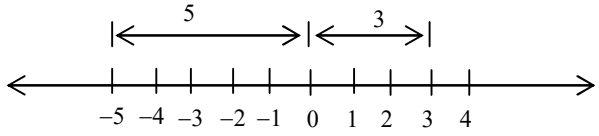
এই পাঠ শেষে আপনি-

- পরমমান কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- পরমমানের ধর্ম বর্ণনা করতে পারবেন,
- পরমমানের ধর্মসমূহ প্রমাণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	পরমমান, মূলবিন্দু

মূলপাঠ

পরমমান (Absolute Value): কোনো বাস্তব সংখার পরমমান বলতে তার সংখ্যা মানকে বোঝায়। অর্থাৎ সংখ্যারেখার মূল বিন্দু এবং সংখ্যা নির্দেশক বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে সংখ্যাটির পরমমান বলা হয়। বাস্তব সংখ্যা aএর পরমমানকে $|a|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় একে Modulus 'a' বা মড 'a' বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ সংখ্যারেখায় মূল বিন্দু থেকে –5 এর দূরত্ব 5 একক এবং 3 এর দূরত্ব 3 একক অর্থাৎ –5 এর পরমান 5 এবং 3 এর পরমান 3।



যে কোন বাস্তব সংখ্যা aএর পরমমান। $|a|$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়-

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{যখন } a>0 \\ 0, & \text{যখন } a=0 \\ -a, & \text{যখন } a<0 \end{cases}$$

অর্থাৎ শূন্য ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যার পরমমান ধনাত্মক এবং শূন্য(0) এর পরমমান শূন্য।

সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য (i) $|-x| = |x|$, (ii) $|x|^2 = x^2$, (iii) $|x| = \sqrt{x^2}$

পরমমানের ধর্মসমূহ (Properties of absolute value) এবং এদের প্রমাণঃ

1.সকল $a\in$Pএর জন্য $-|a|\le a\le|a|$

প্রমাণঃ (a) যখন $a\geq 0$, $-a\leq 0$ এবং$|a|=a$
$\Rightarrow -|a|=-a$
$\therefore -|a| = -a\leq 0$ ---------- (i)
আবার, $0\leq a$এবং $a=|a|$ ---------- (ii)
(i) ও (ii)হতে পাই-
$-|a| \leq a = |a|$ -------- (iii)
(b) যখন $a<0$ হলে, $-a>0$ এবং $|a| = -a$
$\Rightarrow -|a| = a$
$\therefore -|a| = a<0< -a=|a|$
অর্থাৎ $-|a| = a<|a|$ ---------- (iv)
(iii) ও (iv)হতে পাই-
$-|a| \leq a\leq |a|$

2.সকল $a\in$Pএর জন্য $|a|\geq a$
প্রমাণঃ (a) যখন $a\geq 0$; $|a|=a$ ---------- (i)
(b) যখন $a<0$; $|a| = -a$অর্থাৎ $|a|>a$ ---------- (ii)
(i) ও (ii)হতে পাই,$|a|\geq a$

3. সকল $a\in$Pএর জন্য $|a|^2=a^2= |-a|^2$এবং $|ab|=|a||b|$
প্রমাণঃ$a\geq 0$হলে, $|a|=a\Rightarrow |a|^2=a^2$---------- (i)
আবার$a<0$;হলে $|a| = -a\Rightarrow |a|^2=a^2$ ---------- (ii)
(i) ও (ii) হতে পাই-
$|a|^2=a^2$
অনুরূপভাবে, $|-a|^2=(-a)^2 = a^2$
সুতরাং $|a|^2 = a^2= |-a|^2$------- (iii)
আবার, $|ab|^2 = (ab)^2 = a^2b^2= |a|^2|b|^2= (|a||b|)^2$
অর্থাৎ $|ab|^2= (|a||b|)^2$
যেহেত $|ab|$ এবং $|a||b|$ উভয়েই ধনাত্মক, সুতরাং $|ab| = |a||b|$

4. সকল $a, b\in$Pএর জন্য (i) $|a+b|\leq|a|+|b|$, (ii) $|a - b|\leq|a|+|b|$
প্রমাণঃ(i) $(|a|+|b|)^2 = |a|^2+2|a||b|+|b|^2=a^2+2|ab|+b^2$ [$\therefore |a|^2 =a^2$, $|b|^2 = b^2$, $|a||b|=|ab|$]
$\Rightarrow (|a|+|b|)^2\geq a^2+2ab+b^2[|ab|\geq ab]$
$\Rightarrow(|a|+|b|)^2\geq(a+b)^2$
$\Rightarrow(|a|+|b|)^2\geq(|a+b|)^2$
$\Rightarrow|a+b|^2\leq (|a|+|b|)^2$
$\therefore |a+b| \leq |a|+|b|$
(ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ সম্পর্কে b এর পরিবর্তে $-b$ বসালে পাওয়া যায়
$|a+(-b)| \leq |a| + |-b|$
$\therefore |a - b| \leq |a| + |b|$ [$\because |(-b)| = |b|$]

5.সকল $a, b\in$Pএর জন্য$|a-b|\geq||a|-|b||$
প্রমাণঃ$|a|=|(a-b)+b|\leq|a-b|+|b|$
$\Rightarrow |a|-|b|\leq|a-b|$
$\Rightarrow|a-b|\geq|a|-|b|$ ---------- (i)
আবার, $|b|=|(b-a)+a| \leq |b-a|+|a|=|a - b|+|a|$ [$\because |b - a| = |-(a - b)| = |a - b|$]
$\Rightarrow |a-b|\geq|b|-|a|$

$\Rightarrow |a-b| \geq -(|a|-|b|)$
$\Rightarrow -|a-b| \leq |a|-|b|$--------- (ii)
(i) ও (ii) হতে পাই-
$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$
$\Rightarrow ||a|-|b|| \leq |a-b|$
$\Rightarrow |a-b| \geq ||a|-|b||$

6. (a) $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$
(b) $|x-a| \leq b \Rightarrow a-b \leq x \leq a+b$
(c) $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ অথবা, $x \leq -a$

