৬

বিন্যাসের রূপ ও আকৃতি
Forms and Shapes of a Distribution

পরিসংখ্যান পদ্ধতির মাধ্যমে উপাত্ত রাশিমালার কেন্দ্রীভূত হবার প্রবণতা ও বিস্তৃতির মাত্রা পরিমাপের মাধ্যমে একটি বিন্যাসের অন্তর্ভুক্ত মানগুলোর মধ্যে সমরূপতা ও ভিন্নতার চিত্রটি বোঝা যায়। কিন্তু বিন্যাসটির রূপ ও আকৃতি সম্পর্কে স্পষ্ট কোন ধারণা পাওয়া যায় না। একটি গণসংখ্যা বিন্যাস সম্পর্কে বর্ণনা দেবার জন্য কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও বিস্তৃতির পরিমাপগুলো যথেষ্ট নয়। দু'টি বিন্যাসের একই গড় ও পরিমিত ব্যবধান থাকা সত্ত্বেও বিন্যাস দু'টির রূপ ও আকৃতি ভিন্ন হতে পারে। অর্থাৎ, বিন্যাসটি সুষমভাবে বিন্যস্ত, নাকি ডান দিকে বঙ্কিম, নাকি বাম দিকে বঙ্কিম, তা জানা যায় না। একটি গণসংখ্যা বিন্যাস বঙ্কিম না হলেই যে সুষম হবে এমনটি নিশ্চিত করে বলা যায় না। অনেক সময় একটি বিন্যাস অতিসূচাল বা অনতিসূচাল হতে পারে। অভিজ্ঞতালব্ধ বিন্যাসগুলো স্বাভাবিক বিন্যাসের কতটুকু সন্নিকটবর্তী হয়েছে তা জানতে পারলে নমুনা মানগুলোর ভিত্তিতে পরামানকে প্রাক্কলনের ক্ষেত্রে আমাদের আস্থা অনেক বেশী বাড়িয়ে দেয়। উপরন্তু, অনেক সময় দেখা যায় যে, কেন্দ্রীয় প্রবণতা, বিস্তৃতি, বঙ্কিমতা ও সূচালতার পরিমাপগুলোকে ঐক্যবদ্ধ করে একটি সুবিধাজনক পরিমাপ নির্ণয়ের প্রয়োজন হয়। পরিঘাত আমাদের সে রকম একটি পরিমাপ প্রদান করে।

এই ইউনিটে আমরা যে পাঠগুলো অধ্যয়ন করবো সেগুলো হলো:

- পাঠ - ১ : বঙ্কিমতা
- পাঠ - ২ : পরিঘাত
- পাঠ - ৩ : সূচালতা
- পাঠ - ৪ : স্বাভাবিক বিন্যাস

পাঠ- ১

বঙ্কিমতা
Skewness

এই পাঠ শেষে যা জানা যাবে —

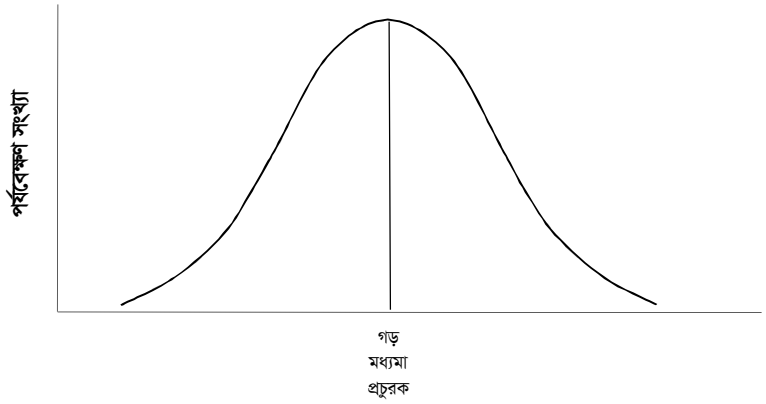
- বঙ্কিমতা কি
- বঙ্কিমতার পরিমাপ – নিরঙ্কুশ ও আপেক্ষিক
- কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ
- বাউলির বঙ্কিমতার সহগ
- কেলির বঙ্কিমতার সহগ

বঙ্কিমতা কি (What is Skewness)?

একটি উপাত্তরাশির বিন্যাসকে বর্ণনা করতে গিয়ে আমরা উপাত্তরাশির কেন্দ্রীয় প্রবণতার কথা জেনেছি। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপগুলোর মাধ্যমে আমরা বুঝতে পারি যে, একটি বিন্যাসের উপাত্ত রাশিমালা একটি নির্দিষ্ট মানের চারপাশে কতটুকু কেন্দ্রীভূত রয়েছে। বিস্তৃতির পরিমাপগুলোর মাধ্যমে আমরা জানতে পারি উপাত্তরাশি কতটুকু বিস্তৃত রয়েছে এবং উপাত্তরাশির আকার একটি থেকে আরেকটি কতটুকু ভিন্ন। কিন্তু একটি বিন্যাসের রূপ ও আকৃতি সম্পর্কে আমরা এখনও কিছু বলতে পারি না। কারণ, একটি গণসংখ্যা বিন্যাস সম্পর্কে বর্ণনা দেবার জন্য কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও বিস্তৃতির পরিমাপগুলো যথেষ্ট নয়। উপাত্ত রাশিমালা কিভাবে গড়ের চারপাশে বিন্যস্ত রয়েছে অথবা গড়ের উপরে বেশী উপাত্তরাশি রয়েছে, নাকি নীচে বেশী রয়েছে তা জানার প্রয়োজন রয়েছে। দু'টি বিন্যাসের একই গড় ও পরিমিত ব্যবধান থাকা সত্ত্বেও বিন্যাস দু'টির রূপ ও আকৃতি ভিন্ন হতে পারে। উপাত্তরাশির বর্ণনার জন্য বিন্যাসের আরো বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে আমাদের ধারণা নেবার প্রয়োজন রয়েছে। আর এই ধারণা নেবার জন্য আমরা যে প্রত্যয়টি নিয়ে আলোচনা করবো তা হলো বঙ্কিমতা।

উপাত্ত রাশির মানগুলো গড়ের চারপাশে সুষমভাবে বিন্যস্ত রয়েছে কিনা বঙ্কিমতা সেটিকেই বর্ণনা করে।

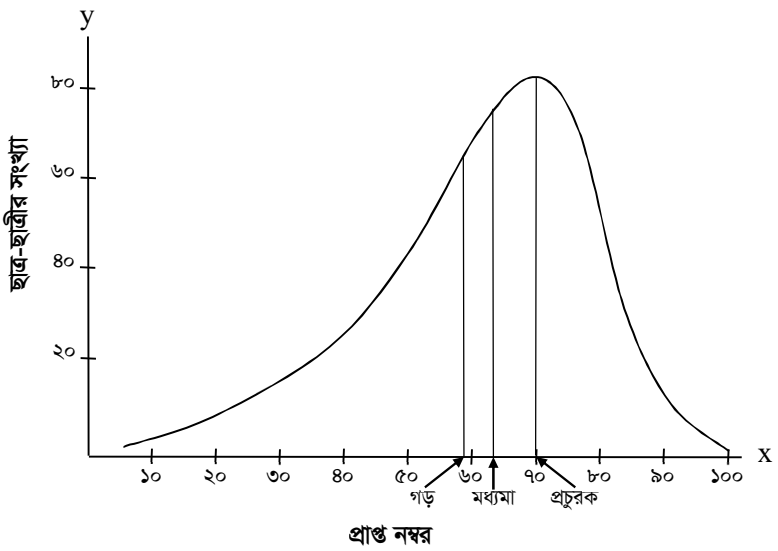
বঙ্কিমতা বলতে একটি বিন্যাসের অসমরূপতাকে (asymmetry) বোঝায়। অর্থাৎ, একটি বিন্যাসের মধ্যে সুষমতার অভাব থাকলে সেই বিন্যাসকে বঙ্কিম বিন্যাস বলে। অন্য কথায়, উপাত্তরাশির মানগুলো গড়ের চারপাশে সুষমভাবে বিন্যস্ত রয়েছে কিনা বঙ্কিমতা সেটিকেই বর্ণনা করে।



চিত্র ৬.১.১: সুষম গণসংখ্যা রেখা

একটি উদাহরণ দেয়া যাক। ধরা যাক, একটি বৃহৎ সংখ্যার উপাত্তরাশির গাণিতিক গড়, মধ্যমা এবং প্রচুরক-এর মান একই হয়েছে। প্রাপ্ত বিন্যাসটিকে একটি গণসংখ্যা রেখার (frequency curve) মধ্যে উপস্থাপন করলে দেখা যাবে যে, রেখাচিত্রটি বিন্যাসটিকে সর্বোচ্চ বিন্দুতে ঠিক সমান দু'ভাগে ভাগ করেছে (চিত্র ৬.১.১ দ্রষ্টব্য)। অর্থাৎ, প্রচুরকের উপরে এবং নীচে সমান সংখ্যক উপাত্তরাশি বিদ্যমান। শুধু তাই নয়, মধ্যমা ও গাণিতিক গড়ের উপরে এবং নীচেও সমান সংখ্যক সংখ্যা মান পাওয়া যাবে। তার অর্থ হলো, উপাত্তরাশির মানগুলো প্রচুরক, মধ্যমা ও গাণিতিক গড়ের দু'পাশে সুষমভাবে বিন্যস্ত রয়েছে।

চিত্র ৬.১.২-এ একটি পরীক্ষায় ছাত্র-ছাত্রীদের প্রাপ্ত নম্বরের বিন্যাসকে লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়েছে। এখানে লক্ষ্য করা যাচ্ছে যে, ছাত্র-ছাত্রীদের সংখ্যা এবং পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর ক্রমাগত বৃদ্ধি পেয়েছে যতক্ষণ না নম্বরের মানটি ৭০-এ গিয়ে পৌঁচেছে। এরপর, ৭০-এর বেশী নম্বর পাওয়া ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা অনেক কম বলে রেখাটি দ্রুততার সাথে নিম্নগামী হয়েছে। লক্ষ্যণীয় বিষয়টি হলো যে, যদিও সবচেয়ে বেশী সংখ্যক ছাত্র-ছাত্রী ৭০ নম্বর পেয়েছে, কিন্তু ৭০-এর চেয়ে কম নম্বর প্রাপ্ত ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ৭০-এর চেয়ে বেশী নম্বর পাওয়া ছাত্র-ছাত্রীদের তুলনায় অনেক বেশী। অন্য কথায়, ৭০ সংখ্যা মানটি হলো প্রচুরক এবং মধ্যমা ও গড় মানটি এর নীচে অবস্থান করছে। অর্থাৎ, পরীক্ষায় প্রাপ্ত

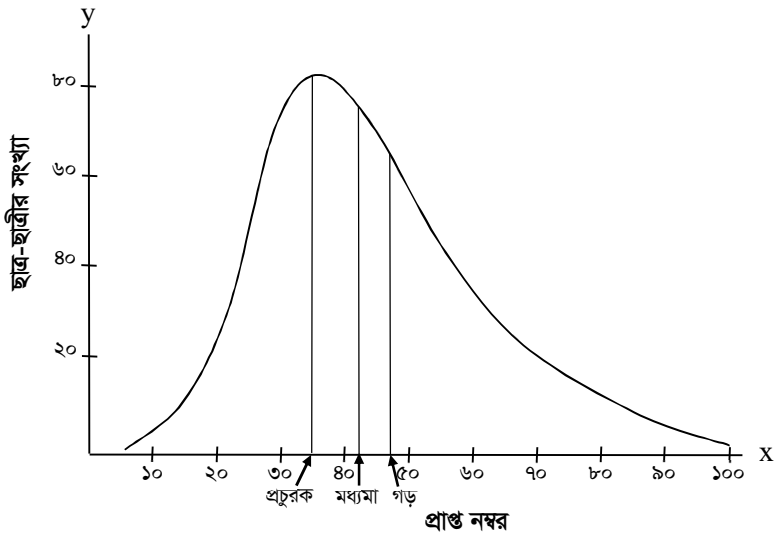


নম্বরের এই বিন্যাসটি একটি বঙ্কিম বিন্যাসের রূপ নিয়েছে।

চিত্র ৬.১.২: বঙ্কিম গণসংখ্যা রেখা

বঙ্কিমতার আলোচনায় দু'টি প্রধান বিবেচ্য বিষয় রয়েছে। প্রথমতঃ বঙ্কিমতার দিক। দ্বিতীয়তঃ, বঙ্কিমতার মাত্রা।

বঙ্কিমতার আলোচনায় দু'টি প্রধান বিবেচ্য বিষয় রয়েছে। *প্রথমতঃ*, বঙ্কিমতার দিক (direction)। অর্থাৎ, বিন্যাসের রেখাটি কি ডানদিকে নাকি বাম দিকে বেঁকে রয়েছে সে বিষয়টি জানা গুরুত্বপূর্ণ। *দ্বিতীয়তঃ*, বঙ্কিমতার মাত্রা (degree)। এই দু'টি বিষয় সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা পেতে হলে এর পরিমাপগুলো সম্পর্কে আমাদের জানতে হবে। পরিমাপের আলোচনায় যাবার পূর্বে বঙ্কিমতার রূপ সম্পর্কে আলোচনাটি শেষ করা যাক। চিত্র ৬.১.২-এ আমরা দেখেছি যে, বিন্যাসটি বামদিকে বেঁকে রয়েছে। সুনির্দিষ্টভাবে বলা যায় যে, ছাত্র-ছাত্রীদের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের বিন্যাসটি ঋণাত্মকভাবে বঙ্কিম। কিন্তু যদি দেখা যায় যে, অন্য একটি পরীক্ষায় অধিক সংখ্যক ছাত্র-ছাত্রী ৪০ নম্বর পেয়েছে এবং ৪০ নম্বরের চেয়ে বেশী নম্বর পাওয়া ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ৪০-এর চেয়ে কম নম্বর পাওয়া ছাত্র-ছাত্রীদের তুলনায় অনেক বেশী রয়েছে, তাহলে বোঝা যাবে যে, বিন্যাসটি ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম হয়েছে। প্রাপ্ত বিন্যাসটি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করলে যে রূপ নেবে, তা চিত্র ৬.১.৩-এ উপস্থাপন করা হলো।



চিত্র ৬.১.৩: ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম বিন্যাস

এ পর্যন্ত আমাদের আলোচনায় তিনটি বিষয় স্পষ্ট হয়ে উঠেছে। *প্রথমতঃ*, একটি সুষম বিন্যাসে প্রচুরক, মধ্যমা ও গাণিতিক গড়ের মান একই হবে। *দ্বিতীয়তঃ*, একটি ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম বিন্যাসে গাণিতিক গড় প্রচুরকের চেয়ে বড় হয় এবং মধ্যমা গড় ও প্রচুরকের মাঝখানে কোন এক স্থানে অবস্থান করে। ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম বিন্যাসে কিছু মান থাকে যা অধিকাংশ মানের তুলনায় অনেক বড় হয়। *তৃতীয়তঃ*, একটি ঋণাত্মকভাবে বঙ্কিম বিন্যাসে প্রচুরক গাণিতিক গড়ের চেয়ে বড় হয় এবং মধ্যমা গাণিতিক গড় ও প্রচুরকের মধ্যে কোন এক স্থানে অবস্থান করে। গাণিতিক গড় নিম্ন মান সম্পন্ন সংখ্যার দিকে অবস্থান করে। একটি ঋণাত্মকভাবে বঙ্কিম বিন্যাসে কিছু মান থাকে যেগুলো অধিকাংশ মানের চেয়ে ছোট থাকে। একটি মাঝারি ধরণের বঙ্কিম বিন্যাসে গাণিতিক গড় এবং মধ্যমার মধ্যে পার্থক্যটি হলো প্রচুরক ও গাণিতিক গড়ের মধ্যেকার পার্থক্যের এক-তৃতীয়াংশ। প্রচুরক, মধ্যমা ও গাণিতিক গড়ের এই সম্পর্কটি বঙ্কিমতার মাত্রা পরিমাপের ভিত্তি প্রদান করে থাকে।

বঙ্কিমতার পরিমাপ (Measures of Skewness)

গাণিতিক গড় থেকে প্রচুরকের পার্থক্যই হলো বঙ্কিমতার মাত্রা।

বিস্তৃতির পরিমাপের মত বঙ্কিমতার পরিমাপেরও নিরঙ্কুশ ও আপেক্ষিক পরিমাপ রয়েছে। যেহেতু একটি সুষম বিন্যাসে গাণিতিক গড়, মধ্যমা ও প্রচুরকের মান একই হয়, সেহেতু গাণিতিক গড় প্রচুরক থেকে যত দূরে অবস্থান করবে বিন্যাসটি তত বেশী বঙ্কিম হবে। অর্থাৎ, গাণিতিক গড় থেকে প্রচুরকের পার্থক্যই হলো বঙ্কিমতার মাত্রা। অতএব,

