ব্যাচেলর অব এডুকেশন

গণিত শিক্ষণ

Teaching Mathematics

EDBN 1421

রচনা

অধ্যাপক মোঃ রমিজ উদ্দীন আহমদ
রায়হানা তসলিম
মোহা. আখতার হোছাইন কুতুবী
হামিদা বানু বেগম
রহিমা খাতুন
আব্দুল্লাহ আল মাহমুদ
রাজিয়া বেগম
মোহাম্মদ আহসানুল আলম

মূল্যায়ন

প্রফেসর জাকি ইমাম
কমর উদ্দিন আকন্দ
ইয়াসমিন আক্তার

সম্পাদনা

অধ্যাপক মোঃ রমিজ উদ্দীন আহমদ

স্কুল অব এডুকেশন

বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

গণিত শিক্ষণ
EDBN 1421
বিএড প্রোগ্রাম

প্রধান সমন্বয়ক
মোঃ জহির উদ্দিন বাবর
প্রকল্প পরিচালক (অতিরিক্ত সচিব)
টিচিং কোয়ালিটি ইমপ্রুভমেন্ট-২ (টিকিউআই-২) ইন সেকেন্ডারি এডুকেশন প্রজেক্ট

সমন্বয়ক
রায়হানা তসলিম, উপ-প্রকল্প পরিচালক (প্রশিক্ষণ), টিকিউআই-২ প্রকল্প
ড. রেহেনা খাতুন, সহকারী প্রকল্প পরিচালক (প্রশিক্ষণ), টিকিউআই-২ প্রকল্প
কাজী সাখাওয়াৎ হোসেন, প্রকল্প কর্মকর্তা (প্রশিক্ষণ), টিকিউআই-২ প্রকল্প
রিজওয়ানুল হক, প্রকল্প কর্মকর্তা (প্রশিক্ষণ), টিকিউআই-২ প্রকল্প

সহযোগিতায়
প্রফেসর মোঃ জাহাঙ্গীর হোসেন, উপ-প্রকল্প পরিচালক (প্রশাসন ও অর্থ), টিকিউআই-২ প্রকল্প
ড. সুধাংশু রঞ্জন রায়, সহকারী প্রকল্প পরিচালক (প্রশাসন ও অর্থ), টিকিউআই-২ প্রকল্প
আবু সাঈদ মজুমদার, সহকারী প্রকল্প পরিচালক (প্রশাসন ও অর্থ), টিকিউআই-২ প্রকল্প
রওশন আরা বেগম, সহকারী প্রকল্প পরিচালক (প্রশিক্ষণ), টিকিউআই-২ প্রকল্প
মাকসুদা বেগম, প্রকল্প কর্মকর্তা (প্রশাসন ও অর্থ), টিকিউআই-২ প্রকল্প
গাজী মোহাম্মদ নাজমুল হোসেন, হিসাব রক্ষণ কর্মকর্তা, টিকিউআই-২ প্রকল্প

প্রথম মুদ্রন: ডিসেম্বর ২০১৮
পুন:মুদ্রন: মার্চ ২০২০

প্রচ্ছদ
কাজী সাইফদ্দীন আব্বাস

প্রকাশনায়
প্রকাশনা, মুদ্রণ ও বিতরণ বিভাগ
বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়, গাজীপুর– ১৭০৫।

(স্মারক নম্বর: ৩৭.০০.০০০০.০৮২.১৪.০০৫.১৮.১০০ তারিখ: ৩১ জুলাই ২০১৯ ইংরেজি, ১৬ শ্রাবণ ১৪২৬ বাংলা অনুযায়ী অনুমোদনক্রমে TQI-II প্রকল্পের আওতায় প্রণীত জাতীয় বিএড প্রোগ্রামের পাঠ্যপুস্তক বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃক পুন:মুদ্রন করা হলো।)

ISBN: 978-984-34-0111-3

মুদ্রণে:

সূচিপত্র

ইউনিট ১ : গণিতের সাধারণ ধারণা

গণিতকে বিমূর্ত বিষয় মনে করা হয়। কিন্তু সৃষ্টির শুরু থেকে গণিত মূর্ত বিষয় থেকেই উদ্ভুত হয়েছে। গণিতের উৎপত্তি বা শুরু মূর্ত বিষয় থেকে। মানুষ সেই আদিকাল থেকে এখন পর্যন্ত দৈনন্দিন জীবনে গণিতকে অপরিহার্য বিষয় হিসাবে ব্যবহার করছে। মানুষ যখন গুহায় বাস করত তখন গণনা করত পাথরের টুকরার সাথে তুলনা করে। এই তুলনা হত মূলত পালিত পশুর সাথে। তখনকার এই প্রাকৃতিক বা স্বাভাবিক উপায়ে তুলনা করে গণনাকে স্বাভাবিক সংখ্যার উৎস হিসাবে বিবেচনা করা হয়। আজকের দিনের নিত্যকার ব্যবহার্য বিষয় হচ্ছে গণিত। মানব সভ্যতার প্রতিটি ক্ষেত্রে অগ্রগতির মূলে রয়েছে গণিত। গণিত মানুষের জীবন-যাপনের অতীব প্রয়োজনীয় হাতিয়ার। গণিতের অগ্রগতির ইতিহাস মানব সভ্যতার ক্রম বিবর্তনের ইতিহাস। বিদ্যালয়ের সকল বিষয়ে গণিতের ব্যাবহার রয়েছে এবং গণিতের সাথে সম্পর্ক রয়েছে।

এ বইয়ের বিষয়বস্তুকে দশটি ইউনিটে ভাগ করা হয়েছে। ইউনিট ১ এর বিষয়বস্তুকে তিনটি সাব ইউনিটে ভাগ করা হয়েছে, সাব ইউনিটগুলো হলো :

১.১ গণিতের অর্থ, প্রকৃতি ও পরিসর।

১.২ গণিত শিক্ষার মূল্যবোধ, গণিতের স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধসমূহ।

১.৩ গণিতবিদগণের আবিষ্কার ও অবদান, অন্য বিষয়ের সাথে গণিতের সম্পর্ক ও ব্যবহার।

১.১ গণিতের অর্থ, প্রকৃতি ও পরিসর

গণিতের অর্থ, প্রকৃতি ও পরিসর সাব ইউনিটের বিষয়বস্তু যথাক্রমে গণিতের অর্থ, গণিতের ধারণা, গণিতের প্রকৃতি ও পরিসর। উল্লেখিত বিষয়বস্তুগুলো পর্যায়ক্রমে নিম্নে আলোকপাত করা হয়েছে।

গণিতের অর্থ

আধুনিক বাংলা অভিধান অনুসারে ***গণ্*** ধাতুর সাথে ***ইত*** প্রত্যয় যুক্ত হয়ে ***গণিত*** শব্দটির উৎপত্তি হয়েছে। ব্যুৎপত্তিগতভাবে গণিত শব্দের অর্থ গণনা করা বা হিসাব করা। এ ক্ষেত্রে এটি গণনাশাস্ত্র। ইংরেজি **Mathematics** শব্দটির বাংলা সমার্থক শব্দ ***গণিত***। **Mathematics** শব্দটি গ্রীক শব্দ **Mathema** থেকে এসেছে যার অর্থ হিসাব করা বা গণনা করা। Oxford Dictionary অনুসারে Mathematics শব্দটির অর্থ হল- স্থান, সংখ্যা ও পরিমাণ সংক্রান্ত বিজ্ঞান (Mathematics is the science of space, numbers and quantity)। শুরুতে গণিত শব্দটি গণনা বা হিসাব করার সাথে সম্পর্কিত হলেও মানব সভ্যতার উন্নতির সাথে সাথে এর অর্থের ব্যাপকতা অনেক গুণ বৃদ্ধি পেয়েছে। এখন বিষয় হিসাবে গণিতের অর্থ ব্যাপক। গণিতবিদদের কাজ হল মূর্ত বাস্তবতা থেকে গণিতের বিভিন্ন বিমূর্ত সূত্র উদ্ঘাটন করা। বিজ্ঞানের সমস্ত শাখায় গণিতের ব্যবহার রয়েছে। গণিতকে তাই *বিজ্ঞানের ভাষা*, *সার্বজনিন ভাষা* ও *সমস্ত বিজ্ঞানের রাণী* বলে ডাকা হয়।

গণিতের দর্শনের ভিন্ন ভিন্ন দৃষ্টিভঙ্গি থেকে গণিতের সংজ্ঞায় বিভিন্নতা দেয়া যায়। বিধিগত দৃষ্টিকোণ থেকে গণিত হল যুক্তিবিজ্ঞান ও বিশেষ প্রতীক-চিহ্নাদি ব্যবহার করে স্বতঃসিদ্ধ-রূপে সংজ্ঞায়িত বিমূর্ত গঠনসমূহের গবেষণা। আবার বাস্তবতাবাদী দৃষ্টিকোণ থেকে গণিত হল সেই সব বস্তু বা ধারণা নিয়ে গবেষণা, যা আমাদের যুক্তিনির্মাণ নির্বিশেষে যাদের স্বাধীন অস্তিত্ব আছে; অর্থাৎ গণিত বাস্তব জিনিসের গবেষণা। গণিত হল 'চিত্র ও সংখ্যার গবেষণা', কিন্তু এটি গণিতের অত্যন্ত সরল একটি সংজ্ঞা। পরিমাণ, গঠন, পরিবর্তন ও স্থান বিষয়ক গবেষণাকে সাধারণত গণিত বলা হয়। এককভাবে একটি সাধারণ বা সবার জন্য গ্রহণযোগ্য সংজ্ঞা এখন পর্যন্ত কোন গণিতবিদ দিতে পারেননি। তবে বিভিন্ন গণিতবিদগণের দেয়া সংজ্ঞা আলাদাভাবে পর্যালোচনা করলে দেখা যায় প্রত্যেকটি সংজ্ঞা গণিতের সংজ্ঞা হিসাবে তাৎপর্যপূর্ণ। নিম্নে কয়েকজন বিখ্যাত গণিতবিদের সংজ্ঞা উল্লেখ করা হলঃ

অ্যারিস্টটল গণিতকে সংজ্ঞায়িত করেন-, 'পরিমাণ সংক্রান্ত বিজ্ঞান।'

বেঞ্জামিন পায়ার্স এর মতে-, 'গণিত হচ্ছে এমন বিজ্ঞান যা প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হতে সাহায্য করে।'

বার্ট্রান্ড রাসেল এর মতে,'গণিত হচ্ছে প্রতীকীয় যুক্তিবিদ্যা (Mathematics is Symbolic Logic)।'

হেনরি যুঙ এর মতে, 'যাবতীয় বিমূর্ত গাণিতিক পদ্ধতি ও তাদের বাস্তব প্রয়োগকেই গণিত বলে।'

জন লক এর মতে, 'Mathematics is the way to settle in the mind and heart of reasoning.'

উপরোক্ত সংজ্ঞাগুলো পর্যালোচনা করলে আমরা বলতে পারি যে, গণিত হল-

- সংখ্যাশাস্ত্রের বিজ্ঞান
- প্রতীকমূলক ভাষা
- যে বিজ্ঞান বিমূর্ত চিন্তনে সাহায্য করে
- প্রয়োজনীয় ও নির্ভুল সিদ্ধান্তে উপনীত হতে সাহায্য করে
- স্থান, সংখ্যা এবং পরিমাণ সম্পর্কিত বিজ্ঞান
- যুক্তিগ্রাহ্য সিদ্ধান্তের বিজ্ঞান
- বিমূর্ত ধারণার সৌধ নির্মাণ এবং তাদের সম্পর্ক বিষয়ে পাঠ।

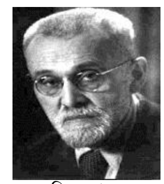
যে যে গণিতবিদের সংজ্ঞা ব্যবহার করা হয়েছে, তাঁদের পরিচিতি :


এরিস্টটল (৩৮৪-৩২২বিসি) গ্রীক


জন লক (১৬৩২-১৭০৪) ইংলিশ


বেঞ্জামিন পায়ার্স (১৮০৯-১৮৮০) আমেরিকান


বার্ট্র্যান্ড রাসেল (১৮৭২-১৯৭০) ব্রিটিশ


হেনরি যুঙ (১৮৭৬-১৯৫৩) জার্মান

গণিত শিক্ষাদানের মুখ্য উদ্দেশ্য হওয়া উচিত স্থান ও পরিমাপের সম্পর্কের বিশ্লেষণ এবং তার উপলব্ধি, যা আমাদের পরিবেশ সম্পর্কে অন্তর্দৃষ্টি লাভ করতে, তাকে নিয়ন্ত্রণ করতে এবং নানা ক্ষেত্রে সভ্যতার অগ্রগতিকে উপলব্ধি করতে একান্ত আবশ্যক। গণিতের একটি আধুনিক ধারণা হলোঃ সংখ্যা, প্রতীক, বিভিন্ন মাত্রিক আকার, বিমূর্ত ধারণার অবকাঠামো ও তাদের পারস্পরিক সম্পর্ক, গতি এবং কালের বিজ্ঞানই গণিত।

গণিতের প্রকৃতি ও পরিসর

গণিতের প্রকৃতি

গণিত বিষয়ের কিছু নিজস্ব বৈশিষ্ট্য রয়েছে। গণিতের সংজ্ঞায় বেশ কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্যের উল্লেখ আছে। এই বৈশিষ্ট্যগুলো বিশ্লেষণ করলে গণিতের প্রকৃতি সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। গণিতের প্রকৃতি নিম্নরূপঃ

- গণিত পরিমাণ ও পরিমাপের সুস্পষ্ট ধারণা দেয়
- ক্রমের নির্ভুল প্রকাশ করে
- গণিতের প্রতীক বিমূর্ত চিন্তার শক্তিশালী বাহন
- জ্যামিতির চিত্র আদর্শ সৌন্দর্যবোধের ধারণা দেয়
- সমস্যা সমাধানের উপযোগী মননশীলতায় সহায়তা করে
- যথাযথভাবে যুক্তি প্রয়োগ করার কৌশল শেখায়
- আরোহী, অবরোহী, সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ পদ্ধতির প্রয়োগ করতে শেখায়
- গাণিতিক সূত্র সর্বায়ন করতে ও প্রয়োগ করতে শেখায়
- স্বতঃস্ফূর্ত জ্ঞান অর্জনে সহায়তা করে
- আত্মনির্ভরশীল ব্যক্তিক বিকাশ ঘটায়
- অংকনের মাধ্যমে বিমূর্ত ধারণা প্রকাশ করতে শেখায়।

গণিতের প্রকৃতির বৈশিষ্ট্যগুলো শিক্ষার্থীর চিন্তা-চেতনায়, আচরণ, দৃষ্টিভঙ্গি, অনুভূতি ইত্যাদিতে বিভিন্নভাবে প্রকাশ পায়। শিক্ষার্থীরা গণিতের প্রকৃতি পড়ে আধুনিক গণিতের রূপ কী হবে, তা উপলব্ধি করে নিজের চিন্তায় প্রকাশ করার প্রয়াস পাবে।

গণিতের পরিসর

বিদ্যালয়ে বিদ্যমান শিক্ষাক্রমে মাতৃভাষার অবস্থান সর্বাগ্রে। মাতৃভাষার পরই গণিতের অবস্থান। বস্তুজগৎ ও চিন্তাজগতে যত কিছু আছে সব কিছুতেই গণিতের ব্যবহার ও প্রয়োগ রয়েছে। এই বিশ্ব জগতে এমন কোন বিষয় বা ক্ষেত্র নেই যেখানে গণিতের ব্যবহার ও প্রয়োগ নেই। তাই রিচার্ড বলেছেন-, 'বিশ্ব প্রকৃতির যাবতীয় সত্য গাণিতিক সমীকরণের মধ্যে ধরা পড়ে।' পৃথিবীতে বহু গবেষক বিজ্ঞানী হিসাবে স্বীকৃতি পাওয়ার মূল কারণ তার আবিষ্কৃত তত্ত্বের গাণিতিক প্রমাণ। হোয়াইটহেড মনে করেন- 'বিশ্ব প্রকৃতির গতিপথ উদ্ঘাটনে গণিতকে সাফল্যের সঙ্গে প্রয়োগ করা যায়।'

বাস্তবিকই প্রাকৃতিক সত্য আবিষ্কারে মানব প্রতিভা যে বিস্ময়কর যন্ত্রটি আবিষ্কার করেছে সেটি গণিত। রজার বেকন বলেন, 'গণিত হল সকল বিজ্ঞানের প্রবেশদ্বার ও চাবিকাঠি।' বিজ্ঞানের এমন কোন শাখা নেই যেখানে গণিতের ব্যবহার নেই। বলতে গেলে গণিত ছাড়া বিজ্ঞান পুরোপুরি অচল। গ্যালিলিও গ্যালিলির মতে-, 'প্রকৃতির বিরাট গ্রন্থটি গণিতের ভাষায় লেখা।' প্রকৃত প্রস্তাবে সমুদ্র স্রোত, বায়ু প্রবাহ, বৃষ্টিপাত, আহ্নিক গতি, বার্ষিক গতি ইত্যাদি সকল প্রাকৃতিক ঘটনার পেছনে রয়েছে সূক্ষ্ম গাণিতিক যুক্তি ও গণিতের প্রকৃষ্ট প্রয়োগ। প্রকৃতির সকল নিয়ম গণিতের হিসাব এবং কলাকৌশল মেনে চলে। আমাদের দেশে মাধ্যমিক পর্যায়ে গণিতের পরিসর এবং উচ্চ শিক্ষা স্তরের গণিতের পরিসর ভিন্ন। এ বইয়ে তা আলাদাভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

মাধ্যমিক পর্যায়ে গণিতের পরিসর

বাংলাদেশের মাধ্যমিক পর্যায়ে গণিতের আলোচ্য বিষয়গুলো শিক্ষার্থীদের বয়স অনুপাতে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। এছাড়াও এ স্তরে প্রাথমিক স্তরের গণিতের ধারণাকে আরো উন্নত করা এবং উচ্চ শিক্ষা স্তরের জন্য উপযুক্ত গণিত শিক্ষার্থী তৈরির লক্ষ্যে গণিতের শাখাগুলো সাজানো হয়েছে। মাধ্যমিক বিদ্যালয়ে গণিতের অন্তর্ভুক্ত বিষয়গুলো হলো-পাটিগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, ঘনজ্যামিতি, ত্রিকোণমিতি ও পরিসংখ্যান।

উচ্চ শিক্ষা স্তরে গণিতের পরিসর

উচ্চ শিক্ষা স্তরে গণিতের অন্তর্ভুক্ত বিষয় ব্যাপক। উচ্চ শিক্ষায় গণিতের বহু শাখা রয়েছে। শাখাগুলো কয়েকটি সুনির্দিষ্ট ক্ষেত্রে বিভক্ত। যেমন- পরিমাণ, গঠন, স্থান, পরিবর্তন, ভিত্তি ও পদ্ধতি, বিচ্ছিন্ন গণিত এবং ফলিত গণিত।

পরিমাণ

পরিমাণ বিষয়ক গবেষণার ভিত্তি হচ্ছে সংখ্যা। শুরুতেই আলোচিত হয় স্বাভাবিক সংখ্যা ও পূর্ণ সংখ্যা এবং এদের উপর সম্পন্ন বিভিন্ন গাণিতিক প্রক্রিয়া বা অপারেশন আলোচিত হয় পাটিগণিতে। পূর্ণসংখ্যার গভীরতর ধর্মগুলো আলোচিত হয় সংখ্যাতত্ত্ব শাখায়। ফ্যার্মার শেষ উপপাদ্য এই শাখার একটি বিখ্যাত ফলাফল। এখনও সমাধান হয়নি এরকম দুইটি সমস্যা হচ্ছে দ্বৈত মৌলিক সংখ্যা অনুমান এবং গোল্ডবাকের অনুমান। আরও উন্নত সংখ্যা ব্যবস্থায় পূর্ণসংখ্যা মূলদ সংখ্যার উপসেট হিসেবে পরিগণিত হয়। মূলদ সংখ্যা আবার বাস্তব সংখ্যার অন্তর্গত। বাস্তব সংখ্যাগুলো অবিচ্ছিন্ন রাশি বর্ণনা করতে ব্যবহার করা হয়। বাস্তব সংখ্যাকে আবার জটিল সংখ্যাতে সাধারণীকৃত করা হয়। জটিল সংখ্যাগুলোকে কোয়ার্টানায়ন ও অক্টোনায়ন-বিশিষ্ট সংখ্যা ব্যবস্থায় সম্প্রসারিত করা যায়। এই ক্ষেত্রে আলোচ্য বিষয়গুলো হলোঃ সংখ্যা যেমন,

$1, 2, 3, \dots;\ \dots -1, 0, 1, 2\dots;\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, 0.125, \dots;\quad \pi, e, \sqrt{2}, \dots \qquad i,\ 3i+2,\ e^{i\pi/3}, \dots$

স্বাভাবিক সংখ্যা　পূর্ণ সংখ্যা　ভগ্নাংশ　অমূলদ সংখ্যা　জটিল সংখ্যা

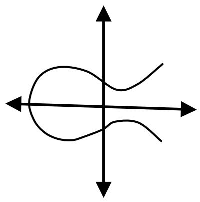
মূলদ সংখ্যা

বাস্তব সংখ্যা

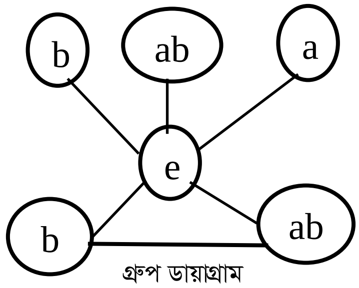
হাইপার কমপ্লেক্স সংখ্যা; কোয়াড্রানিয়ন; অক্টোনিয়ন; সেডেনিয়ন; হাইপার রিয়াল সংখ্যা; পরাবাস্তব সংখ্যা; পূরণবাচক সংখ্যা; অঙ্কবাচক সংখ্যা; পূর্ণসাংখ্যিক অনুক্রম; গাণিতিক ধ্রুবক; সংখ্যার নাম; অসীম; ভিত্তি ইত্যাদি।

গঠন

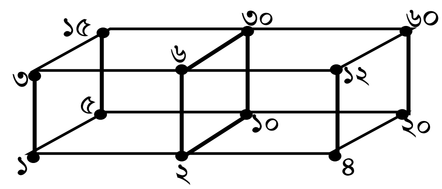
এক্ষেত্রে আকার, প্রতিসাম্য এবং গাণিতিক গঠন সংক্রান্ত আলোচনা করা হয়। যেমন- রিং, ফিল্ড, রৈখিক বীজগণিত, বীজগাণিতিক জ্যামিতি, সার্বজনীন জ্যামিতি।



ইলিপটিক কার্ভ



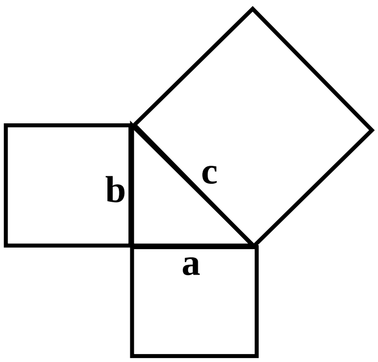
গ্রুপ ডায়াগ্রাম



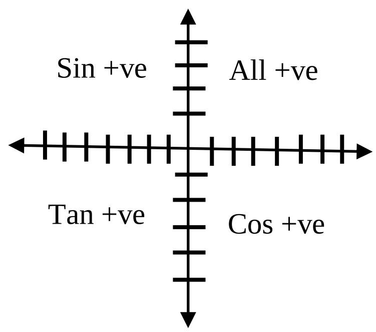
বিভাজ্যতা লেটিস

স্থান

স্থান নিয়ে গবেষণা মানব মনে গণিতের বীজ বপন করেছিল। এই শাখায় অন্তর্ভুক্ত বিষয়গুলো হলো-