প্রমাণ:(a)যখন, $x \geq 0$তখন $|x| \leq a \Rightarrow x \leq a$ ---------- (i)
যখন $x<0$তখন$|x| \leq a \Rightarrow -x \leq a$বা, $x \geq -a$ --------- (ii)
(i) ও (ii) হতে পাই, $-a \leq x \leq a$
(b)যখন $(x-a) \geq 0$ তখন$|x-a| \leq b$
$\Rightarrow x-a \leq b$বা, $x \leq a+b$-------- (i)
যখন $(x-a)<0$ তখন $|x-a| \leq b$
$\Rightarrow -(x-a) \leq b$বা, $x-a \geq -b$বা, $x \geq a-b$ ------ (ii)
এখন (i) ও (ii) হতে পাই-
$a-b \leq x \leq a+b$
(c)যখন $x \geq 0$তখন $|x| \geq a$
$\Rightarrow x \geq a$ ------ (i)
যখন $x<0$তখন $|x| \geq a$
$\Rightarrow -x \geq a$বা, $x \leq -a$ ---------- (ii)
এখন (i) ও (ii)হতে পাই-
$x \geq a$অথবা, $x \leq -a$

উদাহরণ: পরমান চিহ্ন ব্যবহার না করে অসমতা প্রকাশ করুন।
(i) $|x-3|<8$ (ii) $|2x+4|<8$
সমাধান:
(i) $|x-3|<8 \Rightarrow -8<x-3<8 \Rightarrow -8+3<x-3+3<8+3 \Rightarrow -5<x<11$
(ii) $|2x+4|<8 \Rightarrow -8<2x+4<8 \Rightarrow -12<2x<4 \Rightarrow -6<x<2$

শিক্ষার্থীর কাজ	পরমমান চিহ্ন ব্যবহার না করে অসমতা প্রকাশ করুন। (i) $\|x\| \leq 8$ (ii) $\|x+4\|<2$

সারসংক্ষেপ

- কোনো বাস্তব সংখ্যার পরমমান বলতে তার সংখ্যামানকে বোঝায়। বাস্তব সংখ্যা aএর পরমমানকে $|a|$দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- সকল $a \in P$এর জন্য, $-|a| \leq a \leq |a|$
- সকল $a \in P$এর জন্য, $|a| \geq a$
- সকল $a \in P$এর জন্য, $|a|^2 = a^2 = |-a|^2$
- সকল $a, b \in P$এর জন্য, (i) $|a+b| \leq |a|+|b|$, (ii) $|a-b| \leq |a|+|b|$
- সকল $a \in P$এর জন্য, $|a-b| \geq ||a|-|b||$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৫

1. সকল$a, b \in P$এর জন্য প্রমাণ করুন।
   (a) $|a|^2 = a^2 = |-a|^2$এবং $|ab| = |a||b|$
   (b) (i) $|a+b| \le |a| + |b|$
   (ii) $|a - b| \le |a| + |b|$
   (c) $|a - b| \ge ||a| - |b||$
2. পরমমান নির্ণয় করুন:
   (a) $|6 - 5\sqrt{2}|$ (b) $|\pi - 3|$
   (c) $|3\pi - 10|$ (c) $|-3-5|$
   (e) $||-2-3|+|-3-5||$

পাঠ ১.৬ এক চলক সম্বলিত অসমতা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- এক চলক সম্বলিত অসমতা কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- এক চলক সম্বলিত অসমতার সমাধান করতে পারবেন,
- সমাধান সেট সংখ্যারেখায় প্রকাশ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	চলক, অসমতা, সংখ্যারেখা

মূলপাঠ

একচলক সম্বলিত অসমতা (Inequalities of one variable)

এক ঘাত এবং এক চলক সম্বলিত অসমতা যারমাত্রা এক। একঘাত সমীকরণের একটি মাত্র বীজ বা সমাধান থাকে। কিন্তু এক ঘাত এক চলক সম্বলিত অসমতার অসংখ্য সমাধান থাকে। যেমন: $x<4$ হলে xএর মান বা সমাধান 4 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যার সেট। অসমতার সমীকরণ থেকে সমাধান পাওয়া যায়। যেমন : $3x+5<14$ বা, $3x<9$ বা, $x<3$ ।এক চলক সম্বলিত অসমতা একটি বাক্য যার একটি রাশি অপর একটি রাশির চেয়ে ছোট অথবা বড় কিংবা ছোট বা সমান বড় বা সমান অথবা কোনটিই নয়। যেমন : $x<8$, $x>3$, $x\leq 7$, $x\geq 2$ ইত্যাদি। একচলক সম্বলিত অসমতা $ax>b$, যখন $a>0$ তখন $ax>b\Rightarrow x>\frac{b}{a}$ যার ব্যসার্ধ $(\frac{b}{a}, \infty)$ অর্থাৎ $\frac{b}{a}<x<\infty$এবং যখন$a<0$তখন এর মান $(-\infty, \frac{b}{a})$ ব্যবধি অর্থাৎ$-\infty<x<\frac{b}{a}$ এর মধ্যে থাকবে। কিন্তু যখন $a=0$হয় তখন xকোনো সমাধান থাকবে না।

যৌগিক অসমতা (Compound Inequalities):যে অসমতায় দুইটি বাক্যের বর্ণনা আছে তাকে যৌগিক অসমতা বলে ।$a<x<b$একটি যৌগিক অসমতা কেননা অসমতাটিতে দুইটি বাক্যের বর্ণনা আছে। একটি $a<x$এবং অপরটি $x<b$। যেমন, $3<x<7$ একটি যৌগিক অসমতা।

রৈখিকঅসমতা (Linear Inequalities): এক অথবা একাধিক চলক সম্বলিত একঘাতিক অসমতাকে রৈখিক অসমতা বলা হয়। যেমন: $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$ অথবা $ax+b\leq 0$ হতে পারে। এগুলো এক চলকের অর্থাৎ xচলকের রৈখিক অসমতা। এগুলোকে $ax> -b$, $ax< -b$, $ax\geq -b$অথবা $ax\leq -b$আকারেও প্রকাশ করা যায়।

অনুরূপভাবে, $a, b, c\in$Pহলে $ax+by>c$, $ax+c>by$, $ax+by<c$, $ax<by+c$ইত্যাদি আকারের অসমতাকে দুই চলক x, y-এর রৈখিক অসমতা বলে।

এক চলক সম্বলিত অসমতার সমাধান (Solution of inequalities with one variable)