বঙ্কিমতা = গাণিতিক গড় – প্রচুরক।

অর্থাৎ, $s_k = \bar{x} - m_o$

যদি বিন্যাসটি বাম দিকে বঙ্কিম হয় তবে গাণিতিক গড়ের মান প্রচুরকের মানের থেকে ছোট হবে। গাণিতিক গড় থেকে প্রচুরকের পার্থক্যসূচক মানটি ঋণাত্মক হবে। আর যদি বিন্যাসটি ডানদিকে বঙ্কিম হয় তবে গাণিতিক গড়ের মান প্রচুরকের মানের থেকে বড় হবে এবং প্রাপ্ত পার্থক্যের মানটি ধনাত্মক হবে।

বঙ্কিমতার মাত্রা নিরূপণের আরেকটি নিরঙ্কুশ পরিমাপ এই ধারণার উপর প্রতিষ্ঠিত যে, একটি বঙ্কিম বিন্যাসে মধ্যমা দু'টি চতুর্থকের ঠিক মাঝখানে অবস্থান করে না। এই পরিমাপটিকে বঙ্কিমতার চতুর্থক পরিমাপ বলে। সূত্রটি হলো,

বঙ্কিমতা = চতুর্থকসমূহের সমষ্টি – মধ্যমার দ্বিগুণ

অর্থাৎ, $s_k = (Q_৩ + Q_১) - ২(Md)$

শতহারিক ও দশহারিক-এর উপর ভিত্তি করে বঙ্কিমতার মাত্রা নিরূপণের আরেকটি পরিমাপ রয়েছে। শতহারিকের উপর ভিত্তি করে সূত্রটি হলো,

বঙ্কিমতা = $P_{৯০} - ২P_{৫০} + P_{১০}$ (শতহারিকের উপর ভিত্তি করে)

দশহারিকের উপর ভিত্তি করে সূত্রটি হলো,

বঙ্কিমতা = $P_৯ - ২Md + D_১$ (দশহারিকের উপর ভিত্তি করে)

যে তিনটি নিরঙ্কুশ পরিমাপের উল্লেখ করা হলো সেগুলো থেকে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো একটির থেকে আরেকটি ভিন্ন হবে। কারণ, সেগুলো বিভিন্ন নীতিমালার ভিত্তিতে নির্মিত। এর ফলে, তুলনার ক্ষেত্রে সমস্যার সৃষ্টি হয়। তা ছাড়াও, বঙ্কিমতার মাত্রার একই পরিমাপ স্বল্প ভিন্নতা সম্পন্ন বিন্যাসের ক্ষেত্রে যে অর্থ বহন করবে বেশী ভিন্নতা সম্পন্ন বিন্যাসের ক্ষেত্রে সেই একই অর্থ বহন করবে না। কাজেই দুই বা ততোধিক বিন্যাসের মধ্যে যথাযথ তুলনার লক্ষ্যে ভিন্নতার সমস্যা সৃষ্টিকারী প্রভাবটিকে (disturbing influence of variation) আমাদের অপসারিত করতে হবে। আর তা করতে হলে আমাদের বঙ্কিমতার আপেক্ষিক পরিমাপ নির্ণয় করতে হবে। বঙ্কিমতার যে তিনটি নীতিমালার ভিত্তিতে নিরঙ্কুশ পরিমাপগুলো উল্লেখ করা হয়েছে সেই তিনটি নীতিমালার ভিত্তিতে আমরা আপেক্ষিক পরিমাপগুলো আলোচনা করবো। সেগুলো হলো,

১. কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ (Karl Pearson's Coefficient of Skewness)
২. বাউলির বঙ্কিমতার সহগ (Bowley's Coefficient of Skewness)
৩. কেলির বঙ্কিমতার সহগ (Kelly's Coefficient of Skewness)

কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ (Karl Pearson's Coefficient of Skewness):

পিয়ারসন প্রদত্ত বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ের পদ্ধতিটি প্রচুরক নির্ণয়ের অভিজ্ঞতালব্ধ সম্পর্কের ভিত্তিতে নির্মিত হয়েছে।

এই পরিমাপটি বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ের জন্য সবচেয়ে বেশী ব্যবহৃত হয়ে থাকে। পিয়ারসন প্রদত্ত বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ের পদ্ধতিটি প্রচুরক নির্ণয়ের অভিজ্ঞতালব্ধ সম্পর্কের ভিত্তিতে নির্মিত হয়েছে। নিরঙ্কুশ পরিমাপের ক্ষেত্রে আমরা দেখেছি যে, বঙ্কিমতার দিকটি (direction of skewness) নির্ধারিত হয় গাণিতিক গড় থেকে প্রচুরকের পার্থক্যের মাত্রার উপর। যদি গাণিতিক গড়ের মান প্রচুরকের চেয়ে বড় হয় তবে বিন্যাসটি ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম হবে, আর যদি ছোট হয় তবে বিন্যাসটি ঋণাত্মকভাবে বঙ্কিম হবে। আপেক্ষিক পরিমাপের ক্ষেত্রে বঙ্কিমতার মাত্রাটি পরিমিত এককে (standard units) প্রকাশিত হয়। কারণ, আপেক্ষিক পরিমাপের মূলসূত্রটি হলো পরিমাপগুলোকে একক স্বাধীন (independent of measurement unit) হিসাবে প্রকাশ করা।

পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ের সূত্রটি হলো,

$$Sk_P = \frac{\bar{x} - m_o}{\sigma}$$

যেখানে, Sk_P = পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ
$\bar{x}$ = গাণিতিক গড়
m_o = প্রচুরক
σ = পরিমিত ব্যবধান

কিন্তু যখন বঙ্কিমতার মাত্রা খুব বেশি হয়, তখন যে সম্পর্কের উপর ভিত্তি করে পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগটি নির্মিত হয় সেই সম্পর্কটি ভেঙ্গে যায় এবং পিয়ারসনের সহগটি আর নির্ভরযোগ্য ফলাফল দেয় না। যদি প্রচুরকটি যথাযথভাবে সংজ্ঞায়িত না হয়, তবে সূত্রটি সংশোধন করার প্রয়োজন পড়ে। সে ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্রটি ব্যবহার করা হয়ে থাকে:

$$Sk_P = \frac{3(\text{Mean} - \text{Median})}{s}$$

সারণি ৬.১.১-এ প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয় করে দেখানো হলো।

সারণি ৬.১.১: ১০০ জন ছাত্রের মাসিক খরচের ভিত্তিতে পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়

মাসিক খরচ (টাকায়)	f_i	x_i	$d = \frac{x_i - A}{C.I.}$	d^2	fd	fd^2
১০০০ - ১৫০০	৪	১২৫০	–৩	৯	–১২	৩৬
১৫০০ - ২০০০	১৩	১৭৫০	–২	৪	–২৬	৫২
২০০০ - ২৫০০	১৯	২২৫০	–১	১	–১৯	১৯
২৫০০ - ৩০০০	৩২	২৭৫০ = A	০	০	০	০
৩০০০ - ৩৫০০	২০	৩২৫০	১	১	২০	২০
৩৫০০ - ৪০০০	৮	৩৭৫০	২	৪	১৬	৩২
৪০০০ - ৪৫০০	৩	৪২৫০	৩	৯	৯	২৭
৪৫০০ - ৫০০০	১	৪৭৫০	৪	১৬	৪	১৬
মোট	**১০০**				**–৮**	**২০২**

বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ের পূর্বে আমাদের গাণিতিক গড়, প্রচুরক এবং পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করে নিতে হবে।

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N} \times C.I.$$

$$= ২৭৫০ + \frac{-৮}{১০০} \times ৫০০$$

$$= ২৭৫০ - ০.০৮ \times ৫০০$$

$$= ২৭৫০ - ৪০$$

$$= ২৭১০$$

∴ নির্ণীত গাণিতিক গড় হলো ২৭১০

$$m_o = L + \frac{\Delta_১}{\Delta_১ + \Delta_২} \times C.I.$$

$$= ২৫০০ + \frac{১৩}{১৩ + ১২} \times ৫০০$$

$$= ২৫০০ + \frac{১৩}{২৫} \times ৫০০$$

$= ২৫০০ + ০.৫২ \times ৫০০$

$= ২৫০০ + ২৬০$

$= ২৭৬০$

$\therefore$ নির্ণীত প্রচুরক হলো ২৭৬০

$$s = \sqrt{\frac{\sum fd^২}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^২} \times C.I.$$

$$= \sqrt{\frac{২০২}{১০০} - \left(\frac{-৮}{১০০}\right)} \times ৫০০$$

$$= \sqrt{২.০২ - ০.০৮} \times ৫০০$$

$$= \sqrt{১.৯৪} \times ৫০০$$

$= ১.৩৯ \times ৫০০$

$= ৬৯৫$

$\therefore$ নির্ণীত পরিমিত ব্যবধান হলো ৬৯৫

যেহেতু সূত্রে প্রয়োগের জন্য প্রয়োজনীয় মানগুলো নির্ণীত হয়েছে, সেহেতু এবার আমরা কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয় করতে পারি।

$$\therefore \quad Sk_p = \frac{\bar{x} - m_o}{\sigma}$$

$$= \frac{২৭১০ - ২৭৬০}{৬৯৫}$$

$$= \frac{-৫০}{৬৯৫}$$

$= -০.০৭২$

$\therefore$ নির্ণীত কার্ল পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ হলো –০.০৭২

অর্থাৎ, পরিমিত মানের প্রেক্ষিতে গাণিতিক গড় থেকে প্রচুরকের মান ৭.২ শতাংশ বেশী এবং যেহেতু প্রাপ্ত মানটি ঋণাত্মক, সেহেতু বলা যায় যে, বিন্যাসটি ঋণাত্মকভাবে বঙ্কিম।

বাউলির বঙ্কিমতার সহগ (Bowley's Coefficient of Skewness)

বাউলির বঙ্কিমতার সহগ পদ্ধতিটি চতুর্থকের ধারণার উপর প্রতিষ্ঠিত।

এই পদ্ধতিটি চতুর্থকের ধারণার উপর প্রতিষ্ঠিত। উন্মুক্ত শ্রেণী সম্বলিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে যেহেতু গাণিতিক গড় নির্ণয় করা যায় না, সেহেতু পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগও নির্ণয় করা যায় না। উন্মুক্ত শ্রেণী এবং চরম মানের উপস্থিতি সম্বলিত বিন্যাসের ক্ষেত্রে বাউলির বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ের পদ্ধতিটি বিশেষভাবে উপযোগী। অবস্থানগত পরিমাপের ক্ষেত্রে বাউলির পদ্ধতিতে বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয় করা উচিৎ। সারণি ৬.১.২-এ প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে বাউলির বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয় করে দেখানো হলো।

সারণি ৬.১.২: বাউলি প্রদত্ত সূত্র ব্যবহার করে বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়

শ্রেণী সীমা	*ঘটনসংখ্যা*	*ক্রমযোজিত গণসংখ্যা*
০ - ৫০	২৫	২৫
৫০ - ১০০	৫০	৭৫
১০০ - ১৫০	৯০	১৬৫
১৫০ - ২০০	৩০	১৯৫
২০০ - ২৫০	২৬	২২১
২৫০ - ৩০১	৩৯	২৬০
মোট	২৬০	

প্রথমে আমাদের প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক এবং মধ্যমার মান নির্ণয় করে নিতে হবে।

প্রথম চতুর্থক $Q_১ = L_১ + \frac{\frac{n}{৪} - f_c}{f_{Q_১}} \times C.I.$

যেখানে, $Q_১$ = প্রথম চতুর্থক

$L_১$ = চতুর্থক শ্রেণীর নিম্ন সীমা

n = মোট ঘটনসংখ্যা

f_c = ক্রমযোজিত ঘটনসংখ্যা

$f_{Q_১}$ = প্রথম চতুর্থকের ঘটনসংখ্যা

এবার প্রথম চতুর্থক শ্রেণী নির্ণয় করতে হবে।

$\therefore \quad \frac{n}{৪} = \frac{২৬০}{৪} = ৬৫$

যেহেতু প্রতিটি চতুর্থকের মান ৬৫, সেহেতু প্রথম চতুর্থক শ্রেণীটি হলো ৫০ - ১০০ শ্রেণী।

$\therefore \quad Q_১ = L_১ + \frac{\frac{n}{৪} - f_c}{f_{Q_১}} \times C.I.$

$= ৫০ + \frac{৬৫ - ২৫}{৫০} \times ৫০$

$= ৫০ + \frac{৪০}{৫০} \times ৫০$

$= ৫০ + ০.৮ \times ৫০$

$= ৫০ + ৪০$

$= ৯০$

$\therefore$ নির্ণীত $Q_১$ হলো ৯০

এবার তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণী নির্ণয় করতে হবে।

$$\therefore \quad \frac{৩n}{৪} = \frac{৩ \times ২৬০}{৪} = \frac{৭৮০}{৪} \times ৫০ = ১৯৫$$

তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণীটি হলো ১৫০ – ২০০।

$$\therefore \quad Q_৩ = L_১ + \frac{\frac{৩n}{৪} - f_c}{f_{Q_৩}} \times C.I.$$

$$= ১৫০ + \frac{১৯৫ - ১৬৫}{৩০} \times ৫০$$

$$= ১৫০ + \frac{৩০}{৩০} \times ৫০$$

$$= ২০০$$

$\therefore$ নির্ণীত $Q_৩$ হলো ২০০

এরপর মধ্যমার মানটি নির্ণয় করতে হবে।

$$\therefore \quad Md = L_১ + \frac{\frac{n}{২} - F}{f} \times C.I.$$

$$= ১০০ + \frac{১৩০ - ৭৫}{৯০} \times ৫০$$

$$= ১০০ + \frac{৫৫}{৯০} \times ৫০$$

$$= ৫০ + ০.৬১ \times ৫০$$

$$= ১৩০.৫$$

$\therefore$ নির্ণীত Md হলো ১৩০.৫

এবার প্রাপ্ত মানগুলোর ভিত্তিতে বাউলির বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয় করা যেতে পারে।

$$\therefore \quad Sk_B = \frac{Q_৩ + Q_১ - ২Md}{Q_৩ + Q_১}$$

$$= \frac{২০০ + ৯০ - ২ \times ১৩০.৫}{২০০ - ৯২}$$

$$= \frac{২৯০ - ২৬১}{১১০} = \frac{২২৯}{১১০}$$

$$= ০.২৬$$

$\therefore$ নির্ণীত Sk_B হলো ০.২৬

যেহেতু প্রাপ্ত মানটি ধনাত্মক, সেহেতু বলা যায় যে, বিন্যাসটি ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম।

কেলির বঙ্কিমতার সহগ (Kelly's Coefficient of Skewness):

কেলি দশহারিক ও শতহারিকের ধারণার উপর ভিত্তি করে বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ের নিম্নোক্ত সূত্র প্রদান করেছেন।

দশহারিকের উপর ভিত্তি করে,

$$Sk_k = \frac{D_১ + D_৯ - ২\,Md}{D_৯ + D_১}$$

যেহেতু, Sk_k = কেলীর বঙ্কিমতার সহগ

$D_১$ = প্রথম দশহারিক

$D_৯$ = নবম দশহারিক

Md = মধ্যমা

শতহারিকের উপর ভিত্তি করে,

$$Sk_k = \frac{P_{১০} + P_{৯০} - ২\,Md}{P_{৯০} + P_{১০}}$$

যেখানে, Sk_k = কেলীর বঙ্কিমতার সহগ

$P_{১০}$ = ১০ম শতহারিক

$P_{৯০}$ = ৯০ম শতহারিক

Md = মধ্যমা

উপরোক্ত তিনটি পদ্ধতির মধ্যে পিয়ারসনের বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ের পদ্ধতিটিই সর্বাধিক ব্যবহৃত হয়। কারণ, এ পদ্ধতিটি সহজে নির্ণয় করা যায় এবং বোঝা যায়। কেলির পদ্ধতিটি তেমন ব্যবহৃত হয় না বলে সেটি নির্ণয় করার প্রয়োজন নেই।

সারাংশ

উপাত্তরাশি বিভাগে গড়ের চারপাশে বিন্যস্ত রয়েছে তা জানার জন্য পরিসংখ্যানের যে প্রত্যয়টি আমাদের সাহায্য করে তাই হচ্ছে বঙ্কিমতা। বঙ্কিমতা আলোচনায় দু'টি প্রধান বিবেচ্য বিষয় রয়েছে — বঙ্কিমতার দিক এবং বঙ্কিমতার মাত্রা। যদি বিন্যাসটি সুষম হয় তাহলে প্রচুরক, মধ্যমা ও গড়ের মান একই হবে। ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম বিন্যাসে গাণিতিক গড় প্রচুরকের চেয়ে বড় হয় এবং মধ্যমা গড় ও প্রচুরকের মাঝখানে কোন এক স্থানে অবস্থান করে। ঋণাত্মকভাবে বঙ্কিম বিন্যাসে প্রচুরক গাণিতিক গড়ের চেয়ে বড় হয় এবং মধ্যমা গাণিতিক গড় ও প্রচুরকের মধ্যে কোন এক স্থানে অবস্থান করে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক ($\surd$) চিহ্ন দিন –

১। বঙ্কিমতা বলতে একটি বিন্যাসের ..... কে বোঝায়।

ক. সমরূপতা
খ. অসমরূপতা
গ. সমরূপতা ও অসমরূপতা উভয়ই
ঘ. উপরের কোনটিই নয়

২। বঙ্কিমতার মাত্রা হল .....।

ক. গাণিতিক গড় থেকে প্রচুরকের পার্থক্য
খ. মধ্যমা থেকে প্রচুরকের পার্থক্য
গ. গাণিতিক গড় থেকে মধ্যমার পার্থক্য
ঘ. উপরের সবগুলোই সঠিক।

৩। বাউলির বঙ্কিমতার সহগ পদ্ধতিটি কোন ধারণার উপর প্রতিষ্ঠিত?