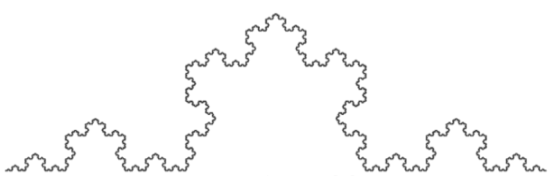
জ্যামিতি



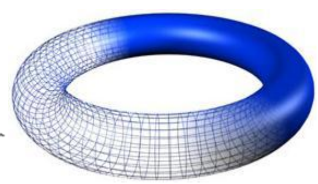
ত্রিকোণমিতি

$$\int_0^1 \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,dx$$

সমাকলন



ফ্র্যাকটাল জ্যামিতি

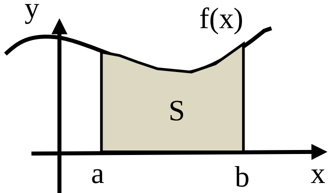


টপোলজি

বীজগাণিতিক জ্যামিতি; স্থানাংক পদ্ধতি; অন্তরক টপোলজি; বীজগাণিতিক টপোলজি; রৈখিক বীজগণিত; গুচ্ছ বিন্যাসতাত্ত্বিক জ্যামিতি; বহুধা।

পরিবর্তন

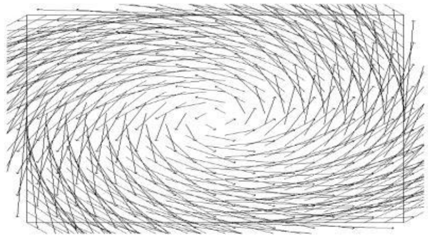
গাণিতিক ফাংশন এবং সংখ্যার মানসমূহের পরিবর্তনের প্রকাশ। এই শাখায় অন্তর্ভুক্ত বিষয়গুলো হলো-



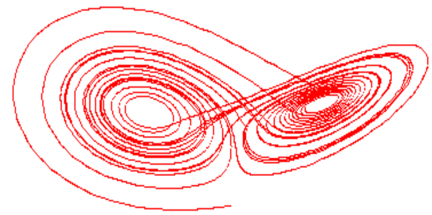
ক্যালকুলাস

$$\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}y + c$$

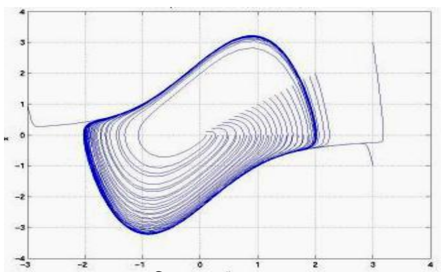
অন্তরক সমীকরণ



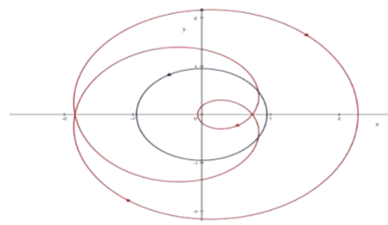
ভেক্টর ক্যালকুলাস



গতিশীল সিস্টেম



বিচলন তত্ত্ব(Perturbation Theory)



জটিল-সাংখ্যিক বিশ্লেষণ

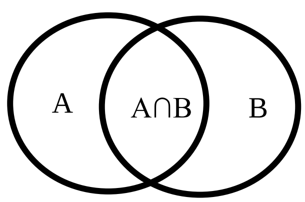
গাণিতিক বিশ্লেষণ; বাস্তব বিশ্লেষণ; জটিল বিশ্লেষণ; ফাংশনাল এনালিসিস; বিশেষ ফাংশন; পরিমাপন তত্ত্ব; ফুরিয়ার বিশ্লেষণ; পরিবর্তনশীল ক্যালকুলাস ইত্যাদি।

ভিত্তি এবং পদ্ধতি

গণিতের স্বভাব ও ধর্ম বুঝার জন্য সহায়ক এই শাখায় অন্তর্ভুক্ত বিষয়গুলো হলো-

$$P \Rightarrow Q$$

গাণিতিক যুক্তি



সেট তত্ত্ব

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "fog"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

ক্যাটাগরি তত্ত্ব

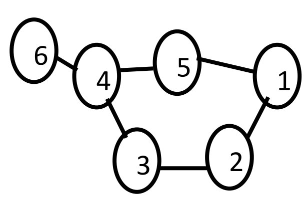
গণিতের ভিত্তি: গণিতের দর্শন; প্রাতিষ্ঠানিকতা; কনস্ট্রাক্টিভিজম; প্রমাণ তত্ত্ব; মডেল তত্ত্ব; রিভার্স গণিত।

বিচ্ছিন্ন গণিত

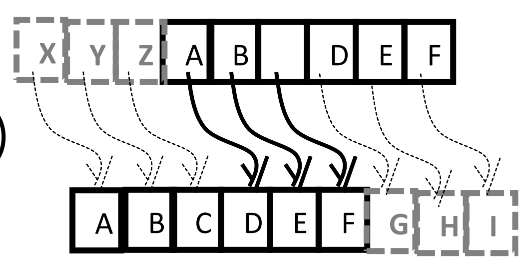
বিচ্ছিন্ন গণিতে অন্তর্ভুক্ত বিষয়:

$$(1,2,3)(1,3,2)$$
$$(2,1,3)\ (2,3,1)$$
$$(3,1,2)\ (3,2,1)$$

কম্বিনেটরিক্স



লেখ তত্ত্ব



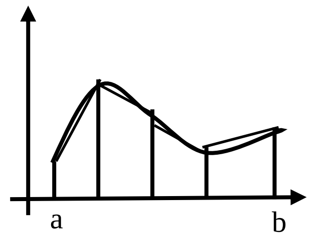
ক্রিপ্টোগ্রাফি

কম্পিউটিবিলিটি তত্ত্ব, কম্পিটেশনাল কমপ্লেক্স থিওরি, উপাত্ত তত্ত্ব ইত্যাদি।

ফলিত গণিত

ফলিত গণিত বাস্তব-বিশ্বের বিভিন্ন সমস্যা সমাধান নির্দেশ করে।

সম্ভাব্যতা



সাংখ্যিক বিশ্লেষণ

বলবিদ্যা; গাণিতিক অর্থনীতি; গাণিতিক জীববিজ্ঞান; ক্রিপটোগ্রাফি; অপারেশন রিসার্চ।

অর্পিত কাজ : মাধ্যমিক স্তরের গণিতে অন্তর্ভুক্ত শাখাগুলোর একটি তালিকা তৈরি করে এগুলো অন্তর্ভুক্তির যৌক্তিকতা বিশ্লেষণ করুন।

১.২ গণিত শিক্ষার মূল্যবোধ, গণিতের স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধসমূহ

শিক্ষার্থীরা প্রতিনিয়ত বিভিন্নভাবে গণিত শিখে। এতে শিক্ষার্থীরা কিছু মূল্যবোধ অর্জন করে। এছাড়া গণিতের সব কিছু সূত্রের উপর নির্ভরশীল নয়। গণিতে ব্যবহৃত কিছু স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধ রয়েছে। নিম্নে গণিত শিক্ষার মূল্যবোধ, গণিতের স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধসমূহ পর্যায়ক্রমে আলোচনা করা হলো।

গণিত শিক্ষার মূল্যবোধ

বিদ্যালয়ে বিষয় হিসাবে গণিতের গুরুত্ব অপরিসীম। গণিত বিমূর্ত বিষয় হিসাবে আমাদের চিন্তা শক্তি বিকাশে সাহায্য করে। গণিত বিষয় অধ্যয়ন করে আমরা গণিতের তাত্ত্বিক জ্ঞানের পাশাপাশি বাস্তব জীবনে, সমাজ ও পারিবারিক জীবনে সকল ক্ষেত্রে জীবনে চলার উপযোগী কিছু মূল্যবোধ অর্জন করে থাকি। এই মূল্যবোধগুলো তখনই অর্জিত হয় যখন আমরা নিয়মিত গণিত বিষয়ের বিষয়বস্তু চর্চা করি। সমাজে চলতে গেলে নানা সমস্যার সৃষ্টি হয়। এই সমস্যাগুলোর সূক্ষ্ম সমাধানে গণিত একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখে। গণিত শুধু সূক্ষ্ম সমাধান দেয় না, সাথে সাথে মূল্যবোধ, ব্যক্তিত্ব, সততা, ন্যায়পরায়নতা ইত্যাদি সৃষ্টিতেও ভূমিকা রাখে। গণিতের অন্তর্নিহিত রূপ বুঝতে হলে কিছু বাস্তব সত্যকে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে মেনে নিতে হয়। প্রকৃতির স্বাভাবিক প্যাটার্নগুলোর কিছু প্যাটার্নকে আমরা গণিতে হুবহু ব্যবহার করি। এগুলো প্রমাণের অপেক্ষা রাখে না; স্বতঃস্ফূর্তভাবে সত্য বা প্রমাণিত বলে ধরে নিয়ে আমরা গাণিতিক সমস্যা সমাধান করি। স্বীকার্যসমূহকেও স্বতঃস্ফূর্তভাবে সত্য বলে ধরে নেয়া হয়। এগুলোও প্রমাণের প্রয়োজন হয় না।

গণিতের বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীদের শেখাতে পারলে তাত্ত্বিক জ্ঞান সম্পর্কে শিক্ষার্থীরা ধারণা পায়। গণিত শিক্ষার লক্ষ্য কিন্তু শুধু তাত্ত্বিক জ্ঞান অর্জন নয়, সুনাগরিক হিসাবে গড়ে উঠার জন্য মূল্যবোধ অর্জনেরও প্রয়োজন রয়েছে। সমাজে চলতে গেলে যে সকল গুণ বা বৈশিষ্ট্য প্রয়োজন তাত্ত্বিক জ্ঞানের নির্যাস থেকে শিক্ষার্থীরা কিছু সৌন্দর্যবোধ শিখে। গণিতের প্রতিটি জ্ঞানের পেছনে একটি অন্তর্নিহিত মূল্যবোধ গ্রথিত। নিউটনের গতির সূত্রগুলো যদি বিবেচনা করি তাহলে দেখা যাবে গতি সম্পর্কিত জাগতিক ঘটনা কোটি কোটি হতে পারে কিন্তু তা ঐ তিনটি সূত্রে গাঁথা। নিউটনের গতির সূত্রের উদাহরণটি যদি আমরা বিবেচনা করি তাহলে সৃজনশীল চিন্তা করতে সূত্রগুলো অনুপ্রাণিত করে। সমাজের প্রত্যেকটি নিয়ম-কানুন কোন না কোনভাবে গণিতের সাথে সম্পর্কিত। শুধু সমাজের অনিয়ম, বিশৃংখলার ঘটনাগুলো গণিতের সাথে কোনভাবেই সম্পর্কযুক্ত হবে না। কারণ গণিত পুরোপুরি যুক্তি নির্ভর বিষয়। এখানে লজিক ছাড়া যৌক্তিক সিদ্ধান্তে পৌঁছা যায় না। তাই মানুষের পরিবার, সমাজ ও রাষ্ট্রীয় জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে সিদ্ধান্ত নিতে যে কৌশলগুলো কাজ করে এর পেছনে রয়েছে গণিতের লজিক বা যুক্তি। তাই গণিত শিক্ষার অবশ্যই মূল্য রয়েছে। বিদ্যালয়ে গণিত শিক্ষায় অন্তর্নিহিত মূল্যগুলোকে আমরা নিম্নলিখিতভাবে শ্রেণিবিভাগ করতে পারি-

ব্যবহারিক মূল্য, কৃষ্টিমূলক মূল্য ও শৃঙ্খলামূলক মূল্য।

ব্যবহারিক মূল্য

আধুনিক জ্ঞান-বিজ্ঞান, আবিষ্কার, শিল্পকলা, তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি ইত্যাদি সকল ক্ষেত্রে যে বিজ্ঞান তার মূলে রয়েছে গণিত। প্রাত্যহিক জীবনে শিশু থেকে বৃদ্ধ সকল মানুষের সকল কাজে নিত্যকার ব্যবহার্য বিষয় হচ্ছে গণিত। গণিতকে জ্ঞাত বা অজ্ঞাতসারে সকল শ্রেণি-পেশার মানুষ প্রতিনিয়ত ব্যবহার করছে। পারিবারিক, সামাজিক, রাষ্ট্রীয়, রাজনৈতিক, অর্থনৈতিক জীবনে বৈজ্ঞানিকভাবে আবিষ্কৃত যন্ত্রপাতি, শিল্প ও ব্যবসা-বানিজ্যে, প্রতিরক্ষায়, চারুকারু, খেলাধুলায় ইত্যাদি সকল ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার অনস্বীকার্য। প্রাকৃতিক সকল নীতিগুলো গণিতের নিয়ম মেনে চলে। যেমন-সূর্যাস্ত, সূর্যোদয়, আহ্নিক ও বার্ষিক গতি ইত্যাদি। নেপোলিয়ান বলেন, 'The progress and improvement of mathematics linked to the prosperity to the state.'। গণিতে ব্যবহারিক মূল্য সবচেয়ে বেশি অপরিহার্য।

কৃষ্টিমূলক মূল্য

আমরা বাঙ্গালী। জাতি হিসাবে আমাদের সংস্কৃতি, কৃষ্টি, ভাষা, সামাজিক প্রথা, সামাজিক রীতিনীতি ইত্যাদি আছে। বাংলাদেশের পাহাড়ী জনপদে বসবাসকারী মানুষেরও সংস্কৃতি, কৃষ্টি, ভাষা, সামাজিক প্রথা, সামাজিক রীতিনীতি ইত্যাদি রয়েছে। এভাবে প্রত্যেক জনপদের কিছু নিজস্ব সংস্কৃতি আছে, নিজস্ব ভাষা, নিজস্ব সামাজিক প্রথা, রীতিনীতি আছে। সংস্কৃতিতে যেমন ধর্মের প্রভাব আছে তেমনি আছে সংগীত কলায় নিজস্ব ধ্যান-ধারণা ও চিন্তার প্রভাব। সংগীতের তাল, লয়, বাদ্যযন্ত্র ইত্যাদিতে গণিতের একটি সূক্ষ্ম প্রভাব পরিলক্ষিত হয়। পিথাগোরাসকে বস্তু-জগৎ ও সঙ্গীতে সংখ্যার গুরুত্ব ও কার্যকারিতা বিষয়ক তত্ত্বের জনক বলা হয়। পিথাগোরাস বলেন-'There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of the spheres.'। সংগীতের সুরেলা নোডগুলোর মধ্যে একটা সরল অনুপাত পরিলক্ষিত হয়। সকল সংগীতের নোড সুনির্দিষ্ট কিছু কম্পাঙ্কের হয়ে থাকে। সা, রে, গা, মা, পা, ধা, নি, সা নোডগুলোর কম্পাঙ্কের মধ্যে সরল পূর্ণসাংখ্যিক অনুপাত বিদ্যমান।

গণিতবিদগণ মনে করেন গ্রহ-উপগ্রহগুলো যে ঘূর্ণায়মান থাকে এদের মধ্যে হয়ত সংগীতের মতোই কোনো ঐকতান থাকতে পারে। ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ২১, ৩৪, ৫৫, ৮৯, ... ; এই ফিবোনাক্কি ক্রমটি বিখ্যাত ও সুপরিচিত। পূর্ববর্তী দুই পদের সমষ্টি নিয়ে পরবর্তী পদ তৈরি হয়: ১+১=২, ১+২=৩, ২+৩=৫, ৩+৫=৮, ৫ + ৮ =১৩ এরূপে অসীমভাবে অব্যাহত। গানের মধ্যে, ফিবোনাক্কি অনুক্রম পিয়ানো স্কেলে দেখা যায়।

সাহিত্যেও গণিতের প্রভাব রয়েছে। যেমন- কবি মাইকেল মধুসুধন দত্তের চতুর্দশ পদী কবিতায় গণিতের একটি সুন্দর প্রয়োগ দেখা যায়। চতুর্দশপদী (Sonnet) হল এক ধরনের কবিতা যার প্রথম উদ্ভব হয় মধ্যযুগে ইতালিতে। এর বৈশিষ্ট্য হল যে, কবিতাগুলো ১৪টি চরণে সংগঠিত এবং প্রতিটি চরণে সাধারণভাবে মোট ১৪টি করে অক্ষর থাকবে। এর প্রথম আট চরণের স্তবককে অষ্টক এবং পরবর্তী ছয় চরণের স্তবককে ষষ্ঠক বলে। অষ্টকে মূলত ভাবের প্রবর্তনা এবং ষষ্ঠকে ভাবের পরিণতি থাকে। গণিতে সংখ্যার খেলার মাধ্যমে মানুষ আনন্দ অনুভব করে। চিত্র-কলায়ও গণিতের ব্যবহার আছে। এছাড়াও সংস্কৃতি, প্রথা, রীতিনীতি, অভ্যাস ইত্যাদিতে গণিতের প্রত্যক্ষ বা পরোক্ষ ব্যবহার রয়েছে।

শৃঙ্খলামূলক মূল্য

গণিত মানসিক চিন্তা ধারাকে শৃঙ্খলায়িত করে। এটি চিন্তাশক্তির বিকাশ ঘটায় ও যুক্তির সাহায্যে সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে সাহায্য করে। লক এর মতে- 'Mathematics is a way to settle in the mind a habit of reasoning.'। গণিতের যুক্তি প্রয়োগে নিরপেক্ষতা অপরিহার্য। এই যুক্তিকে অন্যের মত বা প্রভাব দ্বারা কোনভাবেই প্রভাবিত করার সুযোগ নেই। গণিতের যুক্তি প্রয়োগের ফলে যে কোন সিদ্ধান্ত সূক্ষ্ম ও নির্ভরশীল হয়। এখানে কারোই দ্বিমত করার সুযোগ থাকে না। গণিত সৃজনশীল ও যুক্তি নির্ভর একটি বিষয় বলে যেকোন লোকের মনোযোগ আকৃষ্ট করার সুযোগ থাকে। শিক্ষার্থীদের গণিতের সহজ সমস্যা সমাধান করতে করতে জটিল সমস্যা সমাধানের সক্ষমতা বৃদ্ধি পায়। শিক্ষার্থীদের গণিতের পাঠে মনোযোগ ধরে রাখা সহজ হয়। জটিল সমস্যা সমাধান করতে পারলে সৃজনশীল কিছু করার মনোভাব বা মানসিকতা সৃষ্টি হয়। গণিত ভিন্নতর কিছু করার ইচ্ছা শক্তি বৃদ্ধিতে সহায়তা করে। গণিত আত্মবিশ্বাস, সময়ানুবর্তিতা, ন্যায়পরায়নতা, সততা, আত্মনির্ভরশীলতা, মুক্ত চিন্তা, নিয়মানুবর্তিতা, নিরপেক্ষতা ইত্যাদি গুণাবলি সৃষ্টিতে সাহায্য করে। গণিত উদ্ভাবনী ক্ষমতা বৃদ্ধি করে।

গণিতে ব্যবহারিক, শৃঙ্খলামূলক ও কৃষ্টিমূলক মূল্য ছাড়া আরও কয়েকটি মূল্য রয়েছে। যেমন- সামাজিক মূল্য, নৈতিক মূল্য, সৌন্দর্যমূলক মূল্য, বৌদ্ধিক মূল্য, আন্তর্জাতিক মূল্য ও বৃত্তিমূলক মূল্য। শিক্ষার্থীরা গণিত অধ্যয়ন করে অন্তর্নিহিত মূল্যবোধগুলো অর্জন করলে বাস্তব জীবনে একজন সফল মানুষ হিসাবে নিজেকে গড়ে তুলতে পারবে।

গণিতের স্বীকার্য ও স্বতঃসিদ্ধসমূহ

বাংলা একাডেমি বাংলা অভিধান অনুসারে স্বতঃসিদ্ধ (Axiom) শব্দটির অর্থ হল 'প্রমাণের অপেক্ষা রাখে না এমন বা স্বভাবসিদ্ধ। 'Oxford Mathematics Dictionary অনুসারে স্বতঃসিদ্ধ (Axiom) শব্দটির অর্থ হল- æA statement whose truth is either to be taken as self-evident or to be assumed. Certain areas of mathematics involve choosing a set of axioms and discovering what results can be derived from them, providing proofs for the theorems that are obtained"। গণিতে স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য এমন ধরনের সত্য যা প্রমাণ করা যায় না কিন্তু সত্য বলে স্বীকার করে নিতে হয়। এগুলো স্ব-প্রমাণিত ও স্ব-প্রকাশিত সত্য।

স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য প্রমাণে সহজ কোন উক্তি বা পদ্ধতি খুঁজে পাওয়া যাবে না। কেবলমাত্র বাস্তব অভিজ্ঞতার সাহায্যেই এর প্রমাণ দেখা যায়। জ্যামিতির ক্ষেত্রে ব্যবহৃত স্বতঃসিদ্ধকে স্বীকার্য বলে। প্রাচীন গ্রীক গণিতবিদগণ স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের পার্থক্য দেখান। স্বতঃসিদ্ধ হল স্ব-প্রমাণিত সত্য, এ ধরনের স্বতঃসিদ্ধকে বিজ্ঞানের সকল শাখায় ব্যবহার করা হয়। অন্যদিকে স্বীকার্যকে বিজ্ঞানের সুনির্দিষ্ট ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয়।

স্বতঃসিদ্ধকে দুই ভাগে ব্যাখ্যা দেয়া যায়। যেমন, লজিক্যাল স্বতঃসিদ্ধ ও নন-লজিক্যাল স্বতঃসিদ্ধ। লজিক্যাল স্বতঃসিদ্ধকে প্রতিজ্ঞা বা বিবৃতি বলা হয়। লজিক্যাল স্বতঃসিদ্ধকে সার্বজনীন সত্য বলে ধরে নেয়া হয়। আর ননলজিক্যাল স্বতঃসিদ্ধকে অনেক সময় স্বীকার্য হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। ইউক্লিডের প্রথম বই ২৩ টি সংজ্ঞা দ্বারা সূচিত হয়, যার মধ্যে রয়েছে বিন্দু, সরলরেখা ও তল। এরপর আছে পাঁচটি স্বীকার্য ও পাঁচটি 'কমন নোশন' বা স্বতঃসিদ্ধ -একসাথে এখন যা স্বতঃসিদ্ধ নামে পরিচিত।

স্বীকার্যসমূহ(Postulates)

১. একটি সরল রেখাংশ যে কোন দুইটি বিন্দুর সংযোগে অঙ্কন করা যাবে
২. একটি সরল রেখাংশ অসীমভাবে বর্ধিত করে সরলেখায় পরিণত করা যাবে
৩. একটি প্রদত্ত রেখাংশ থেকে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে যার ব্যাসার্ধ হবে উক্ত রেখাংশটি এবং এর একপ্রান্ত বৃত্তটির কেন্দ্র হবে
৪. সকল সমকোণ সমপাতিত হয়
৫. যদি দুটি রেখা অঙ্কন করা হয়, যা তৃতীয় কোন রেখাকে এমনভাবে ছেদ করে যাতে তাদের একই দিকের অন্তস্থ কোণগুলো দুই সমকোণের চেয়ে ছোট হয় তবে উক্ত রেখাদুটি অবধারিতভাবে পরস্পরকে ছেদ করবে যদি তাদের উপযুক্ত পরিমাণে বর্ধিত করা হয়।

স্বতঃসিদ্ধসমূহ(Axioms)

১. যদি কতিপয় বস্তু একই বস্তুর সমান হয় তারা পরস্পরের মধ্যেও সমান হবে
২. যদি সমান সমান অংশের সাথে সমান অংশ যোগ করা হয় তবে যোগফল সমান হবে
৩. যদি সমান সমান অংশ থেকে সমান অংশ বিয়োগ করা হয় তবে বিয়োগফল সমান থাকবে
৪. যেসব বস্তু পরস্পরের উপর সমপাতিত হয় তারা পরস্পর সমান
৫. সম্পুর্ণ বস্তুটি এর অংশবিশেষ থেকে বৃহত্তর।

এই মৌলিক স্বীকার্যসমূহ গঠনমূলক জ্যামিতি সম্পর্কে ইউক্লিড এবং তার সমসাময়িক গ্রিক ও হেলেনিস্টিক গণিতবিদদের ধারণার প্রতিফলন। প্রথম তিনি কনস্ট্রাকশনের জন্য একটি কম্পাস এবং একটি দাগহীন স্কেল (রুলার) ব্যবহার করেন। দাগাঙ্কিত স্কেল যা নিউসিস কনস্ট্রাকশনে ব্যবহৃত হয় তা ইউক্লিডের কনস্ট্রাকশন বহির্ভূত।

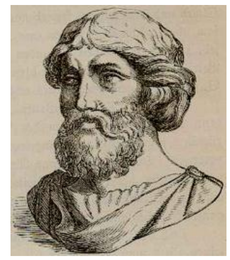
কাজ: উদাহরণসহ গণিতে শৃঙ্খলামূলক মূল্যবোধ গঠনের কৌশল ব্যাখ্যা করুন।