এক চলক সম্বলিত অসমতাকে দুইভাগে ভাগ করা যায়।

(a) শর্তাধীন অসমতা (Conditional Inequalities): যে সমস্ত অসমতা সম্পর্কযুক্ত চলকের নির্দিষ্ট কিছু মানের জন্য সত্য তাকে শর্তাধীন অসমতা বলা হয়। যেমন: $x+2>4$ একটি শর্তাধীন অসমতা, কেননা কেবল $x>2$এর জন্য অসমতাটি সত্য।

(b) শর্তহীন অসমতা (Unconditional Inequalities): যে সমস্ত অসমতা সম্পর্কযুক্ত চলকের প্রত্যেক মানের জন্য সত্য তাকে শর্তহীন অসমতা বলা হয়। যেমন $x+2>x$একটি শর্তহীন অসমতা, কেননা এটি x এর প্রত্যেক মানের জন্য সত্য।

এক চলক সম্বলিত অসমতার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য:

- কোনো অসমতার উভয় পক্ষে কোন বাস্তব সংখ্যা যোগ বা বিয়োগ করলে অসমতাটি অপরিবর্তিত থাকে।
- কোনো অসমতার উভয় পক্ষে কোনো বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতাটি অপরিবর্তিত থাকে।
- কোনো অসমতার উভয় পক্ষকে কোনো বাস্তব ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার দিক বা চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।
- কোনো অসমতার উভয় পক্ষকে উল্টালে অসমতার দিক পাল্টে যায়।

উদাহরণ1: সমাধান করুন ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান, $3x + 2 > 4x - 5$

সমাধান: $3x + 2 > 4x - 5$

$\Rightarrow 3x+2+5>4x - 5+5$ [উভয় পক্ষে 5 যোগ করে পাই]

$\Rightarrow 3x+7>4x$

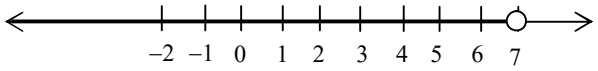
$\Rightarrow (3x+7)-3x>4x-3x$ [উভয় পক্ষে $-3x$যোগ করে পাই]

$\Rightarrow 7>x \Rightarrow x< 7$

নির্ণয় সমাধান: $x<7$

সমাধান সেট: $S=\{x\in P: x<7\}$

সংখ্যারেখায়:



উদাহরণ 2: সমাধান করুন ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান, $x\le\frac{1}{2}x+1$

সমাধান: $x\le\frac{1}{2}x+1$

$\Rightarrow x-\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}x$ [উভয়পক্ষে $(-\frac{1}{2}x)$ যোগ করে পাই]

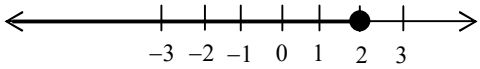
$\Rightarrow\frac{1}{2}x\le 1\Rightarrow 2.\frac{1}{2}x\le 2.1$ [উভয়পক্ষে 2 গুণকরে পাই]

$\Rightarrow x\le 2$

$\therefore x\le 2$

নির্ণেয় সমাধান সেট: $S=\{x\in P: x\le 2\}$

সংখ্যারেখায়:



উদাহরণ 3: সমাধান করুন ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান, $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} > 0$

সমাধান: ধরুন $f(x) = \frac{(x- 1)(x- 2)}{(x- 3)}$ এখানে সন্ধিবিন্দুগুলো (Critical points) হলো 1, 2, 3 ।সুতরাং x=1,2, 3 বিন্দুগুলো বাস্তব সংখ্যাকে 4টি ব্যবধিতে বিভক্ত করে। ব্যবধিগুলো হলো$x<1$, $1<x<2$, $2<x<3$ এবং $x>3$

$f(x)>0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ এই তিনটির মধ্যে তিনটি চিহ্নই ধনাত্মক বা তিনটির মধ্যে দুইটির চিহ্ন ঋণাত্মক এবং একটির চিহ্ন ধনাত্মক হয়।

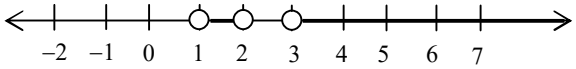
শর্ত	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(x- 2)$ এর চিহ্ন	$(x-3)$ এর চিহ্ন
$x<1$	–	–	–
$1<x<2$	+	–	–
$2<x<3$	+	+	–
$x>3$	+	+	+

এখানে $1<x<2$ এবং $x>3$ ব্যবধির জন্য $f(x)>0$

নির্ণেয় সমাধান: $1<x<2$ এবং $x>3$

সমাধান সেট: $S=\{x\in P: 1<x<2$ এবং $x>3\}$

সংখ্যারেখায়:



উদাহরণ 4: সমাধান করুন ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান, $\frac{4x-1}{x+2} < 1$

সমাধান: $\frac{4x-1}{x+2} < 1$ বা, $\frac{4x-1}{x+2} - 1 < 1 - 1$ বা, $\frac{4x-1-x-2}{x+2} < 0$ অর্থাৎ $\frac{3x-3}{x+2} < 0$

মনে করুন, $f(x)=\frac{3x-3}{x+2}$, এখানে সন্ধি বিন্দুগুলো হলো -2, 1 ।সুতরাং $x=-2$, 1বিন্দুগুলো বাস্তব সংখ্যাকে 3টি ব্যবধিতে বিভক্ত করে। ব্যবধিগুলো হলো $x<-2, -2<x<1, x>1$

$f(x)<0$ হবে যদি ও কেবল যদি $(x+2)$, $(3x-3)$ এই দুইটির মধ্যে দুইটি চিহ্ন বিপরীত চিহ্নযুক্ত অর্থাৎ একটি ধনাত্বক ও একটি ঋণাত্মক হয়।

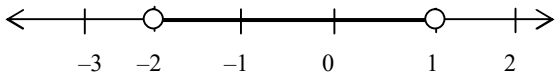
শর্ত	$(x+2)$ এর চিহ্ন	$(3x-3)$ এর চিহ্ন
$x<-2$	–	–
$-2<x<1$	+	–
$x>1$	+	+

এখানে $-2<x<1$ ব্যবধির জন্য $f(x)<0$

নির্ণেয় সমাধান: $-2<x<1$

সমাধান সেট: $S=\{x \in P: -2 <x<1\}$

সংখ্যারেখায়:



উদাহরণ 5: সমাধান করুন ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান, $\frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{x+1}$

সমাধান: $\frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{x+1} \Rightarrow x < \frac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x+1} > x \Rightarrow \frac{x^2+1}{x+1} - x > 0$

$\Rightarrow \frac{x^2+1-x^2-x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} < 0$

মনে করুন, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ।এখানে সন্ধি বিন্দুগুলো হলো -1, 1। সুতরাং $x= -1$, 1 বিন্দুগুলো বাস্তব সংখ্যাকে 3টি ব্যবধিতে বিভক্ত করে। ব্যবধিগুলো হলো $x<-1, -1<x<1, x>1$

$f(x) <0$ হবে যদি ও কেবল যদি $(x-1)$, $(x+1)$ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় অর্থাৎ একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হয়।

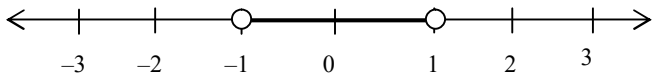
শর্ত	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(x+1)$ এর চিহ্ন
$x<-1$	–	–
$-1<x<1$	–	+
$x>1$	+	+

এখানে $-1<x<1$ ব্যবধির জন্য $f(x)<0$

নির্ণেয়সমাধান: $-1<x<1$

সমাধান সেট: $S=\{x \in P: -1<x<1\}$

সংখ্যারেখায়:



শিক্ষার্থীর কাজ	সমাধান করুন ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান: (i) $x \leq \frac{x}{3} + 4$ (ii) $\frac{x(x+1)}{x-1} > 0$

সারসংক্ষেপ

- একঘাত এবং এক চলক সম্বলিত অসমতা যার মাত্রা এক। এক ঘাত সমীকরণের একটিমাত্র বীজ বা সমাধান থাকে। কিন্তু একঘাত একচলক সম্বলিত অসমতার অসংখ্য সমাধান থাকে।
- যে অসমতার দুইটি বাক্যের বর্ণনা আছে তাকে যৌগিক অসমতা বলে। যেমন $a<x<b$.
- এক অথবা একাধিক চলক সম্বলিত একঘাতিক অসমতাকে রৈখিক অসমতা বলা হয়।
- যে সমস্ত অসমতা সম্পর্কযুক্ত চলকের নির্দিষ্ট কিছু মানের জন্য সত্য থাকে তাকে শর্তাধীন অসমতা বলা হয়।
- যে সমস্ত অসমতা সম্পর্কযুক্ত চলকের প্রত্যেক মানের জন্য সত্য থাকে তাকে শর্তহীন অসমতা বলা হয়।

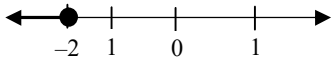
পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৬

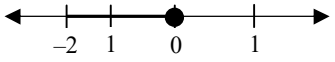
সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-3):

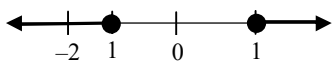
1. $3x-2>2x-1$ এর সমাধান সেট কোনটি?

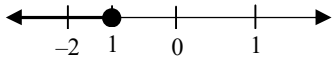
   (ক) $[1, \infty]$ (খ) $(1, \infty)$ (গ) $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ (ঘ) $(-\infty, \infty)$

2. $\frac{x}{2}+1\leq 0$অসমতার সমাধান সংখ্যারেখায় কোনটি?

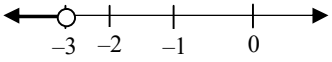
   (ক) 

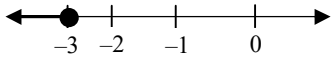
   (খ) 

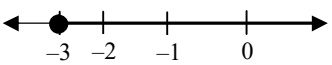
   (গ) 

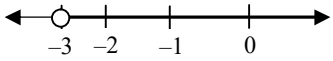
   (ঘ) 

3. $S=\{x \in P : x\geq -3\}$কে সংখ্যারেখায় দেখানো হলো, কোনটি সঠিক?

   (ক) 

   (খ) 

   (গ) 

   (ঘ) 

4. সমাধান করুন ও সংখ্যারেখায় দেখান:

   (i) $x^2-5x+6\geq 0$

   (ii) $(3x+5)(x-3)>0$

   (iii) $\frac{2x}{x-1}>x$

পাঠ ১.৭ পরমমান সম্বলিত অসমতা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

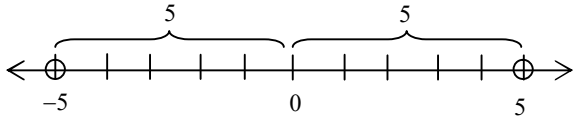
এই পাঠ শেষে আপনি-

- পরমমান সম্বলিত অসমতা কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- পরমমান পারস্পারিক অসমতার সমাধান করতে পারবেন,
- পরমমান সম্বলিত অসমতার সমাধান সংখ্যারেখায় প্রকাশ করতে পারবেন।

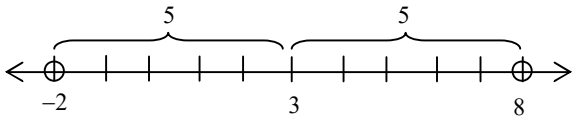
মুখ্য শব্দ	পরমমান, অসমতা, সংখ্যারেখা

মূলপাঠ

কোনো বাস্তব সংখ্যার পরমমান বলতে তার সংখ্যা মানকে বোঝায়। কোনো বাস্তব সংখ্যা xএর পরমমানকে $|x|$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। বাস্তব সংখ্যার পরমমান সর্বদাই ধনাত্মক বা শূন্য হয়। জ্যামিতিকভাবে,xএর পরমমান হচ্ছে সংখ্যারেখায় Oবিন্দু থেকে xএর প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব। অতএব, $|x|<5$ এর অর্থ মূলবিন্দু Oথেকে xএর প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব 5 এর চেয়ে কম অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যারেখায় xএর অবস্থান -5 এবং 5 এর মধ্যে। অতএব $|x|<5$ এবং $-5<x<5$ অসমতাগুচ্ছ একই অর্থ বহন করে।



অনুরূপভাবে, (i) $|x-3| = 5$ বলতে বোঝায় বাস্তব সংখ্যারেখায় xএবং 3 বিন্দু দুইটির দূরত্ব 5 একক যারসমাধান সেট: $\{-2, 8\}$