ক. প্রচুরক
খ. মধ্যমা
গ. গাণিতিক গড়
ঘ. চতুর্থক

সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন

১। বঙ্কিমতা কি?

২। বঙ্কিমতার পরিমাপ বলতে কি বোঝায়?

রচনামূলক প্রশ্ন

১। বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ে কার্ল পিয়ারসন প্রদত্ত পরিমাপটি উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

২। বঙ্কিমতার সহগ নির্ণয়ে বাউলি প্রদত্ত পরিমাপটি উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

পাঠ- ২

পরিঘাত
Moments

এই পাঠ শেষে যা জানা যাবে —

- পরিঘাত কি
- অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিঘাত নির্ণয়
- বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিঘাত নির্ণয়

পরিঘাত কি (What are Moments)?

একটি বিন্যাসের রূপকে বর্ণনা করার জন্য পরিঘাতকে ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

একটি বিন্যাসের রূপকে বর্ণনা করার জন্য পরিঘাতকে ব্যবহার করা হয়ে থাকে। পরিঘাতসমূহ বহু বর্ণনামূলক পরিসংখ্যানিক পরিমাপকে (যেমন, কেন্দ্রীয় প্রবণতা, বিস্তৃতি, বঙ্কিমতা ও সূচালতা) সংক্ষিপ্তকরণের জন্য পরিসংখ্যানের একটি সুবিধাজনক ও ঐক্যবদ্ধকরণের পদ্ধতিকে প্রতিনিধিত্ব করে। পরিঘাতসমূহকে গ্রীক বর্ণমালার 'μ' (মিউ) অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

অবিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে গড় $(\bar{x})$ থেকে কোন চলকের (x) rতম পরিঘাতকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা হয়,

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^r$$

যেখানে, μ_r = গড় থেকে rতম পরিঘাত
N = মোট ঘটনসংখ্যা
x_i = বিন্যাসের প্রতিটি মান
$\bar{x}$ = গাণিতিক গড়

যে কোন অনুমিত গড় বা স্বেচ্ছাচয়িত মান (A) থেকে কোন চলকের (x) rতম পরিঘাতকে নিম্নলিখিত সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়,

$$\mu'_r = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^r$$

যেখানে, μ'_r = স্বেচ্ছাচয়িত মান থেকে কোন চলকের rতম পরিঘাত
x_i = উপাত্তরাশির প্রতিটি মান
A = স্বেচ্ছাচয়িত মান
N = মোট ঘটনসংখ্যা

বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে গড় $(\bar{x})$ থেকে কোন চলকের (x) rতম পরিঘাতকে নিম্নোক্ত সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়,

$$\mu'_r = \frac{1}{N}\sum f_i(x_i - \bar{x})^r$$

যে কোন অনুমিত গড় বা স্বেচ্ছাচয়িত মান (A) থেকে কোন চলকের (x) rতম পরিঘাতকে নিম্নলিখিত সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়,

$$\mu''_r = \frac{1}{N}\sum f_i (x_i - A)^r$$

যেখানে, μ'_r = গড় থেকে কোন চলকের rতম পরিঘাত

μ''_r = স্বেচ্ছাচয়িত মান থেকে কোন চলকের rতম পরিঘাত

N = মোট ঘটনসংখ্যা

f_i = ঘটনসংখ্যা

x_i = শ্রেণী মধ্য-বিন্দু

$\bar{x}$ = গাণিতিক গড়

A = স্বেচ্ছাচয়িত মান

r-এর বিভিন্ন মানের জন্য আমরা বিভিন্ন পরিঘাত পাবো। যদি r = ১ হয়, তবে আমরা প্রথম পরিঘাত পাবো; যদি r = ২ হয়, তবে আমরা দ্বিতীয় পরিঘাত পাবো; এবং এভাবে r-এর মানের উপর ভিত্তি করে পরিঘাতের বিভিন্ন অবস্থান জানতে পারবো। পরিসংখ্যানে প্রথম চারটি পরিঘাত সবচেয়ে বেশী প্রয়োজনীয় এবং গুরুত্বপূর্ণ। নিম্নে গড় থেকে চারটি পরিঘাত নির্ণয়ের সূত্রগুলোকে দেখানো হলো।

অবিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে,

প্রথম পরিঘাত $\mu_১ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{N}$

দ্বিতীয় পরিঘাত $\mu_২ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^২}{N}$

তৃতীয় পরিঘাত $\mu_৩ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^৩}{N}$

চতুর্থ পরিঘাত $\mu_৪ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^৪}{N}$

বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে,

প্রথম পরিঘাত $\mu_১ = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})}{N}$

দ্বিতীয় পরিঘাত $\mu_২ = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^২}{N}$

তৃতীয় পরিঘাত $\mu_৩ = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^৩}{N}$

চতুর্থ পরিঘাত $\mu_৪ = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^৪}{N}$

যেখানে, f_i = ঘটনসংখ্যা

x_i = শ্রেণী মধ্য-বিন্দু

$\bar{x}$ = গাণিতিক গড়

N = মোট ঘটনসংখ্যা

গড় থেকে প্রথম পরিঘাত আমাদের গাণিতিক গড় সম্পর্কে ধারণা দেয় এবং এর মান সবসময় শূন্য হয়। দ্বিতীয় পরিঘাত ভেদাঙ্ক সম্পর্কে, তৃতীয় পরিঘাত বঙ্কিমতা সম্পর্কে, এবং চতুর্থ পরিঘাত সূচালতা সম্পর্কে ধারণা দেয়।

এখানে উল্লেখ্য যে, প্রতিটি পরিঘাত আমাদের একটি বিন্যাসের কোন না কোন বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে ধারণা দেয়। গড় থেকে প্রথম পরিঘাত আমাদের গাণিতিক গড় সম্পর্কে ধারণা দেয় এবং এর মান সবসময় শূন্য হয়। দ্বিতীয় পরিঘাত ভেদাঙ্ক সম্পর্কে, তৃতীয় পরিঘাত বঙ্কিমতা সম্পর্কে, এবং চতুর্থ পরিঘাত সূচালতা সম্পর্কে ধারণা দেয়।

যখন গাণিতিক গড় পূর্ণ সংখ্যা না হয়ে ভগ্নাংশ হয়, তখন পরিঘাতগুলোকে কোন স্বেচ্ছাচয়িত মান বা অনুমিত গড় থেকে নির্ণয় করে পরে প্রকৃত পরিঘাতে রূপান্তরিত করতে হয়। স্বেচ্ছাচয়িত মান থেকে নির্ণীত পরিঘাতকে অশোধিত পরিঘাত বলে এবং সেগুলোকে গ্রীক বর্ণমালার 'ν' অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। প্রথম চারটি অশোধিত পরিঘাত নির্ণয়ের সূত্রগুলো হলো,

প্রথম পরিঘাত $\quad \nu_১ = \dfrac{\sum(x_i - A)}{N}$

দ্বিতীয় পরিঘাত $\quad \nu_২ = \dfrac{\sum(x_i - A)^২}{N}$

তৃতীয় পরিঘাত $\quad \nu_৩ = \dfrac{\sum(x_i - A)^৩}{N}$

চতুর্থ পরিঘাত $\quad \nu_৪ = \dfrac{\sum(x_i - A)^৪}{N}$

স্বেচ্ছাচয়িত মান থেকে নির্ণীত অশোধিত পরিঘাতসমূহকে নিম্নলিখিত সম্পর্ক সূত্রের মাধ্যমে প্রকৃত পরিঘাতে রূপান্তরিত করতে হয়। সেগুলো হলো,

$$\mu_১ = ০$$
$$\mu_২ = \nu_২ - \nu_১^২$$
$$\mu_৩ = \nu_৩ - ৩\nu_২\nu_১ + ২\nu_১^৩$$
$$\mu_৪ = \nu_৪ - ৪\nu_৩\nu_১ + ৬\nu_২\nu_১^২ - ৩\nu_১^৪$$

আমরা জানি যে, পরিঘাত একটি বিন্যাসের আকার ও প্রকৃতি সম্পর্কে বর্ণনা দেয়। কোন বিন্যাসের বঙ্কিমতা এমন একটি বৈশিষ্ট্য যার পরিবর্তনের ফলে বিন্যাসের প্রকৃতির পরিবর্তন ঘটে। তবে এ বিষয়ের গভীরে যাবার পূর্বে আমাদের দু'টি ধ্রুবক (constants) সম্পর্কে জানতে হবে যা দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পরিঘাত থেকে নির্ণয় করা হয়। সেই ধ্রুবক দু'টি হলো, $\beta_১$ (বিটা$_১$) এবং $\beta_২$ (বিটা$_২$)।

$\beta_১$ হলো,

$$\beta_১ = \frac{\mu_৩^২}{\mu_২^৩}$$

$\beta_১$ বঙ্কিমতার পরিমাপ হিসাবে ব্যবহৃত হয়। একটি সুষম বিন্যাসে $\beta_১$ সবসময় শূন্য হবে। তবে বঙ্কিমতার পরিমাপ হিসাবে $\beta_১$-এর সীমাবদ্ধতাটি হলো এটি বঙ্কিমতার দিক (direction) সম্পর্কে আমাদের কোন ধারণা দেয় না। কারণটি হলো, $\mu_৩$-এর মানটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে। কিন্তু $\mu_৩^{২}$-এর মান সবসময় ধনাত্মক হবে। অতএব, $\beta_১ = \frac{\mu_৩^{২}}{\mu_২^{৩}}$ সবসময় ঋণাত্মক হয়ে থাকে। এই সীমাবদ্ধতাটি দূরীভূত হয় যদি আমরা কার্ল পিয়ারসন-এর $\gamma_১$ (গ্যামা$_১$) নির্ণয় করি। $\gamma_১$-কে $\beta_১$-এর বর্গমূল হিসাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়। অর্থাৎ,

$\beta_১$ বঙ্কিমতার পরিমাপ হিসাবে ব্যবহৃত হয়। একটি সুষম বিন্যাসে $\beta_১$ সবসময় শূন্য হবে।

$$\gamma_১ = \sqrt{\beta_১} = \frac{\mu_৩}{\mu_২^{\frac{৩}{২}}} = \frac{\mu_৩}{\sigma^৩}$$

বঙ্কিমতার চিহ্নটি নির্ভর করে $\mu_৩$-এর মানের উপর। যদি $\mu_৩$-এর মান ধনাত্মক হয়, তবে বিন্যাসটি ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম হবে। আর যদি ঋণাত্মক হয়, তবে বিন্যাসটি ঋণাত্মকভাবে বঙ্কিম হবে।

বঙ্কিমতার চিহ্নটি নির্ভর করে $\mu_৩$-এর মানের উপর। যদি $\mu_৩$-এর মান ধনাত্মক হয়, তবে বিন্যাসটি ধনাত্মকভাবে বঙ্কিম হবে, আর যদি ঋণাত্মক হয়, তবে বিন্যাসটি ঋণাত্মকভাবে বঙ্কিম হবে।

$\beta_২$-কে সূচালতার পরিমাপ হিসাবে ব্যবহার করা হয়। অতএব,

$$\beta_২ = \frac{\mu^৪}{\mu_২^{২}}$$

অবিন্যস্ত উপাত্তের গড় থেকে পরিঘাত নির্ণয় (Computing Moments about Mean from Ungrouped Data)

সারণি ৬.২.১-এ পাঁচটি উপাত্ত মান – ২, ৩, ৭, ৮, ও ১০ – ব্যবহার করে গড় থেকে পরিঘাত নির্ণয় করে দেখানো হলো।

সারণি ৬.২.১: অবিন্যস্ত উপাত্তের গড় থেকে পরিঘাত নির্ণয়

x_i	$d = (x_i - \bar{x})$	$d^২ = (x_i - \bar{x})^২$	$d^৩ = (x_i - \bar{x})^৩$	$d^৪ = (x_i - \bar{x})^৪$
২	–৪	১৬	–৬৪	২৫৬
৩	–৩	৯	–২৭	৮১
৭	১	১	১	১
৮	২	৪	৮	১৬
১০	৪	১৬	৬৪	২৫৬
মোট = ৩০	***০***	***৪৬***	***–১৮***	***৬১০***

প্রদত্ত উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড় হলো,

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{৩০}{৫} = ৬$$

নির্ণীত গড় থেকে এবার আমরা প্রথম চারটি পরিঘাত নির্ণয় করবো।

প্রথম পরিঘাত $\mu_১ = \frac{\sum(x_i - \bar{x})}{N} = \frac{০}{৫} = ০$

দ্বিতীয় পরিঘাত $\mu_২ = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^২}{N} = \frac{৪৬}{৫} = ৯.২$

তৃতীয় পরিঘাত $\mu_৩ = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^৩}{N} = \frac{-১৮}{৫} = -৩.৬$

চতুর্থ পরিঘাত $\mu_৪ = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^৪}{N} = \frac{৬১০}{৫} = ১২২$

সারণি ৬.২.১-এ প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে সারণি ৬.২.২-এ স্বেচ্ছাচয়িত মান ৪ থেকে পরিঘাত নির্ণয় করে দেখানো হলো।

সারণি ৬.২.২: অবিন্যস্ত উপাত্তের স্বেচ্ছাচয়িত মান (৪) থেকে পরিঘাত নির্ণয়

x_i	$d = (x_i - A)$	$d^২ = (x_i - A)^২$	$d^৩ = (x_i - A)^৩$	$d^৪ = (x_i - A)^৪$
২	–২	৪	–৮	১৬
৩	–১	১	–১	১
৭	৩	৯	২৭	৮১
৮	৪	১৬	৬৪	২৫৬
১০	৬	৩৬	২১৬	১২৯৬
মোট	**১০**	**৬৬**	**–২৯৮**	**১৬৫০**

স্বেচ্ছাচয়িত মান হিসাবে ৪-কে ধরে আমরা প্রথম চারটি পরিঘাত নির্ণয় করবো।

প্রথম পরিঘাত $\nu_১ = \frac{\sum(x_i - A)}{N} = \frac{১০}{৫} = ২$

দ্বিতীয় পরিঘাত $\nu_২ = \frac{\sum(x_i - A)^২}{N} = \frac{৬৬}{৫} = ১৩.২$

তৃতীয় পরিঘাত $\nu_৩ = \frac{\sum(x_i - A)^৩}{N} = \frac{২৯৮}{৫} = ৫৯.৬$

চতুর্থ পরিঘাত $\nu_৪ = \frac{\sum(x_i - A)^৪}{N} = \frac{১৬৫০}{৫} = ৩৩০$

এখন আমাদের স্বেচ্ছাচয়িত মান থেকে নির্ণীত অশোধিত পরিঘাতগুলোকে নিম্নলিখিত সম্পর্ক সূত্রের মাধ্যমে প্রকৃত পরিঘাতে রূপান্তরিত করতে হবে।

$$\mu_১ = ০$$
$$\mu_২ = \nu_২ - \nu_১^২$$
$$\mu_৩ = \nu_৩ - ৩\nu_২\nu_১ + ২\nu_১^৩$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$$

আমরা জানি যে, গাণিতিক গড় প্রথম পরিঘাতের রূপ নেয় বলে তার মান সবসময় '০' হয়। অতএব,