১.৩ গণিতবিদগণের আবিষ্কার ও অবদান (Euclid, Pythagorous, Rene-Descarte, Al Zaber, Leelabati) এবং অন্য বিষয়ের সাথে গণিতের সম্পর্ক ও ব্যবহার

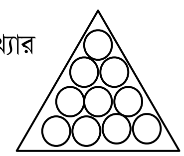
পৃথিবীতে বহু গণিতবিদ রয়েছেন যারা গণিতে বিভিন্ন সময়ে গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখে গণিতকে সমৃদ্ধ করেছেন। স্বল্প পরিসরে সকল গণিতবিদ সম্পর্কে ধারণা দেয়া সম্ভব নয়। এ বইয়ে ইউক্লিড, পিথাগোরাস, রেনে দেকার্তে, আবু আব্দুল্লাহ মুহাম্মদ ইবনে মূসা আল খারিজমি ও লীলাবতীর গণিতে উল্লেখযোগ্য অবদানগুলো আলোচনা করা হলো।

পিথাগোরাস

গ্রিক দার্শনিক ও গণিতবিদ পিথাগোরাস ৫৭০ খ্রিস্টপূর্বাব্দের কাছাকাছি সময়ে বর্তমান তুরস্কের নিকটে অবস্থিত সামোস দ্বীপে জন্মগ্রহণ করেন। ৪৯৭/৪৯৫ খ্রিস্টপূর্বাব্দে (৭৫ বছরের কম বয়সে) দক্ষিণ ইতালির মেসাপোত্তমে মৃত্যুবরণ করেন। তিনি থেলিসের ছাত্র ছিলেন। তিনি জ্ঞান অর্জনের জন্য মিশরসহ বিভিন্ন দেশ ভ্রমণ করেন। মিশরে তিনি গাণিতিক ও আধ্যাতিক শিক্ষা লাভ করেন। ইতালির দক্ষিণাঞ্চলে অবস্থিত ক্রোতোনে ৫০ বছর বয়সে একটি আধ্যাতিক ও দার্শনিক ভ্রাতৃসংঘ প্রতিষ্ঠা করতে সক্ষম হন। ধারণা করা হয় আনুমানিক ৫৩০ খ্রিষ্টপূর্বে ক্রোতোনে একটি বিদ্যালয় প্রতিষ্ঠা করেন। জীবনের শেষ দিনগুলো তিনি দক্ষিণ ইতালিরই আরেক স্থান মেসাপোত্তমে কাটিয়েছিলেন।


পিথাগোরাস (৫৭০-৪৯৫বিসি) গ্রীক

তিনি মনে করতেন "গণিতই সব" অথবা "গণিতই ঈশ্বর"। পূর্ণসংখ্যাকে পিথাগোরাস খুব ভালোবাসতেন এবং এগুলোকে তিনি বিশুদ্ধ মনে করতেন। পিথাগোরিয়ানরা মনে করতেন জোড় সংখ্যা হলো পুরুষ এবং বিজোড় সংখ্যা হলো নারি।



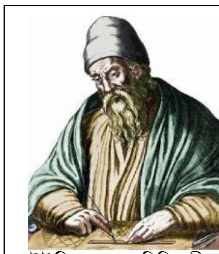
সবচেয়ে পবিত্র সংখ্যা মনে করা হতো দশকে, কারণ দশ হলো এক, দুই, তিন, চার -এই চারটি পূর্ণসংখ্যার যোগফল এবং এ মানের বস্তুকে একটি সমবাহু ত্রিভুজাকারে সাজানো যায়।

পিথাগোরাসের উপপাদ্যটি হলো, "কোনো একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।" কথিত আছে যে, পিথাগোরাস এই উপপাদ্য ব্যাবিলন থেকে শিখেছেন। তবে তিনিই প্রথম উপপাদ্যটি প্রমাণ করেন।

অমূলদ সংখ্যা আবিষ্কৃত হয় পিথাগোরীয়ান তত্ত্ব থেকে। যন্ত্রসঙ্গীতে স্বরগ্রামের নিয়ম পিথাগোরাস বা তাঁর কোন শিষ্য আবিষ্কার করেন। সঙ্গীতের সুরেলা নোডগুলোর মধ্যে একটি চমৎকার পূর্ণসাংখ্যিক অনুপাত বিদ্যমান। এই অনুপাতটি আবিষ্কার করেন পিথাগোরাস। যেমন সা, রে, গা, মা, পা, ধা, নি, সা ইত্যাদি নোডগুলোর কম্পাঙ্কের মধ্যে সরল পূর্ণসাংখ্যিক অনুপাত রয়েছে। ১২ নোড বিশিষ্ট একটি ক্রোমাটিক স্কেলকে অনেক সময় পিথাগোরিয়ান টিউনিং বলা হয়, কারণ এই স্কেলের নোডগুলোর মধ্যে ৩ : ২ অনুপাত (perfect fifth) বজায় থাকে। সম্ভবত শব্দটি সর্বপ্রথম পিথাগোরিয়ানরাই ব্যবহার করেন। পিথাগোরাসই প্রথম আবিষ্কার করেন যে, পৃথিবী গোল, কিন্তু চেপ্টা নয়।

ইউক্লিড

ইউক্লিড ছিলেন একজন বিখ্যাত হেলেনিস্টিক গণিতবিদ। ইউক্লিডের জন্ম কখন এবং কোথায় হয়েছিল সে তথ্য গণিতবিদগণের অজানা। তবে জানা যায় তিনি মিশরের আলেকজান্দ্রিয়ায় খ্রিষ্টপূর্ব ৩০০ অব্দে বসবাস করেন। মিশরের রাজা টলেমির শাসনামলে তিনি আলেকজান্দ্রিয়ার রাজকীয় স্কুলে গণিতের শিক্ষক ছিলেন। ইউক্লিডকে জ্যামিতির জনক বলা হয়। বিখ্যাত প্রাচীন গ্রিক গণিতবিদ ইউক্লিডের প্রধান বৈজ্ঞানিক গ্রন্থ ইউক্লিড্স এলিমেন্টস। বইটিতে ইউক্লিডের সমসাময়িক সময় এবং তাঁর পূর্বের প্রায় ২৩০০ বছরের গণিতে আবিষ্কৃত বিভিন্ন তথ্য ও তত্ত্ব লিপিবদ্ধ আছে। এতে আলোচনা আছে তলমিতি, ঘনমিতি, সংখ্যাতত্ত্বের বিভিন্ন সমস্যা এবং অ্যালগরিদম নিয়ে। তাঁর লেখা গ্রন্থগুলির মধ্যে মাত্র তিনটির সন্ধান পাওয়া গিয়েছে এগুলো হল: ডাটা, অপটিক্স ও এলিমেন্টস।


ইউক্লিড (৩০০ বিসি) গ্রীক

এলিমেন্টস বইটি মোট ১৩ খন্ডে প্রকাশিত হয়েছিল। ইউক্লিডের 'এলিমেন্টস' বইটি প্রায় ২০০০ বছর পর্যন্ত বিভিন্ন ভাবে পাঠযোগ্য মৌলিক বিষয় হিসেবে ব্যবহৃত হয়েছে। বইটির প্রথম ইংরেজি অনুবাদ হয় ১৫৭০ সালে। বইটি মূলত জ্যামিতি শাস্ত্রের বিভিন্ন স্বীকার্য নিয়ে কাজ করে। বিজ্ঞানী আইজাক নিউটনসহ গ্যালিলিও গ্যালিলি, জোহানেস কেপলার এবং নিকোলাস কোপারনিকাসকে প্রবলভাবে বইটি প্রভাবিত করে। তারা সবাই বইটি থেকে প্রাপ্ত জ্ঞানকে বিভিন্নভাবে কাজে লাগিয়েছেন। তিনি জ্যামিতিকে সংখ্যাতত্ত্বের মাধ্যমে প্রকাশ করার চেষ্টা করেছেন। গণিতের বিভিন্ন শাখা যেমন: পাটিগণিতের মূল নিয়মাবলি, জ্যামিতি, গাণিতিক রাশি ও গাণিতিক সংকেত, সংখ্যাতত্ত্ব ইত্যাদিতে তাঁর অবদান রয়েছে।

রেনে দেকার্তে

রেনে দেকার্তে (১৫৯৬-১৬৫০) ফরাসী

বিশ্ববিখ্যাত ফরাসি গণিতবিদ ও দার্শনিক ১৫৯৬ খ্রিষ্টাব্দের ৩১ মার্চ ফ্রান্সের লা-এ শহরে জন্মগ্রহণ করেন। তিনি গাণিতিক দর্শনের জনক এবং স্থানাংক জ্যামিতি ও বিশ্লেষণ জ্যামিতির জনক হিসাবেও খ্যাত। তিনি আধুনিক গণিতের অগ্রপথিক। দেকার্তে মনে করেন, ''মানুষই হলো সবকিছু বিচারের কেন্দ্রবিন্দু। মানুষের বৈশিষ্ট্য, তার মস্তিষ্কের অপার সম্ভাবনায় সে চিন্তা করতে পারে।" তিনি প্রথম জ্যামিতিতে বীজগণিতের প্রয়োগ করেন, যা কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি নামে পরিচিত এবং গণিতের নতুন শাখা "এনালাইটিকেল জিওমেট্রি" চালু করেন। তিনিই প্রথম জ্যামিতিক আকারকে বীজগাণিতিক সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করেন। অজানা সংখ্যাকে বর্ণ বা অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করেন এবং $x \times x$-এর পরিবর্তে x^2 লেখার প্রচলন করেন। দেকার্তের দার্শনিক মত অনুযায়ী কোনো কিছুকে পরিষ্কারভাবে এবং ইন্দ্রিয় দিয়ে প্রত্যক্ষ না করা পর্যন্ত আমরা সেটাকে সত্য বলে ধরে নিতে পারি না। সেজন্য, কোনো জটিল সমস্যাকে যতগুলো সম্ভব একক সমস্যায় ভেঙে নেয়া বা ছোট করে নেয়া দরকার। তখন সেগুলোর মধ্যে সবচেয়ে সহজ ভাবথেকে আমরা চিন্তা শুরু করতে পারি।

দেকার্তে বিশ্বাস করতেন দর্শনের অগ্রসর হওয়া উচিত সরল থেকে জটিলের দিকে। দেকার্তে দুই ধরনের বাস্তবতা বা সারবস্তু উল্লেখ করেন, একটি সারবস্তু হচ্ছে চিন্তা বা মন, অন্যটি হচ্ছে ব্যাপ্তি বা বস্তু। মন পুরোপুরি সচেতন এবং স্থানগত দিক দিয়ে কোনো জায়গা দখল করে না, ফলে এটাকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করা যায় না। অন্যদিকে বস্তু জায়গা দখল করে এবং একে ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর অংশে ভাগ করা চলে। বস্তুর কোনো চেতনা নেই। দেকার্তের মতে দুই সারবস্তুই ঈশ্বরথেকে এসেছে, যদিও এ দুই সারবস্তুর মধ্যে কোনো সম্পর্ক নেই। এজন্য দেকার্তেকে দ্বৈতবাদী বলা হয়। ৫৩ বছর বয়সে ১৬৫০ খ্রিষ্টাব্দের ১১ ফেব্রুয়ারি সুইডেনের স্টকহোমে নিউমোনিয়ায় আক্রান্ত হয়ে মৃত্যুবরণ করেন।

আবু আব্দুল্লাহ মুহাম্মদ ইবনে মূসা আল খারিজমি (আল জাবের)

আল-খারিজমি (৭৮০-৮৫০) বাগদাদী

সোভিয়েত রাশিয়ার নদী যা আরব সাগরে পতিত হয়েছে সে আমু দরিয়ার একটি দ্বীপের নিকটে অবস্থিত খোয়ারিজম নামক শহরে বিখ্যাত গণিতবিদ আবু আব্দুল্লাহ মুহাম্মদ ইবনে মূসা আল খোয়ারিজমি আনুমানিক ৭৮০ খ্রিষ্টাব্দে জন্ম গ্রহণ করেন । তার নাম থেকে অনেকে অনুমান করেন যে, তিনি সম্ভবত আব্বাসীয় শাসনামলে খোরাসান প্রদেশের খারিজম হতে আগমন করেন (বর্তমানে উজবেকিস্তান এর জরাজম প্রদেশ)। প্রখ্যাত ইতিহাসবিদ আল-তাবারীর মতে বাগদাদের নিকটবর্তী ক্ষুদ্র শহর কুতরুবুল হতে এসেছেন, তাই তিনি নাম দেন মুহাম্মদ ইবনে মুসা আল খারিজমি আল কুতরুবুল্লী। তিনি গণিত, ভূগোল ও জ্যোতির্বিজ্ঞানে বিশেষ অবদান রাখেন। বীজগণিতে তাঁর অবদান সবচেয়ে বেশী বলে তাকে বীজগণিতের জনক বলা হয়।

আল খারিজমি আব্বাসীয় খলিফা আল মামুনের প্রতিষ্ঠিত বায়তুল হিকমাহ (House of Wisdom) সংলগ্ন গ্রন্থাগারে প্রধান গ্রন্থাগারিক হিসাবে কর্মরত ছিলেন।

তিনি সেখানে গণিত ও জ্ঞান-বিজ্ঞান চর্চা করেন এবং বহু গ্রিক ও ভারতীয় বিজ্ঞান বিষয়ক গ্রন্থ আরবীতে অনুবাদ করেন। খ্রীস্টের জন্মের ষষ্ঠ শতাব্দীতে ভারতীয় গণিতবিদগণ দশমিক পদ্ধতির উদ্ভাবন করেন এবং ভারতীয় গণিতবিদগণ প্রথম বীজগণিত নিয়ে গবেষণা করেন। তাঁর রচিত The Book of Addition and Subtraction According to the Hindu Calculation" গ্রন্থটি তার একটি নিদর্শন।

আল খারিজমির বইগুলো আরবী থেকে প্রথম ল্যাটিন ভাষায় অনুবাদ হয়। "আল কিতাবুল মুখতাসার ফি হিসাব আল জাবর ওয়াল মুকাবালা" গ্রন্থটি ৮৩০ সালে রচিত হয় বলে ধারণা করা হয়। এই গ্রন্থটির নাম থেকেই এলজেবরা শব্দটি এসেছে এবং তাঁর নাম হয়েছে আল জাবের। Algorithm শব্দটি Alkhwarizmi নামের ল্যাটিন অপভ্রংশ algorismi হতে এসেছে। তাঁর লেখা সুরত-আল-আরদ বইটি বিশ্বের প্রথম মানচিত্র হিসাবে খ্যাত।

তাঁর আল জাবর ওয়াল মুকাবলা বইটি পাঁচভাগে বিভক্ত। প্রথম ভাগে তিনি দ্বিতীয় মাত্রা সমীকরণের সমাধানের নিয়ম, দ্বিতীয় ভাগে সমীকরণগুলোর জ্যামিতিক প্রমাণ, তৃতীয় ভাগে $(x \pm a)$ এবং $(x \pm b)$ এর গুণফল, চতুর্থ ভাগে যে সমস্ত অঙ্কে অজ্ঞাত সংখ্যা, তার বর্গ, বর্গমূল ইত্যাদি রয়েছে সেগুলির যোগ, বিয়োগ, বর্গমূল বের করবার নিয়ম ইত্যাদি নিয়ে এবং পঞ্চম ভাগে কতগুলো শাব্দিক সমস্যার সমাধান নিয়ে আলোচনা করেছেন।

গণিতে শূন্যের ব্যবহার, ভগ্নাংশ পদ্ধতি , ত্রিকোণমিতি, জ্যামিতি, ভূগোল ও জ্যোতির্বিজ্ঞানে তাঁর যে অবদান, বিভিন্ন তথ্যসূত্রে এর আরো বিস্তারিত বিবরণ রয়েছে। তাঁর রচিত অন্য বইগুলো হলো কিতাবুল জাম ওয়াল তাফরিক ফি হিসাব আল হিন্দ, ইসতিখেরাজ তারিখ আল-ইয়াহুদ, কিতাব আল রুখামা, কিতাব আল তারিখ এবং যিজ আল সিন্দ/ হিন্দ। আনুমানিক ৮৫০ খ্রিষ্টাব্দে আবু আব্দুল্লাহ মুহাম্মদ ইবনে মূসা আল খারিজমি মৃত্যুবরণ করেন।

লীলাবতী

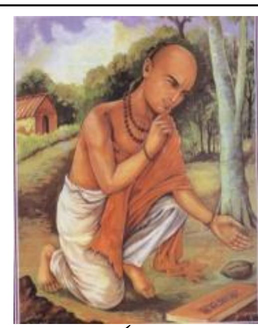
ভারতীয় উপমহাদেশের বিখ্যাত গণিতবিদ ভাস্করাচার্য (Bhaskara Acharya) কর্তৃক রচিত "সিদ্ধান্ত শিরোমনি" বইটি চারটি খন্ডে বিভক্ত। ভাস্করাচার্য প্রথম অংশটির নাম দেন লীলাবতী। অনেকে মনে করেন ভাস্করাচার্যের মেয়ে লীলাবতী। লীলাবতীর বিয়ের পর তার স্বামী মারা যায়। মৃত্যুর পর লীলাবতী পিতার কাছে চলে আসেন। পিতা অত্যন্ত স্বস্নেহে মেয়েকে গণিত শিক্ষা দেন। এ নিয়ে অনেকের মধ্যে ভিন্ন মত পরিলক্ষিত হয়। তেরটি অধ্যায়ে রচিত পাটিগণিতের এই বইটিতে আলোচনা করা হয় আটটি গাণিতিক প্রক্রিয়া যেমন- যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, বর্গ, ঘন, বর্গমূল এবং ঘনমূল। তারপর আসে শূন্যের ব্যবহার, ব্যস্ত বিধি, ঐকিক নিয়ম, অপনয়ন পদ্ধতিতে মান নির্ণয়, বর্গকর্ম, বর্গমূল ও দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা, ত্রৈরাশিকা: তিন-এর নিয়ম, বন্দ প্রতিবন্দক: বিনিময় ব্যবস্থা, মিশ্রব্যবহার: মিশ্রণের নিয়ম, শ্রেণি ব্যবহার: ধারার ব্যবহার, অঙ্কপাশা: বিন্যাস ও সমাবেশ, অনির্ণেয় সমীকরণের সমাধান এবং ক্ষেত্রগণিত: জ্যামিতি।

'সিদ্ধান্ত শিরোমনি' বইটিতে তথ্যগুলো সাজানো হয়েছে রাজা, হাতি, পদ্মফুলের মত পরিচিত জিনিস দিয়ে যাতে শিক্ষার্থীদের বুঝতে সুবিধা হয় এবং সেগুলো উপস্থাপন করা হয়েছে লীলাবতীকে সম্বোধন করার মধ্য দিয়ে। যেমন,

১. মৃগনয়না লীলাবতী
বল দেখি পার যদি
১৩৫ গুণন **১২** কত হয়
যদি তোমার জানা রয়
গুণন প্রক্রিয়া-পৃথক অংশে আর পৃথক অংকে?

২. সারস আর হংসপূর্ণ সরোবরে
জল তলের অর্ধহস্ত উপরে
পদ্মকলি এক ঋজু সুঠাম দাঁড়িয়ে।
অপরাহ্নের সমীরণ
দেহে জাগায় কম্পন
আদি অবস্থানের দুই হস্ত দূরে
পরশে পদ্মকলি জলকে যায় নাড়িয়ে।
শুনলে এই বর্ণনা
করো এবার গণনা
জলের গভীরতা আর পদ্মের উচ্চতা।

৩. তিক্ত, অম্লীয়, ঝাঁঝালো, মিষ্টি, টক আর লোনা
ছয়টি স্বাদ তুমি ভিন্ন ভিন্ন পাত্রে দেবে ভরে
একটি একটি করে এবং মিশিয়ে মিশিয়ে-
কয়টি পাত্র লাগবে তোমার এই কাজটির তরে?


ভাস্করাচার্য-২ (১১১৪-


লীলাবতী

এভাবেই অধিকাংশ সমস্যা ছন্দোময় কবিতার মত সুন্দরভাবে প্রাঞ্জল ভাষায় বর্ণনা করা হয়েছে।

অন্যান্য বিষয়ের সাথে গণিতের সম্পর্ক

গণিত পরিমাণ, সংগঠন, পরিবর্তন ও স্থান বিষয়ক গবেষণা। গণিতে সংখ্যা ও অন্যান্য পরিমাপযোগ্য রাশিসমূহের মধ্যকার সম্পর্ক বর্ণনা করা হয়। গণিতের সার্বজনীন ভাষা ব্যবহার করে বিজ্ঞানীরা একে অপরের সাথে ধারণার আদান-প্রদান করেন। গণিত তাই বিজ্ঞানের ভাষা। গাণিতিক জ্ঞান অন্যান্য বিষয়গুলির বিষয়বস্তু বুঝতে একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। কোন শিক্ষার্থী যদি গণিতে দুর্বল হয় তবে সে অন্যান্য বিষয়ে দুর্বল হয়।

গণিত ও সাহিত্য

মৌলিক গণিতের দক্ষতা শিক্ষার্থীদের সাহিত্যকে আরো ভালোভাবে বুঝতে সাহায্য করতে পারে। সনেট কবিতায় চমৎকারভাবে গণিতের ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়। সকল কবিতায় ভাবের প্রয়োগে এবং লেখায় মৌলিক গণিতের বিশ্লেষণধর্মী প্রয়োগ আছে।

গণিত ও সামাজিক বিজ্ঞান

ইতিহাসের মত সামাজিক বিজ্ঞানের ক্লাসগুলিতে প্রায়ই শিক্ষার্থীদের চার্ট এবং গ্রাফ পর্যালোচনা করা হয় যা ঐতিহাসিক তথ্য বা জাতিগত গোষ্ঠীসমূহের তথ্য প্রদান করে। ভূগোল শ্রেণিতে, শিক্ষার্থীদের বুঝতে হবে, বিভিন্ন এলাকার ভূ-প্রাকৃতিক, সামাজিক ও জনমিতিক তথ্য; জনগণের জীবনযাপনের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের পারিসংখ্যানিক মাত্রা ইত্যাদি। গাণিতিক পদাবলি ও সূত্রের জ্ঞান এসব পরিসংখ্যানগত তথ্যকে বোধগম্য করে তোলে। সামাজিক বিজ্ঞানে মাঝে মাঝে বিভিন্ন ধরনের গ্রাফ পড়তে, ব্যাখ্যা করতে এবং আঁকতে হয়। উদাহরণ স্বরূপ, জনসংখ্যার তুলনা করার জন্য- শিক্ষার্থীরা বার গ্রাফ, বিভিন্ন দেশের জনসংখ্যার ঘনত্ব, প্রতিমাসের আয় ইত্যাদি যোগ করতে পারে।

গণিত ও শিল্পকলা

থিয়েটার, সঙ্গীত, নাচ বা শিল্পে আগ্রহী ছাত্রছাত্রীরা মূল গাণিতিক জ্ঞান থেকে উপকৃত হতে পারে। বাদ্যযন্ত্র, তাল, লয় হত্যাদি জটিল গাণিতিক সিরিজ অনুসরণ করে। থিয়েটার পারফরমেন্সে ব্যবহৃত নৃত্যের মৌলিক rhythms শিখতে গণিত সাহায্য করে।

গণিত ও পদার্থ বিজ্ঞান

পদার্থবিদ্যা বোঝার জন্য শিক্ষার্থীর গণিতের সমৃদ্ধ জ্ঞান থাকতে হবে। পদার্থবিজ্ঞানের নিয়মসমূহে সাধারণত চূড়ান্ত আকৃতি গণিত দ্বারা প্রদত্ত হয়। গাণিতিক গণনা পদার্থ বিজ্ঞানের প্রতিটি ধাপে ঘটে। গ্যাসের সম্প্রসারণের ($PV = RT$) চরিত্রটি গাণিতিক হিসাবের উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত। তরল, চাপ, ঘর্ষণীয় বল, মহাকর্ষ, গতি ইত্যাদি সংক্রান্ত সমস্যা পুরোপুরি গাণিতিক হিসাব নিকাশের উপর নির্ভর করে।