(ii) $|x-3|<5$ বলতে xএর এমন সংখ্যার সেট যার দূরত্ব 3 বিন্দু হতে 5 এর কম। অতএব সমাধান সেট $-2<x<8$

(iii) $0<|x-3|<5$ বলতে xএর এমন সংখ্যার সেট যার দূরত্ব 3 বিন্দু হতে সর্বদাই5 এর ছোট, কিন্তু$x\neq 3$। অতএব সমাধান সেট:$(-2, 3)\cup(3, 8)$।

(iv) $|x-3|>5$ বলতে xএর এসব সংখ্যার সেট, যার দূরত্ব 3 বিন্দু হতে সর্বদাই 5 এর বড়। অতএব সমাধান সেট$(-\infty, -2)\cup(8,\infty)$

উদাহরণ1: পরমমান চিহ্ন ব্যবহার না করে অসমতাগুলো প্রকাশ করুন:

$$\text{(i) } |x-3|<8 \text{ (ii) } |x-2|<5 \text{ (iii) } \frac{1}{|(2x-1)|}\geq 7, \left(x\neq\frac{1}{2}\right)$$

সমাধান:(i) $|x-3|<8\Rightarrow -8<x-3<8\Rightarrow -8+3<x-3+3<8+3\Rightarrow -5<x<11$

(ii) $|x-2|<5\Rightarrow -5<x-2<5\Rightarrow -5+2<x-2+2<5+2 \quad \Rightarrow -3<x<7$

(iii) $\frac{1}{|2x-1|}\geq 7, \left(x\neq\frac{1}{2}\right)\Rightarrow |2x-1|\leq\frac{1}{7}\Rightarrow -\frac{1}{7}\leq 2x-1\leq\frac{1}{7}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{7}+1\leq 2x-1+1\leq\frac{1}{7}+1\Rightarrow\frac{6}{7}\leq 2x\leq\frac{8}{7}\Rightarrow\frac{3}{7}\leq x\leq\frac{4}{7}, x\neq\frac{1}{2}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	(i) $|x|\leq 7$, (ii)$|7-3x|\geq 5$কে পরমমান চিহ্ন ব্যবহার না করে প্রকাশ করুন।

উদাহরণ 2: পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করে অসমতাগুলো প্রকাশ করুন:(i) $4<x<10$ (ii) $-2<x<6$

সমাধান:(i) $4<x<10$

এখানে, $(4+10)\div 2=7$, অতএব উভয়পক্ষে -7 যোগ করে পাওয়া যায়,

$4-7<x-7<10-7 \Rightarrow -3<x-7<3 \Rightarrow |x-7|<3$

(ii) $-2<x<6$

এখানে $(-2+6)\div 2$, উভয়পক্ষে -2 যোগ করে পাওয়া যায়,

$-2-2<x-2<6-2 \Rightarrow -4<x-2<4 \Rightarrow |x-2|<4$

শিক্ষার্থীর কাজ	(i) $-5<x<11$, (ii) $-3\le x\le 5$কে পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করে প্রকাশ করুন।

উদাহরণ3: সমাধান করুন ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান:

(i) $|2x-5|<3$ (ii) $|2x+1|<3$ (iii) $\frac{1}{|3x-5|}>2$, যেখানে $x\neq\frac{5}{3}$

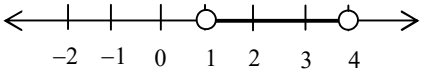
(iv) $|x+1|+|x-2|\le 5$ (v) $\left|\frac{2x}{x-2}\right|\le 1$

সমাধান:(i) দেওয়া আছে, $|2x-5|<3$

$\Rightarrow -3<2x-5<3 \Rightarrow -3+5<2x<3+5 \Rightarrow 2<2x<8 \Rightarrow 1<x<4$

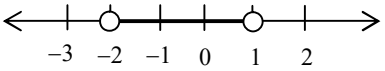
নির্ণেয় সমাধান: $1<x<4$এবং সমাধান সেট $\{x\in P: 1<x<4\}$

সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



(ii) দেওয়া আছে,$|2x+1|<3 \Rightarrow -3<2x+1<3 \Rightarrow -3-1<2x<3-1 \Rightarrow -4<2x<2 \Rightarrow -2<x<1$ নির্ণেয় সমাধান: $-2<x<1$ এবং সমাধান সেট: $\{x\in P: -2<x<1\}$

সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:

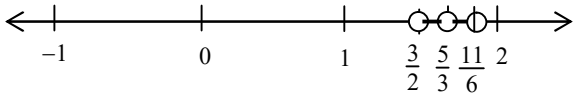


(iii)দেওয়া আছে,$\frac{1}{|3x-5|}>2$, যেখানে $x\neq\frac{5}{3}$

$\Rightarrow |3x-5|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<3x-5<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+5<3x<\frac{1}{2}+5 \Rightarrow \frac{9}{2}<3x<\frac{11}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}<x<\frac{11}{6}$

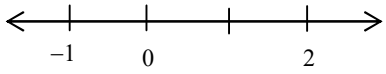
নির্ণয় সমাধান: $\frac{3}{2}<x<\frac{11}{6}$ যেখানে$x\neq\frac{5}{3}$ এবং সমাধান সেট: $\{x\in P: \frac{3}{2}<x<\frac{11}{6}$ এবং $x\neq\frac{5}{3}\}$

সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



(iv) দেওয়া আছে, $|x+1|+|x-2|\le 5$

সংখ্যারেখায় -1, 2 সংখ্যা দুইটির প্রতিরূপী বিন্দু চিহ্নিত করুন এবং $x<-1$, $-1\le x\le 2$, $x>2$ এই তিনটি ব্যবধি বিবেচনা করুন এবং নিচের ছকটি তৈরি করুন:



ব্যবধি	$(x+1)$ এর চিহ্ন	$(x-1)$ এর চিহ্ন
$x<1$	−	−
$-1\le x\le 2$	+	−
$x>2$	+	+

(a) $x<-1$ হলে, $x+1<0$ এবং $x-2<0$;

সুতরাং প্রদত্ত অসমতা দাঁড়ায়, $-(x+1)-(x-2)\le 5 \Rightarrow -2x\le 4 \Rightarrow 2x\ge -4 \Rightarrow x\ge -2$