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$
$$= ১৩.২ - (২)^২$$
$$= ১৩.২ - ৮$$
$$= ৯.২$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3$$
$$= ৫৯.৬ - ৩ (১৩.২ \times ২) + ২ (২)^৩$$
$$= ৫৯.৬ - ৩ \times ২৬.৪ + ২ \times ৮$$
$$= ৫৯.৬ - ৭৯.২ + ১৬$$
$$= - ৩.৬$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$$
$$= ৩৩০ - ৪ (৫৯.৬ \times ২) + ৬ (১৩.২ \times ২^২) - ৩ (২)^৪$$
$$= ৩৩০ - ৪ \times (১১৯.২) + ৬ (১৩.২ \times ৪) - ৩ \times ১৬$$
$$= ৩৩০ - ৪৭৬.৮ + ৬ \times ৫২.৮ - ৪৮$$
$$= ৩৩০ - ৪৭৬.৮ + ৩১৬.৮ - ৪৮$$
$$= ১২২$$

দেখা যাচ্ছে যে, স্বেচ্ছাচয়িত মান থেকে নির্ণীত অশোধিত পরিঘাতগুলো সম্পর্ক সূত্রের মাধ্যমে প্রকৃত পরিঘাতে রূপান্তরের পর গড় থেকে নির্ণীত পরিঘাতের মানের সাথে মিলে গিয়েছে এবং এর ফলে সম্পর্ক সূত্রটির যথার্থতা প্রমাণিত হয়েছে।

বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিঘাত নির্ণয় (Computing Moments from Grouped Data)

বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে প্রথম চারটি পরিঘাত নির্ণয়ের সূত্রগুলো হলো,

প্রথম পরিঘাত $\mu_1 = \dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})}{N}$

দ্বিতীয় পরিঘাত $\mu_2 = \dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$

তৃতীয় পরিঘাত $\mu_3 = \dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{N}$

চতুর্থ পরিঘাত $\mu_4 = \dfrac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{N}$

সারণি ৬.২.৩-এ প্রদত্ত উপাত্ত থেকে উপরোক্ত সূত্রগুলো ব্যবহার করে কেন্দ্রীয় পরিঘাত নির্ণয় করে দেখানো হলো।

সারণি ৬.২.৩: বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে কেন্দ্রীয় পরিঘাত নির্ণয়

C.I.	f_i	x_i	f_ix_i	$(x_i-\bar{x})$	$f_i(x_i-\bar{x})$	$f_i(x_i-\bar{x})^২$	$f_i(x_i-\bar{x})^৩$	$f_i(x_i-\bar{x})^৪$
৪০-৪৫	২৮	৪২.৫	১১৯০	-৮.৭	-২৪৩.৬	২১১৯.৩২	-১৮৪৩৮.০৮৪	১৬০৪১১৩.৩০৮০
৪৫-৫০	২৪	৪৭.৫	১১৪০	-৩.৭	-৮৮.৮	৩২৮.৫৬	১২১৫.৬৭২	৪৪৯৭.৯৮৬৪
৫০-৫৫	১৭	৫২.৫	৮৯২.৫	১.৩	২২.১	২৮.৭৩	৩৭.৩৪৯	৪৮.৫৫৩৭
৫৫-৬০	১৪	৫৭.৫	৮০৫	৬.৩	৮৮.২	৫৫৫.৬৬	৩৫০০.৬৫৮	২২০৫৪.১৪৫৪
৬০-৬৫	১২	৬২.৫	৭৫০	১১.৩	১৩৫.৬	১৫৩২.২৮	১৭৩১৪.৭৬৪	১৯৫৬৫৬.৮৩৩২
৬৫-৭০	৪	৬৭.৫	২৭০	১৬.৩	৬৫.২	১০৬২.৭৬	১৭৩২২.৯৮৮	২৮২৩৬৪.৭০৪৪
৭০-৭৫	১	৭২.৫	৭২.৫	২১.৩	২১.৩	৪৫৩.৬৯	৯৬৬৩.৫৯৭	২০৫৮৩৪.৬১৬১
মোট	**১০০**		**৫১২০**		**০**	**৬০৮১**	**২৮১৮৫.৬**	**৮৭০৮৬৮.১৭**

অতএব, সংজ্ঞাগত সূত্র ব্যবহার করে নির্ণীত প্রথম চারটি পরিঘাত হলো,

$$\mu_১ = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})}{N} = \frac{০}{১০০} = ০$$

$$\mu_২ = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^২}{N} = \frac{৬০৮১}{১০০} = ৬০.৮১$$

$$\mu_৩ = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^৩}{N} = \frac{২৮১৮৫.৬}{১০০} = ২৮১.৮৫৬$$

$$\mu_৪ = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^৪}{N} = \frac{৮৭০৮৬৮.১৭}{১০০} = ৮৭০৮.৬৮১৭$$

সংজ্ঞাগত সূত্রের মাধ্যমে গাণিতিক গড় থেকে পরিঘাত নির্ণয় করা হয়েছে। কিন্তু আমরা জানি যে, সংজ্ঞাগত সূত্রের মাধ্যমে যে কোন পরিমাপ নির্ণয় সময় সাপেক্ষ এবং সংখ্যাগুলো বৃহৎ আকার ধারণ করলে নির্ণয় পদ্ধতিটি জটিল হয়ে পড়ে। সে ক্ষেত্রে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির ব্যবহার তা সহজসাধ্য করে তোলে। সারণি ৬.২.৪-এ সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রথম চারটি পরিঘাত নির্ণয় করে দেখানো হলো।

সারণি ৬.২.৪: বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে কেন্দ্রীয় পরিঘাত নির্ণয়

C.I.	f_i	x_i	$d=\frac{x_i-A}{C.I.}$	fd	$fd^২$	$fd^৩$	$fd^৪$
৪০-৪৫	২৮	৪২.৫	–৩	–৮৪	২৫২	–৭৫৬	২২৬৮
৪৫-৫০	২৪	৪৭.৫	–২	–৪৮	৯৬	–১৯২	৩৮৪
৫০-৫৫	১৭	৫২.৫	–১	–১৭	১৭	–১৭	১৭
৫৫-৬০	১৪	৫৭.৫=A	০	০	০	০	০
৬০-৬৫	১২	৬২.৫	১	১২	১২	১২	১২
৬৫-৭০	৪	৬৭.৫	২	৮	১৬	৩২	৬৪
৭০-৭৫	১	৭২.৫	৩	৩	৯	২৭	৮১

মোট	১০০			–১২৬	৪০২	–৮৯৪	২৮২৬

এখানে লক্ষ্যণীয় যে, সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে বিচ্যুতি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে একটি স্বেচ্ছাচয়িত মান ব্যবহার করা হয়েছে। আমরা জানি যে, স্বেচ্ছাচয়িত মান ব্যবহৃত হলে পরিঘাতগুলো অশোধিত থাকে। সেগুলোকে শোধন করে প্রকৃত পরিঘাতে রূপান্তরিত করতে হয়। অতএব, আমরা প্রথমে চারটি অশোধিত পরিঘাত নির্ণয় করবো এবং তারপর সেগুলোকে সম্পর্ক সূত্রের মাধ্যমে শোধিত পরিঘাতে রূপান্তর করবো।

$$\nu_১ = \frac{\sum fd}{N} \times C.I. = \frac{-১২৬}{১০০} \times ৫ = -১.২৬ \times ৫ = -৬.৩$$

$$\nu_২ = \frac{\sum f(d)^২}{N} \times C.I.^২ = \frac{৪০২}{১০০} \times ৫^২ = ৪.০২ \times ২৫ = ১০০.৫$$

$$\nu_৩ = \frac{\sum f(d)^৩}{N} \times C.I.^৩ = \frac{-৮৯৪}{১০০} \times ৫^৩ = ৮.৯৪ \times ১২৫ = -১১১৭.৫$$

$$\nu_৪ = \frac{\sum f(d)^৪}{N} \times C.I.^৪ = \frac{২৮২৬}{১০০} \times ৫^৪ = ২৮.২৬ \times ৬২৫ = ১৭৬৬২.৫$$

এখন আমরা সম্পর্ক সূত্র ব্যবহার করে শোধিত পরিঘাত নির্ণয় করবো। অতএব,

$$\mu_১ = ০$$

$$\mu_২ = \nu_২ - \nu_১^২$$
$$= ১০০.০৫ - (-৬.৩)^২$$
$$= ১০০.৫ - ৩৯.৬৯$$
$$= ৬০.৮১$$

$$\mu_৩ = \nu_৩ - ৩\nu_২\nu_১ + ২\nu_১^৩$$
$$= -১১১৭.৫ - ৩\{(১০০.৫)(-৬.৩)\} + ২(-৬.৩)^৩$$
$$= -১১১৭.৫ - ৩(-৬৩৩.১৫) + ২(-২৫০.০৪৭)$$
$$= -১১১৭.৫ - ১৮৯৯.৪৫ - ৫০০.০৯৪$$
$$= ১৮৯৯.৪৫ - ১৬১৭.৫৯৪$$
$$= ২৮১.৮৫৬$$

$$\mu_৪ = \nu_৪ - ৪\nu_৩\nu_১ + ৬\nu_২\nu_১^২ - ৩\nu_১^৪$$
$$= ১৭৬৬২.৫ - ৪\{(-১১১৭.৫)(-৬.৩)\} + ৬\{(৬০.৮১)(-৬.৩)\} - ৩(-৬.৩)^৪$$
$$= ১৭৬৬২.৫ - ৪(৭০৪০.২৫) + ৬\{(১০০.৫)(৩৯.৬৩)\} - ৩(১৫৭৫.২৯৬১)$$
$$= ১৭৬৬২.৫ - ২৮১৬১ + ২৩৯৩৩.০৭ - ৪৭২৫.৮৮৩$$
$$= ৪১৫৯৫.৫৭ - ৩২৮৮৬.৮৮৩$$
$$= ৮৭০৮.৬৮১৭$$

দেখা যাচ্ছে যে, সংজ্ঞাগত সূত্রের মাধ্যমে নির্ণীত পরিঘাতগুলোর এবং সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে নির্ণীত পরিঘাতগুলোর মান একই হয়েছে। কাজেই যে কোন একটি সূত্রের মাধ্যমে বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিঘাত নির্ণয় করলেই চলে।

যেহেতু পরিঘাত আমাদের একটি বিন্যাসের আকার ও প্রকৃতি সর্ম্পকে ধারণা দেয়, সেহেতু পরিঘাতের প্রাপ্ত মানগুলো ব্যবহার করে আমরা $\beta_১$ এবং $\beta_২$ পরিমাপ দু'টি (যথাক্রমে বঙ্কিমতা ও সূচালতা পরিমাপ) নির্ণয় করতে পারি। অতএব,

$$\beta_১ = \frac{\mu_৩^{২}}{\mu_২^{৩}} = \frac{(২৮১.৮৫৬)^{২}}{(৬০.৮১)^{৩}} = \frac{৭৯৪৪২.৮০৪৭৪}{২২৪৮৬৬.৬২৯৪} = ০.৩৫৩২$$

$$\beta_২ = \frac{\mu^{৪}}{\mu_২^{২}} = \frac{৮৭০৮.৬৮১৭}{(৬০.৮১)^{২}} = \frac{৮৭০৮.৬৮১৭}{৩৬৯৭.৮৫৬১} = ২.৩৫৫০$$

$\therefore$ $\beta_১ = ০.৩৫৩২$ এবং $\beta_২ = ২.৩৫৫$

আমরা জানি যে, একটি বিন্যাস সুষম ও সম সূচাল হলে $\beta_১ = ০$ এবং $\beta_২ = ৩$ হবে। অতএব, $\beta_১$ এবং $\beta_২$-এর নির্ণীত মান দু'টি দেখে আমরা বলতে পারি যে, বিন্যাসটি পুরোপুরি সুষম এবং সম সূচাল নয়। যদিও $\beta_১$-এর মান দেখে বিন্যাসের বঙ্কিমতার প্রকৃতিটি বোঝা যায় না (কারণ, $\mu_৩^{২}$-এর মান সবসময় ধনাত্মক হয়), তবে $\mu_৩$-এর ধনাত্মক মান অনুযায়ী আমরা বলতে পারি যে, বিন্যাসটি ধনাত্মকভাবে বঙ্কিমতার প্রবণতা প্রদর্শন করছে।

সারাংশ

উপাত্ত বিন্যাসের রূপকে বর্ণনা করার জন্য পরিঘাতকে ব্যবহার করা হয়ে থাকে। প্রতিটি পরিঘাত বিন্যাসের কোন না কোন বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে ধারণা দেয়। যেমন, প্রথম পরিঘাত আমাদের গাণিতিক গড় সম্পর্কে ধারণা দেয়, দ্বিতীয় পরিঘাত ভেদাঙ্ক সম্পর্কে ধারণা দেয়, তৃতীয় পরিঘাত বঙ্কিমতা সম্পর্কে এবং চতুর্থ পরিঘাত সূচালতা সম্পর্কে ধারণা দেয়। প্রথম পরিঘাতের মান সবসময় '০' হয়। দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পরিঘাত থেকে বঙ্কিমতার পরিমাপ $(\beta_১)$ এবং সূচালতার পরিমাপ $(\beta_২)$ নির্ণয় করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক ($\surd$) চিহ্ন দিন –

১। একটি বিন্যাসের রূপকে বর্ণনা করার জন্য ..... ব্যবহার করা হয়।

ক. বঙ্কিমতা
খ. পরিঘাত
গ. সূচালতা
ঘ. স্বাভাবিক বিন্যাস

২। অবিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে প্রথম পরিঘাত নির্ণয়ের সূত্রটি হলো:

ক. $\mu_১ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{N}$

খ. $\mu_১ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^২}{N}$

গ. $\mu_১ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^৩}{N}$

ঘ. $\mu_১ = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^৪}{N}$

৩। একটি সুষম বিন্যাসে $\beta_১$ সবসময় ..... হবে।

ক. শূন্য
খ. এক
গ. দুই
ঘ. তিন

সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন

১। পরিঘাত কি?

২। $\beta_১$ এবং $\beta_২$ কি?

রচনামূলক প্রশ্ন

১। পরিঘাতের ব্যবহার উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

২। নিম্নলিখিত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে প্রথম চারটি পরিঘাত নির্ণয় করুন।

২ ৪ ৬ ৭ ৯

পাঠ- ৩

সূচালতা
Kurtosis

এই পাঠ শেষে যা জানা যাবে —

- সূচালতা কি
- সূচালতার প্রকারভেদ
- সূচালতার পরিমাপ
- অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সূচালতার সহগ নির্ণয়
- বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সূচালতার সহগ নির্ণয়

সূচালতা কি (What is Kurtosis)?