গণিত ও রসায়ন

জৈব যৌগের আণবিক ওজন গণিত দ্বারা গণনা করা হয়। মিশ্রণ এবং রাসায়নিক যৌগের উপাদানগুলির পরিমাপ করতে গণিতের প্রয়োজন। আণবিক বা আণবিক সূত্র গণনা গণিতের সাহায্যে করতে হয়। রাসায়নিক সমীকরণ লেখার ক্ষেত্রে গণিত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। পদার্থের আন্তআনবিক শক্তির তারতম্য নির্ণয়ে গণিতের প্রয়োজন। রসায়নের বিভিন্ন সমস্যা গাণিতিক নিয়মে সমাধান করতে হয়।

গণিত ও জীববিজ্ঞান

জীববিদ্যার সঙ্গে গণিতের খুব বেশি সম্পর্ক বিদ্যমান। সাধারণ ওজন, ক্যালরি মূল্য, শ্বাসের হার, খাদ্যের পুষ্টিমূল্য পরিমাপ, গণিত দ্বারা গণনা করা হয়। নবজাতকের ওজনের বৃদ্ধি, মানুষের হাড় সংখ্যা এবং অন্যান্য বিভিন্ন প্রজাতির সংখ্যা গণনা করা। রক্তচাপ মাপা, বিভিন্ন রক্ত গোষ্ঠীতে WBC এবং RBC এর সংখ্যা গণনা, ক্রোমোজোম গণনা ইত্যাদিতে গাণিতিক ধারণা ব্যবহৃত হয়।

গণিত ও ভূগোল

ভৌগোলিক পরিসংখ্যান, ঋতু পরিবর্তন, তাপমাত্রা, আর্দ্রতা, ডিগ্রি, বৃষ্টিপাতের পরিমাপ ইত্যাদিতে গণিত ব্যবহৃত হয়। গণিতের সাহায্যে ভৌগোলিক অবস্থা ও ধনী বা দরিদ্র দেশের অর্থনীতিকে সংজ্ঞায়িত করা হয়। অনেক দেশেই জলবায়ু, বৃষ্টিপাত, নদী এবং আবহাওয়া পূর্বাভাসের কারণে কৃষি ভিত্তিক অর্থনীতি রয়েছে। মানচিত্র গঠন, আহ্নিক ও বার্ষিক গতি, অক্ষাংশ, দ্রাঘিমাংশ, সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন তাপমাত্রা, ব্যারোমেট্রিক চাপ, সাগর স্তরের উচ্চতা, আন্তর্জাতিক তারিখ রেখা, স্থানীয় এবং প্রমাণ সময় ইত্যাদির হিসাবের জন্য ব্যবহৃত হয় গণিত। গাণিতিক ও অর্থনৈতিক ভূগোলে গণিতের ব্যবহার অনিবার্য।

গণিত ও অর্থনীতি

অর্থনীতিতে গণিতের পরিসংখ্যান পদ্ধতির বহুল ব্যবহার দেখা যায়। ট্রেডের আয়তন, আমদানি ও রপ্তানির প্রবণতা, অর্থনৈতিক পূর্বাভাস, ট্রেড সাইকল্স, ফসল উৎপাদন, মুদ্রাস্ফীতি প্রভৃতির মত বিভিন্ন সূচকের হিসাব করতে গণিত সাহায্য করে। অর্থনীতিবিদ, নাগরিক ও ব্যবসায়ীরা বাজারের প্রবণতা এবং অর্থনৈতিক অবস্থা গণিতের সাহায্যে পেতে পারেন। মুদ্রা বাজারের মাধ্যমে মুদ্রার আপডেট, পণ্য বাজারের মাধ্যমে বিভিন্ন দেশের স্টক এবং পণ্যের আপডেট তথ্য গণিতের মাধ্যমে পাওয়া যেতে পারে।

গণিত ও আইসিটি

আইসিটি দৃঢ়ভাবে গণিতের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। গণিত ছাড়া কম্পিউটার প্রোগ্রাম, অ্যাপ্লিকেশন সফটওয়্যার এবং বিভিন্ন ভাষা পরিচালনা ও অনুসরণ করা অসম্ভব। গণিতের জ্ঞানের কারণে শিক্ষার্থীরা কম্পিউটার বিজ্ঞানের জটিল বিষয়গুলো বুঝতে সক্ষম হয়। গণিত ব্যবহারের মাধ্যমে কম্পিউটারে হিসাবের জন্য গুরুত্বপূর্ণ সফটওয়্যার উন্নয়ন করা হয়। গণিতের বাইনারি সংখ্যাগুলো কম্পিউটার বিজ্ঞানের ভিত্তি হিসাবে প্রতিষ্ঠিত। গণিতের লজিকগুলো কম্পিউটার বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় গুরুত্বের সাথে ব্যবহৃত হয়।

গণিত এমন একটি অত্যাবশ্যকীয় বিষয় যা মানব জীবনের প্রত্যেকটি ক্ষেত্রকে প্রভাবিত করছে। বিভিন্ন বিষয়ে গণিতের কম বেশি ব্যবহার রয়েছে। প্রত্যেক বিষয়ের সাথে গণিতের আন্তসম্পর্ক রয়েছে।

দলীয় কাজ: নবম-দশম শ্রেণির অন্যান্য বিষয়ের সাথে ঐ শ্রেণির গণিতের সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

অনুশীলনী-১

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

১. "গণিত হল সকল বিজ্ঞানের প্রবেশদ্বার ও চাবিকাঠি" উক্তিটি করেন-

ক) রজার বেকন খ) জন লক গ) বেঞ্জামিন পায়ার্স ঘ) বার্ট্রান্ড রাসেল

২. আল খারিজমি রচিত বই-

ক) দা ইলিমেন্টস্ খ) ইসতিখেরাজ তারিখ আল-ইয়াহুদ গ) সিদ্ধান্ত শিরোমনি ঘ) আল জাবর ওয়াল মুকাবালা

সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন

১. গণিতের ১টি সংজ্ঞা লিখুন।
২. পরিমাণ সংক্রান্ত গণিত বলতে কী বোঝায়?
৩. আল খারিজমি রচিত পাঁচটি বইয়ের নাম উল্লেখ করুন।

রচনামূলক প্রশ্ন

১. বেঞ্জামিন পায়ার্সের সংজ্ঞার আলোকে গণিতের অর্থ বিশ্লেষণ করুন।
২. গণিতের প্রকৃতি ব্যাখ্যা করুন।
৩. গণিতে ইউক্লিডের অবদান বর্ণনা করুন।
৪. গণিতের সাথে বিভিন্ন বিষয়ের সম্পর্ক লিখুন।

রেফারেন্স-১

- Wikipedia,
- বিজ্ঞানে মুসলমানদের দান-এম আকবর আলী;
- গণিতশাস্ত্রের ইতিহাস-কাজী মোতাহার হোসেন;
- গণিত শিক্ষণ-স্বপন কুমার ঢালী;
- গণিত শিক্ষণ- মো: রমিজ উদ্দিন আহমদ;
- গণিত শিক্ষাদান- মুহম্মদ আনওয়ার আলী।

ইউনিট ২ : মাধ্যমিক গণিত শিক্ষাক্রম

শিক্ষা চলমান সামাজিক প্রক্রিয়া ও জাতীয় উন্নয়নের মূল চাবিকাঠি। শিক্ষার উন্নয়ন ব্যতিরেকে জাতীয় উন্নয়ন সম্ভবপর নয়। কেননা শিক্ষা ব্যবস্থার মধ্যেই প্রতিফলিত হয় কোন জাতির আশা-আকাঙ্ক্ষা, আর্থ-সামাজিক ও সাংস্কৃতিক জীবন প্রবাহ। আর শিক্ষার বিস্তারিত পরিকল্পনা বিন্যস্ত থাকে শিক্ষাক্রমে। সাধারণভাবে শিক্ষাক্রম হচ্ছে সুনির্দিষ্ট কাঠামো ও স্তরভিত্তিক সুবিন্যস্ত বিশেষ এক ধরনের পরিকল্পনা। এই ইউনিটকে তিনটি ভাগে বিভক্ত করা হয়েছে:

- ২.১ মাধ্যমিক গণিত শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি, গণিত শিক্ষণের লক্ষ্য ও শিখনফল এবং গণিত শিক্ষাক্রমের অনুভূমিক ও উল্লম্ব বিন্যাস
- ২.২ ৬ষ্ঠ থেকে ৮ম শ্রেণিতে গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য, প্রান্তিক শিখনফল, গণিত শিক্ষাক্রম ছক, ৯ম থেকে ১০ম শ্রেণিতে গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য, প্রান্তিক শিখনফল, গণিত শিক্ষাক্রম ছক, বিদ্যালয় শিক্ষাক্রমে গণিতের স্থান
- ২.৩ গণিত পাঠ্যপুস্তক: উত্তম পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্য, পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়ন ও বিষয়বস্তু বিশ্লেষণ

২.১ মাধ্যমিক গণিত শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি, গণিত শিক্ষণের লক্ষ্য ও শিখনফল, গণিত শিক্ষাক্রমের অনুভূমিক ও উল্লম্ব বিন্যাস

মাধ্যমিক গণিত শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি

শিক্ষার জাতীয় অভীষ্ট লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যকে কেন্দ্র করেই শিক্ষাক্রমের যাবতীয় কাজ আবর্তিত হয়। সেদিক থেকে শিক্ষাক্রমের ভিত্তি হচ্ছে জাতির শিক্ষা ব্যবস্থার অভীষ্ট লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য। জাতীয় চাহিদা ও প্রয়োজনের নিরিখে শিক্ষার অভীষ্ট লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য নিরূপিত হয়ে থাকে। অর্থাৎ যে কোন দেশের শিক্ষা ব্যবস্থার লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যের প্রধান উৎস হল সেই জাতির চাহিদা ও আশা-আকাঙ্খা। কোন দেশ বা জাতির অর্থনৈতিক, সামাজিক, সাংস্কৃতিক ও রাজনৈতিক ক্রিয়াকলাপের ভিত্তিতে জাতীয় চাহিদা ও আশা-আকাঙ্ক্ষা নির্ণীত হয়ে থাকে। আর এসবের মূল হচ্ছে জাতীয় জীবনদর্শন।

গণিত শিক্ষাক্রম

ইংরেজি Curriculum শব্দটির বাংলা পরিভাষা হিসেবে শিক্ষাক্রম, পাঠ্যক্রম, পাঠক্রম ইত্যাদি শব্দগুলো ব্যবহার করা হয়ে থাকে। তবে বাংলাদেশে কারিকুলাম শব্দের প্রতিশব্দ হিসেবে 'শিক্ষাক্রম' গ্রহণ করা হয়েছে। Curriculum কথাটি ল্যাটিন শব্দ 'Currere' হতে উদ্ভূত যার অর্থ হল দৌড়ানো বা ঘোড়দৌড়ের নির্দিষ্ট পথ। আভিধানিক অর্থে শিক্ষাক্রম বলতে বুঝায় নির্দিষ্ট লক্ষ্যে উপনীত হওয়ার জন্য একটি কোর্স (a course to be run for reaching a certain goal)।

বিগত কয়েক দশক থেকে লক্ষ্য করা যাচ্ছে শিক্ষাক্রম কথাটিকে শিক্ষাবিদগণ নানা অর্থে ব্যবহার করে থাকেন। ফলে এর সুনির্দিষ্ট কোন একক সংজ্ঞা প্রদান করা অত্যন্ত কঠিন কাজ। দেশ-বিদেশের বইপত্রে প্রাপ্ত শিক্ষাক্রমের সংজ্ঞাগুলোতে যেমন রয়েছে অনেক মিল, তেমনি আবার অনেক অমিলও লক্ষ করা যায়। অনেক লেখকই শিক্ষাক্রমকে পাঠ্যসূচি, পাঠ্যক্রম, পাঠ্য বিষয়সমূহ, সময়সূচি ইত্যাদি শব্দগুলোর সাথে সমার্থক রূপে ব্যবহার করে থাকেন।

শিক্ষাক্রমের সংজ্ঞা আসলে যুগে যুগে লেখক ভেদে ক্রমাগত বিবর্তন লাভ করে চলছে। তাই শিক্ষাক্রমের সর্বজন স্বীকৃত কোন একক সংজ্ঞার উদ্ভব হয়নি। কিছু কিছু লেখক তাঁর গবেষণা রিপোর্ট বা প্রবন্ধ উপস্থাপন করার প্রয়োজনে শিক্ষাক্রমের কার্যকর সংজ্ঞা তৈরি করে থাকেন। এসব সংজ্ঞায় তাঁদের নিজস্ব প্রয়োজন, মূল্যবোধ ও অভিজ্ঞতার ছাপ থাকে।

এনসাইক্লোপিডিয়া ব্রিটানিকাতে বলা হয়েছে শিক্ষাক্রম হল বিভিন্ন স্তরের শিক্ষালয়ে যে পাঠ্যবিষয় অনুশীলন করা হয় তার সমবায় মাত্র (A course of study laid down for the students of a university or school, or in a wider sense, for schools of certain standard)।

শিক্ষাবিদ **Payne** বলেছেন æCurriculum consists of all the situations that the school may select and consciously organize for the purpose of developing the personality of its pupils and for making behavior changes in them."

হিলডা তাবা– যুগ যুগের চিন্তা ভাবনার অবয়বহীন ফসলই হল শিক্ষাক্রম।

হুইলার– শিক্ষাক্রম হলো শিক্ষার উদ্দেশ্য, শিখন অভিজ্ঞতা নির্বাচন, বিষয়বস্তু সনাক্তকরণ, বিষয়বস্তু সংগঠন, মূল্যায়ন ইত্যাদির একটি বৃত্তাকার গতিশীল প্রক্রিয়া।

কার– বিদ্যালয় কর্তৃক পরিকল্পিত ও পরিচালিত যাবতীয় শিখন যা বিদ্যালয়ে এবং বিদ্যালয়ের বাইরে দলগত বা ব্যক্তিগত ভাবে সম্পন্ন করা যায় তাই শিক্ষাক্রম।

সুনির্দিষ্ট কয়েকটি লক্ষ্যের ভিত্তিতে নির্ণীত শিখন অভিজ্ঞতা, পঠন-পাঠন সামগ্রী প্রণয়ন এবং শিক্ষাদান কার্যাবলির সমন্বিত রূপরেখাই শিক্ষাক্রম।

বিদ্যালয় কর্তৃক পরিচালিত একটি সুনির্দিষ্ট শিক্ষাস্তরের জন্য পূর্ব নির্ধারিত ও পর্যায়ক্রমে বিন্যস্ত জ্ঞান, দক্ষতা, যোগ্যতা, মূল্যবোধ ইত্যাদি অর্জন এবং এর স্বীকৃতি স্বরূপ সনদ প্রদান পর্যন্ত সামগ্রিক কার্যক্রমকে শিক্ষাক্রম বলে।

শিক্ষাক্রমের উপরোক্ত সংজ্ঞার প্রেক্ষিতে গণিত শিক্ষাক্রম হলো–

শিক্ষার্থী ব্যক্তিগত বা দলগতভাবে প্রাতিষ্ঠানিক নির্দেশনায় শিক্ষাঙ্গনের ভিতরে বা বাইরে নির্দিষ্ট লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যের ভিত্তিতে নির্দিষ্ট কর্মসূচি অনুযায়ী যেসব গাণিতিক কাজ করে থাকেন।

অর্থাৎ বর্তমান শিক্ষাক্রমে একজন শিক্ষার্থীকে নিরেট পড়াশোনা ছাড়াও আরো কিছু কাজকর্ম করতে হয়। যেমন, কৃষি জমি মাপ করা, বাজেট প্রস্তুত করা, খেলার মাঠ মাপ অনুযায়ী চিহ্নিত করা, ভ্রমণসূচি করা ইত্যাদি।

শিক্ষাক্রমের প্রয়োজনীয়তা

শিক্ষার মাধ্যমে ভবিষ্যৎ প্রজন্মকে গড়ে তোলার শক্তিশালী ও কার্যকর পরিকল্পনা হল শিক্ষাক্রম। অন্য কথায় বলা যায় যে, শিক্ষাক্রম হচ্ছে শিক্ষা ব্যবস্থাকে উদ্দেশ্যমুখী, সময়োপযোগী, কর্মভিত্তিক, গতিশীল করে পুনর্গঠন ও নির্মাণ করার একটি বিশেষ নীল নকশা। শিক্ষা ও শিক্ষা ব্যবস্থার সকল কর্মকান্ডের কেন্দ্রবিন্দু হল শিক্ষাক্রম। শিক্ষাক্রম ব্যতীত শিক্ষার কাজ সুষ্ঠুভাবে পরিচালনা করা সম্ভব নয়। শিক্ষাক্রম ছাড়া শিক্ষাদান কার্যক্রম ধারাবাহিকভাবে পরিচালনা করা কঠিন হয়ে পড়ে। এ ছাড়া শিক্ষাদান কার্যক্রম হচ্ছে শিক্ষাক্রম পরিকল্পনারই অংশ বিশেষ। শিক্ষার্থীর সার্বিক বিকাশের লক্ষে কখন, কী ও কতটুকু শেখাতে হবে এবং কোন কোন বিষয় হাতে-কলমে শিখবে তারই রূপরেখা হল শিক্ষাক্রম ।

শিক্ষাক্রম এর গুরুত্বপূর্ণ কাজ

- যে বিষয় বা জ্ঞান সবচেয়ে বেশি কাজে লাগে তা অগ্রাধিকার ভিত্তিতে শনাক্ত করা।
- সমাজ ও ব্যক্তির প্রয়োজন অনুসারে শিক্ষার বিষয়বস্তু বিন্যাস করা।
- শিক্ষার্থীদের গ্রহণ ক্ষমতা অনুসারে বিষয়বস্তু নির্ধারণ করা।
- শিক্ষার্থীদের বয়স, গ্রহণ ও ধারণ ক্ষমতা অনুসারে কাজের মাত্রা ঠিক করা।
- শনাক্তকৃত বিষয়বস্তু সহজ থেকে কঠিন - এ নীতি অনুসরণে বিন্যাস করা।
- শিক্ষার্থীর সামর্থ্য অনুসারে কর্মমুখী ও বৃত্তিমূলক বিষয়াদির চয়ন ও বিন্যাস করা।
- বিষয়বস্তুর পারস্পর্য, ধারাবাহিকতা ও সমন্বয় বিধান করা।
- শ্রেণিকক্ষে শিক্ষাদানের গুণগত মান উন্নত করার জন্য শিক্ষক প্রশিক্ষণ জোরদার করা।

শিক্ষাক্রম হল ব্যাপক আর পাঠ্যসূচি হল এর অংশ বিশেষ। কিন্তু বাস্তবে পাঠ্যসূচি এবং পাঠ্যপুস্তকের তালিকাকে অনেকেই শিক্ষাক্রম বলে মনে করেন। প্রকৃতপক্ষে শিক্ষাক্রম হল শিক্ষার সার্বিক পরিকল্পনা। এর মধ্যে শিক্ষার লক্ষ্য, উদ্দেশ্য, শ্রেণি ও বিষয়ভিত্তিক উদ্দেশ্য, বিষয় ও অধ্যায় ভিত্তিক শিখনফল, পাঠ্যসূচি, পাঠ্যসূচির আলোকে ব্যবহৃত প্রয়োজনীয় শিক্ষা উপকরণ এবং শিখন-শেখানো কার্যক্রম ও মূল্যায়নসহ পাঠ্যপুস্তক প্রণেতাদের জন্য দিক নির্দেশনা থাকে।

অপরদিকে পাঠ্যসূচি হল নির্দিষ্ট স্তরে নির্দিষ্ট শ্রেণিতে নির্দিষ্ট সময়ে অর্জিতব্য শিখনফল ভিত্তিক নির্ধারিত পাঠ্য বিষয়াদির সার সংক্ষেপ।

আগে 'শিক্ষাক্রম' আর 'পাঠ্যসূচি' - কে দুটি আলাদা ধারণা হিসেবে না ভেবে একটিকে অপরটির সমার্থক শব্দ বলে গণ্য করা হত। শিক্ষা বিষয়ে শিক্ষাক্রম যখন একটি শিক্ষণীয় বিষয় হিসেবে প্রতিষ্ঠা লাভ করে তখন থেকে শিক্ষাক্রম সম্পর্কে নানা চিন্তা-ভাবনা ও গবেষণার ফলে শিক্ষাক্রম প্রণয়নে একটি বৈজ্ঞানিক প্রক্রিয়া অনুসৃত হয়। বর্তমানে শিক্ষাক্রম প্রণয়নে বিশ্বব্যাপী যে বৈজ্ঞানিক প্রক্রিয়া অনুসৃত হচ্ছে তার প্রধান ধাপগুলো হচ্ছে -

- শিক্ষাক্রম প্রণয়নের বিবেচ্য দিক
- জরিপের মাধ্যমে শিক্ষাক্রম প্রণয়নের উল্লেখযোগ্য সূচক চিহ্নিতকরণ
- উদ্দেশ্য নিরূপণ
- বিষয়বস্তু চিহ্নিতকরণ
- রচনা, প্রাক-মূল্যায়ন, চূড়ান্তকরণ
- বিস্তরণ, প্রশিক্ষণ কার্যক্রম প্রণয়ন ও প্রশিক্ষণ আয়োজন
- মূল্যায়ন ও গুণগত মান নিয়ন্ত্রণ।

গণিত শিক্ষণের লক্ষ্য ও শিখনফল

লক্ষ্য

শিক্ষার লক্ষ্য হল একটি আদর্শগত সাধারণ বিমূর্ত বাক্য বা বিবৃতি। এর মধ্যে দার্শনিক বিশেষত্ব প্রতিফলিত হয়। কেন প্রয়োজন এ প্রশ্নের উত্তর দেয়। সাধারণত শিক্ষার লক্ষ্য অতি ব্যাপক ও জটিল পরিভাষায় প্রকাশ করা হয়। সুস্পষ্টভাবে শিক্ষার্থীর আচরণগত পরিবর্তন প্রকাশ না করে সমগ্র শিক্ষা ব্যবস্থার ভবিষ্যৎ আশা আকাঙ্ক্ষা সম্পর্কে দিক নির্দেশনা দিয়ে থাকে। এ ক্ষেত্রে বাংলাদেশের জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃক এক বছর মেয়াদি বিএড শিক্ষাক্রম ২০১৭-তে উল্লেখিত গণিত শিক্ষণের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যসমূহ হলো:

- গণিতের কতিপয় মৌলিক ধারণা ব্যাখ্যা করা।
- মাধ্যমিক গণিত শিক্ষাক্রম বিশ্লেষণ করা।
- গণিত পাঠদানের পদ্ধতি ও কৌশলসমূহ ব্যাখ্যা করা।
- গণিত পাঠদানে শিক্ষা উপকরণ ব্যবহার করা।
- গণিত শিখনে অণুশিক্ষণ দক্ষতাসমূহ ব্যবহার করা।
- গণিত শিখনে কতিপয় মডেল ব্যবহার করা।
- বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনা ও ইউনিট পরিকল্পনা প্রস্তুত করা।
- সনাতন ও ডিজিটাল ফরমেটে পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়ন করা।
- গণিত শিক্ষকের যোগ্যতা, দৃষ্টিভঙ্গি, বিশ্বাস, গুণাবলি ও বহুমাত্রিক ভূমিকা ব্যাখ্যা করা।
- শ্রেণিতে প্রশ্নকরণের ধারণা, প্রকারভেদ, প্রয়োজনীয়তা, কৌশল উল্লেখ করা।
- গণিতে অর্জন যাচাইয়ের জন্য বিভিন্ন প্রকার মূল্যায়ন কৌশল ব্যবহার করা।
- উত্তম অভীক্ষার বৈশিষ্ট্য, আদর্শায়ন, শিখনের ডোমেইন ব্যাখ্যা করা।
- সৃজনশীল প্রশ্ন পদ্ধতিতে গণিত বিষয়ের প্রশ্নপত্র প্রণয়ন করা।
- গণিত পাঠদানে সমস্যাসমূহ চিহ্নিতকরে সমাধানের উপায় উল্লেখ করা।
- গণিতে একীভুত শিখনের ধারণা ব্যবহার করা।
- গণিত শিক্ষণে আইসিটি ব্যবহার করা।
- গণিত শিক্ষণে সহপাঠক্রমিক কার্যাবলি সংগঠন করা।
- গণিত শিখনে কতিপয় কঠিন বিষয়বস্তুর ব্যাখ্যা করা।
- গণিত শিখনে অনুসন্ধানমূলক কাজ সম্পাদন করা।