$x<-1$ হওয়ার $-2\le x<-1$ শর্তপূরণকারী এমন প্রত্যেক xপ্রদত্ত অসমতার সমাধান; বিপরীতক্রমে $x<-1$ ব্যবধিভুক্ত প্রত্যেক সমাধানের জন্য $x\ge -2$ সত্য।

(b) $-1\le x\le 2$ হলে, $x+1\ge 0$ এবং $x-2\le 0$; সুতরাং প্রদত্ত অসমতা দাঁড়ায়,

$(x+1)-(x-2)\le 5\Rightarrow 3\le 5$, যা সত্য।

$\therefore -1\le x\le 2$ ব্যবধিভুক্ত প্রত্যেক xপ্রদত্ত অসমতার সমাধান।

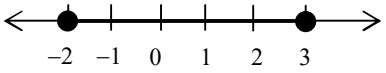
(c) $x>2$ হলে, $x+1>0$ এবং $x-2>0$;

সুতরাং প্রদত্ত অসমতা দাঁড়ায়

$(x+1)+(x-2)\le 5\Rightarrow 2x\le 6\Rightarrow x\le 3$

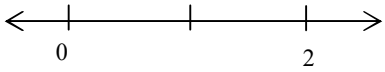
এখানে, $x>2$; সুতরাং $x>2$ ব্যবধিভুক্ত প্রত্যেক $x\le 3$ প্রদত্ত অসমতার সমাধান; বিপরীতক্রমে $x>2$ ব্যবধিভুক্ত প্রত্যেক সমাধানের জন্য $x\le 3$ সত্য।

প্রাপ্ত সবগুলো সমাধান একত্রে করলে অসমতাটির সমাধান দাঁড়ায় $-2\le x\le 3$এবং সমাধান সেট : $\{x\in P: -2\le x\le 3\}$, সংখ্যারেখায়:



(v) $\left|\frac{2x}{x-2}\right|\le 1$

এখানে xএর মান 2 হতে পারে না, $|2x|$ এর মান $x<0$ বা $x\ge 0$ হওয়ার উপর নির্ভরশীল। তাই সংখ্যারেখায় 0 এবং 2 এর প্রতিরূপী বিন্দু দুইটি চিহ্নিত করুন এবং $x<0$, $0\le x<2$, $x>2$ এই তিনটি ব্যবধি পরপর বিবেচনা করুন। এবং নিচের ছকটি তৈরি করুন:-



ব্যবধি	$2x$এর চিহ্ন	$(x-2)$ এর চিহ্ন
$x<0$	–	–
$0\le x<2$	+	–
$x>2$	+	+

(a) $x<0$ হলে, $2x<0$ এবং $x-2<0$; সুতরাং প্রদত্ত অসমতা দাঁড়ায়

$-2x\le -(x-2)\Rightarrow -2x\le -x+2\Rightarrow -x\le 2\Rightarrow x\ge -2$

সুতরাং $x<0$ ব্যবধিভুক্ত প্রত্যেক $x\ge -2$ প্রদত্ত অসমতা সমাধান, বিপরীতক্রমে $x<0$ব্যবধিভুক্ত প্রত্যেক সমাধানের জন্য$x\ge -2$সত্য।

(b) $0\le x<2$ হলে, $2x>0$ এবং $x-2<0$

সুতরাং প্রদত্ত অসমতা দাঁড়ায়,$2x\le -(x-2)\Rightarrow 3x\le 2\Rightarrow x\le \frac{2}{3}$

সুতরাং $0\le x<2$ব্যবধিভুক্ত প্রত্যেক $x\le \frac{2}{3}$ প্রদত্ত অসমতা সমাধান; বিপরীতক্রমে $0\le x<2$ব্যাবধিভুক্ত প্রত্যেক সমাধানের জন্য $x\le \frac{2}{3}$ সত্য।

(c) $x>2$ হলে $2x>0$ এবং $(x-2)>0$;

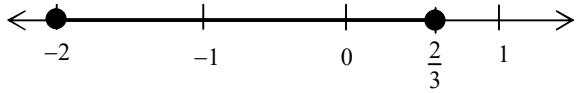
সুতরাং প্রদত্ত অসমতা দাঁড়ায়, $2x\le x-2\Rightarrow x<-2$, যা $x>2$ এর সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ নয়।

সুতরাং এই ব্যবধিতে প্রদত্ত অসমতার কোনো সমাধান নেই।

প্রদত্ত সবগুলো সমাধান একত্রে করলে অসমতাটির সমাধান দাঁড়ায়$-2\le x\le \frac{2}{3}$

$\therefore$সমাধান সেট: $\{x\in P: -2\le x\le \frac{2}{3}\}$

সংখ্যারেখায়:



শিক্ষার্থীর কাজ	সমাধান করুন ও সংখ্যারেখায় দেখান: (i) $\|2x-5\|<3$, (ii) $\left\|\frac{x-1}{x+2}\right\|<2$

সারসংক্ষেপ

- কোনো বাস্তব সংখ্যার পরমমান বলতে তার সংখ্যা মানকে বোঝায়। কোনো বাস্তব সংখ্যা xএর পরমমানকে $|x|$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। বাস্তব সংখ্যার পরমমান সর্বদাই ধনাত্মক বা শূন্য হয়।
- জ্যামিতিকভাবে, xএর পরমমান হচ্ছে সংখ্যারেখায় Oবিন্দু থেকে xএর প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব। অতএব, $|x|<5$ এর অর্থ, মূলবিন্দু Oথেকে xএর প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব 5এর চেয়ে কম অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যারেখায় xএর অবস্থান -5এবং 5মধ্যে ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৭

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-5):