আমরা ইতিমধ্যেই জেনেছি যে, একটি উপাত্ত বিন্যাসকে বিভিন্ন ভাবে বর্ণনা করা যায়। যেমন, গাণিতিক গড় নির্ণয়ের মাধ্যমে একটি বিন্যাসের অন্তর্ভুক্ত উপাত্তরাশির কেন্দ্রীয় প্রবণতা এবং পরিমিত ব্যবধানের মাধ্যমে কেন্দ্রীয় মানের চারপাশে উপাত্তরাশির বিস্তৃতি সম্পর্কে জানতে পারি। পরিঘাত নির্ণয়ের সময় আমরা এও জেনেছি যে, প্রথম পরিঘাত আমাদের গড়, দ্বিতীয় পরিঘাত ভেদাঙ্ক, তৃতীয় পরিঘাত বঙ্কিমতা এবং চতুর্থ পরিঘাত সূচালতা সম্পর্কে ধারণা দেয়। সূচালতার মাধ্যমে আমরা একটি বিন্যাসের আকৃতি সম্পর্কে জানতে পারি। সূচালতার পরিমাপটি হলো দ্বিতীয় পরিঘাতের বর্গের উপর চতুর্থ পরিঘাতের অনুপাত।

সূচালতা একটি গণসংখ্যা রেখার প্রচুরক থেকে সূচ্যগ্রতার মাত্রার বর্ণনা দেয়।

সূচালতা একটি গণসংখ্যা রেখার প্রচুরক থেকে সূচ্যগ্রতার (peakedness) মাত্রার বর্ণনা দেয়। অন্য কথায়, সূচালতা হচ্ছে স্বাভাবিক বিন্যাসের (normal distribution) তুলনায় একটি গণসংখ্যা রেখার উচ্চতার মাত্রার পরিমাপ। সূচালতার মাধ্যমে একটি সুষম বিন্যাসের সূচ্যগ্রতাকে আদর্শ ধরে অন্যান্য বিন্যাসের তুলনা করা হয়।

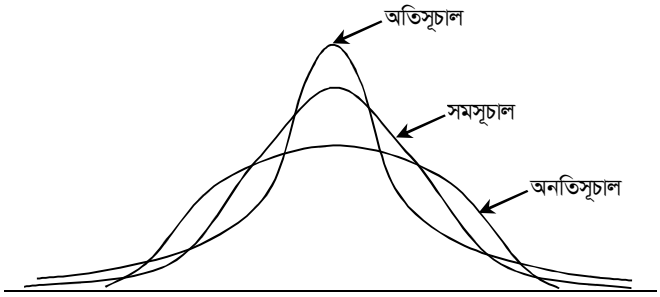
সূচালতার প্রকারভেদ (Types of Kurtosis)

একটি গণসংখ্যা রেখা যদি স্বাভাবিক রেখার তুলনায় বেশী সূচ্যগ্র হয়, তবে সেই রেখাটিকে অতিসূচাল (leptokurtic) রেখা বলে। যদি রেখাটি স্বাভাবিক রেখার তুলনায় কম সূচ্যগ্র হয়, তবে তাকে অনতিসূচাল (platykurtic) রেখা বলে। আর যদি রেখাটি সুষম হয়, অর্থাৎ, স্বাভাবিক রেখার মত হয়, তবে তাকে সমসূচাল (mesokurtic) রেখা বলে (চিত্র ৬.৩.১ দ্রষ্টব্য)।

সমসূচাল রেখা (Mesokurtic Curve)

সমসূচাল রেখার ক্ষেত্রে প্রচুরক, মধ্যমা, ও গাণিতিক গড়ের মান একই হয় এবং সেগুলো রেখার মাঝখানে অবস্থান করে।

একটি সুষম রেখাকে সমসূচাল রেখা বলে। এই রেখাটি একটি এক প্রচুরক সম্পন্ন বিন্যাসের রূপ নেয়, যেখানে রেখার মাঝখানটি উঁচু থাকে এবং প্রান্ত দু'টি ঢালু হয়ে অনুভূমিক রেখায় নেমে যায় তবে স্পর্শ করে না। অর্থাৎ, স্বাভাবিক রেখার সকল বৈশিষ্ট্য সমসূচাল রেখার মধ্যে থাকে। সমসূচাল রেখার ক্ষেত্রে প্রচুরক, মধ্যমা ও গাণিতিক গড়ের মান একই হয় এবং সেগুলো রেখার মাঝখানে অবস্থান করে।



চিত্র ৬.৩.১: সূচালতার বিভিন্ন রূপ

অতিসূচাল রেখা (Leptokurtic Curve)

একটি সুষম রেখার তুলনায় অতি মাত্রায় সূচ্যগ্র রেখাকে অতিসূচাল রেখা বলে।

একটি সুষম রেখার তুলনায় অতি মাত্রায় সূচ্যগ্র রেখাকে অতিসূচাল রেখা বলে। এটিও একটি এক প্রচুরকবিশিষ্ট রেখা, তবে এ ধরণের বিন্যাসে উপাত্ত রাশিমালা খুব বেশী মাত্রায় কেন্দ্রীয় স্থানে গুচ্ছবদ্ধ থাকে এবং রেখার প্রান্তে সংখ্যা মান কম থাকে।

অনতিসূচাল রেখা (Platykurtic Curve)

যে রেখা সুষম রেখার তুলনায় কম সূচ্যগ্র থাকে সেই রেখাকে অনতিসূচাল রেখা বলে।

যে রেখা সুষম রেখার তুলনায় কম সূচ্যগ্র থাকে সেই রেখাকে অনতিসূচাল রেখা বলে। এটি এক প্রচুরকবিশিষ্ট রেখা হলেও বিন্যাসের উপাত্ত রাশিমালা কেন্দ্রের দিকে তেমন ঘনীভূত থাকে না এবং বিন্যাসের দুই প্রান্তের শ্রেণীগুলোতে বেশী পরিমাণে সংখ্যা মান থাকে। এর ফলে রেখার আকৃতিটি অনেকটা ভূমির দিকে চাপা হয়ে থাকে।

সূচালতার পরিমাপ (Measures of Kurtosis)

চতুর্থ পরিঘাতের মাধ্যমে সূচালতার মাত্রা পরিমাপ করা হয়।

অবিন্যস্ত বিন্যাসের ক্ষেত্রে চতুর্থ পরিঘাত হলো,

$$\mu_৪ = \frac{\sum x_i^{৪}}{N}$$

এবং বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে চতুর্থ পরিঘাত হলো,

$$\mu_৪ = \frac{\sum f_i x_i^{৪}}{N}$$

অথবা, $$\mu_৪ = \frac{\sum fd^{৪}}{N}$$

$$\mu_৪ = \nu_৪ - ৪\nu_৩\nu_১ + ৬\nu_২\nu_১^{২} - ৩\nu_১^{৪}$$

কিন্তু বিন্যাসের চতুর্থ পরিঘাত সূচালতা সম্পর্কে আমাদের একটি নিরঙ্কুশ পরিমাপ প্রদান করে। দ্বিতীয় পরিঘাতের মান দিয়ে ভাগ করে পরিমাপটিকে আপেক্ষিক পরিমাপে রূপান্তর করা যায়, যা সূচালতার সহগ নামে পরিচিত। সূচালতার সহগকে $\beta_২$ প্রতীকের মাধ্যমে চিহ্নিত করা হয়। অতএব,

$$\beta_২ = \alpha_৪ = \frac{\mu_৪}{\sigma^{৪}} = \frac{\mu_৪}{\mu_২^{২}}, \text{ এবং } \quad \gamma_২ = \beta_২ - ৩$$

সুষম বিন্যাস বা সমসূচাল রেখার ক্ষেত্রে সূচালতার সহগের মান হবে ৩। অতিসূচাল রেখার ক্ষেত্রে $\beta_২ < ৩$ এবং অনতিসূচাল রেখার ক্ষেত্রে $\beta_২ > ৩$ হবে।

সূচালতা পরিমাপের আরেকটি পরিমাপ রয়েছে, যা চতুর্থক এবং শতহারিকের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়। এই পরিমাপটি নির্ণয়ের সূত্রটি হলো,

$$\kappa = \frac{Q}{P_{৯০} - P_{১০}}$$

যেখানে, κ = সূচালতার সহগ
Q = চতুর্থক
$P_{৯০}$ = ৯০তম শতহারিক
$P_{১০}$ = ১০ম শতহারিক

প্রকৃতপক্ষে, চতুর্থকটি হলো আধা আন্তচতুর্থক পরিসর। সূচালতার সহগটিকে গ্রীক বর্ণমালার ছোট অক্ষরের 'κ' (কাপ্পা)-এর মাধ্যমে চিহ্নিত করা হয়, যা সূচালতার শতহারিক সহগ নামে পরিচিত। একটি স্বাভাবিক বিন্যাসের জন্য 'κ'-এর মান হলো ০.২৬৩। এর চেয়ে বড় মান হলে বিন্যাসটি হবে অতিসূচাল এবং ছোট হলে বিন্যাসটি হবে অনতিসূচাল।

অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সূচালতার সহগ নির্ণয় (Computing Coefficient of Kurtosis from Ungrouped Data)

কোন উপাত্তরাশির আকৃতি সম্পর্কে মন্তব্য করতে হলে সূচালতার সহগ নির্ণয় করতে হবে। সূচালতার সহগ নির্ণয়ের সূত্রটি হলো,

$$\beta_২ = \frac{\mu_৪}{\mu_২^{২}}$$

যেখানে, $\beta_২$ = সূচালতার সহগ
$\mu_৪$ = চতুর্থ পরিঘাত
$\mu_২^{২}$ = দ্বিতীয় পরিঘাতের বর্গ

অতএব, সূত্র অনুযায়ী আমাদের প্রথমে পরিঘাতগুলো নির্ণয় করে নিতে হবে। সারণি ৬.৩.১-এ অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিঘাত নির্ণয় করে দেখানো হলো।

সারণি ৬.৩.১: অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিঘাত নির্ণয়

x_i	$d = (x_i - \bar{x})$	$d^{২} = (x_i - \bar{x})^{২}$	$d^{৩} = (x_i - \bar{x})^{৩}$	$d^{৪} = (x_i - \bar{x})^{৪}$
৩	–৪	১৬	–৬৪	২৫৬
৫	–২	৪	–৮	১৬
৮	১	১	১	১
৯	২	৪	৮	১৬
১০	৩	৯	২৭	৮১
মোট = ৩৫	***০***	***৩৪***	***–৩৬***	***৩৭০***

প্রথমে আমাদের গাণিতিক গড় নির্ণয় করে নিতে হবে।

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{৩৫}{৫} = ৭$$

প্রাপ্ত মানগুলো ব্যবহার করে এবার পরিঘাতগুলো নির্ণয় করতে হবে।

$$\mu_১ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{N} = \frac{০}{৫} = ০$$

$$\mu_২ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^২}{N} = \frac{৩৪}{৫} = ৬.৮$$

$$\mu_৩ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^৩}{N} = \frac{-৩৬}{৫} = ৭.২$$

$$\mu_৪ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^৪}{N} = \frac{৩৭০}{৫} = ৭৪$$

দ্বিতীয় ও চতুর্থ পরিঘাতের মান সূত্রে প্রয়োগ করে আমরা সূচালতার সহগ নির্ণয় করতে পারি। অতএব,

$$\beta_২ = \frac{\mu_৪}{\mu_২^{\ ২}} = \frac{৭৪}{(৬.৮)^২} = \frac{৭৪}{৪৬.২৪} = ১.৬০$$

$$\therefore \quad \beta_২ = ১.৬$$

আমরা জানি যে, যদি $\beta_২ < ৩$ হয়, তবে উপাত্তরাশির বিন্যাসটির আকৃতি হবে অতিসূচাল। অতএব, আমরা সূচালতার প্রাপ্ত সহগের মান (১.৬) দেখে বলতে পারি যে, আমাদের উপাত্তরাশির বিন্যাসটি অতিসূচাল আকৃতির।

বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সূচালতার সহগ নির্ণয় (Computing Coefficient of Kurtosis from Grouped Data)

সারণি ৬.৩.২-এ প্রদত্ত উপাত্ত থেকে আমরা প্রথমে পরিঘাতগুলো নির্ণয় করে নেব। এখানে পরিঘাত নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিটি ব্যবহার করা হবে।

সারণি ৬.৩.২: বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে পরিঘাত নির্ণয়

C.I.	f_i	x_i	$d = \frac{x_i - A}{C.I.}$	fd	$fd^২$	$fd^৩$	$fd^৪$
৬০ - ৬২	৫	৬১	–২	–১০	২০	–৪০	৮০
৬৩ - ৬৫	১৮	৬৪	–১	১৮	১৮	–১৮	১৮
৬৬ - ৬৮	৪২	৬৭ = A	০	০	০	০	০
৬৯ - ৭১	২৭	৭০	১	২৭	২৭	২৭	২৭
৭২ - ৭৪	৮	৭৩	২	১৬	৩২	৬৪	১২৮
মোট	**১০০**			**১৫**	**৯৭**	**৩৩**	**২৫৩**

প্রথমে অশোধিত পরিঘাতগুলো নির্ণয় করে নিতে হবে।

$$\nu_১ = \frac{\sum fd}{N} \times C.I. = \frac{১৫}{১০০} \times ৩ = ০.১৫ \times ৩ = ০.৪৫$$

$$\nu_২ = \frac{\sum fd^২}{N} \times C.I.^২ = \frac{৯৭}{১০০} \times ৩^২ = ০.৯৭ \times ৯ = ৮.৭৩$$

$$\nu_৩ = \frac{\sum fd^৩}{N} \times C.I.^৩ = \frac{৩৩}{১০০} \times ৩^৩ = ০.৩৩ \times ২৭ = ৮.৯১$$

$$\nu_৪ = \frac{\sum fd^৪}{N} \times C.I.^৪ = \frac{২৫৩}{১০০} \times ৩^৪ = ২.৫৩ \times ৮১ = ২০৪.৯৩$$

এবারে আমরা শোধিত পরিঘাতগুলো নির্ণয় করবো।

$$\mu_১ = ০$$

$$\mu_২ = \nu_২ - \nu_১^২$$
$$= ৮.৭৩ - (০.৪৫)^২$$
$$= ৮.৭৩ - ০.২০২৫$$
$$= ৮.৫২৭৫$$

$$\mu_৩ = \nu_৩ - ৩\nu_২\nu_১ + ২\nu_১^৩$$
$$= ৮.৯১ - ৩\{(৮.৭৩)(০.৪৫)\} + ২ (০.৪৫)^৩$$
$$= ৮.৯১ - ৩(৩.৯২৮৫) + ২ (০.০৯১১২৫)$$
$$= ৮.৯১ - ১১.৭৮৫৫ + ০.১৮২২৫$$
$$= - ২.৬৯৩২৫$$

$$\mu_৪ = \nu_৪ - ৪\nu_৩\nu_১ + ৬\nu_২\nu_১^২ - ৩\nu_১^৪$$
$$= ২০৪.৯৩ - ৪ \{(৮.৯১)(০.৪৫)\} + ৬\{(৮.৭৩)(০.৪৫)\} - ৩(০.৪৫)^৪$$
$$= ২০৪.৯৩ - ৪(৪.০০৯৫) + ৬\{(৮.৭৩)(০.২০২৫)\} - ৩(০.০৪১০০৬২৫)$$
$$= ২০৪.৯৩ - ১৬.০৩৮ + ৬ (১.৭৬৭৮২৫) - ০.১২৩০$$
$$= ২০৪.৯৩ - ১৬.০৩৮ + ১০.৬০৬৯ - ০.১২৩০$$
$$= ২১৫.৫৩৬৯ - ১৬.১৬১০$$
$$= ১৯৯.৩৭৫৯$$

দ্বিতীয় ও চতুর্থ পরিঘাতের মান সূত্রে প্রয়োগ করে আমরা সূচালতার সহগ নির্ণয় করতে পারি। অতএব,

$$\beta_২ = \frac{\mu_৪}{\mu_২^২} = \frac{১৯৯.৩৭৫৯}{(৮.৫২৭৫)^২} = \frac{১৯৯.৩৭৫৯}{৭২.৭১৮৩}$$

$$\therefore \quad \beta_২ = ২.৭৪১৮$$

যেহেতু $\beta_২ = ২.৭৪১৮$ এবং প্রায় ৩-এর কাছাকাছি, সেহেতু আমরা বলতে পারি যে, বিন্যাসটি প্রায় সমসূচাল।

সারাংশ

সূচালতা একটি গণসংখ্যা রেখার প্রচুরক থেকে সূচ্যগ্রতার মাত্রার বর্ণনা দেয়। এর মাধ্যমে আমরা একটি বিন্যাসের আকৃতি সম্পর্কে জানতে পারি। সূচালতা পরিমাপটি হলো দ্বিতীয় পরিঘাতের বর্গের উপর চতুর্থ পরিঘাতের অনুপাত। সূচ্যগ্রতার উপর নির্ভর করে তিন ধরণের রেখার পরিচয় আমরা পাই সমসূচাল, অতিসূচাল এবং অনতিসূচাল। যে রেখার মাঝখানটি উঁচু থাকে এবং প্রান্ত দু'টি ঢালু হয়ে অনুভূমিক রেখায় নেমে যায় কিন্তু স্পর্শ করে না তাকে সমসূচাল রেখা বলে। অতি মাত্রায় সূচ্যগ্র রেখাকে অতিসুচাল এবং সুষম রেখার তুলনায় কম সুচ্যগ্র রেখাকে অনতিসূচাল রেখা বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন –

১। সূচালতা পরিমাপটি হলো:

ক. প্রথম পরিঘাতের বর্গের উপর চতুর্থ পরিঘাতের অনুপাত
খ. দ্বিতীয় পরিঘাতের বর্গের উপর চতুর্থ পরিঘাতের অনুপাত
গ. তৃতীয় পরিঘাতের বর্গের উপর চতুর্থ পরিঘাতের অনুপাত
ঘ. উপরের কোনটিই নয়

২। সূচালতা সহগ নির্ণয়ের সঠিক সূত্র কোনটি?

ক. $\beta_২ = \frac{\mu_৪}{\mu_২^{২}}$

খ. $\beta_২ = \frac{\mu_২^{২}}{\mu_৪}$

গ. $\beta_২ = \frac{\mu_৩}{\mu_২^{২}}$

ঘ. $\beta_২ = \frac{\mu}{\mu_২^{২}}$

৩। কোন পরিঘাতের মাধ্যমে সূচালতার মাত্রা পরিমাপ করা হয়?

ক. প্রথম
খ. দ্বিতীয়
গ. তৃতীয়
ঘ. চতুর্থ

সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন

১। সূচালতা কি?

২। কি ভাবে সূচালতার পরিমাপ নির্ণয় করা হয়?

রচনামূলক প্রশ্ন

১। সূচালতা কি? সূচালতার প্রকারভেদসমূহ আলোচনা করুন।

২। কিভাবে অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সূচালতার সহগ নির্ণয় করা হয় উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

পাঠ- ৪

স্বাভাবিক বিন্যাস
Normal Distribution

এই পাঠ শেষে যা জানা যাবে —

- স্বাভাবিক বিন্যাস কি
- স্বাভাবিক বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য
- সসীম বনাব অসীম গণসংখ্যা বিন্যাস
- স্বাভাবিক রেখার অধীনে আয়তন
- পরিমিত স্বাভাবিক সারণির ব্যবহার

স্বাভাবিক বিন্যাস কি (What is Normal Distribution)?