শিখনফল

শিক্ষার্থী বিবেচ্য পাঠের মাধ্যমে যে যে যোগ্যতা অর্জন করবে বলে প্রত্যাশা করা হয় তা হল আচরণিক উদ্দেশ্য এবং পাঠ শেষে অর্জিত যোগ্যতাই হল শিখনফল। অর্থাৎ অর্জিত আচরণিক উদ্দেশ্যই শিখনফল। বলা যায় একটি পাঠ সমাপনান্তে শিক্ষার্থী বা প্রশিক্ষণার্থীরা ঐ বিষয়ের যে যে সুনির্দিষ্ট জ্ঞান, দক্ষতা, দৃষ্টিভঙ্গি বা যোগ্যতা অর্জন করে তাকেই শিখনফল বলে। ব্যাপক অর্থে আচরণিক উদ্দেশ্য ও শিখনফলে তেমন কোন পার্থক্য নাই। শিক্ষাক্রমে আচরণিক উদ্দেশ্যের স্থলে আজকাল শিখনফল শব্দটিই ব্যহৃত হচ্ছে।

বাংলাদেশ জাতীয় বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃক এক বছর মেয়াদি বিএড শিক্ষাক্রম ২০১৭-তে উল্লেখিত গণিত শিক্ষণের শিখনফলসমূহ হলো :

- গণিতের অর্থ, প্রকৃতি, পরিসর ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- উল্লেখযোগ্য গণিতবিদগণের আবিষ্কার ও অবদান বর্ণনা করতে পারবেন।
- মাধ্যমিক গণিত শিক্ষাক্রমের উদ্দেশ্য বর্ণনা করতে পারবেন।
- গণিত শিক্ষণে বিভিন্ন পদ্ধতিসমূহের ব্যবহার, ব্যাখ্যা, সুবিধা, অসুবিধা বর্ণনা করতে পারবেন।
- গণিত শিক্ষণে ভাইগটস্কি'র গঠনবাদের প্রয়োগ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- গণিত শিক্ষণে বিভিন্ন কৌশলসমূহের ব্যবহার, ব্যাখ্যা, সুবিধা, অসুবিধা বর্ণনা করতে পারবেন।
- গণিতে শিক্ষা উপকরণের ধারণা, প্রকারভেদ ও ব্যবহারের নীতিমালা উল্লেখ করতে পারবেন।
- স্বল্প ব্যয়ে ও বিনামূল্যে গণিতে শিক্ষা উপকরণ তৈরি করতে পারবেন।
- শিক্ষণ মডেলের ধারণা ও উপাদান উল্লেখ করতে এবং কয়েকটি উল্লেখযোগ্য শিখন মডেলের বিবরণ দিতে পারবেন।
- বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনা ও ইউনিট পরিকল্পনার বিভিন্ন বিষয় উল্লেখ করতে পারবেন।
- বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস করতে পারবেন।
- দশমিক ভগ্নাংশের শ্রেণিবিন্যাস ব্যাখা করতে পারবেন।
- প্যাটার্ন কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- সেট ও উপসেটের ধারণা ব্যাখ্যা করে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবেন।
- সেট প্রকাশের পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন।
- ক্রমজোড় ও কার্তেসীয় গুণজ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- অন্বয় ও ফাংশন ব্যাখ্যা ও গঠন করতে পারবেন।
- ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন।
- মূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- লগারিদম ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।
- প্রদত্ত উপাত্ত ও তথ্য ব্যবহার করে ত্রিভুজ অঙ্কন করতে পারবেন।
- প্রদত্ত উপাত্ত ও তথ্য ব্যবহার করে সামান্তরিক অঙ্কন করতে পারবেন।
- পারদর্শী গণিত শিক্ষকের যোগ্যতা বর্ণনা করতে পারবেন।
- শ্রেণিতে প্রশ্নকরণের ধারণা, প্রকারভেদ, প্রয়োজনীয়তা, কৌশল উল্লেখ করতে পারবেন।
- উত্তম অভীক্ষার বৈশিষ্ট্য, আদর্শায়ন, শিখনের ডোমেইন ব্যবহার করে সৃজনশীল প্রশ্ন পদ্ধতিতে প্রশ্নপত্র প্রণয়ন করতে পারবেন।
- শিক্ষার্থীদের গণিতভীতি, দুর্বলতার কারণ, ক্ষেত্রসমূহ চিহ্নিতকরণ ও সমাধানের উপায় উল্লেখ করতে পারবেন।
- গণিত শিক্ষণে আইসিটি ব্যবহার, এর প্রতিবন্ধকতা ও তা দূর করার উপায় উল্লেখ করতে পারবেন।
- গণিত শিক্ষণে Virtual Learning Environment(VLE), Computer Assisted Instruction(CAI), Computer Aided Learning(CAL)-এর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- গণিতে স্বশিক্ষণের উপায় উল্লেখ করতে ও গুরুত্ব ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- গণিতে ধাঁধাঁ, যুক্তিমূলক ও প্যাটার্ন গেম ইত্যাদি তৈরি করতে পারবেন।
- বিভিন্ন শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজ আঁকতে পারবেন।
- পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কিত সম্পাদ্য বর্ণনা করতে পারবেন।
- ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।
- বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- সদৃশতার অনুপাত সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো যাচাই ও প্রমাণ করতে পারবেন।
- প্রতিসমতার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

গণিত শিক্ষাক্রমের অনুভূমিক ও উল্লম্ব বিন্যাস

শিক্ষাক্রমে বিষয়বস্তু চিহ্নিত করার পর পরবর্তী কাজ হল এগুলো একটি সুনির্দিষ্ট প্রক্রিয়া অনুসরণে বিন্যাস করা। শিক্ষাক্রমের উদ্দেশ্য অর্জনের বাহন হল বিষয়বস্তু আর এর বিন্যাস হল ধারাবাহিকভাবে উদ্দেশ্য অর্জনের পদ্ধতিগত প্রক্রিয়া।

শিক্ষাবিদগণ বিভিন্ন দৃষ্টিকোণ থেকে বিচার বিশ্লেষণ করে নানা ধরনের প্রক্রিয়ায় বিষয়বস্তু বিন্যাসের কথা বলেছেন। শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য নির্বাচনের পর এদেরকে যথাযোগ্যভাবে অর্জনের জন্য বিষয়বস্তুর নির্বাচন ও বিন্যাস করার প্রয়োজন পড়ে। বিষয়বস্তুকে শিক্ষার্থীর জ্ঞান, দক্ষতা, মনোভাব ও মূল্যবোধ হিসেবে বর্ণনা করা যায়। তাই এগুলোর মাধ্যমে শিক্ষার্থীর আচরণের পরিবর্তন ঘটে। আর এভাবেই শিখন উদ্দেশ্য অর্জিত হয়।

শিক্ষাক্রমে বিষয়বস্তুর বিন্যাস বিভিন্নভাবে করা যেতে পারে। তবে এ ব্যাপারে 'পরিসর' ও ''অনুক্রম' শব্দ দুটি বেশ প্রচলিত।

পরিসর ও অনুক্রম (Scope and Sequence)

কোন নির্দিষ্ট বিষয়বস্তু বা ধারণাকে যখন একই শ্রেণির বিভিন্ন পাঠ্যবিষয়ের (Subjects) মধ্যে সম্পর্কযুক্ত করে বিন্যাস করা হয় তখন 'পরিসর' কথাটি ব্যবহার করা হয়। পক্ষান্তরে কোন বিষয়বস্তুকে কয়েক বছর ধরে পড়াবার জন্য যখন নিম্ন শ্রেণি থেকে উচ্চ শ্রেণি পর্যন্ত যুক্তির ধারাবাহিকতা অনুযায়ী বিন্যাস করা হয়, তখন 'অনুক্রম' শব্দটি ব্যবহার করা হয়।

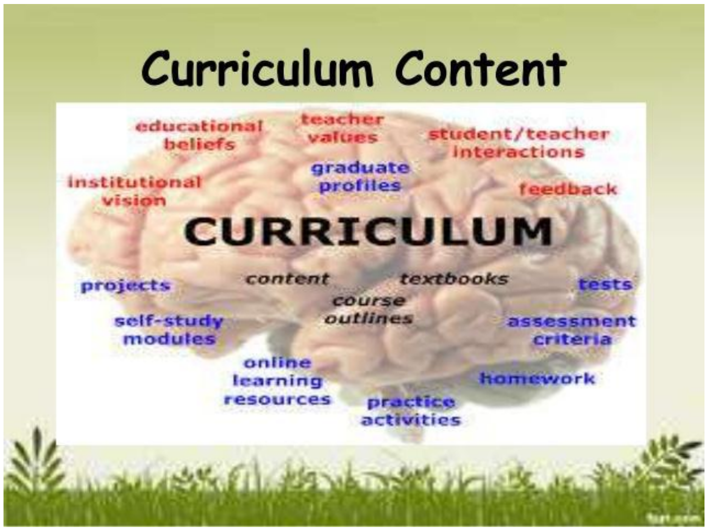
পরিসরকে কখনো কখনো 'অনুভূমিক বিন্যাস' (Horizontal Organization) এবং অনুক্রমকে 'উল্লম্ব বিন্যাস' (Vertical Organization) নামে আখ্যায়িত করা হয় (Marsh, 1997)

অনুভূমিক বিন্যাস (Horizontal Organization)

এই বিন্যাসের ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট বিষয়বস্তু বা ধারণাকে কোন একটি শিক্ষাস্তরের বিভিন্ন পাঠ্য বিষয়ের মধ্যে এমনভাবে সন্নিবেশ করা হয় যেন জ্ঞানের পুনরাবৃত্তি না ঘটে বরং ধীরে ধীরে প্রসারণ ঘটে। তাই এই বিন্যাসে বিষয়বস্তুর প্রসার (Breadth) ও গভীরতা (Depth) সম্পর্কে গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত গ্রহণের প্রয়োজন পড়ে। আবার কিছু কিছু সাধারণ প্রক্রিয়া/দক্ষতা আছে যে গুলোকে সকল পাঠ্য বিষয়য়ের মধ্যে সন্নিবেশ করা উচিত। অনুভূমিক বিন্যাস কালে এ বিষয়টিও বিশেষভাবে বিবেচনা করতে হয়।

উল্লম্ব বিন্যাস (Vertical Organization)

এই বিন্যাসের ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট বিষয়বস্তুকে শ্রেণির ক্রমানুযায়ী (যেমন- প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি) কিংবা শিক্ষাস্তরের ক্রমে (যেমন- প্রাথমিক, মাধ্যমিক ইত্যাদি) এমনভাবে সাজানো হয়, যেন শিক্ষার্থীর বয়সের সঙ্গে সঙ্গে জ্ঞানের গভীরতাও বৃদ্ধি পায়। এছাড়া কোন বিষয়বস্তুকে সহজ করে শিক্ষাদানের নিমিত্তে যুক্তির ধারাবাহিকতা অনুযায়ী বিন্যাস করার চেষ্টা করাও এর উদ্দেশ্য। সে ক্ষেত্রে কোন্ বিষয়টি আগে এবং কোন্‌টি পরে শেখাতে হবে সে ব্যাপারে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করতে হয়। এই বিন্যাসের ক্ষেত্রে বিষয়বস্তুর পুনরাবৃত্তি, প্রসার ও গভীরতা সম্পর্কে বিচার বিবেচনার প্রয়োজন পড়ে।



ইতিপূর্বেকার শিক্ষাক্রমের আলোকে নির্দিষ্ট শ্রেণিতে গণিত বিষয়বস্তুর অনুভূমিক ও উল্লম্ব বিন্যাস এর নমূনা:

শ্রেণি	**বিষয়বস্তু**		
	পাটিগণিত		
ষষ্ঠ	ভগ্নাংশ, দশমিক ভগ্নাংশ, সরলীকরণ	ঐকিক নিয়ম	শতকরা হিসাব
সপ্তম		ঐকিক নিয়ম পরিমাপ ওএকক	
অষ্টম	আবৃত্ত দশমিক, মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা	পরিমাপ ও একক	শতকরা হিসাব সুদকষা, লাভক্ষতি

শ্রেণি	বীজগণিত					
ষষ্ঠ	প্রতীক, সাংখ্যগুণিতক, সূচক, চিহ্নযুক্ত সংখ্যা		বীজগণিতীয় রাশিমালা যোগবিয়োগ	সরল সমীকরণ ও সমাধান		
সপ্তম	প্রথম চারটি সূত্র ও তাদের প্রয়োগ	বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ	বীজগণিতীয় রাশিমালার যোগবিয়োগ গুণভাগ	সরল সমীকরণ ও সমাধান	লসাগু ও গসাগু	
অষ্টম	বীজগণিতীয় সূত্রাবলি ও প্রয়োগ	বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ	উৎপাদকে বিশ্লেষণ	সরল সমীকরণ ও সমাধান	লসাগু ও গসাগু	লেখ অংকন
নবম-দশম	বাস্তব সংখ্যা সেট	অন্বয়, ফাংশন ও লেখচিত্র	বীজগণিতীয় রাশিমালা	এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ ও অসমতা দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোট		

কাজ : বর্তমান শিক্ষাক্রমের আলোকে (ষষ্ঠ-অষ্টম) শ্রেণির গণিত বিষয়বস্তুর অনুভূমিক ও উল্লম্ব বিন্যাস ছক তৈরি করুন।

২.২ গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য, প্রান্তিক শিখনফল, গণিত শিক্ষাক্রম ছক ও বিদ্যালয় শিক্ষাক্রমে গণিতের স্থান

বর্তমানে সমগ্র বিশ্বজুড়ে বিভিন্ন শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে শিক্ষাক্রমে ব্যাপক পরিবর্তন সূচিত হয়েছে। তাই গণিতের শিক্ষাক্রমেরও পরিবর্তন হচ্ছে খুব দ্রুত। এ উন্নয়ন, গণিতের বিষয়বস্তু ও গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্যের পুনর্মূল্যায়ন থেকে উদ্ভুত। এ পরিবর্তন ঘটেছে, অংশত গণিতের নিজস্ব উন্নয়ন, পুনর্বিন্যাস ও নবায়ন থেকে এবং অংশত যে অঞ্চলের জন্য পরিবর্তন হল তার সামাজিক উন্নয়নের কারণে। অতএব দেখা যায়, কোন দেশের শিক্ষা-ব্যবস্থা ও পরিকল্পনা তার সামাজিক পরিবর্তন ও উন্নয়নের সঙ্গে জড়িত। ঠিক এই কারণে প্রয়োজন হয়েছিল আমাদের গণিত শিক্ষার নতুন শিক্ষাক্রম প্রণয়নের।

ষষ্ঠ থেকে অষ্টম শ্রেণির গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য

কোন কাজে অগ্রসর হবার জন্য শিক্ষার সাধারণ গন্তব্য বা অভিপ্রায়, যার মধ্যে ব্যাপকভাবে বিবৃত থাকে এবং যার মাধ্যমে দীর্ঘমেয়াদী ফললাভ হয়, তাকে শিক্ষার লক্ষ্য বলে। আর শিক্ষার উদ্দেশ্য হল, শিক্ষার্থীর সম্ভাব্য কৃতিত্বের সেই বিন্দু বা লক্ষ্যস্থল যা শিক্ষার লক্ষ্য অভিমুখে পরিচালিত কোন পূর্ণাঙ্গ শিক্ষাব্যবস্থার সমাপ্তিপর্বে অর্জন করতে হবে।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা কর্তৃক প্রকাশিত(ডিসেম্বর, ২০১২) "জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০১২" বই-এ মাধ্যমিক স্তরে (ষষ্ঠ-অষ্টম শ্রেণি) গণিত শিক্ষণে যেসব উদ্দেশ্যের কথা বলা হয়েছে সেগুলো হলঃ

- গণিত শিক্ষায় উৎসাহী ও আগ্রহী হয়ে যৌক্তিক এবং গঠনমূলক চিন্তায় উদ্বুদ্ধ হওয়া ।
- বিভিন্ন প্রকার সংখ্যার বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে ধারণা লাভ করে গাণিতিক সমস্যা গঠন করতে উদ্বুদ্ধ হয়ে তা সমাধানে সক্ষম হওয়া।
- ঐকিক, অনুপাত ও শতকরা সংক্রান্ত সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করা।
- পরিমাপ সম্পর্কিত জ্ঞান ও ব্যবহারিক দক্ষতা অর্জন করা।
- বীজগণিতীয় সূত্রাবলি আয়ত্ত করা এবং সূত্রাবলি প্রয়োগের মাধ্যমে সমস্যার সমাধান করতে পারা।
- প্যাটার্ন ও লেখচিত্র সম্পর্কে ধারণা লাভ করে সমস্যা সমাধান করতে পারা।
- বীজগণিতীয় সমীকরণের ধারণা লাভ, সমীকরণ গঠন ও সমাধানে সক্ষম হওয়া।
- জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানের বিভিন্ন পন্থা হতে সর্বোৎকৃষ্টটি নির্বাচনে সমর্থ হওয়া।
- গাণিতিক উক্তির সত্যতা যাচাই করার দক্ষতা অর্জন করা।
- জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনের সাহায্যে শিক্ষা ও কর্মজীবনে হাত ও চোখ ব্যবহারের কৌশল রপ্ত করা।
- সেট ও সেটের কার্যবিধি জেনে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারা।
- তথ্য-উপাত্তের প্রক্রিয়াকরণ ও লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন এবং কেন্দ্রীয় প্রবণতা নির্ণয়ে দক্ষতা লাভ করা।

প্রান্তিক শিখনফল

উদ্দেশ্য হলো শিক্ষার প্রত্যাশিত অভিমুখ বা গতিপথের দিকে অর্জিত কৃতিত্ব বিন্দু। যা স্কুল প্রোগ্রামের মাধ্যমে অর্জন করা সম্ভব। শিক্ষার্থী বিবেচ্য পাঠের মাধ্যমে যে যে যোগ্যতা অর্জন করবে বলে প্রত্যাশা করা হয় তা হল আচরণিক উদ্দেশ্য এবং পাঠ শেষে অর্জিত যোগ্যতাই হল শিখনফল। অর্থাৎ অর্জিত আচরণিক উদ্দেশ্যই শিখনফল। বলা যায় একটি পাঠ সমাপনান্তে শিক্ষার্থী বা প্রশিক্ষণার্থীরা ঐ বিষয়ের যে যে সুনির্দিষ্ট জ্ঞান, দক্ষতা, দৃষ্টিভঙ্গি বা যোগ্যতা অর্জন করে তাকেই শিখনফল বলে। ব্যাপক অর্থে আচরণিক উদ্দেশ্য ও শিখনফলে তেমন কোন পার্থক্য নাই। শিক্ষাক্রমে আচরণিক উদ্দেশ্যের স্থলে আজকাল শিখনফল শব্দটিই ব্যহৃত হচ্ছে।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা কর্তৃক প্রকাশিত(ডিসেম্বর, ২০১২) "জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০১২" বই-এ মাধ্যমিক স্তরে (ষষ্ঠ-অষ্টম শ্রেণি) গণিত শিক্ষণে যেসব প্রান্তিক শিখনফলের (বুদ্ধিবৃত্তীয়, আবেগীয় ও মনোপেশিজ) কথা বলা হয়েছে সেগুলো হলঃ

বুদ্ধিবৃত্তীয় শিখনফল

- স্বাভাবিক সংখ্যা , মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা, বর্গমূল, প্যাটার্ন ও লেখচিত্র বর্ণনা করতে এবং বিভিন্ন ধরনের প্যাটার্ন লিখতে ও এতদ্‌সংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- দৈনন্দিন জীবনে অনুপাত-সমানুপাত, ঐকিক নিয়ম, শতকরা, লাভ-ক্ষতি ও মুনাফা সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

- পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতি বর্ণনা এবং দৈনন্দিন জীবনে এর ব্যবহার সম্পর্কিত সমস্যাবলির সমাধান করতে পারবে।
- পূর্ণসংখ্যা ও চিহ্নযুক্ত সংখ্যার বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করে প্রয়োগ করতে পারবে।
- বীজগণিতীয় রাশি বর্ণনা করতে পারবে এবং প্রতীক, চলক, সহগ, সূচক, চিহ্নযুক্ত সংখ্যা ইত্যাদির মাধ্যমে তা প্রকাশ করতে পারবে।
- বীজগণিতীয় রাশি যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারবে এবং এতদ্‌সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- বীজগণিতের প্রথম চারটি বর্গের সূত্র ও ঘনফলের সূত্র বর্ণনা করতে পারবে এবং এগুলো প্রয়োগে বীজগণিতীয় রাশির মান নির্ণয় করতে পারবে।।
- বীজগণিতীয় রাশি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবে এবং গসাগু ও লসাগু নির্ণয় করতে পারবে।
- বীজগণিতীয় রাশি ভগ্নাংশের ধারণা ব্যাখ্যা করে এদের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারবে এবং এতদ্‌সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- সরল সমীকরণ ও সরল সহসমীকরণ গঠন এবং সমাধান করতে পারবে।
- উদাহরণ ও প্রতীকের সাহায্যে সেট ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং সেট প্রক্রিয়া ব্যবহারের মাধ্যমে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- জ্যামিতির মৌলিক বিষয়গুলো ব্যাখ্যা করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- সমান্তরাল সরলরেখা ও ছেদক দ্বারা উৎপন্ন কোণের বৈশিষ্ট্য বর্ণনা ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং ত্রিভুজ সংক্রান্ত মৌলিক উপপাদ্য প্রমাণ করে প্রয়োগ করতে পারবে।
- সর্বসমতা ও সদৃশতার বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করে মৌলিক উপপাদ্য প্রমাণ এবং সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- চতুর্ভুজের ধর্মাবলি ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং গাণিতিক উক্তির সত্যতা যাচাই, প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- পাই (π) এর ধারণা ব্যাখ্যা করে বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও পরিসীমা নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্ত সংক্রান্ত মৌলিক উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবে এবং এতদ্‌সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- তথ্য ও উপাত্ত হতে গড়, মধ্যক, প্রচুরক নির্ণয় করে এ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

আবেগীয় শিখনফল

- সংখ্যা নিয়ে খেলার মাধ্যমে বিভিন্ন সংখ্যাভিত্তিক খেলা তৈরিতে সচেষ্ট হবে।
- দৈনন্দিন জীবনের সহজ গাণিতিক হিসাব নিকাশে ঐকিক নিয়ম, শতকরা ও অনুপাতের প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি করে হিসাব করতে উৎসাহী হবে।
- বীজগণিতের সাথে পরিচিত হয়ে বীজগণিতীয় সমস্যা সমাধানে আগ্রহী হবে।
- বীজগণিতীয় সমীকরণ গঠন করে সহজ সমস্যা সমাধানে আগ্রহী হবে।
- সেটের সাহায্যে তথ্যকে নান্দনিকভাবে উপস্থাপনে সচেষ্ট হবে।
- গাণিতিক সমস্যা সমাধানে যৌক্তিক চিন্তায় উদ্বুদ্ধ হবে।

মনোপেশিজ শিখনফল

- যথাযথভাবে ছক কাগজ ব্যবহার করে লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- সরল সমীকরণ ও সরলসহ সমীকরণের সমাধান লেখচিত্রে দেখাতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে সরল সহসমীকরণের সমাধান করতে পারবে।
- দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন পদ্ধতিতে পরিমাপ অনুমান করতে পারবে।
- যথাযথ (appropriate) পরিমাপক ব্যবহার করে আয়তাকার ঘনবস্তু, ঘনক, কোনক, বেলন ও বৃত্তাকৃতি বস্তুর ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।
- প্রদত্ত তথ্যের ভিত্তিতে উপকরণ ব্যবহার করে জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- তথ্য-উপাত্তকে লেখচিত্রে প্রকাশ করতে পারবে।

এছাড়াও প্রান্তিক শিখনফলের শ্রেণিভিত্তিক বিভাজন অংশটি গণিত শিক্ষাক্রম ২০১২ -এর পৃষ্ঠা নং ২৮ থেকে ৩৮ পর্যন্ত দেখুন।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০১২ কর্তৃক প্রদত্ত ষষ্ঠ-অষ্টম শ্রেণির গণিত শিক্ষাক্রম ছক

বর্তমান গণিত শিক্ষাক্রম ২০১২ -এ স্তরভিত্তিক ও শ্রেণি ভিত্তিক শিক্ষাক্রম ছকে বিষয়বস্তুর সাথে শিখনফল, শিখন-শেখানো নির্দেশনা ও মূল্যায়ন নির্দেশনা প্রদান করা হয়েছে। এছাড়াও উক্ত অধ্যায়টি কতগুলো পিরিয়ডের মধ্যে সম্পন্ন করতে হবে তার উল্লেখ আছে। বর্তমান শিক্ষাক্রমের ষষ্ঠ শ্রেণির গণিত প্রথম অধ্যায়ের শিক্ষাক্রম ছকটি নিম্নরূপ :