1. পরমমান চিহ্ন ব্যবহার না করে $|x|<3$ অসমতাটি কোনটি?
   (ক) $-3<x$ (খ) $3>x$ (গ) $-3<x<3$ (ঘ) $0<x<3$
2. পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করে $-3<x<9$ অসমতাটি কোনটি?
   (ক)$|x-3|<-6$ (খ) $|x-3|<6$ (গ) $|x-3|>6$ (ঘ) $|x-3|>-6$
3. বাস্তব সংখ্যায় $|3-2x|\le 1$ অসমতাটির সমাধান
   (ক) $1<x<2$ (খ)$x\le 1$ বা $x\ge 2$ (গ) $1\le x\le 2$ (ঘ) $1<x\le 2$
4. $|7-3x|\le 5$ অসমতাটির সমাধান কোনটি?
   (ক) $\frac{2}{3}\le x\le 4$ (খ) $-\frac{5}{3}\le x\le\frac{7}{3}$ (গ) $x\le-\frac{5}{3}$ (ঘ) $x\le-\frac{7}{3}$ অথবা, $x\le-\frac{5}{3}$
5. $|5-2x|\le 4$ অসমতাটির সমাধান কোনটি?
   (ক) $-1\le x\le 9$ (খ) $\frac{1}{2}\le x\le\frac{9}{2}$ (গ) $x\le\frac{1}{2}$ অথবা $x\ge\frac{9}{2}$ (ঘ) $\frac{1}{2}<x<\frac{9}{2}$
6. পরমমান চিহ্ন ব্যবহার না করে অসমতাগুলো প্রকাশ করুন:
   (i) $|x-2|<5$ (ii) $|2x+3|<7$ (iii) $\frac{1}{|1-4x|}\ge 3$, যখন $x\ne\frac{1}{4}$
7. পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করে অসমতাগুলো প্রকাশ করুন:
   (i) $2\le x\le 8$ (ii) $-5<x<7$ (iii) $1\le 3x+7\le 5$ (iv) $-3\le x\le 5$
8. সমাধান করুন ও সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখান:
   (i) $|3x-1|\le 5$ (ii) $|5x+3|\le 9$ (iii) $|2x-5|<1$ (iv) $|x-5|>2$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

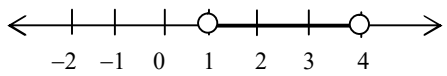
সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-5):

1. P, N, Zও Θসেটগুলোর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) $P\subset N\subset Z\subset\Theta$ (খ) $N\subset P\subset Z\subset\Theta$ (গ) $N\subset Z\subset\Theta\subset P$ (ঘ) $\Theta\subset Z\subset N\subset P$
2. 7 ও 8 এর মধ্যে কয়টি অমূলদ সংখ্যা বিদ্যমান?
   (ক) অসংখ্য (খ) 10 (গ) 5 (ঘ) 1
3. $|2x-7|<5$ অসমতাটির বাস্তব সংখ্যাটির সমাধান কোনটি?

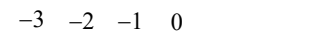
(ক) $x>1$ (খ)$x>6$ (গ)$x>1$ অথবা $x<6$ (ঘ) $x>1$ এবং $x<6$

4. $|x-2|\le 5$ এর সমাধান সেট কোনটি?
   (ক) $(2, 5)$ (খ) $(-3, 7)$ (গ) $[2, 5]$ (ঘ) $[-3, 7]$
5. xএর কোন মানের জন্য $f(x)<x+3$ হবে?
   (ক) $1<x<9$ (খ) $1\le x\le 9$ (গ)$x>1$ (ঘ) $x<9$
6. প্রমাণ করুন যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।
7. aএবং bঅমূলদ বাস্তব সংখ্যা হলে দেখান যে, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$বা $a^{-1}b^{-1}$
8. a, b, cবাস্তব সংখ্যা এবং $a+b=a+c$হলে প্রমাণ করুন যে, $b=c$.
9. a, b, cবাস্তব সংখ্যা এবং$a<b<c$হলে, প্রমাণ করুন যে, $a<c$
10. $a, b\in$Pবা $ab=0$ হলে, দেখান যে, $a=0$ অথবা $b=0$
11. $a, b\in$Pহলে প্রমাণ করুন যে, (i) $-(a+b) = -a-b$(ii) $(-a)b=-ab$
12. সমাধান করুন এবং সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় করুন:(i) $x^2+x-20<0$ (ii) $x^2-5x+8>0$
13. সমাধান করুন:
    (i) $\frac{(2x-1)^2}{(x+1)(x+3)} \ge 0$ (ii) $\frac{4x(x^2-6)}{x^2-4} \le 0$ (iii) $\frac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3} \ge 0$ (iv) $\frac{x+1}{x-1} \le \frac{1}{2}$
14. পরমমান চিহ্ন ব্যবহার না করে অসমতাগুলো প্রকাশ করুন:
    (i) $|x-3| \le 7$ (ii) $|x+1| \le 2$ (iii) $\frac{1}{|3x+1|} \ge 5, x\ne -\frac{1}{3}$
15. পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করে অসমতাগুলো প্রকাশ করুন:
    (i) $-7 <x<-1$ (ii) $-5<x<11$ (iii) $-4<3x<0$ (iv) $-8\le x\le 2$
    (v) $-1 < 2x- 3 < 5$ (vi) $2\le 2x+3\le 4$
16. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান:
    (i) $|3-x|\le 2$ (ii) $|3x+2|<7$ (iii) $|3x-4|<2$ (iv) $\frac{1}{|5x-1|} > \frac{1}{9}; x\ne \frac{1}{5}$
    (v) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 2$ (vi) $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right| \le 1$ (vii) $|3x+2|<4x$ (viii) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 2$
    (ix) $\left|\frac{2x}{x-3}\right| \le 1$ (x) $|x-2| \le 1$ এবং $|x-3| \le 1$
17. $\forall a, b\in$P
    (ক) প্রমাণ করুন যে, $\sqrt{a^2}=|a|$ (খ) প্রমাণ করুন যে, $(-a)(-b) =ab$
    (গ) প্রমাণ করুন যে, $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}(a\ne 0, b\ne 0)$
18. $f(x)=2x-5$ এবং $a, b, c\in$P
    (ক) $x\in$Nএবং $2\le x\le 5$ হলে, $\{f(x)\}$ এর সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় করুন।
    (খ) $|f(x)|<3$ সমাধান করুন এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান।
    (গ) $a+b=a+c$হলে, প্রমাণ করুন যে, $b=c$
19 $f(x) = |4-7x|$ একটি পরমমান সংবলিত ফাংশন।
    (ক) $f(x)$ কে পরমমান ব্যতিত প্রকাশ করুন।
    (খ) $f(x)\le 18$ হলে, সমাধানসেট সংখ্যারেখায় দেখান।
    (গ) সংখ্যারেখার সাহায্যে $-3\le f(x)\le 18$ অসমতাটি সমাধান করুন।

20.