স্বাভাবিক বিন্যাস হলো একটি বিশেষ ধরণের গণসংখ্যা বিন্যাস যা বাস্তবে অনেক অভিজ্ঞতালব্ধ বিন্যাসের খুব কাছাকাছি হয়।

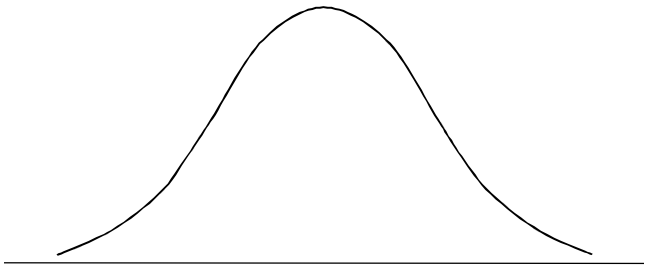
স্বাভাবিক বিন্যাস হলো পরিসংখ্যানের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ একটি সম্ভাবনা বিন্যাস (probability distribution)। যখন আমরা সীমিত সংখ্যক পর্যবেক্ষণ নিয়ে একটি অভিজ্ঞতালব্ধ বিন্যাস উপস্থাপন করি, তখন তা স্বাভাবিক বিন্যাসের রূপ নেয় না। কিন্তু যখন অসীম সংখ্যক পর্যবেক্ষণ নিয়ে একটি বিন্যাস তৈরী করা হয়, তখন তা স্বাভাবিক বিন্যাসের আকার ধারণ করে। অতএব, বলা যায় যে, স্বাভাবিক বিন্যাস হলো একটি বিশেষ ধরণের গণসংখ্যা বিন্যাস, যা বাস্তবে অনেক অভিজ্ঞতালব্ধ বিন্যাসের খুব কাছাকাছি হয়। স্বাভাবিক বিন্যাস সে সকল অভিজ্ঞতালব্ধ বিন্যাসের একটি 'আদর্শ' হিসাবে কাজ করে। এই বিশেষ ধরণের বিন্যাসটি স্বাভাবিক রেখা নামেও পরিচিত। স্বাভাবিক রেখা হলো একটি বিন্যাসের কেবলমাত্র একটি আকার। একটি বিন্যাসের আরো অনেক ধরণের আকার রয়েছে। পরিসংখ্যানে এটি প্রায়ই ব্যবহার করা হয়ে থাকে। কারণ, এটি একটি বৃহৎ সংখ্যক সম্ভাবনা বিন্যাসকে খুব উপযোগীভাবে বর্ণনা করে, যা সিদ্ধান্তমূলক পরিসংখ্যানের ক্ষেত্রে ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

'স্বাভাবিক' শব্দটি 'নৈমিত্তিক' (usual) বা 'সাধারণ' (common) অর্থ বোঝানোর জন্য ব্যবহার করা হয় না। প্রকৃতপক্ষে, এটি স্বাভাবিকের তুলনায় একটি কৃত্রিম নির্মাণ (construct) হতে পারে। যদিও বাস্তব জগতে কদাচিৎ এই বিন্যাসটির দেখা পাওয়া যায়, কিন্তু তাত্ত্বিক বিন্যাস (theoretical distribution) হিসাবে এর গুরুত্ব অপরিসীম। স্বাভাবিক বিন্যাস অধ্যয়নের গুরুত্ব এই মুহূর্তে প্রতিভাত না হলেও পরবর্তী অধ্যায়গুলোতে এর ব্যবহারটি স্পষ্ট হয়ে উঠবে। অভিজ্ঞতালব্ধ বিন্যাসকে (empirical distributions) পরিমিত বিন্যাসের নিকটবর্তী রূপে পাওয়া যায় বলেই শুধু যে স্বাভাবিক বিন্যাস উপযোগী তা নয়, বিশেষ করে আরোহী পরিসংখ্যানে (inductive statistics) এর তাত্ত্বিক তাৎপর্যের কারণেও এটি বিশেষভাবে গুরুত্বপূর্ণ।

স্বাভাবিক বিন্যাস যদিও আরোহী বা সিদ্ধান্তমূলক পরিসংখ্যানের (inductive or inferential statistics) আওতাভুক্ত, বর্ণনামূলক পরিসংখ্যানে এটির আলোচনা করা হচ্ছে প্রধানতঃ তিনটি কারণে। *প্রথমতঃ*, এটি একটি সমসূচাল রেখা। *দ্বিতীয়তঃ*, বিস্তৃতির পরিমাপ হিসাবে পরিমিত ব্যবধানের ব্যাখ্যা দেবার জন্য এটি বিশেষভাবে সাহায্য করে। *তৃতীয়তঃ*, পরিসংখ্যানগত পরীক্ষায় (statistical tests) ব্যবহারের লক্ষ্যে একটি পূর্ব ধারণা পেতে সাহায্য করে। অতএব, স্বাভাবিক বিন্যাস সম্পর্কে আলোচনাটি এখনই করা প্রয়োজন যাতে পরবর্তীতে আমাদের অসুবিধায় পড়তে না হয়।

স্বাভাবিক রেখা হলো একটি সুষম এবং এক প্রচুরক সম্বলিত বিন্যাস, যার গড়, মধ্যমা এবং প্রচুরক যুগপৎভাবে একই স্থানে মিলে যায়।

সুনির্দিষ্টভাবে বলা যায় যে, স্বাভাবিক রেখা হলো বিশেষ ধরণের একটি সুষম মসৃণ রেখা। যেহেতু স্বাভাবিক রেখা নিখুঁতভাবে মসৃণ এবং অনির্দিষ্টভাবে বৃহৎ সংখ্যক পর্যবেক্ষণের উপর ভিত্তি করে গঠিত, সেহেতু এটিকে কেবলমাত্র প্রকৃত উপাত্ত সম্বলিত গণসংখ্যা বিন্যাস দিয়েই সঠিকভাবে নির্মাণ করা সম্ভব। এটি আকৃতিতে একটি ঘন্টার (bell-shaped) মত। যেহেতু এটি একটি সুষম এবং এক প্রচুরক সম্বলিত (symmetrical and unimodal) বিন্যাস, সেহেতু এর গড়, মধ্যমা এবং প্রচুরক যুগপৎভাবে একই স্থানে মিলে যায়। স্বাভাবিক বিন্যাসের সাধারণ রূপটি চিত্র ৬.৪.১-এ দেখানো হলো।



চিত্র ৬.৪.১: স্বাভাবিক বিন্যাসের সাধারণ রূপ

আমরা পূর্বের পাঠসমূহে জেনেছি যে, একটি স্বাভাবিক বিন্যাসের সূচালতার মান হলো ৩ এবং যেহেতু এটি একটি সুষম রেখা, সেহেতু এটির বঙ্কিমতার মান হলো '০'। এটি একটি এক প্রচুরক সম্পন্ন বিন্যাস, যা দেখতে ঘন্টা আকৃতির এবং যাকে সূক্ষ্মভাবে নিম্নলিখিত সূত্রের মাধ্যমে বর্ণনা করা যায়ঃ

$$y = \frac{১}{\sigma\sqrt{২\pi}} e^{\frac{১(x_i-\bar{x})^২}{s}}$$

যেখানে, y = যে কোন প্রদত্ত x মানের জন্য স্বাভাবিক রেখার উচ্চতা

x = যে কোন সংখ্যা মান

e = natural logarithm-এর ভিত্তি, যার মান হলো ২.৭১৮২৮

π = 'পাই' ধ্রুবক, যার মান হলো ৩.১৪১৫৯

σ = পরিমিত ব্যবধান

$\bar{x}$ = গাণিতিক গড়

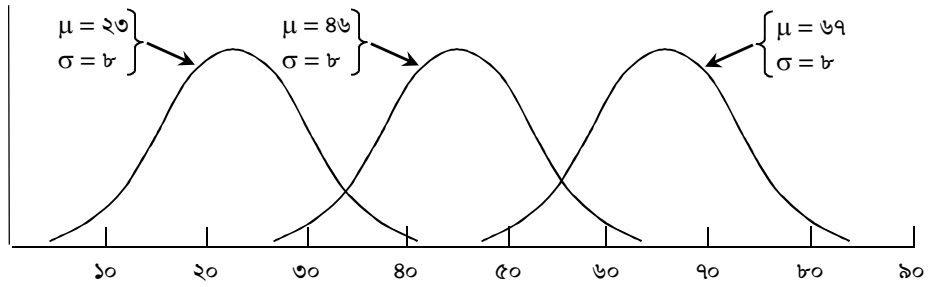
সূত্রের মধ্যে লক্ষ্যণীয় বিষয়গুলো হলো যে, y-হলো যে কোন প্রদত্ত x-এর মানের জন্য স্বাভাবিক রেখার উচ্চতা। e এবং π হলো দু'টি ধ্রুবক মান (constant value) যা আমাদের নির্ণয় করতে হবে না। সূত্রটি কেবলমাত্র দু'টি সংক্ষিপ্ত পরিমাপের সাথে সম্পৃক্ত। একটি হলো গাণিতিক গড় ($\bar{X}$) এবং অপরটি হলো পরিমিত ব্যবধান (σ)। অতএব, স্বাভাবিক রেখার প্রকৃত রূপটি জানা যাবে যদি আমরা গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধানের মান দু'টি পাই। অন্য কথায়, বিভিন্ন স্বাভাবিক রেখা প্রতিটি সংশি- ষ্ট বিন্যাসের গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধানের সমন্বয়ে গঠিত।

স্বাভাবিক রেখার গাণিতিক সূত্রটি গণিতশাস্ত্রবিদদের কাছে অপেক্ষাকৃতভাবে সহজ হলেও এই পর্যায়ের পাঠকদের কাছে বিষয়টি এত সহজ নয়। তবে এখানে স্বস্তির বিষয়টি হলো যে, স্বাভাবিক রেখার প্রতিটি বিন্দু (y-এর মান) নির্ণয়ের জন্য এই সূত্রটি আমাদের কখনও ব্যবহার করতে হবে না। কারণ, সেই মানগুলো পাবার জন্য পরিমিত স্বাভাবিক সারণি (standard normal table) প্রস্তুত করা হয়েছে। অতএব, সূত্রটি মুখস্ত করে মনে রাখারও তেমন প্রয়োজন নেই। এখানে এটি উল্লেখ করা হয়েছে এই তাত্ত্বিক বিন্যাসের কিছু বৈশিষ্ট্যকে বোঝা ও পরীক্ষা করার জন্য। স্বাভাবিক রেখা যে একটি বিশেষ

ধরণের রেখা, যা গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধানের উপর ভিত্তি করে রচিত, তা বোঝানোর জন্য এখানে এটির উল্লেখ করা হয়েছে।

কোন স্বাভাবিক রেখার সুনির্দিষ্ট সমীকরণটি পাওয়া যেতে পারে সেই বিন্যাসের গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধানের যথাযথ মান ব্যবহার করে। এই দু'টি পরিমাপের মানের তারতম্য হলে একটি বিন্যাসের আকৃতি ও অবস্থানের উপর তার প্রভাব পড়বে। যেমন, যদি তিনটি বিন্যাসের তিনটি ভিন্ন গড় মান (যথাক্রমে ২৩, ৪৬ এবং ৬৭) এবং একই পরিমিত ব্যবধানের মান পাওয়া যায় (যেমন, ৮), সে ক্ষেত্রে স্বাভাবিক রেখার আকৃতির কোন পরিবর্তন হবে না তবে রেখাগুলোর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটবে।

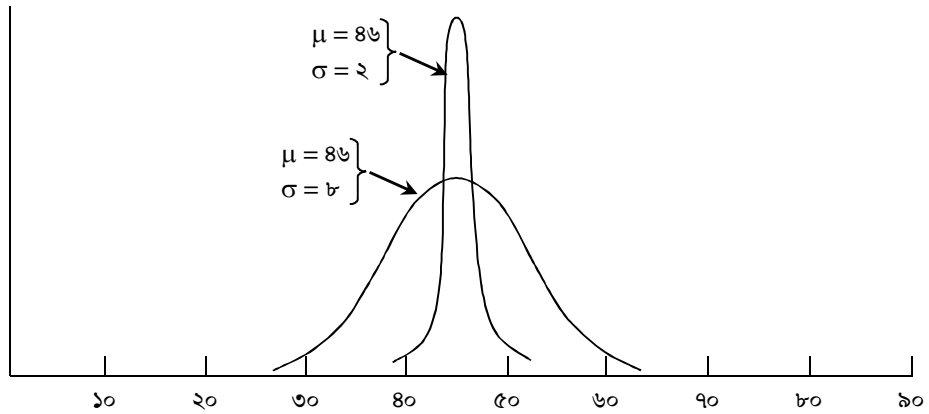
তিনটি বিন্যাসের তিনটি ভিন্ন গড় মান এবং একই পরিমিত ব্যবধানের মান পাওয়া যায়, সে ক্ষেত্রে স্বাভাবিক রেখার আকৃতির কোন পরিবর্তন হবে না, তবে রেখাগুলোর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটবে।



চিত্র ৬.৪.২-এ তা দেখানো হলো।

চিত্র ৬.৪.২ : তিনটি স্বাভাবিক রেখার অবস্থানগত ভিন্নতা

যদি দু'টি বিন্যাসের পরিমিত ব্যবধানের মান ভিন্ন হয় (যথাক্রমে ২ ও ৮) এবং গড় মান একই থাকে (যেমন, ৪৬), সে ক্ষেত্রে রেখার অবস্থানের কোন পরিবর্তন হবে না, তবে আকৃতির পরিবর্তন হবে। চিত্র ৬.৪.৩-এ তা দেখানো হলো।



চিত্র ৬.৪.৩ : দু'টি ভিন্ন স্বাভাবিক রেখা

যদি দু'টি বিন্যাসের পরিমিত ব্যবধানের মান ভিন্ন হয় এবং গড় মান একই থাকে, সে ক্ষেত্রে রেখার অবস্থানের কোন পরিবর্তন হবে না, তবে আকৃতির পরিবর্তন হবে।

চিত্র দু'টি পর্যালোচনা করলে একটি বিষয় স্পষ্ট হয়ে উঠে যে, গড়ের পরিবর্তনের ফলে স্বাভাবিক রেখার আকৃতির কোন পরিবর্তন হয় নি, কিন্তু অবস্থানের পরিবর্তন হয়েছে এবং পরিমিত ব্যবধানের পরিবর্তনের ফলে রেখার অবস্থানের কোন পরিবর্তন হয় নি, কিন্তু আকৃতির পরিবর্তন হয়েছে। একটি বিষয় এখানে বিশেষভাবে মনে রাখা প্রয়োজন যে, সব সুষম-ঘন্টা আকৃতির রেখাই স্বাভাবিক রেখা নয়। একই পরিমিত ব্যবধান হওয়া সত্ত্বেও এক প্রচুরক বিশিষ্ট সুষম রেখা স্বাভাবিক রেখার চেয়ে অধিক সূচাল হতে পারে আবার কম সূচাল হতে পারে। আমরা জানি যে, যে রেখা স্বাভাবিক রেখার চেয়ে বেশী সূচাল তাকে অতিসূচাল রেখা বলে এবং যে রেখা স্বাভাবিক রেখার চেয়ে কম সূচাল হয় তাকে অনতিসূচাল রেখা বলে। অতিসূচাল ও অনতিসূচাল রেখার সমীকরণগুলো গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধান ছাড়াও অন্যান্য সংক্ষিপ্ত পরিমাপের সাথে সম্পৃক্ত।

স্বাভাবিক বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য (Characteristics of Normal Distribution)

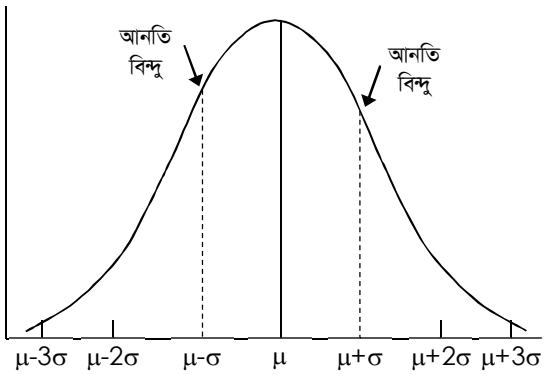
একটি স্বাভাবিক বিন্যাসের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলো রয়েছে:

স্বাভাবিক বিন্যাস হলো একটি গাণিতিকভাবে সংজ্ঞায়িত অপেক্ষক, যা কেবলমাত্র কিছু গণসংখ্যা বিন্যাস দ্বারা আসন্ন হয়।