ষষ্ঠ শ্রেণির গণিত প্রথম অধ্যায়: স্বাভাবিক সংখ্যা ও ভগ্নাংশ (১৫ পিরিয়ড)

শিখনফল	**বিষয়বস্তু**	**শিখন-শেখানো নির্দেশনা**	**মূল্যায়ন নির্দেশনা**
বুদ্ধিবৃত্তীয় ১. স্বাভাবিক সংখ্যার অঙ্ক পাতন করতে পারবে। ২. দেশীয় ও আন্তর্জাতিক রীতিতে অঙ্ক পাতন করে পড়তে পারবে। ৩. মৌলিক সংখ্যা, যৌগিক সংখ্যা ও সহমৌলিক সংখ্যা চিহ্নিত করতে পারবে। ৪. বিভাজ্যতা ব্যাখ্যা করতে পারবে। ৫. ২, ৩, ৪, ৫, ৯ দ্বারা বিভাজ্যতা যাচাই করতে পারবে। ৬. সাধারণ ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশের গ.সা.গু ও ল.সা.গু, নির্ণয় করতে পারবে। ৭. সাধারণ ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশ সরলীকরণ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে। **আবেগীয়** ৮. সংখ্যা সম্পর্কে কৌতূহলী হয়ে বিভিন্ন ধরনের সংখ্যা ভিত্তিক মজার মজার খেলায় উৎসাহী হবে।	▪ স্বাভাবিক সংখ্যা ▪ দেশীয় ও আন্তর্জাতিক রীতিতে অঙ্ক পাতন ▪ মৌলিক সংখ্যা, যৌগিক সংখ্যা, সহমৌলিক সংখ্যা ▪ বিভাজ্যতা ▪ গ.সা.গু ও ল.সা.গু ▪ ভগ্নাংশ ও দশমিক সংখ্যার সরল	▪ শিক্ষক উদাহরণের সাহায্যে স্বাভাবিক সংখ্যা ও শূন্যের ধারণা দেবেন। ▪ উদাহরণ ও প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে অঙ্কের স্থানীয়মানের পূর্বজ্ঞান যাচাই করবেন। ▪ শিক্ষার্থীরা বোর্ডে কয়েকটি সংখ্যা লিখে তা থেকে মৌলিক সংখ্যা ও যৌগিক সংখ্যা শনাক্ত করবে। কোন কোন সংখ্যা পরস্পর সহমৌলিক তা নির্ণয় করতে শিক্ষক সহযোগিতা করবেন। প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের ধারণা পরিষ্কার করবেন। ▪ শিক্ষক ২, ৩, ৫ দ্বারা বিভাজ্যতার পূর্বজ্ঞান প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে যাচাই করবেন। ৪ ও ৯ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলো উদাহরণ ও প্রশ্নোত্তরের সাহায্যে ব্যাখ্যা করবেন এবং বিভিন্ন সংখ্যা দিয়ে বিভাজ্যতা যাচাই করতে বলবেন। শিক্ষার্থীরা দলীয়ভাবে ২, ৩, ৪, ৫, ৯ এর বিভাজ্যতার নিয়মগুলো ছক আকারে উপস্থাপন করবে। ▪ শিক্ষক স্বাভাবিক সংখ্যার গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয়ের পদ্ধতি প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে যাচাই করবেন। সাধারণ ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশের গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয় পদ্ধতি উদাহরণের সাহায্যে বোঝাবেন এবং শিক্ষার্থীদের গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয় করতে দেবেন। ▪ শিক্ষক বিভিন্ন প্রকার বন্ধনীর নাম চিহ্নসহ খাতায় লিখতে বলবেন। সরলীকরণে বন্ধনীর ব্যবহার প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে যাচাই করবেন। সাধারণ ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশের সরলীকরণে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, এর ও বন্ধনীর কাজ পর্যায়ক্রমে বর্ণনা করে একজন শিক্ষার্থীকে বোর্ডে একটি সহজ সমস্যা সরল করতে দেবেন এবং পাঠ্যপুস্তকের অনুশীলনীর সমস্যা দলগতভাবে সমাধান করতে বলবেন। ▪ শিক্ষক শিক্ষার্থীদের দলগতভাবে ৩, ৪, ৫, ৬ অঙ্কের সংখ্যা ব্যবহার করে ২, ৩, ৫ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা নির্ণয় করার প্রতিযোগিতার ব্যবস্থা করবেন। এভাবে শিক্ষার্থীরা খেলার মাধ্যমে বিভাজ্যতা যাচাই করবে।	• বোর্ডে অঙ্কপাতন করতে দিয়ে পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে মূল্যায়ন করবেন। • শিক্ষক বাড়ির কাজ ও শ্রেণির কাজের মাধ্যমে মূল্যায়ন করবেন। • ছক উপস্থাপন করার সময় শিক্ষার্থীদের উপস্থাপন কৌশল মূল্যায়ন করবেন। • শ্রেণি অভীক্ষার মাধ্যমে মূল্যায়ন করবেন। • নির্ধারিত মানদণ্ডের সাহায্যে দলগতকাজ মূল্যায়ন করবেন। • শিক্ষার্থীদের খেলার মাধ্যমে সংখ্যার বিভাজ্যতা নির্ণয়ের প্রতি কৌতূহল ও দলে কাজ করার মানসিকতা মূল্যায়ন করবেন।

লক্ষণীয় যে ষষ্ঠ শ্রেণির প্রথম অধ্যায়ের স্বাভাবিক সংখ্যা ও ভগ্নাংশ বিষয়বস্তুকে মোট পাঁচটি অংশে বিভক্ত করা হয়েছে। এই পাঁচটি অংশকে ১৫টি পিরিয়ডের মধ্যে সম্পন্ন করতে হবে। এক্ষেত্রে শ্রেণি শিক্ষকরা উক্ত পাঁচটি অংশের প্রতিটি অংশ সম্পন্ন করার জন্য নূন্যতম ৩টি পিরিয়ড পাবেন। প্রয়োজন ভেদে বিষয়বস্তুর ব্যাপ্তির ব্যাপকতার সাপেক্ষে প্রতিটি অংশকে ভিন্ন ভিন্ন পিরিয়ডের মধ্যে সম্পন্ন করতে পারবেন।

নবম-দশম শ্রেণির গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য, প্রান্তিক শিখনফল ও শিক্ষাক্রম ছক

সমাজ ও জাতীয় চাহিদার প্রেক্ষাপটে শিক্ষার্থীর প্রয়োজন মেটানোর অভিপ্রায়ে শিক্ষাক্রম পরিমার্জন ও নবায়ন করা অপরিহার্য। ইতিপূর্বে প্রচলিত শিক্ষাক্রম ১৯৯৫ সালে প্রণয়ন করা হয়। ইতোমধ্যে পরিবর্তনশীল বিশ্বে জ্ঞান বিজ্ঞানের ব্যাপক উন্নয়ন সাধিত হয়েছে। এছাড়াও বহুল প্রত্যাশিত জাতীয় শিক্ষানীতি অনুমোদিত হয়েছে।

জাতীয় শিক্ষানীতির আলোকে মানসম্মত ও সময়োপযোগী শিক্ষা প্রদানের জন্য মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষার লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য পুনঃনির্ধারণ করা হয়। দৈনন্দিন নানা সমস্যা সমাধানে সক্ষম করার পাশাপাশি এ শিক্ষাক্রমের উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য হচ্ছে, শিক্ষা শেষে শিক্ষার্থীদের বিভিন্ন পেশায় নিয়োজিত হওয়া অথবা পরবর্তী পর্যায়ের শিক্ষার পথ সুগম করা। এই সকল চাহিদা মেটানোর লক্ষ্যে গণিতের উদ্দেশ্য ও শিখনফল তৈরি করা হয়েছে।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা কর্তৃক প্রকাশিত (ডিসেম্বর, ২০১২) "জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০১২" বই-এ মাধ্যমিক স্তরে (নবম-দশম শ্রেণি) গণিত শিক্ষণে যেসব উদ্দেশ্যের কথা বলা হয়েছে সেগুলো হল :

- গাণিতিক জ্ঞান ও নৈপুণ্য অর্জন করার মাধ্যমে যৌক্তিক ও গঠনমূলক চিন্তায় উদ্বুদ্ধ হওয়া।
- গাণিতিক যুক্তি ব্যবহার করে বস্তুনিষ্ঠ প্রমাণে উপনীত হওয়ার দক্ষতা অর্জন করা।
- সেট ও সেটের কার্যবিধি সম্পর্কে জানা এবং সমস্যা সমাধানে সেট ব্যবহারের দক্ষতা অর্জন করা।
- ফাংশনের ধারণা লাভ করে লেখচিত্র অঙ্কন এবং তা প্রয়োগ করতে সক্ষম হওয়া।
- বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস সর্ম্পকে জানা ও প্রয়োগ করতে পারা।
- বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্রের গঠন ও ব্যবহার করার দক্ষতা অর্জন করা।
- সূচক ও লগারিদম সম্পর্কে ধারণা লাভ ও প্রয়োগে সক্ষম হওয়া।
- বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা লাভ ও প্রয়োগে সক্ষম হওয়া।
- এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ এবং দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ সমাধান ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করা।
- অনুক্রম ও ধারার ধারণা লাভ, সসীম সমান্তর ও গুণোত্তর ধারার নির্দিষ্ট পদ নির্ণয় এবং নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারা।
- জ্যামিতিক প্রমাণ ও জ্যামিতিক অঙ্কন সম্পর্কে জ্ঞান সম্প্রসারণ ও তা প্রয়োগের দক্ষতা বৃদ্ধি করা।
- প্রতিসমতা ও সদৃশতা সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করে তা ব্যবহার করতে সক্ষম হওয়া।
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করে প্রয়োগ করতে পারা।
- সমতলীয় ক্ষেত্র ও ঘনবস্তু সংক্রান্ত পরিমাপ করতে সক্ষম হওয়া।
- তথ্য ও উপাত্ত বিন্যাসের মাধ্যমে পরিসংখ্যানের মৌলিক বিষয়াদি জানা ও প্রয়োগ করতে পারা।
- গাণিতিক সমস্যা সমাধানের উপায় উদ্ভাবনে নৈপুণ্য লাভ করা।

শিক্ষাক্রমের নবম-দশম শ্রেণির একটি অধ্যায়ের প্রান্তিক শিখনফল ও শিক্ষাক্রম ছকটি নিম্নরূপ:

দ্বাদশ অধ্যায় : দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ (২০ পিরিয়ড)

শিখনফল	বিষয়বস্তু	শিখন-শেখানো নির্দেশনা	মূল্যায়ন নির্দেশনা
বুদ্ধিবৃত্তীয় ১.দুই চলক বিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সঙ্গতি যাচাই করতে পারবে। ২. দুই চলক বিশিষ্ট দুইটি সমীকরণের পরস্পর নির্ভরশীলতা যাচাই করতে পারবে। ৩. আড়গুণন পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।	▪ দুই চলক বিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ	▪ উদাহরণের সাহায্যে দুই চলক বিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সঙ্গতির শর্তাবলি উপস্থাপন। ▪ দুই চলক বিশিষ্ট দুইটি সমীকরণের পরস্পর নির্ভরশীলতা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন।	▪ দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সঙ্গতির শর্তাবলি লিখন। ▪ দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সরল সহসমীকরণ পরস্পর নির্ভরশীলতা যাচাই।

৪. বাস্তবভিত্তিক সমস্যাকে সমীকরণের সাহায্যে সমাধান করতে পারবে। **মনোপেশিজ** ৫. সরল সহসমীকরণের সমাধান লেখচিত্রে দেখাতে পারবে। ৬. লেখচিত্রের সাহায্যে দুইচলকবিশিষ্ট দুইটি সরল সহসমীকরণ সমাধান করতে পারবে। **আবেগীয়** ৭. গাণিতিক সমস্যার সরল সহসমীকরণ গঠন ও সমাধানে আগ্রহী হবে।	▪ আড়গুণন পদ্ধতি ▪ সমাধান ▪ লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান ▪ বাস্তবভিত্তিক সমস্যা	▪ উদাহরণের মাধ্যমে আড়গুণন পদ্ধতির ব্যাখ্যা উপস্থাপন। ▪ উদাহরণের মাধ্যমে বাস্তব ভিত্তিক সমস্যার সরল সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান উপস্থাপন। ▪ সরল সহসমীকরণের সমাধান লেখচিত্রে উপস্থাপন ▪ লেখচিত্রের সাহায্যে দুই চলক বিশিষ্ট দুইটি সরল সহসমীকরণের সমাধান কৌশল উপস্থাপন	▪ আড়গুণনের মাধ্যমে সরল সহসমীকরণের সমাধান। ▪ সরল সহসমীকরণ গঠন ও সমাধান। ▪ সরল সহসমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন। ▪ লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান।

লক্ষণীয় যে নবম-দশম শ্রেণির দ্বাদশ অধ্যায়ের দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ বিষয়বস্তুকে মোট পাঁচটি অংশে বিভক্ত করা হয়েছে। এই পাঁচটি অংশকে ২০টি পিরিয়ডের মধ্যে সম্পন্ন করতে হবে। এক্ষেত্রে শ্রেণি শিক্ষকরা উক্ত পাঁচটি অংশের প্রতিটি অংশ সম্পন্ন করার জন্য নূন্যতম ৪টি পিরিয়ড পাবেন। প্রয়োজন ভেদে বিষয়বস্তুর ব্যাপ্তির ব্যাপকতার সাপেক্ষে প্রতিটি অংশকে ভিন্ন ভিন্ন পিরিয়ডের মধ্যে সম্পন্ন করতে পারবেন।

এছাড়াও নবম-দশম শ্রেণির শিক্ষাক্রম ছক অংশটি গণিত শিক্ষাক্রম ২০১২ -এর পৃষ্ঠা নং ৮৮ থেকে ১০৯ পর্যন্ত দেখুন।

বিদ্যালয় শিক্ষাক্রমে গণিতের স্হান

বাংলাদেশের বিদ্যালয়গুলোতে বিদ্যালয় শিক্ষাক্রমে গণিত সবসময়ই একটি অত্যাবশ্যক পাঠ্য বিষয় হিসাবে গণ্য হয়ে আসছে। কারণ, গণিত চিন্তাশক্তির বিকাশে সাহায্য করে এবং অন্যদিকে বাস্তব সমস্যাসমূহের সমাধানে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে।

কেবলমাত্র প্রাত্যহিক এবং পেশাগত প্রয়োজনে বা বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির বিভিন্ন শাখার উন্নয়নে সহায়ক ভূমিকার জন্য গণিতের প্রাতিষ্ঠানিক মূল্য সার্বজনীনভাবে স্বীকৃত কেবল তা নয় বরং মানবিক মূল্যবোধের উন্নয়নেও এর গুরুত্ব রয়েছে। গণিতের অকাট্য যুক্তি, প্রকাশের সুস্পষ্টতা এবং সমস্যা সমাধানের মৌলিকত্ব ও প্রমাণ নির্ভরতা শিক্ষার্থীদের মনের কাঙ্ক্ষিত গুণাবলি বিকাশে সাহায্য করে।

বর্তমান শিক্ষানীতির আলোকে নবম-দশম শ্রেণি বাংলাদেশে মাধ্যমিক শিক্ষা ব্যবস্থার প্রাথমিক প্রান্তিক স্তর। এ স্তরের শিক্ষা সমাপনান্তে শিক্ষার্থীরা বিভিন্ন পেশায় নিয়োজিত হয় অথবা উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষা গ্রহণ করে। উচ্চ মাধ্যমিক স্তর মূলত উচ্চ শিক্ষার প্রস্তুতি পর্ব হলেও এই পর্যায়ের শিক্ষা সমাপ্ত করে কেউ কেউ কর্মজীবনে প্রবেশ করে। এই উভয় দিকে শিক্ষার্থীকে উপযোগী করে গড়ে তুলতে গণিত শিক্ষার গুরুত্ব অপরিসীম।

আধুনিক ব্যবসা-বাণিজ্যের অনেকাংশে এবং জ্ঞান-বিজ্ঞানের প্রায় সকল শাখাই এখন গণিতের জ্ঞানের উপর বহুলাংশে নির্ভরশীল। কম্পিউটার প্রযুক্তির দ্রুত প্রসারের ফলে এই নির্ভরতা উত্তরোত্তর বৃদ্ধি পাচ্ছে। স্বাভাবিকভাবেই মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের গণিত শিক্ষায় নতুন ধ্যান-ধারণা প্রবর্তনের এবং তাকে অধিকতর প্রয়োগমুখী করার প্রয়োজনীয়তা গভীরভাবে অনুভূত হচ্ছে। উন্নত অনুন্নত অনেক দেশেই ইতোমধ্যে তা করা হয়েছে। বিগত কয়েক দশকে গণিত ও গণিত শিক্ষা পদ্ধতির অভাবনীয় অগ্রগতি সাধিত হয়েছে।

২.৩ গণিত পাঠ্যপুস্তক: উত্তম পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্য, পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়ন ও বিষয়বস্তু বিশ্লেষণ

শিখন-শেখানো প্রক্রিয়ায় সবচেয়ে সাধারণ ও বহুল ব্যবহৃত একটি শিক্ষা উপকরণ হলো পাঠ্যপুস্তক। পাঠ্যপুস্তক বলতে এমন একটি বিশেষ পুস্তককে বুঝায় যা বিষয়বস্তুর নির্বাচন ও সাংগঠনিক নীতিমালা দ্বারা একটা সাধারণ আনন্দ পাঠের পুস্তক থেকে আলাদা হয় এবং কোন বিশেষ শ্রেণির শিক্ষার্থীর জন্য বিশেষ লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যের ভিত্তিতে যত্ন সহকারে একটি ধারাবাহিক ক্রম অনুসারে বিষয়বস্তু উপস্থাপিত হয়।

মানবিক, জাতীয়, সামাজিক ও অর্থনৈতিক কতক মৌলিক উদ্দেশ্য অর্জনে একটি শিক্ষাক্রম অনুসারে পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। শিক্ষার্থীর মনস্তাত্ত্বিক দিকটিও পাঠ্যপুস্তক রচনায় বিবেচিত হয়।

উত্তম পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্য

আমাদের দেশের শিক্ষক ও শিক্ষার্থী উভয়েই সম্পূর্ণরূপে পাঠ্যপুস্তকের উপর নির্ভরশীল। এখানে শ্রেণিকক্ষে শিক্ষক পাঠ্যপুস্তক অনুসরণ করেই মূলত পাঠদান করে থাকেন। শিক্ষার্থীরা বাড়িতে নিজে পাঠ্যপুস্তক পড়ে জ্ঞান লাভ করে এবং শিক্ষক প্রদত্ত বাড়ির কাজ তৈরি করে। পিতামাতা পাঠ্যপুস্তক দেখে ছেলেমেয়ের লেখাপড়ায় সাহায্য করেন। পাঠ্যপুস্তক ব্যবহার করে পরীক্ষক শিক্ষার্থীর অর্জিত জ্ঞান ও দক্ষতার মূল্যায়ন করেন। পাঠ্যপুস্তকই একটি প্রধান মাধ্যম যার দ্বারা শিক্ষাক্রম শ্রেণিকক্ষে বাস্তবায়িত হয়। তাই পাঠ্যপুস্তকের গুরুত্ব অপরিসীম। এক্ষেত্রে পাঠ্যপুস্তককে আদর্শ বা উত্তমরূপে তৈরি করা প্রয়োজন। একটি আদর্শ বা উত্তম পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্য বা গুণাবলির ক্ষেত্রগুলো হলো: ১) শিক্ষামূলক বৈশিষ্ট্য ২) আঙ্গিক বৈশিষ্ট্য

১) শিক্ষামূলক বৈশিষ্ট্য (Academic Aspects) **হলো:**

- শিক্ষাক্রমে নির্ধারিত উদ্দেশ্য এবং শিখনফলের আলোকে পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তু প্রণয়ন।
- পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে সংশ্লিষ্ট পাঠ্যসূচি যথাযথভাবে অনুসরণ।
- পাঠ্যপুস্তকের অধ্যায়গুলোর বিন্যাস শিক্ষাদান প্রক্রিয়ার সহায়ক।
- বিভিন্ন অধ্যায়ের অনুচ্ছেদগুলো রচনায় যৌক্তিক ধারাবাহিকতা রক্ষা।
- পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে শিক্ষার্থীদের বয়স, সামর্থ্য, ধারণ ক্ষমতা ও মানসিক পরিপক্কতার বিবেচনা।
- শিক্ষার্থীর সৃজনশীলতা বিকাশে সহায়ক।
- সংশ্লিষ্ট বিষয়ের মৌলিক ধারণা ও নীতি অনুসরণ।
- বিষয়বস্তু সর্বাধুনিক।
- বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীর চাহিদা ও আগ্রহ পূরণে সমর্থ।
- বিষয়বস্তু উপস্থাপনে শিখনের নীতি ও তত্ত্ব অনুসৃত।
- বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীদের নিকট সহজবোধ্য।
- পাঠ্যপুস্তকে পর্যাপ্ত চিত্র, ছবি ও চার্ট সন্নিবেশিত।
- পাঠ্যপুস্তকে পর্যাপ্ত চিত্র, ছবি ও চার্ট আকর্ষণীয়।
- বিষয়বস্তুতে তত্ত্ব ও তথ্যগত ত্রুটিমুক্ত।
- পাঠ্যপুস্তক বিতর্কিত ধ্যান ধারণা বিহীন।
- পাঠ্যপুস্তকটি মূল্যবোধ অবক্ষয় রোধে সহায়ক।
- অনুশীলনীতে পর্যাপ্ত পরিকল্পিত কাজ সন্নিবেশিত।
- উপস্থাপিত বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীদের নিকট পরিবেশ ও বাস্তব জীবনের সংগে সামঞ্জস্যপূর্ণ।
- বিভিন্ন অধ্যায়ে সন্নিবেশিত চিত্র, ছবি ও চার্ট বিষয়বস্তু ব্যাখ্যায় সহায়ক।
- বিষয়বস্তু উপস্থাপনে ব্যবহৃত শব্দভান্ডার, বাক্য কাঠামো ও রচনাশৈলী শিক্ষার্থীদের উপযোগী।
- অনুশীলনীতে প্রদত্ত প্রশ্নাবলি বিষয়বস্তুর সংগে সংগতিপূর্ণ।
- অনুশীলনীতে প্রদত্ত প্রশ্নাবলি শিক্ষার্থীর অর্জিত জ্ঞান, দক্ষতা ও দৃষ্টিভঙ্গি মূল্যায়নে সহায়ক।

২) **আঙ্গিক বৈশিষ্ট্য** (Physical Aspects) **হলো :**

- পাঠ্যপুস্তকের আকার ও আয়তন (format) সংশ্লিষ্ট শিক্ষার্থীদের বয়স উপযোগী।
- পাঠ্যপুস্তকের কাভার ডিজাইন আকর্ষণীয়।
- পাঠ্যপুস্তকের বাঁধাই টেকসই।
- পাঠ্যপুস্তকের মুদ্রণ স্পষ্ট।
- ছাপার অক্ষরের আকার শিক্ষার্থীদের বয়স উপযোগী।
- পাঠ্যপুস্তকের কাগজ উন্নত মান সম্পন্ন।
- পাঠ্যপুস্তকের দাম যুক্তিসঙ্গত।

পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়ন ও বিষয়বস্তু বিশ্লেষণ

মূল্যায়ন হল পূর্ব নির্ধারিত উদ্দেশ্যের পরিপ্রেক্ষিতে কোন একটি বস্তু বা গুণ এর বিচার করার প্রক্রিয়া। তাই 'পরিমাপ' ও 'মূল্যমান বিচার' মূল্যায়নের দুটি বিশেষ বৈশিষ্ট্য। আর পরিমাপ সর্বদা কোন না কোন নির্ণায়ক বা মানদন্ডের ভিত্তিতে হয়ে থাকে।