(ক) সংখ্যারেখায় নির্দেশিত অংশটির সমাধান সেট নির্ণয় করুন।



(খ) অসমতাটিকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

(গ) $|2x-5|<1$ এবং সংখ্যারেখায় নির্দেশিত অসমতাটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন১.১

1.খ 2.গ 3.ক 4.খ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন১.২

1.ক 2.খ 3.গ 4.গ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন১.৩

1.খ 2.ঘ 3.গ 4.গ 5.খ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন১.৪

1.খ 2.ক 3.গ 4.খ 5.গ 6.$\sup S = 1 \in S$ এবং$\inf S = -1 \in S$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন১.৫

2.(a) $5\sqrt{2}-6$ (b) $\pi-3$ (c) $10-3\pi$(d) 8 (e) 13

পাঠোত্তর মূল্যায়ন১.৬

1.খ 2. ক 3. গ 4.(i) $(-\infty, 2]\cup[3,\infty)$(ii) $-\frac{5}{3}<x<3$(iii) $x<0,\ 1<x<3$

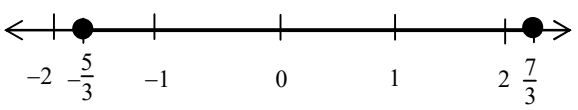
পাঠোত্তর মূল্যায়ন১.৭

1.গ 2.খ 3.গ 4.ক 5.খ

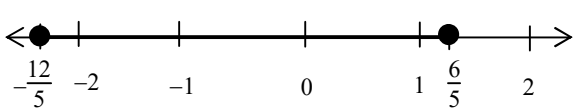
6. (i) $-3<x<7$ (ii) $-5<x<2$ (iii) $\frac{1}{6}\le x\le\frac{1}{3}$, যখন $x\neq\frac{1}{4}$

7. (i) $|x-5|\le 3$ (ii) $|x-1|<6$ (iii) $|3x+4|\le 2$ (iv) $|x-1|\le 4$

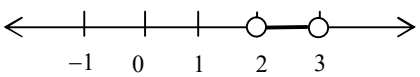
8.(i) $\left\{x:-\frac{5}{3}\le x\le\frac{7}{3}\right\}$,



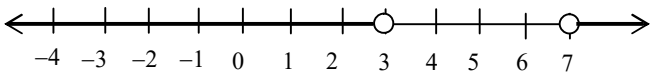
(ii) $\left\{x:-\frac{12}{5}\le x\le\frac{6}{5}\right\}$,



(iii) $2<x<3$,



(iv) $x<3$ বা, $x>7$,



চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. গ 2. ক 3. ঘ 4. ঘ 5. ক

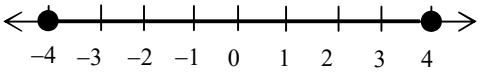
12. (i) $\{x:-5<x<4\}$ (ii) $\{x:x<2\}\cup\{x:x>3\}$

13.(i) $(-\infty, -3)\cup(-1, \infty)$ (ii) $(-\infty, -\sqrt{6})\cup(-2, 0)\cup(2, \sqrt{6})$
(iii) $(-\infty, -2)\cup(-1, 1)\cup(2,\infty)$ (iv) $[-3, 1]$

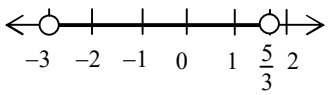
14. (i) $-4\le x\le 10$ (ii) $-3\le x\le 1$ (iii) $-\frac{2}{5}\le x\le -\frac{4}{15}$, $x\ne -\frac{1}{3}$

15. (i) $|x+4|<3$ (ii) $|x-3|<8$(iii) $|3x+2|<2$(iv) $|x+3|\le 5$ (v) $|2x-5|<3$ (vi) $|2x|\le 5$

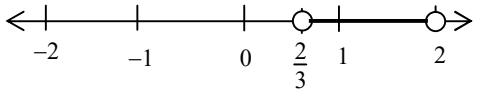
16. (i) $-4\le x\le 4$;



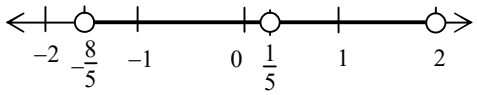
(ii) $-3<x<\frac{5}{3}$;



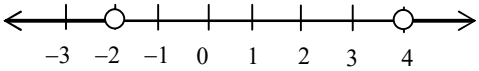
(iii) $\frac{2}{3}<x<2$;



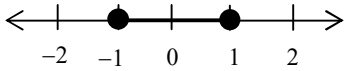
(iv) $-\frac{8}{5}<x<2$ এবং $x\ne\frac{1}{5}$



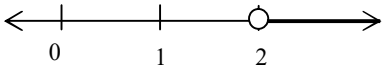
(v) $x\le -2, x>4$;



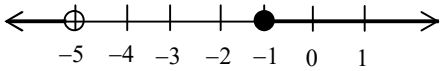
(vi) $-1\le x\le 1$;



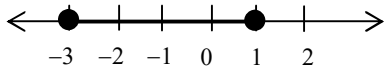
(vi) $x>2$;



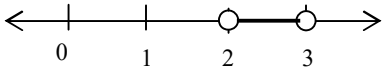
(viii) $x<-5$ অথবা, $x\ge -1$;



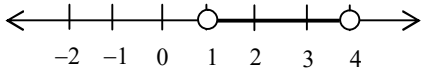
(ix) $-3\le x\le 1$;



(x) $2\le x\le 3$;

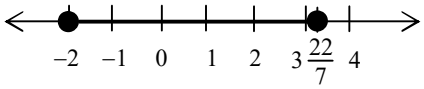


18. (ক) 5, −1 (খ) $1<x<4$;



19. (ক) $f(x)=\begin{cases}4-7x; \text{ যখন } x\le\frac{4}{7}\\ 7x-4; \text{ যখন } x<\frac{4}{7}\end{cases}$

(খ)



(গ) $-2\le x\le\frac{22}{7}$

20. (ক) $\{x\in P: -3<x\le 0\}$ (খ) $|2x-5|<3$ (গ) $2<x<3$