১. স্বাভাবিক বিন্যাস হলো একটি গাণিতিকভাবে সংজ্ঞায়িত অপেক্ষক (mathematically defined function), যা কেবলমাত্র কিছু গণসংখ্যা বিন্যাস দ্বারা আসন্ন (approximated) হয়।

২. স্বাভাবিক বিন্যাস সুষম এবং সমগ্রকের গড় মানের উপর কেন্দ্রীভূত, যা গ্রীক বর্ণমালার ছোট অক্ষরের 'μ' ('মিউ') প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত হয়। পরিমিত রেখার দুই অর্ধেক সমগ্রক গড় মানের দু'দিকে দু'টি মুখোমুখি প্রতিবিম্ব (mirror image) তৈরী করে।

৩. স্বাভাবিক রেখা যে বিন্দুতে অবতল (concave) থেকে উত্তলে (convex) পরিবর্তিত হয়, যা আনতি বিন্দু (point of inflection) নামে আখ্যায়িত হয়, সেই বিন্দুগুলো গড় থেকে উভয় দিকে ১ পরিমিত ব্যবধান দূরত্বে অবস্থান করে। চিত্র ৬.১.১-এ তা চিহ্নিত করে দেখানো হলো।

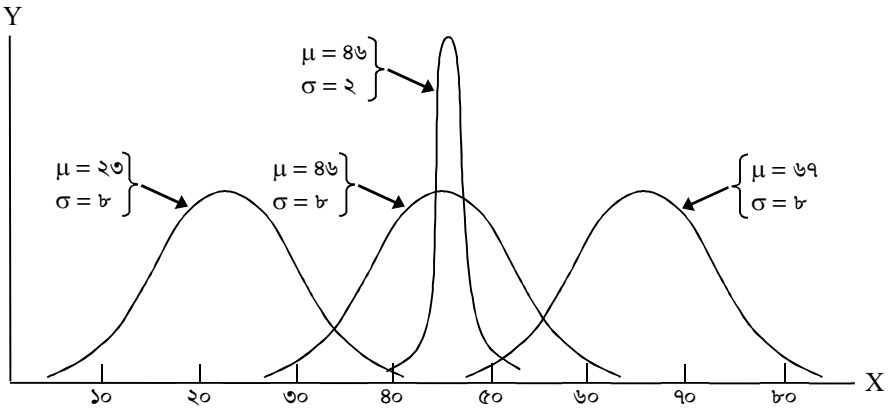


চিত্র ৬.১.১ঃ একটি স্বাভাবিক রেখার আনতি বিন্দু চিহ্নিতকরণ

স্বাভাবিক রেখার প্রান্ড় দু'টি অনুভূমিক রেখার কাছাকাছি অবস্থান করে, কিন্তু কখনোই স্পর্শ করে না।

৪. স্বাভাবিক রেখার প্রান্ত দু'টি অনুভূমিক রেখার কাছাকাছি অবস্থান করে, কিন্তু কখনোই স্পর্শ করে না। তার অর্থ হলো, সবচেয়ে উচ্চ এবং নিম্ন x-মানের জন্যও কোন 'শূন্য' y-মান হয় না। তবে এই মানগুলো প্রায় শূন্যের কাছাকাছি হয়।

৫. প্রকৃতপক্ষে, অসীম সংখ্যক স্বাভাবিক রেখা রয়েছে। অর্থাৎ, গড় (μ) ও পরিমিত ব্যবধানের (σ) প্রতিটি সম্ভাব্য মানের জন্য একটি ভিন্ন স্বাভাবিক রেখা রয়েছে, যার কিছু নমুনা চিত্র ৬.১.২-এ প্রদর্শন করা হলো।



চিত্র ৬.১.২: পরিবর্তিত গড় ও পরিমিত ব্যবধানের মানের উপর ভিত্তি করে কয়েক ধরণের স্বাভাবিক রেখা

চিত্রটিতে লক্ষ্য করা যায় যে, গড়-এর (μ) মান পরিবর্তন হবার সাথে সাথে অনুভূমিক রেখায় স্বাভাবিক রেখার অবস্থানের পরিবর্তন ঘটেছে এবং পরিমিত ব্যবধানের (σ) মান পরিবর্তনের সাথে সাথে বিন্যাসের ব্যাপ্তির পরিবর্তনের মাধ্যমে স্বাভাবিক রেখার রূপের পরিবর্তন ঘটেছে।

একটি স্বাভাবিক বিন্যাসে গড়, মধ্যমা ও প্রচুরকের মান সমান হয়।

৬. স্বাভাবিক রেখার একটি সর্বোচ্চ বিন্দু রয়েছে যা গড় মানে ঘটে। আমরা যতই গড় থেকে দু'দিকে নামতে থাকি স্বাভাবিক রেখার উচ্চতা ততই কমতে থাকে। রেখাটি ভূমির দিকে নামতে থাকে কিন্তু কখনই ভূমিকে স্পর্শ করে না।

স্বাভাবিক রেখা হলো একটি এক প্রচুরক বিশিষ্ট রেখা।

৭. যেহেতু স্বাভাবিক রেখায় একটি মাত্র সর্বোচ্চ বিন্দু রয়েছে, সেহেতু স্বাভাবিক রেখা হলো একটি এক প্রচুরক বিশিষ্ট রেখা। অর্থাৎ, এর একটি মাত্র প্রচুরক রয়েছে এবং একটি স্বাভাবিক বিন্যাসের গড়, মধ্যমা ও প্রচুরকের মান সমান হয়।

৮. স্বাভাবিক রেখায় প্রথম এবং তৃতীয় চতুর্থক দু'টি মধ্যমা থেকে সমান দূরত্বে অবস্থান করে।

৯. একটি স্বাভাবিক বিন্যাসে $\beta_১ = ০$ এবং $\beta_২ = ৩$ হয়।

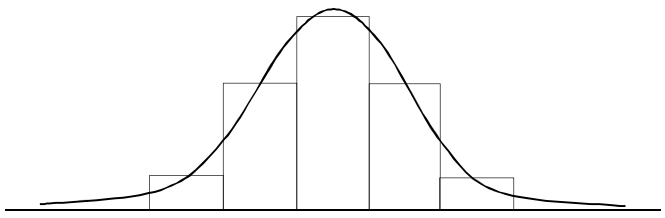
১০. একটি স্বাভাবিক রেখায় গড় থেকে ± ১, ± ২ এবং ± ৩ পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে ৬৮.২৭%, ৯৫.৪৫% এবং ৯৯.৭৪% আয়তন দখল করে থাকে।

সসীম বনাম অসীম গণসংখ্যা বিন্যাস (Finite Versus Infinite Frequency Distributions)

উপাত্তের সংক্ষিপ্তকরণ ও উপস্থাপন সম্পর্কে আলোচনা করতে গিয়ে আমরা ইউনিট ৩-এ গণসংখ্যা নিবেশন সম্পর্কে বিষদভাবে জেনেছি। সেখানে আমরা পর্যবেক্ষণলব্ধ উপাত্তরাশিকে শ্রেণীবদ্ধ করে কতগুলো শ্রেণী ব্যাপ্তির মধ্যে ঘটনসংখ্যা বিন্যাস তৈরী করেছি, যা গণসংখ্যা নিবেশন হিসাবে পরিচিত হয়েছে। অনেক বৃহৎ সংখ্যার উপাত্তরাশি নিয়ে গঠিত হলেও প্রকৃতপক্ষে এই গণসংখ্যা নিবেশনগুলো সসীম সংখ্যক পর্যবেক্ষণ দ্বারা প্রস্তুত করা হয়ে থাকে।

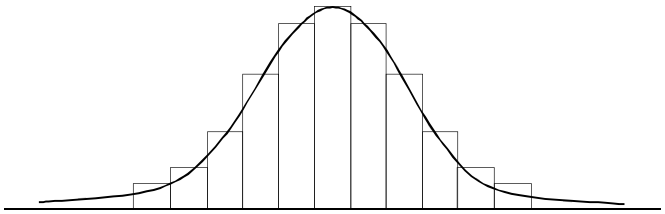
গণিতশাস্ত্রবিদগণ কিন্তু প্রায়ই অসীম সংখ্যক উপাত্তরাশির ভিত্তিতে গঠিত বিন্যাসকে উপযোগী মনে করেন। আয়তলেখ বা গণসংখ্যা বহুভুজের মাধ্যমে প্রকাশিত খাঁজ কাটা পর্যবেক্ষণলব্ধ বিন্যাসের পরিবর্তে অসীম সংখ্যক পর্যবেক্ষণের ভিত্তিতে গঠিত একটি মসৃণ রেখা অনুমান করা যায়, যা তুলনামূলকভাবে সরল গাণিতিক সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশিত হয়। স্বাভাবিক রেখা হলো এমন একটি রেখা। কিভাবে এই মসৃণ রেখাটি বিকশিত হয় তা দেখা যাক।

ধরা যাক, একটি আয়তলেখের পাঁচটি শ্রেণী ব্যাপ্তি রয়েছে এবং অনুমান করা যাক যে, বিন্যাসটি সুষম। এই পাঁচ শ্রেণী ব্যাপ্তি সম্পন্ন কল্পিত বিন্যাসটিকে আয়তলেখের মাধ্যমে উপস্থাপন করলে শ্রেণী ব্যাপ্তিগুলো প্রশস্ত হবে এবং চিত্রটি হবে নিম্নরূপ,



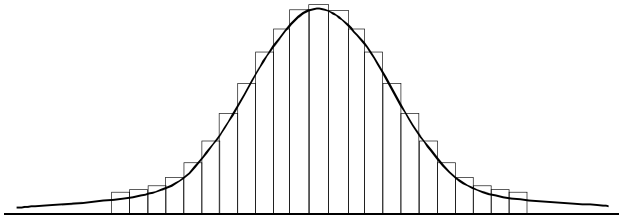
চিত্র ৬.৪.৩: পাঁচ শ্রেণী ব্যাপ্তি সম্পন্ন একটি বিন্যাসের আয়তলেখ

কিন্তু যদি পর্যবেক্ষণের সংখ্যা বৃদ্ধি করা যায়, তবে শ্রেণী ব্যাপ্তিগুলো সংকীর্ণ হবে এবং সেই শ্রেণী ব্যাপ্তিগুলোকে আয়তলেখে উপস্থাপন করলে চিত্রটি হবে নিম্নরূপ,



চিত্র ৬.৪.৪ : অধিক সংখ্যক শ্রেণী ব্যাপ্তি সম্পন্ন একটি বিন্যাসের আয়তলেখ

যদি পর্যবেক্ষণ সংখ্যা আরো বৃদ্ধি করা যায়, তবে শ্রেণী ব্যাপ্তির সংখ্যা আরো বৃদ্ধি পাবে এবং সেগুলো আরো সংকীর্ণ হবে। সেই শ্রেণী ব্যাপ্তি সম্বলিত বিন্যাসটিকে আয়তলেখে উপস্থাপন করলে চিত্র ৬.৪.৫-এর রূপ নেবে।



চিত্র ৬.৪.৫: আরো অধিক সংখ্যক শ্রেণী ব্যাপ্তিসম্পন্ন বিন্যাসের আয়তলেখ

প্রতিটি চতুর্ভূজ-এর অধীনে যে আয়তন রয়েছে তা প্রতিটি শ্রেণী ব্যাপ্তির অন্তর্ভুক্ত পর্যবেক্ষণের সমানুপাতকে প্রতিনিধিত্ব করে।

চিত্রগুলোকে পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যে, মসৃণ রেখাটি তৈরী হয়েছে প্রতিটি সমকোণী চতুর্ভুজ বা আয়তক্ষেত্রের (rectangles) উপরের মধ্য-বিন্দুকে যোগ করে। চিত্রগুলো থেকে এটি স্পষ্ট যে, চতুর্ভুজের সংখ্যা যত বৃদ্ধি পেয়েছে, রেখাটি তত বেশী মসৃণ হয়েছে। অন্য কথায়, প্রতিটি শ্রেণী ব্যাপ্তি যত সংকীর্ণ হয়েছে, রেখাটি তত মসৃণ হয়েছে। এই ভাবে উত্তরোত্তর পর্যবেক্ষণ সংখ্যা বৃদ্ধি এবং শ্রেণী ব্যাপ্তির সংকীর্ণকরণের ফলে এক সময় দেখা যাবে যে, শ্রেণী ব্যাপ্তিগুলোর মধ্যে আর কোন পার্থক্য থাকছে না। ফলে, রেখাটি মসৃণ থেকে মসৃণতর হবে। আমরা অসীম সংখ্যক পর্যবেক্ষণ নিয়ে বাস্তবে কাজ করতে না পারলেও কাঙ্খিত মাত্রায় শুদ্ধতার (accuracy) মধ্যে বৃহৎ সংখ্যক চতুর্ভুজকে অনুমান করতে পারি, যা মসৃণ রেখায় আসন্ন (approximate) হবে। এটি মনে রাখা প্রয়োজন যে, প্রতিটি চতুর্ভুজ-এর অধীনে যে আয়তন রয়েছে তা প্রতিটি শ্রেণী ব্যাপ্তির অন্তর্ভুক্ত পর্যবেক্ষণের সমানুপাতকে প্রতিনিধিত্ব করে।

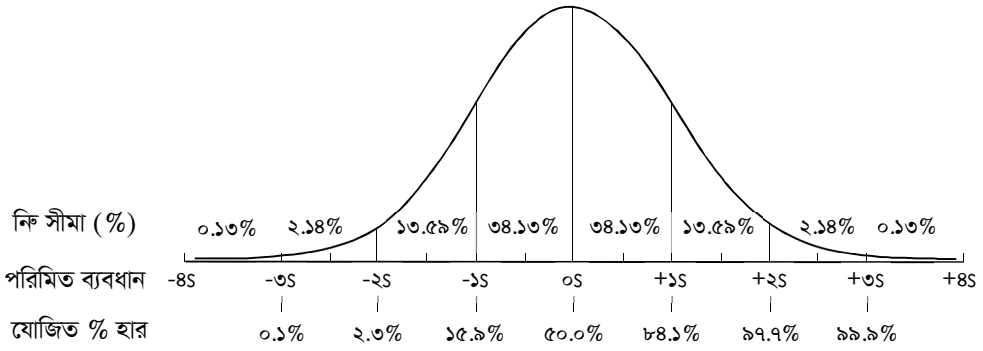
স্বাভাবিক রেখার অধীনে আয়তন (Areas under Normal Curve)

একটি স্বাভাবিক রেখার গড় ও পরিমিত ব্যবধান যাই হোক না কেন গড় এবং যে কোন মানের অক্ষের মধ্যে একটি নির্দিষ্ট আয়তন বা নির্দিষ্ট পরিমাণ পর্যবেক্ষণ সংখ্যা থাকবে, যা পরিমিত ব্যবধান এককের প্রেক্ষিতে গড় থেকে একটি সুনির্দিষ্ট দূরত্ব দ্বারা নির্ধারিত হয়।

একটি নির্দিষ্ট শ্রেণী ব্যাপ্তির অধীনে কি পরিমাণ পর্যবেক্ষণ রয়েছে তা নিরূপণ করা আমাদের প্রায়ই প্রয়োজন হয়ে পড়ে। সৌভাগ্যবশতঃ, স্বাভাবিক রেখার একটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য রয়েছে যেটি সেই কাজকে তুলনামূলকভাবে সহজ করে তোলে। একটি স্বাভাবিক রেখার গড় ও পরিমিত ব্যবধান যাই হোক না কেন গড় এবং যে কোন মানের অক্ষের (ordinate) মধ্যে একটি নির্দিষ্ট (constant) আয়তন বা নির্দিষ্ট পরিমাণ পর্যবেক্ষণ সংখ্যা থাকবে, যা পরিমিত ব্যবধান এককের প্রেক্ষিতে গড় থেকে একটি সুনির্দিষ্ট দূরত্ব দ্বারা নির্ধারিত হয়।

আমরা জানি যে, একটি স্বাভাবিক রেখায় গড় থেকে ±১, ±২ এবং ±৩ পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে ৬৮.২৭, ৯৫.৪৫, এবং ৯৯.৭৪ শতাংশ আয়তন দখল করে থাকে। অতএব, আমরা যদি গড় থেকে