পাঠ্যপুস্তকের ক্ষেত্রে মূল্যায়নের অর্থ হল শিক্ষাক্রমের উদ্দেশ্য ও বিষয়বস্তুর আলোকে শিক্ষা উপকরণ হিসেবে একটি পাঠ্যপুস্তকের মূল্যমান বিচারকরণ। যখন আদর্শ পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্যের আলোকে কোন একটি নির্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তকের মূল্যমান ও উপযুক্ততা বিচার করে তার উন্নতি বিধানের জন্য প্রয়োজনীয় সুপারিশ করা হয় তখন তাকে পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়ন বলা হয় (NCERT, 1973)।

পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়নের উদ্দেশ্য ও প্রয়োজনীয়তা

পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়নের প্রধান দুটি উদ্দেশ্য হলো:

- পাঠ্যপুস্তক নির্বাচন এবং
- পাঠ্যপুস্তকের উন্নতি বিধান।

পাঠ্যপুস্তক নির্বাচন

পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়নের একটি উদ্দেশ্য হল উত্তম পাঠ্যপুস্তক নির্বাচনে সাহায্য করা। বেশির ভাগ দেশে পাঠ্যপুস্তক রচনা ও প্রকাশনার ব্যাপারে মুক্ত প্রতিযোগিতা বিদ্যমান। এর ফলে বাজারে একই বিষয়ের অনেকগুলো পাঠ্যপুস্তক চালু থাকে। বিদ্যালয় কর্তৃপক্ষকে নিজ নিজ বিদ্যালয়ের জন্য উপযুক্ত পাঠ্যপুস্তক নির্বাচন করতে হয়। ফলে ভাল পাঠ্যপুস্তক বাছাই করার জন্য তখন পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়ন করার প্রয়োজন পড়ে।

বাংলাদেশে পাঠ্যপুস্তক নির্বাচনের জন্য মূল্যায়নের আবশ্যকতা নেই বললেই চলে। কারণ আমাদের দেশে বিদ্যালয়ের পাঠ্যপুস্তক রচনা, মূদ্রণ, প্রকাশনা ও বিতরণের দায়িত্ব ন্যস্ত আছে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ডের উপর। এই বোর্ড একটি স্বায়ত্ত্বশাসিত প্রতিষ্ঠান হলেও এটি সরাসরি শিক্ষা মন্ত্রণালয়ের পরামর্শ ও নির্দেশে পরিচালিত হয়। মাধ্যমিক স্তর পর্যন্ত প্রত্যেক শ্রেণির প্রতিটি বিষয়ের জন্য শুধুমাত্র এক সেট পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নের ব্যবস্থা করে থাকে এই বোর্ড।

বিশেষ কতগুলো নীতিমালার আলোকে বোর্ড পাঠ্যপুস্তক রচনার জন্য লেখক নির্বাচন করে। বোর্ড কর্তৃক কেন্দ্রীয়ভাবে রচিত ও প্রকাশিত পাঠ্যপুস্তকসমূহ সারা দেশের বিদ্যালয়ে একসঙ্গে প্রবর্তন করা হয়। নির্বাচিত লেখক ছাড়া ব্যক্তিগতভাবে কোন লেখককে পাঠ্যপুস্তক রচনা ও প্রকাশ করার অনুমতি দেয়া হয় না। তাই পাঠ্যপুস্তক নির্বাচনের ব্যাপারে বিদ্যালয়ের তেমন কোনো ভূমিকা থাকে না। তবে পাঠ্যপুস্তকের উন্নতির জন্য সংশ্লিষ্ট সকলের বিশেষ ভূমিকা পালন করা প্রয়োজন।

পাঠ্যপুস্তকের উন্নতি বিধান

পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়নের আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ উদ্দেশ্য হলো এর উন্নতি বিধানে সহায়তা করা। উন্নত মানের পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নের পূর্বশর্ত হলো পাঠ্যপুস্তকের ধারাবাহিক পর্যালোচনা ও মূল্যায়ন। কারণ শিক্ষাক্রমের মত পাঠ্যপুস্তক রচনার কাজও একটি গতিশীল প্রক্রিয়া। মূল্যায়নের মাধ্যমেই একটি পাঠ্যপুস্তকের সবল ও দুর্বল দিকগুলো চিহ্নিত করা সম্ভব হয়। আর এই দুর্বল দিকগুলো পরিমার্জন ও সংশোধনের মাধ্যমে উন্নত মানের পাঠ্যবই প্রণয়ন করা যায়।

পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়নের নির্ণায়ক

যৌক্তিক পদ্ধতিতে যে কোন বিষয়ের পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়ন করতে হলে প্রথম কাজ হবে বিচারের মানদন্ড বা নির্ণায়ক নির্ধারণ করা। একটি আদর্শ বা উত্তম পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্য বা গুণাবলি চিহ্নিত করতে পারলেই সেগুলো নির্ণায়ক হিসেবে ব্যবহার করা যায়। পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়নের জন্য কতিপয় নির্ণায়কসমূহ নিম্নরূপ :

১) শিক্ষামূলক বৈশিষ্ট্য সংক্রান্ত নির্ণায়ক হলো-

- শিক্ষাক্রমে নির্ধারিত উদ্দেশ্য এবং শিখনফলের আলোকে পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তু প্রণয়ন করা হয়েছে কিনা।
- পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে সংশ্লিষ্ট পাঠ্যসূচি যথাযথভাবে অনুসরণ করা হয়েছে কিনা।
- পাঠ্যপুস্তকের অধ্যায়গুলোর বিন্যাস শিক্ষাদান প্রক্রিয়ার সহায়ক কিনা।
- বিভিন্ন অধ্যায়ের অনুচ্ছেদগুলো রচনায় যৌক্তিক ধারাবাহিকতা রক্ষা করা হয়েছে কিনা।
- পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে শিক্ষার্থীর বয়স, সামর্থ্য, ধারণক্ষমতা ও মানসিক পরিপক্কতা বিবেচনা করা হয়েছে কিনা।
- শিক্ষার্থীর সৃজনশীলতা বিকাশে সহায়ক কিনা।
- সংশ্লিষ্ট বিষয়ের মৌলিক ধারণা ও নীতি অনুসরণ করা হয়েছে কিনা।
- বিষয়বস্তু সর্বাধুনিক কিনা।
- বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীর চাহিদা ও আগ্রহ পূরণে সমর্থ কিনা।
- বিষয়বস্তু উপস্থাপনে শিখনের নীতি ও তত্ত্ব অনুসৃত হয়েছে কিনা।
- বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীদের নিকট সহজবোধ্য কিনা।
- পাঠ্যপুস্তকে পর্যাপ্ত চিত্র, ছবি ও চার্ট সন্নিবেশিত হয়েছে কিনা।
- পাঠ্যপুস্তকে পর্যাপ্ত চিত্র, ছবি ও চার্ট আছে কিনা এবং এগুলো আকর্ষণীয় ও প্রাসঙ্গিক কিনা।
- বিষয়বস্তু তত্ত্ব ও তথ্যগত ত্রুটিমুক্ত কিনা।
- পাঠ্যপুস্তক বিতর্কিত ধ্যান ধারণা মুক্ত কিনা।
- পাঠ্যপুস্তকটি মূল্যবোধ অবক্ষয় রোধে সহায়ক কিনা।
- অনুশীলনীতে পর্যাপ্ত পরিকল্পিত কাজ সন্নিবেশিত হয়েছে কিনা ।
- উপস্থাপিত বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীদের নিকট পরিবেশ ও বাস্তব জীবনের সংগে সামঞ্জস্যপূর্ণ কিনা।
- বিভিন্ন অধ্যায়ে সন্নিবেশিত চিত্র, ছবি ও চার্ট বিষয়বস্তু ব্যাখ্যায় সহায়ক কিনা।
- বিষয়বস্তু উপস্থাপনে ব্যবহৃত শব্দভান্ডার, বাক্য কাঠামো ও রচনাশৈলী শিক্ষার্থীদের উপযোগী কিনা।
- অনুশীলনীতে প্রদত্ত প্রশ্নাবলি বিষয়বস্তুর সংগে সংগতিপূর্ণ কিনা।
- অনুশীলনীতে প্রদত্ত প্রশ্নাবলি শিক্ষার্থীর অর্জিত জ্ঞান, দক্ষতা ও দৃষ্টিভঙ্গি মূল্যায়নে সহায়ক কিনা।

২) আঙ্গিক বৈশিষ্ট্যসমূহ হলোঃ

- পাঠ্যপুস্তকের আকার ও আয়তন (format) সংশ্লিষ্ট শিক্ষার্থীদের বয়স উপযোগী কিনা।
- পাঠ্যপুস্তকের কাভার ডিজাইন আকর্ষণীয় কিনা।
- পাঠ্যপুস্তকের বাঁধাই টেকসই কিনা।
- পাঠ্যপুস্তকের মুদ্রণ স্পষ্ট কিনা।
- ছাপার অক্ষরের আকার শিক্ষার্থীদের বয়স উপযোগী কিনা।
- পাঠ্যপুস্তকের কাগজ উন্নত মান সম্পন্ন কিনা।
- পাঠ্যপুস্তকের দাম যুক্তিসঙ্গত কিনা।

উল্লেখ্য যে, একটি পাঠ্যপুস্তক সার্বিকভাবে মূল্যায়ন করার জন্য এই নির্ণায়কগুলো কোনভাবেই সম্পূর্ণ বা চূড়ান্ত নয়। বিশেষ বিশেষ পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়নের জন্য বিশেষ ধরনের নির্ণায়ক নির্বাচন করার প্রয়োজন হতে পারে। এই নির্ণায়কগুলো নির্বাচন করার ক্ষেত্রে যে বিষয়গুলো বিবেচনায় রাখা দরকার তা হলোঃ

- নির্ণায়কগুলো যেন সধারণধর্মী, ব্যাপক ও নমনীয় হয়, যাতে করে যেকোন বিষয়ের পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়নের ক্ষেত্রে সেগুলো প্রযোজ্য হয়।
- নির্ণায়কগুলোর ভাষা যেন সুস্পষ্ট ও সুনির্দিষ্ট হয়।
- বস্তুনিষ্ঠ মূল্যায়নের কাজে নির্ণায়কসমূহ যেন ব্যবহৃত হতে পারে।
- নির্ণায়কসমূহ যেন যুক্তিগ্রাহ্য ও সকলের নিকট গ্রহণযোগ্য হয়।
- নির্ণায়কসমূহ যেন বিস্তারিত না হয়ে সংক্ষিপ্ত হয়।

অনুশীলনী-২

১। পাঠ্যপুস্তক বলতে কী বুঝায়?

২। পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়ন বলতে কী বুঝায়?

৩। একটি আদর্শ বা উত্তম পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্য বা গুণাবলির ক্ষেত্রগুলো লিখুন।

৪। পাঠ্যপুস্তক মূল্যায়নের প্রয়োজনীয়তা কী?

৫। একটি পাঠ্যপুস্তকের শিক্ষামূলক বৈশিষ্ট্য মূল্যায়নের জন্য ১০টি নির্ণায়ক সনাক্ত করুণ।

রেফারেন্স-২

- ড. মোঃ মোহসীন উদ্দিন, মোঃ ইউনুছ আলী, আব্দুল্লাহ আল-মাহমুদ ও স্বপন কুমার ঢালী, গণিত শিক্ষণ মডিউল ১, টিচিং কোয়ালিটি ইম্প্রুভমেন্ট ইন সেকেন্ডারি এডুকেশন প্রজেক্ট, মধ্যমিক ও উচ্চ শিক্ষা অধিদপ্তর, শিক্ষা মন্ত্রণালয়, আগষ্ট, ২০১০।
- ঢালী, স্বপন কুমার (২০০৭), গণিত শিক্ষণ, প্রভাতী লাইব্রেরি, নীলক্ষেত, ঢাকা।
- মুহম্মদ আনওয়ার আলী (১৯৯৮), গণিত শিক্ষাদান, , বাংলা একাডেমী, ঢাকা।
- ডি. এম. ফিরোজ শাহ্, আধুনিক গণিত শিক্ষণ, এম. এ. ওহাব এন্ড সন্স, ঢাকা।
- মুহাম্মদ আনওয়ার আলী ও মোঃ রমিজ উদ্দীন আহমদ, গণিত শিক্ষাদান, স্মৃতি প্রকাশনী, ঢাকা।
- ড. মোহাম্মদ আজহার আলী ও মিসেস হোসনে আরা বেগম, সফল শিক্ষক, শিক্ষা ও গবেষণা ইনস্টিটিউট, ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়।
- শ্যামা প্রসাদ চট্টরাজ, গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি, সেন্ট্রাল লাইব্রেরী, কলিকাতা (১৯৮২)।
- শৈলেন্দ্র কুমার ঘোষ, গণিত শিক্ষণ, সোমা বুক এজেন্সী, কলিকাতা (১৯৯৫)।
- ডঃ মোঃ আবুল এহসান, শিক্ষাক্রম উন্নয়নঃ নীতি ও পদ্ধতি, ছাত্রবন্ধু লাইব্রেরী, ঢাকা (১৯৯৭)।
- ড. শেখ আমজাদ হোসেন, শিখন, মূল্যযাচাই এবং প্রতিফলনমূলক অনুশীলন, প্রভাতী লাইব্রেরী, ঢাকা (২০০৭)।
- ড. মোহাম্মদ আজহার আলী ও মিমেস হোসনে আরা বেগম, সফল শিক্ষক, শিক্ষা ও গবেষণা ইনস্টিটিউট, ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়, ঢাকা।
- শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি, মাধ্যমিক স্তর, জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা (২০১২)।
- সহকারী প্রধান শিক্ষকদের প্রশিক্ষণ ম্যানুয়াল, ফিমেল সেকেন্ডারী স্কুল এসিসট্যান্স প্রজেক্টঃ দ্বিতীয় পর্যায়, শিক্ষা মন্ত্রণালয়, ঢাকা।

ইউনিট ৩ : গণিত পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল

প্রাচীনকাল থেকেই নানা উপায়ে শিক্ষকগণ শ্রেণিতে শিক্ষার্থীদের শেখানোর প্রচেষ্টা চালিয়ে আসছেন। এই উপায়গুলোকে যদি পদ্ধতি বলা হয় তাহলে যে শিক্ষক পাঠের বিষয়বস্তুকে শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীদের আয়ত্ত করাতে সচেষ্ট হয়েছেন তার পদ্ধতিই উৎকৃষ্ট। একটি পদ্ধতির সার্থক বাস্তবায়নের জন্য একাধিক কৌশলের প্রয়োজন হয়। প্রত্যেক শিক্ষার্থী কাজ করতে ভালবাসে। হাতে-কলমে কাজ করে অভিজ্ঞতা অর্জনের মাধ্যমে সে শেখে। এইভাবে কিছু শেখা হলে তা তার কাছে স্পষ্ট হয়, ফলে সে দীর্ঘদিন শিখনীয় বিষয়টি মনে রাখতে পারে।

মনোবিজ্ঞানীদের মতে শিক্ষার্থীর কার্যকর শিখনের জন্য প্রয়োজন- শিক্ষার্থীর আগ্রহ, ক্ষমতা ও প্রয়োজনবোধ। আনুষ্ঠানিক শিক্ষায় শিক্ষক-শিক্ষার্থী, বিষয়বস্তু, উপকরণ, শ্রেণির পরিবেশ ইত্যাদি উপাদানসমূহ শিক্ষার্থীর শিখনের সাথে জড়িত। এই উপাদানসমুহের ইতিবাচক প্রভাবের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর শিখন ফলপ্রসূ হয়। আর এক্ষেত্রে শিক্ষকের ভূমিকাই প্রধান। এই ইউনিটটিকে নিম্নবর্ণিত ৭টি পাঠে বিভাজন করা হয়েছে।

৩.১ পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল, গণিত পাঠে বহুল প্রচলিত অরোহী, অবরোহী, সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ পদ্ধতি
৩.২ বক্তৃতা ও প্রকল্প পদ্ধতি
৩.৩ আবিষ্কার ও সমস্যা সমাধান পদ্ধতি
৩.৪ প্রশ্নোত্তর, প্রদর্শন পদ্ধতি ও ডাল্টন পরিকল্পনা
৩.৫ গণিত শিখনে ভাইগটস্কির গঠনবাদ
৩.৬ গণিত শিখনে কৌশল (একক কাজ, জোড়ায় কাজ, দলীয় কাজ, ব্রেইন স্টর্মিং, সিমুলেশন, জিগ্‌স ইত্যাদি) ও শ্রেণিতে প্রশ্নকরণ
৩.৭ পাঠদানের পর্যায় (প্রাক-সক্রিয় দশা, সক্রিয় দশা, পাঠ পরবর্তী দশা)

৩.১ পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল, গণিত পাঠে বহুল প্রচলিত আরোহী, অবরোহী, সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ পদ্ধতি

পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল

পদ্ধতি বলতে কোন একটি কাজ সুষ্ঠুভাবে সম্পন্ন করার সুনির্দিষ্ট ও ধারাবাহিক কিছু নির্দেশনাকে বোঝায় । পাঠদান পদ্ধতি বলতে কোন পাঠে সামগ্রিকভাবে ব্যবহৃত শিখন-শেখানোর উপায়কে বোঝায়। পদ্ধতির সার্থক বাস্তবায়নের জন্য প্রয়োজন কৌশল। শ্রেণিকক্ষে শিখন-শেখানো কার্যক্রমের সাথে সংশ্লিষ্ট থাকেন শিক্ষক এবং শিক্ষাথী । শিক্ষার্থীর শিখনের জন্য একটি বিষয়বস্তুকে শিক্ষক নানাভাবে উপস্থাপন করেন । শ্রেণিতে শিক্ষকের প্রয়োগকৃত সফল কার্যক্রম পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যেসব কার্যক্রমে শিক্ষার্থীদের অংশগ্রহণ বেশি সেসব কার্যক্রমের মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা বেশি শিখতে পারে। প্রতিটি পাঠ বা বিষয়বস্তুর কিছু উদ্দেশ্য আছে । শ্রেণিকক্ষে এই উদ্দেশ্য অর্জনের জন্য প্রয়োজন শিক্ষার্থীর মনোযোগ, আগ্রহ ও গতিশীলতা । একজন শিক্ষক কেবলমাত্র কার্যকর পদ্ধতি ও কৌশল প্রয়োগের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর এই উদ্দেশ্য অর্জনে সহায়তা করতে পারেন।

একজন শিক্ষক তার শ্রেণির শিক্ষাথীদের মেধা, বুদ্ধিমত্তা, সৃজনশীলতা, আবেগ-অনুভূতি সম্পর্কে অবগত থাকেন । পাঠের বিষয়বস্তু কিভাবে উপস্থাপন করলে শিক্ষার্থীরা সহজে বিষয়টি আত্মস্থ করতে পারবে তা তিনিই ভাল বুঝতে পারেন । শিক্ষার্থীর প্রবণতা, চাহিদা, শিখনের সক্ষমতাকে গুরুত্ব দিয়ে শিক্ষক শিখন-শেখানো কার্যক্রম পরিচালনা করবেন। বলা হয় Teacher is the best Method when he knows all Methods. অর্থাৎ একজন শিক্ষকের পদ্ধতিই সর্বোত্তম যদি তিনি সকল পদ্ধতি জানেন। কাজেই পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল সম্পর্কে শিক্ষকের সম্যক ধারণা থাকা অত্যাবশ্যক ।

শ্রেণিকক্ষে শিক্ষার্থীর কার্যকর শিখনের জন্য শিক্ষকের প্রস্তুতি যেমন অপরিহার্য তেমনি প্রয়োজন সঠিক পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল নির্বাচন। উপযুক্ত পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল প্রয়োগের ফলে শিখন-শেখানো কার্যক্রম সহজ ও ফলপ্রসূ হয়। কোন একটি পদ্ধতি বা কৌশল যত ভালই হোক না কেন তা সকল বিষয়বস্তু পাঠদানের জন্য উপযোগী হতে পারে না। উদাহরণ স্বরূপ-একটি গণিতের শ্রেণিতে ১০০ জন শিক্ষার্থী ২০টি বেঞ্চে বসে। এক্ষেত্রে Expert Jigsaw Method টি প্রয়োগের চেয়ে দলীয় কাজ অথবা সতীর্থ শিক্ষণ ফলপ্রসূ হবে। শিক্ষার্থীর আগ্রহ ও চাহিদা অনুযায়ী শিক্ষক উপযুক্ত পদ্ধতি ও কৌশল নির্বাচন করে পাঠদান করলে একদিকে শিক্ষার্থীদের শিখন কার্যকর হয় অপর দিকে শিক্ষক পাঠদান করে নিজে সন্তুষ্টি অর্জন করেন। পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল নির্বাচনে শ্রেণির পরিবেশ, বিষয়বস্তু, শিক্ষার্থীর সংখ্যা ইত্যাদি বিবেচনা করা প্রয়োজন। পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল হবে সর্বদা শিক্ষার্থী কেন্দ্রিক এবং অংশগ্রহণমূলক।

গণিত শিক্ষণে বহুলব্যবহৃত পদ্ধতিসমূহ

আরোহী পদ্ধতি

যুগে যুগে মানুষ সত্যের অনুসন্ধান করেছে। বিভিন্নভাবে সত্যকে প্রতিষ্ঠা করার চেষ্টা করেছে। আর সত্যকে প্রতিষ্ঠিত করতে গিয়ে নতুন নতুন তথ্যের সন্ধান পেয়েছে। আরোহী পদ্ধতি হলো কতকগুলো সরল সত্যের মাধ্যমে একটি চূড়ান্ত সত্যে উপনীত হওয়া। অর্থাৎ যে পদ্ধতিতে কতকগুলো দৃষ্টান্ত বা বিশেষ বিশেষ উদাহরণ থেকে একটি সাধারণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় বা সূত্র গঠন করা যায় তাকে আরোহী পদ্ধতি বলে। আরোহী পদ্ধতি গাণিতিক সূত্র গঠনের একটি উৎকৃষ্ট উপায়।

আরোহী পদ্ধতির বিশেষ প্রয়োগের মাধ্যমে গাণিতিক বাক্যের সত্যতা যাচাই বা গাণিতিক সূত্রের প্রমাণ করা হয়, একে বলা হয় গাণিতিক আরোহ। কোনো গাণিতিক উক্তি বা বাক্য যখন $n = 1$ এর জন্য সত্য হয়,তখন $n = m \in N$ এর জন্য উক্তিটিকে সত্য ধরে প্রাপ্ত শর্ত প্রয়োগ করে যদি $n = m + 1$ এর জন্যও উক্তিটি সত্য প্রমাণিত হয়, তাহলে $\forall n \in N$ এর জন্য উক্তিটি সত্য হয়। গাণিতিক বাক্য বা উক্তি প্রমাণের এই নীতি বা পদ্ধতিকে বলা হয় গাণিতিক আরোহ।

সেটের ভাষায় গাণিতিক আরোহ নীতিকে নিম্নরূপে লেখা হয়:

যদি $S \subset N$ সত্য হয়, $1 \in S$ সত্য হয় এবং $m \in S \Longrightarrow m + 1 \in S$ সত্য হয় , তবে $S = N$ ইহা স্বাভাবিক সংখ্যা সেটের একটি স্বীকার্য (৯ম), যাকে গাণিতিক আরোহ নীতি বা পদ্ধতি বলা হয়।

আরোহী পদ্ধতির উদাহরণ

প্রথম n সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন এর সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করুন।.