ডান দিকে এক পরিমিত ব্যবধান যাই, তবে আমরা নিশ্চিতভাবে বলতে পারি যে, গড় থেকে সেই বিন্দুতে অঙ্কিত অক্ষের আয়তন ৩৪.১৩ শতাংশ। অতএব, গড়ের দু'পাশে এক পরিমিত ব্যবধান দূরত্বে দু'টি অক্ষের মধ্য দ্বিগুণ আয়তন ৬৮.২৭ শতাংশ পর্যবেক্ষণকে অন্তর্ভুক্ত করে। অন্য কথায়, গড় থেকে এক পরিমিত ব্যবধানের মধ্যে সবসময় দুই তৃতীয়াংশের কিছু বেশী পরিমাণ পর্যবেক্ষণ থাকবে। একইভাবে, গড় এবং দুই পরিমিত ব্যবধান দূরত্বের একটি অক্ষের মধ্যেকার আয়তন সবসময়ই ৪৭.৭৩ শতাংশ হবে এবং গড় থেকে দুই পরিমিত ব্যবধান দূরত্বের এক জোড়া অক্ষের মধ্যে ৯৫ শতাংশের কিছু বেশী পর্যবেক্ষণ থাকে। যদিও তত্ত্বগতভাবে একটি স্বাভাবিক রেখা দু'দিকেই অসীমভাবে বিস্তৃত থাকে, কিন্তু প্রকৃতপক্ষে গড় থেকে তিন পরিমিত ব্যবধান দূরত্বের মধ্যে প্রায় সবগুলো (৯৯.৭৪



শতাংশ) পর্যবেক্ষণ অন্তর্ভুক্ত থাকে।

চিত্র ৬.৪.৬: স্বাভাবিক রেখার অধীনে আয়তন

স্বাভাবিক রেখা পরিমিত ব্যবধানের ব্যাখ্যা প্রদানে সহায়ক হলেও পরিমিত ব্যবধানের সংজ্ঞা প্রদানে এই বৈশিষ্ট্যটিকে ব্যবহার করা যায় না।

তবে গড় থেকে দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য সবসময় পরিমিত ব্যবধানের যথাযথ গুণিতক (exact multiples of standard deviations) নিতে হবে এমন নয়। একটি স্বাভাবিক রেখার অধীনে যে কোন দু'টি অক্ষের মধ্যেকার আয়তন নির্ণয় করা সম্ভব। যেমন, আমরা যদি গড়ের দু'পাশে ১.৯৬ পরিমিত ব্যবধান দূরত্বে যাই, তবে আমরা ৯৫ শতাংশ আয়তন পাবো এবং গড় থেকে ২.৫৮ পরিমিত ব্যবধান দূরত্বে ৯৯ শতাংশ আয়তন অন্তর্ভুক্ত হবে। স্বাভাবিক রেখার এই বৈশিষ্ট্যটি পরিমিত ব্যবধানের ব্যাখ্যায় বিশেষভাবে সহায়ক হয়। তবে এটি মনে রাখা প্রয়োজন যে, স্বাভাবিক রেখা পরিমিত ব্যবধানের ব্যাখ্যা প্রদানে সহায়ক হলেও পরিমিত ব্যবধানের সংজ্ঞা প্রদানে এই বৈশিষ্ট্যটিকে ব্যবহার করা যায় না। বেশ কিছু অভিজ্ঞতালব্ধ গণসংখ্যা বিন্যাস পর্যাপ্তরূপে স্বাভাবিক বিন্যাসের মত বলে আয়তন এবং পরিমিত ব্যবধানের মধ্যেকার এই সম্পর্কগুলো যৌক্তিকভাবে প্রযোজ্য হয়।

একটি উদাহরণ দিয়ে গড় থেকে যে কোন সংখ্যা মানের মধ্যেকার আয়তন নির্ণয় করে দেখা যাক। ধরা যাক, একটি স্বাভাবিক রেখার গড় হলো ৫০ এবং পরিমিত ব্যবধান হলো ১০। এখন ৫০ থেকে ৬৬ অক্ষের মধ্যে কি পরিমাণ পর্যবেক্ষণ রয়েছে বা কতটুকু আয়তন রয়েছে তা দেখা যাক। প্রথমে আমাদের দেখতে হবে যে, ৫০ থেকে ৬৬ কত পরিমিত ব্যবধান দূরত্বে রয়েছে। এটি করতে গিয়ে আমাদের ৫০ ও ৬৬-এর ব্যবধান নির্ণয় করতে হবে এবং প্রাপ্ত ফলাফলকে পরিমিত ব্যবধানের মান দিয়ে ভাগ করতে হবে। এ ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্রটি ব্যবহার করা হয়,

$$z = \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}$$

অতএব, $z = \frac{৬৬ - ৫০}{১০}$

$$= \frac{১৬}{১০}$$

$$= ১.৬$$

∴ নির্ণীত z-মান হলো ১.৬

প্রাপ্ত মানটিকে আমরা পরিমিত মান বা z-মান বলে থাকি। অতএব, এই পরিমিত মানটিই হলো গড় থেকে কোন মানের দূরত্বের মানদন্ড। আমাদের উদাহরণের ক্ষেত্রে প্রাপ্ত পরিমিত মান ১.৬-এর অর্থ হলো ৫০ থেকে ৬৬ মানের দূরত্ব হলো ১.৬ পরিমিত ব্যবধান। স্বাভাবিক রেখার অধীনে ১.৬ পরিমিত ব্যবধানের আয়তন হলো ০.৪৪৫২। অর্থাৎ, ৫০ থেকে ৬৬ মানের মধ্যে ৪৪.৫২ শতাংশ পর্যবেক্ষণ অন্তর্ভুক্ত রয়েছে। যেহেতু ৫০ থেকে ৬৬ মানটি ডান দিকে ১.৬ পরিমিত ব্যবধান দূরত্বে রয়েছে, সেহেতু মানটি ধনাত্মক হয়েছে। কিন্তু যদি ৫০ থেকে ৩৪ মানের মধ্যেকার আয়তন নির্ণয় করতে হয়, সে ক্ষেত্রে প্রাপ্ত পরিমিত ব্যবধানের মানটি ঋণাত্মক হবে, অর্থাৎ, –১.৬। অন্য কথায়, ৫০ থেকে ৬৬ মানটি গড় থেকে ১.৬ পরিমিত ব্যবধান উপরে এবং ৫০ থেকে ৩৪ মানটি –১.৬ পরিমিত ব্যবধান নীচে অবস্থান করছে।

পরিমিত স্বাভাবিক সারণির ব্যবহার (Use of Standard Normal Table)

সব স্বাভাবিক বিন্যাসের বিশে- ষণে যে তত্ত্বীয় রেখাটি ব্যবহার করা হয় তাকে পরিমিত স্বাভাবিক রেখা বলে। এই স্বাভাবিক রেখার একটি '০' গড় এবং একটি '১' পরিমিত ব্যবধান রয়েছে।

সব স্বাভাবিক বিন্যাসের বিশ্লেষণে যে তত্ত্বীয় রেখাটি ব্যবহার করা হয় তাকে পরিমিত স্বাভাবিক রেখা বলে। এই স্বাভাবিক রেখার একটি '০' গড় এবং একটি '১' পরিমিত ব্যবধান রয়েছে। প্রথাগতভাবে, স্বাভাবিক রেখার অধীনে পুরো আয়তনকে '১' বলে ধরা হয়। একটি উদাহরণ দিয়ে বিষয়টিকে বোঝা যাক। ধরা যাক, চিত্র ৬.৪.৬-এ প্রদত্ত স্বাভাবিক রেখার অনুভূমিক অক্ষ (horizontal axis) একটি চলকের মান এবং উলম্ব অক্ষ (vertical axis) বিভিন্ন মানের ঘটনসংখ্যাকে প্রতিনিধিত্ব করে। এই স্বাভাবিক রেখার অধীনে অন্তর্ভুক্ত আয়তনকে ব্যবহার করে কতগুলো প্রশ্নের জবাব পেতে পারি। যেমন, কি পরিমাণ পর্যবেক্ষণের মান 'ক' থেকে বৃহত্তর রয়েছে? কি পরিমাণ পর্যবেক্ষণের মান 'ক' থেকে ক্ষুদ্রতর রয়েছে? এবং কি পরিমাণ পর্যবেক্ষণের মান 'ক' ও 'খ'-এর মধ্যে রয়েছে? 'ক' ও 'খ' একটি চলকের যে কোন মান হতে পারে। কিন্তু যে বিষয়টি লক্ষ্যণীয় তা হলো, প্রতিটি প্রশ্নের সাথে একটি ব্যাপ্তির বিষয় জড়িত, যা মূলতঃ উলম্ব অক্ষের একেকটি অংশ। পরিমিত স্বাভাবিক সারণি থেকে যথাযথ আয়তন নির্ণয়ের মাধ্যমে আমরা এ সব প্রশ্নের জবাব দিতে পারি।

একটি সম্পূর্ণ স্বাভাবিক বিন্যাসের জন্য পরিমিত স্বাভাবিক সারণি ব্যবহার করতে হলে আমাদের মনে রাখতে হবে যে, বিন্যাসটি সুষম এবং '০' গড়ের উপরে ৫০ শতাংশ ও নীচে ৫০ শতাংশ আয়তন রয়েছে।

পরিমিত স্বাভাবিক সারণি '০' গড়ের উপরে নির্দিষ্ট ব্যাপ্তির জন্য স্বাভাবিক রেখার অধীনে নির্দিষ্ট আয়তনকে নির্দেশ করে। একটি সম্পূর্ণ স্বাভাবিক বিন্যাসের জন্য পরিমিত স্বাভাবিক সারণি ব্যবহার করতে হলে আমাদের মনে রাখতে হবে যে, বিন্যাসটি সুষম এবং '০' গড়ের উপরে ৫০ শতাংশ ও নীচে ৫০ শতাংশ আয়তন রয়েছে। একটি পরিমিত স্বাভাবিক সারণির তিনটি স্তম্ভ রয়েছে। সেগুলো হলো:

- z — পরিমিত স্বাভাবিক রেখার উলম্ব অক্ষের উপর একটি বিন্দু।
- z এবং $\overline{x}$ -এর মধ্যে আয়তন — গড় $(\overline{x})$ থেকে একটি নির্দিষ্ট z-মান পর্যন্ত বিস্তৃত একটি ব্যাপ্তির মধ্যবর্তী আয়তন।
- z-এর বাইরের মান — z-মান থেকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত একটি ব্যাপ্তির মধ্যবর্তী আয়তন।

সারণি ৬.৪.১-এ পরিমিত স্বাভাবিক সারণির একটি সংক্ষিপ্ত ভাষ্য দেখানো হলো। সম্পূর্ণ সারণিটি পরিশিষ্টের সারণি পরি-২ -এ উপস্থাপিত হয়েছে।

সারণি ৬.৪.১: পরিমিত স্বাভাবিক সারণির একটি সংক্ষিপ্ত ভাষ্য

z	z *এবং* $\bar{X}$ *-এর মধ্যবর্তী আয়তন*	z*-এর বাইরের আয়তন*
০	০.০০০০	০.৫০০০
০.২৫	০.০৯৮৭	০.৪০১৩
০.৫০	০.১৯১৫	০.৩০৮৫
০.৭৫	০.২৭৩৪	০.২২৬৬
১.০০	০.৩৪১৩	০.১৫৮৭
১.২৫	০.৩৯৪৪	০.১০৫৬
১.৫০	০.৪৩৩২	০.০৬৬৮
১.৭৫	০.৪৫৯৯	০.০৪০১
২.০০	০.৪৭৭২	০.০২২৮
২.২৫	০.৪৮৭৮	০.০১২২
২.৫০	০.৪৯৩৮	০.০০৬২
২.৭৫	০.৪৯৭০	০.০০৩০
৩.০০	০.৪৯৮৭	০.০০১৩
৩.৫০	০.৪৯৯৮	০.০০০২
৪.০০	০.৪৯৯৯৭	০.০০০০৩

পূর্বের বিমূর্ত প্রশ্নগুলোর আলোকে এবার আমরা বাস্তবধর্মী প্রশ্ন করতে পারি। যেমন, '০' এবং '১' এর মধ্যে কি পরিমাণ পর্যবেক্ষণ রয়েছে? যেহেতু এই বিন্যাসের গড় '০' এবং যেহেতু চলকের মানগুলো স্তম্ভে দেয়া আছে, সেহেতু z এবং $\bar{X}$ -এর মধ্যবর্তী আয়তনের সমানুপাতগুলো দ্বিতীয় স্তম্ভে দেয়া আছে। এ ক্ষেত্রে '০' থেকে ১.০০-এর মধ্যে ৩৪.১৩ শতাংশ পর্যবেক্ষণ রয়েছে। এখন আমরা দ্বিতীয় প্রশ্নটি করতে পারি। যেমন, ১.০০ এর বেশী কতগুলো পর্যবেক্ষণ রয়েছে? এই প্রশ্নের উত্তরটি পাওয়া যাবে সারণির তৃতীয় স্তম্ভ থেকে। z-মান ১.০০-এর বিপরীতে প্রদত্ত মানটি হলো ০.১৫৮৭। অর্থাৎ, ১.০০-এর বেশী পর্যবেক্ষণ রয়েছে ১৫.৮৭ শতাংশ। তৃতীয় প্রশ্নটি হলো, ১.০০-এর কম কি পরিমাণ পর্যবেক্ষণ রয়েছে? এই প্রশ্নের জবাবে স্বাভাবিক রেখার বাম পাশের অর্ধেক আয়তনের (০.৫০০০) সাথে গড় এবং ১.০০ এর মধ্যবর্তী আয়তনকে (০.৩৪১৩) যোগ করতে হবে। অতএব, ১.০০-এর বাম পাশের মোট আয়তন হলো (০.৫০০০+০.৩৪১৩)=০.৮৪১৩। অর্থাৎ, ১.০০-এর নীচে এই বিন্যাসের ৮৪ শতাংশের কিছু বেশী পর্যবেক্ষণ রয়েছে।

একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এ ক্ষেত্রে মনে রাখা প্রয়োজন যে, সারণিতে কোন ঋণাত্মক মানের স্তম্ভ নেই। কারণ, যেহেতু স্বাভাবিক রেখা সুষম হয়, সেহেতু '০' থেকে +১.০০-এর অধীনে প্রাপ্ত আয়তন '০' থেকে-১.০০-এর অধীনে প্রাপ্ত আয়তনের সমান হবে। কিন্তু এভাবে আয়তন নির্ণয়ের পরিমাণ বেশী হলে যে কোন সময় ভুল নির্ণয়ের সম্ভাবনা থেকে যায়। ভুল করার এই সম্ভাবনাকে এড়াতে হলে সবসময়ই চিত্র অঙ্কন করে আয়তনকে চিহ্নিত করে নিতে হবে।

সারাংশ

পরিসংখ্যানের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ একটি বিন্যাস হল স্বাভাবিক বিন্যাস। স্বাভাবিক বিন্যাস হলো একটি বিশেষ ধরণের গণসংখ্যা বিন্যাস যা বাস্তবে অভিজ্ঞতালব্ধ বিন্যাসের কাছাকাছি। স্বাভাবিক বিন্যাস মূলত: সিদ্ধান্তমূলক পরিসংখ্যানের আওতাভূক্ত। বর্ণনাামূলক পরিসংখ্যানে স্বাভাবিক বিন্যাসের আলোচনা স্থান পায় তিনটি কারণে। *প্রথমতঃ*, এটি একটি সমসূচাল রেখা, *দ্বিতীয়তঃ*, বিস্তৃতির পরিমাপ হিসাবে পরিমিত ব্যবধানের ব্যাখ্যা দেবার জন্য এটি বিশেষভাবে সাহায্যে করে, এবং *তৃতীয়তঃ*, পরিসংখ্যানগত পরীক্ষায় ব্যবহারের লক্ষ্যে একটি পূর্ব ধারণা পাবার জন্য।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক ($\surd$) চিহ্ন দিন –

১। যে রেখা স্বভাবিক রেখার চেয়ে বেশী সূচাল তাকে:

ক. অনতিসূচাল বলে
খ. অতিসূচাল বলে
গ. সাধারণসূচাল বলে
ঘ. উপরের সবগুলো

২। স্বাভাবিক রেখার প্রকৃত রূপটি জানার জন্য প্রয়োজন:

ক. গাণিতিক গড়
খ. পরিমিত ব্যবধান
গ. গাণিতিক গড় ও পরিমিত ব্যবধান
ঘ. গাণিতিক গড় ও ভেদাঙ্ক

৩। একটি স্বাভাবিক রেখার গড় থেকে $\pm$৩ পরিমিত ব্যবধান ..... আয়তন দখল করে থাকে।

ক. ৬৮.২৭%
খ. ৭৭.৬২%
গ. ৯৫.৪৫%
ঘ. ৯৯.৭৪%

সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন

১। স্বাভাবিক বিন্যাসের বৈশিষ্ট্যগুলো কি?

২। স্বাভাবিক রেখার অধীনে আয়তন বলতে কি বোঝানো হয়?

রচনামূলক প্রশ্ন

১। স্বাভাবিক বিন্যাসের গুরুত্ব আলোচনা করুন।

২। স্বাভাবিক বিন্যাস কি? সসীম বনাম অসীম গণসংখ্যার বিন্যাস বলতে কি বোঝায় তা আলোচনা করুন।