আরোহী পদ্ধতিতে সূত্র গঠন :

পদসংখ্যা	ঘন এর সামষ্টিক ধারা	ধারার সমষ্টি	সমষ্টির বর্গরূপ	পদসংখ্যার সাথে সমষ্টির সম্পর্কের প্যাটার্ন	মন্তব্য
1	1^3	1	1^2	$\{1(1+1)/2\}^2$	প্যাটার্ন থেকে সূত্র গঠন
2	1^3+2^3	9	3^2	$\{2(2+1)/2\}^2$	
3	$1^3+2^3+3^3$	36	6^2	$\{3(3+1)/2\}^2$	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$	100	10^2	$\{4(4+1)/2\}^2$	
...	...	...	...	...	
n	$1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3$			$\{n(n+1)/2\}^2$	

অর্থাৎ, প্রথম n সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন এর সমষ্টি $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির উদাহরণ

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে,

$$\forall n \in N,\ \ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

প্রমাণঃ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \quad \ldots \quad (\text{i})$

যখন বাম পক্ষের পদসংখ্যা $n = 1$ তখন,

বামপক্ষ,$1^3 = 1$ এবং ডানপক্ষ, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = \left\{\frac{1(1+1)}{2}\right\}^2 = \left\{\frac{2}{2}\right\}^2 = 1^2 = 1$

$\therefore n = 1$ এর জন্য সমতাটি সত্য।

ধরি $n = m\epsilon N$ এর জন্য প্রদত্ত সমতাটি সত্য,

তাহলে (i) থেকে আমরা পাই, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + m^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$........ (ii)

আবার $n = m + 1$ এর জন্য সমতাটি সত্য হবে,

যদি, $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(m+1)^3=\left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$ সত্য হয় ... (iii)

এখন (ii) এর উভয় পক্ষে ধারার পরবর্তী পদ $(m+1)^3$ যোগ করে পাই,

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+m^3+(m+1)^3=\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2+(m+1)^3$$

$$=(m+1)^2\left\{\frac{m^2}{4}+(m+1)\right\}$$

$$=(m+1)^2\,\frac{(m^2+4m+4)}{4}=\left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$$

$\Longrightarrow\ 1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+(m+1)^3=\left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$ ইহা হুবহু (iii) নং সমতা;

অর্থাৎ, $n=m+1$ এর জন্য (iii) নং সমতাটি সত্য;

$\therefore\ \forall n\in N$ প্রদত্ত সমতাটি সত্য।

$\therefore\ 1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ (প্রমাণিত)

আরোহী পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- বিশেষ বিশেষ ধারাবাহিক উদাহরণের প্যাটার্ন থেকে সাধারণ সিদ্ধান্ত বা সার্বজনীন সূত্র গঠিত হয় ।
- এই পদ্ধতিতে মূর্তবস্তু অবলম্বন করে দৃষ্টান্ত নেয়া হয় এবং বিমূর্ত সাধারণ সিদ্ধান্তে উপণীত হতে হয় ।
- আরোহী পদ্ধতির সিদ্ধান্ত পরীক্ষালব্ধ ও যুক্তিনির্ভর তবে অবশ্যম্ভাবী নয় ।
- গাণিতিক সূত্র গঠনের সহায়ক।
- গণিতের প্রাথমিক রূপ আরোহী।
- আরোহী পদ্ধতি মনোবিজ্ঞান সম্মত।
- আরোহ পদ্ধতি পর্যবেক্ষণ, পরীক্ষণ এবং চিন্তনের উপর প্রতিষ্ঠিত। পরীক্ষিত তথ্য যত বেশি হবে নির্ভরতাও তত বৃদ্ধি পাবে।

আরোহী পদ্ধতির সুবিধা

- শুরুতে বাস্তব উদাহরণ দেয়া হয় বলে শিক্ষার্থীরা সহজে বুঝতে পারে ।
- শিক্ষার্থীর মানসিক ক্ষমতার বিকাশ ঘটে ।
- শিক্ষার্থীরা গাণিতিক সূত্র বা কোন সিদ্ধান্তের সত্যতা যাচাইয়ের ক্ষেত্রে সক্রিয় ও প্রাণবন্ত থাকে ।
- মুখস্থ করার চাপ থাকে না ।
- গাণিতিক সত্য আবিষ্কারে সহায়ক ।

আরোহী পদ্ধতির অসুবধা

- আরোহী পদ্ধতিতে আবিষ্কৃত সত্যকে চূড়ান্ত বলা যায় না । এতে সম্ভাবনার প্রশ্ন থেকে যায়। পরীক্ষালব্ধ তথ্যের প্রচুরতার উপর এর সম্ভাবনা নির্ভরশীল ।
- পদ্ধতিটি দীর্ঘ সময় সাপেক্ষ ও ক্লান্তিজনক ।
- উচ্চ শ্রেণিতে এই পদ্ধতির কার্যকারিতা কম।
- এই পদ্ধতিতে সুত্র গঠন করলেই বিষয়টির পাঠ শেষ হয় না । সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর ধারণাকে সুস্পষ্ট করতে হয় ।

আরোহী পদ্ধতিতে সূত্র গঠিত হয় এবং গাণিতিক আরোহের মাধ্যমে সূত্রের সত্যতা যাচাই করা হয়।

অবরোহী পদ্ধতি

যে পদ্ধতিতে একটি প্রমাণিত সত্য বা সাধারণ সিদ্ধান্ত থেকে কতগুলো বিশেষ উদাহরণ বা সরল সত্যে উপনীত হওয়া যায় তাকে অবরোহ পদ্ধতি বলে। এটি আরোহী পদ্ধতির ঠিক বিপরীত প্রক্রিয়া।

উদাহরণঃ অবরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, প্রথম n সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন এর সমষ্টি $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$.

প্রমাণঃ আমরা জানি, $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ $\Rightarrow 4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$ [$a = n, b = 1$ **ধরে**]

$\Rightarrow\ 4n.n^2 = (n+1)^2.n^2 - n^2.(n-1)^2$ [n^2 দ্বারা প্রত্যেক পদকে গুণ করে]

সুতরাং, সকল n এর জন্য $4.n^3 = (n+1)^2.n^2 - n^2.(n-1)^2$ একটি অভেদ

অভেদটিতে, $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ বসিয়ে পাই,

$$4.1^3 = 2^2.1^2 - 1^2.0^2$$
$$4.2^3 = 3^2.2^2 - 2^2.1^2$$
$$4.3^3 = 4^2.3^2 - 3^2.2^2$$
$$4.n^3 = (n+1)^2.n^2 - n^2.(n-1)^2$$

যোগ করে, $4.(\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3) = (n+1)^2.n^2 - 1^2.0^2$

$$\Rightarrow 4.(\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3) = (n+1)^2.n^2$$
$$\Rightarrow (\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3) = \frac{(n+1)^2n^2}{4}$$
$$\therefore (\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3) = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2;$$

অর্থাৎ, প্রথম n সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন এর সমষ্টি $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$.

[এখানে, $4.n^3 = (n+1)^2.n^2 - n^2.(n-1)^2$ অভেদটি কেন নেওয়া হলো তার কোন ব্যাখ্যা নাই]

অবরোহী পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- অবরোহ পদ্ধতি গণিত শাস্ত্রসম্মত এবং প্রতিটি ধাপ নির্ভুল।
- এই পদ্ধতিতে যে সাধারণ সিদ্ধান্তকে প্রমাণ করা হয় সেটি আরোহী পদ্ধতি দ্বারা প্রতিষ্ঠিত।
- অবরোহ পদ্ধতি গণিতের একটি পরিণত রূপ ।
- অবরোহ পদ্ধতি যুক্তি নির্ভর এবং সংক্ষিপ্ত ।
- আরোহী পদ্ধতিতে সূত্র গঠিত হয় এবং অবরোহ পদ্ধতিতে সে সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করা হয়।

অবরোহী পদ্ধতির সুবিধা

- এই পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীরা দ্রুত সমস্যার সমাধান করতে পারে ।
- অবরোহ পদ্ধতি যুক্তিসম্মত ও সংক্ষিপ্ত।
- শিক্ষার্থীর স্মৃতিশক্তি উন্নয়নে সহায়ক।

অবরোহী পদ্ধতির অসুবিধা

- অবরোহী প্রমাণের প্রথম ধাপে বিমূর্ত সিদ্ধান্ত থেকে শুরু করা হয় বলে শিক্ষার্থীর জন্য তা বুঝা কঠিন হয় ।
- পদ্ধতিটি স্মৃতিনির্ভর বলে শিক্ষার্থীর মস্তিকে চাপ থাকে ।
- সক্রিয়তার মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা শিখনে অংশগ্রহণ করতে পারে না ।
- শিক্ষার্থীর চিন্তন দক্ষতার তেমন উন্নয়ন ঘটে না।

আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি একে অপরের পরিপূরক

সংশ্লেষণ পদ্ধতি

সংশ্লেষণ বলতে আমরা বুঝি একটি সমগ্র জিনিসের বিচ্ছিন্ন অংশগুলো একত্র করা। অর্থাৎ খণ্ড খণ্ড অংশগুলো মিলিয়ে সমগ্রকে রূপ দেয়া। যে পদ্ধতিতে একটি সমস্যার বিভিন্ন অংশ একত্র করে সমস্যাটিকে পুনর্গঠিত করা হয় এবং তা বুঝা যায় তাকে সংশ্লেষণ পদ্ধতি বলে। বিচ্ছিন্ন অংশগুলোর সাথে সমগ্র সমস্যাটির অবিচ্ছেদ্য সম্পর্ক বিদ্যমান তা শিক্ষার্থীদের এই পদ্ধতিতে শেখানো হয় । এই পদ্ধতিতে জানা সত্য বা তথ্য থেকে অজানা সত্যের সন্ধান করা হয় ।

সংশ্লেষণ পদ্ধতির উদাহরণ :

$p - q = r$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr.$

প্রমাণঃ প্রদত্ত তথ্য, $p - q = r$

$\Rightarrow (p-q)^3 = r^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

$\Rightarrow p^3 - q^3 - 3pq(p-q) = r^3$

$\Rightarrow p^3 - q^3 - 3pq(r) = r^3$ [$\because$ (p - q) = r]

$\Rightarrow p^3 - q^3 - 3pqr = r^3$

$\Rightarrow p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr$

$\therefore\ p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr$ [প্রমাণিত]

সংশ্লেষণ পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- এ পদ্ধতিতে সমস্যার বিভিন্ন অংশ একত্র করে সমস্যাটিকে কিভাবে পুনর্গঠিত করা যায় সে চেষ্টা করা হয়।
- এ পদ্ধতিতে প্রদত্ত প্রকল্প (Hypothesis) কে ভিত্তি করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান শুরু করতে হয় ।
- এ পদ্ধতিতে জানা তথ্য থেকে অজানা সিদ্ধান্তের দিকে অগ্রসর হতে হয় ।
- এ পদ্ধতি প্রমাণ করে কিন্তু প্রমাণের ধাপগুলো ব্যাখ্যা করে না ।
- এটি বিশ্লেষণ পদ্ধতির ঠিক বিপরীত ।
- সংশ্লেষণ পদ্ধতি চিন্তন-প্রক্রিয়ার ফল ।
- সংশ্লেষণ পদ্ধতি বিজ্ঞান সম্মত পদ্ধতি নয় ।

সংশ্লেষণ পদ্ধতির সুবিধা

- এই পদ্ধতির ধাপগুলি একে অপরকে অনুসরণ করে। প্রতিটি ধাপের সত্যতা নিয়ে কোন সন্দেহ থাকে না ।
- এই পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধানের প্রতিটি ধাপ বুঝা যায় ।
- এই পদ্ধতিটি সংক্ষিপ্ত এবং শিক্ষার্থীদের জন্য সহজ ।
- এই পদ্ধতি শিক্ষার্থীর স্মৃতি শক্তিকে উন্নত করে ।
- বীজগণিত ও জ্যামিতি শিক্ষাদানে এই পদ্ধতি বেশ কার্যকর ।

সংশ্লেষণ পদ্ধতির অসুবধিা

- এই পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীর সৃজনশীল চিন্তার বিকাশ হয় না ।
- শিক্ষার্থীর আবিষ্কারের মনোভাব জাগ্রত হয় না ।
- এই পদ্ধতিতে প্রমাণের প্রক্রিয়ায় কোন ধাপ ভুলে গেলে সহজে মনে করা যায় না ।
- সংশ্লেষণ পদ্ধতি.বিজ্ঞান সম্মত পদ্ধতি নয় ।
- এই পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধানের পর কিছু ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর মনে প্রশ্ন জাগে যার কোন ব্যাখ্যা নাই ।

বিশ্লেষণ পদ্ধতি

বিশ্লেষণ-এর শাব্দিক অর্থ সমগ্র বস্তুকে ভেঙ্গে তার মূল উপাদানগুলো আলাদা করা। যে পদ্ধতিতে কোন সমস্যাকে বিভিন্ন অংশে ভাগ করে ব্যাখ্যা বা বিশ্লেষণের মাধ্যমে সমস্যাটি কোন সত্যের উপর নির্ভরশীল তা জানা যায় তাকে বিশ্লেষণ পদ্ধতি বলে। এই পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীকে অজানা সিদ্ধান্ত থেকে জানা সত্য খুঁজে বের করতে হয়।

উদাহরণ : $p-q=r$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^3-q^3-r^3=3pqr$

প্রমাণ: $p^3-q^3-r^3=3pqr$ সমতাটি সত্য হবে,

যদি $(p-q)^3-3pq(p-q)-r^3-3pqr=0$ সত্য হয়;

অর্থাৎ যদি $(p-q-r)^3-3(p-q)r(p-q-r)-3pq(p-q-r)=0$ সত্য হয়;

অর্থাৎ যদি $(p-q-r)\{(p-q-r)^2-3pr+3qr-3pq\}=0$ সত্য হয়;

অর্থাৎ যদি $p-q-r=0$ সত্য হয়;

অর্থাৎ যদি $p-q=r$ সত্য হয়; এবং ইহা প্রদত্ত সত্য।

$\therefore p^3-q^3-r^3=3pqr$ সমতাটি সত্য (প্রমাণিত) ।

বিশ্লেষণ পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- এ পদ্ধতি সমস্যাকে বিভিন্ন অংশে পৃথক করে অংশগুলির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করে।
- এ পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধান করতে সিদ্ধান্ত(Conclusion) থেকে শুরু করে প্রদত্ত প্রকল্পে (Hypothesis) পৌঁছাতে হয় ।
- এ পদ্ধতিতে অজানা সিদ্ধান্ত থেকে জানা তথ্যের দিকে অগ্রসর হতে হয় ।
- এ পদ্ধতি প্রমাণ করে এবং ব্যাখ্যা করে।
- এটি সংশ্লেষণ পদ্ধতির ঠিক বিপরীত ।
- বিশ্লেষণ পদ্ধতি চিন্তন-প্রক্রিয়া।
- বিশ্লেষণ পদ্ধতি বিজ্ঞান সম্মত পদ্ধতি। এটি আবিষ্কারের পদ্ধতি ।

বিশ্লেষণ পদ্ধতির সুবিধা

- এ পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীর সৃজনশীল চিন্তার বিকাশ হয় এবং যুক্তি দেয়ার ক্ষমতা উন্নত হয় ।
- বিশ্লেষণ পদ্ধতি. বিজ্ঞান এবং মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতি।
- শিক্ষার্থীর আবিষ্কারের মনোভাব জাগ্রত হয় ।
- এ পদ্ধতি শিক্ষার্থীকে সমস্যা সমাধানে অনুপ্রাণিত করে ।
- এ পদ্ধতিতে প্রমাণের প্রক্রিয়ায় কোন ধাপ ভুলে গেলে পুনরাবৃত্তি করা যায়।
- এ পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি ধাপের কারণ ও ব্যাখ্যা পাওয়া যায়।

বিশ্লেষণ পদ্ধতির অসুবিধা

- এ পদ্ধতিটি দীর্ঘ এবং সময়সাপেক্ষ।
- দুর্বল মেধার শিক্ষার্থীরা এই পদ্ধতিতে কাজ করতে পারে না।
- দক্ষ শিক্ষক প্রয়োজন হয়।

আরোহ: বিশেষ বিশেষ উদাহরণ থেকে সূত্র উদ্ঘাটন;

গাণিতিক আরোহ: উদ্ঘাটিত সূত্র যাচাই/প্রমাণ;

অবরোহ: প্রতিষ্ঠিত সূত্র থেকে বিশেষ বিশেষ সমস্যার সমাধান।

সংশ্লেষণ: প্রদত্ত সত্য থেকে প্রমাণযোগ্য সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া;

বিশ্লেষণ: প্রমাণযোগ্য সিদ্ধান্ত থেকে প্রদত্ত সত্য খুঁজে পাওয়া।

৩.২ বক্তৃতা ও প্রকল্প পদ্ধতি

বক্তৃতা পদ্ধতি

প্রাচীন কাল থেকে শ্রেণি পাঠদানে বক্তৃতা পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়ে আসছে। যে পদ্ধতিতে শিক্ষক শ্রেণিতে পাঠদানের বিষয়বস্তুকে ধারাবাহিকভাবে বক্তৃতার মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের সামনে উপস্থাপন করেন, তাকে বক্তৃতা পদ্ধতি বলা হয় । বক্তৃতা পদ্ধতিতে শিক্ষক বিষয়বস্তুর ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণের জন্য শুধুমাত্র কণ্ঠস্বর ব্যবহার করেন, বোর্ড বা কোন উপকরণ ব্যবহার করেন না। শিক্ষার্থীরা মনোযোগ সহকারে শুনতে চেষ্টা করে এবং গুরুত্বপূর্ণ তথ্য লিখে রাখতে চেষ্টা করে। কাজেই শিক্ষকের বিষয়জ্ঞান, শ্রুতিমধুর বাচনভঙ্গী, জোরালো কণ্ঠস্বর, শ্রেণির পরিবেশ, শিক্ষার্থীর সামর্থ্য, আগ্রহ ও মনোযোগ এর ওপর এই পদ্ধতির সফলতা নির্ভর করে। এই পদ্ধতিতে শিক্ষক স্বল্প সময়ে অনেক বেশি তথ্য শিক্ষার্থীর সামনে তুলে ধরতে পারেন। শিক্ষকের সক্রিয়তা এই পদ্ধতির প্রধান বৈশিষ্ট্য। এই পদ্ধতিতে শিক্ষক শ্রেণিতে বক্তা এবং শিক্ষার্থী শ্রোতার ভূমিকা পালন করে। শ্রেণিতে পাঠদানের জন্য খুব বেশি কার্যকর না হলেও প্রতিটি পাঠেই কিছুটা বক্তৃতার ব্যবহার অনস্বীকার্য।

বক্তৃতা পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- শ্রেণি পাঠদান কার্যক্রমে বহুল ব্যবহৃত প্রাচীন পদ্ধতি।
- শিক্ষার্থীদের নির্দেশনা প্রদান, সংগঠিতকরণ,অল্প সময়ে বেশি তথ্য সরবরাহ ইত্যাদি কাজের জন্য উপযুক্ত।
- শ্রেণিতে শিক্ষক-শিক্ষার্থী সামনা সামনি অবস্থান করে বিধায় শিক্ষকের দৃষ্টি সর্বদা শিক্ষার্থীর দিকে থাকে।
- শিক্ষক শুধুমাত্র মৌখিক উপস্থাপনের মাধ্যমে পাঠের বিষয়বস্তু ব্যাখ্যা করেন বলে শিক্ষার্থীকে পাঠের বিষয়বস্তু বুঝতে হলে সর্বদা মনোযোগী থাকতে হয় ।
- পাঠদানের বিষয়বস্তু সম্পর্কে শিক্ষকের সুস্পষ্ট ধারণা থাকে।
- শিক্ষার্থীদের চেয়ে শিক্ষকের সক্রিয়তা বেশি থাকে ।

বক্তৃতা পদ্ধতির প্রয়োগ বা ব্যবহার

- বক্তৃতা পদ্ধতিতে পাঠদানের জন্য শিক্ষককে আগে থেকেই শ্রেণিতে ধারাবাহিকভাবে উপস্থাপনের জন্য প্রস্তুতি নিতে হবে । এর জন্য প্রচুর পড়াশুনা করতে হবে ।
- শ্রেণিতে শিক্ষার্থীদের আসন এমনভাবে সাজাতে হবে যেন প্রত্যেক শিক্ষার্থী শিক্ষকের কথা শুনতে পারে ।
- শিক্ষকের বাচনভঙ্গি শ্রুতিমধুর হতে হবে। পাঠ-উপস্থাপনের ভাষা সহজ হবে ।
- শিক্ষককে উচ্চস্বরে কথা বলতে হবে যেন পিছনের সারির শিক্ষার্থীরা তার কথা শুনতে পারে।
- শিক্ষককে রুচিশীল ব্যক্তিত্বের অধিকারী হতে হবে ।

বক্তৃতা পদ্ধতির সুবিধা

- একজন শিক্ষক অধিক সংখ্যক শিক্ষার্থীকে একসাথে পাঠদান করতে পারেন ।
- পাঠটিকা, উপকরণ ব্যবহার করা হয় না, ফলে পদ্ধতিটি কম ব্যয়বহুল এবং শিক্ষকের প্রস্তুতির জন্য সহজ ।
- আবিষ্কারের কাহিনী, ঐতিহাসিক ঘটনাবলি, রসাত্মবোধক গল্প উপস্থাপনের জন্য এই পদ্ধতি কার্যকর ।
- শিক্ষক স্বল্প সময়ে অনেক বেশি পাঠ্য বিষয় পড়াতে পারেন বলে দ্রুত পাঠ্যসূচি শেষ করতে পারেন ।

বক্তৃতা পদ্ধতির অসুবিধা

- পাঠটিকা প্রয়োজন হয় না বিধায় শিক্ষক স্বাধীনভাবে পাঠের প্রস্তুতি নেন ফলে পাঠের ধাবাহিকতা থাকে না
- শিখন-শেখানো কার্যক্রম অংশগ্রহণমূলক নয় বলে শিক্ষার্থীরা শ্রেণিতে ঝিমিয়ে পড়ে ।
- দীর্ঘ বক্তৃতায় শিক্ষার্থীদের মনোযোগ চ্যুতি ঘটে; ক্লান্তি, অবসাদ এবং পাঠে একঘেয়েমী আসে ।
- শিক্ষকের কণ্ঠস্বর জোরালো ও বাচনভঙ্গী সুন্দর না হলে অধিক সংখ্যক শিক্ষার্থীর শ্রেণিতে পিছনের সারিতে বসা শিক্ষার্থীরা শিক্ষকের কথা শুনতে ও বুঝতে পারে না। ।
- শিক্ষক যেহেতু শ্রেণিতে শিক্ষার্থীদের সাথে আন্তব্যক্তিক যোগাযোগ রক্ষা করেন না, সেহেতু এই পদ্ধতিতে দুর্বল শিক্ষার্থী চিহ্নিত করা যায় না ।

- এ পদ্ধতিতে শিক্ষক-শিক্ষার্থীর মাঝে মতবিনিময় হয় না বলে পাঠের বিষয়বস্তু শিক্ষার্থী সঠিকভাবে বুঝতে পারছে কিনা তা জানা শিক্ষকের পক্ষে সম্ভব হয় না ।
- গণিত ও বিজ্ঞানের বিয়য়বস্তু এই পদ্ধতিতে উপস্থাপন করা যায় না ।
- একীভূত শ্রেণিতে এই পদ্ধতি কার্যকর নয় ।

প্রকল্প পদ্ধতি


উইলিয়াম হার্ড কিলপ্যাট্রিক (১৮৭১-১৯৬৫) ইউএসএ

প্রকল্প পদ্ধতির প্রবক্তা উইলিয়াম হার্ড কিলপ্যাট্রিক (William Heard Kilpatrick) ১৮৭১ সালের ২০ নভেম্বর জর্জিয়াতে জন্মগ্রহণ করেন। তার পিতার নাম জেম্‌স হাইন্‌স কিলপ্যাট্রিক(James Hines Kilpatrick) এবং মাতার নাম এড্‌না পেরিন কিলপ্যাট্রিক(Edna Perrin Kilpatrick)। ছোটবেলা থেকেই তিনি খুব মেধাবী ছিলেন। মাত্র একুশ বছর বয়সে তিনি বিশ্ববিদ্যালয় থেকে গ্র্যাজুয়েশন ও এম.এ ডিগ্রী অর্জন করেন। পেশাগত জীবনে তিনি প্রথমত বিদ্যালয়ে পরবর্তীতে বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ে শিক্ষকতা করেন। এই সময়ে তিনি শিক্ষা বিষয়ে গবেষণা করেন এবং বিভিন্ন গ্রন্থ রচনা করেন। ১৯৬৫ সালের ১৩ ফেব্রুয়ারি ৯৩ বৎসর বয়সে নিউইয়র্ক শহরে তিনি মৃত্যুবরণ করেন।

বিশ্বখ্যাত দার্শনিক জন ডিউই এর প্রয়োগবাদ শিক্ষাদর্শনকে ভিত্তি করেই কিলপ্যাট্রিক এর প্রকল্প পদ্ধতি প্রবর্তিত। প্রয়োগবাদের ইংরেজি Pragmatism শব্দটি এসেছে গ্রিক শব্দ Pragmatics হতে । Pragmatics শব্দের আভিধানিক অর্থ কার্যক্ষমতা বা উপযোগিতা । জন ডিউই এর মতে জীবনের সাথে সম্পর্কিত সমস্যা সমূহের সমাধানের মধ্যদিয়ে শিক্ষার্থীরা জ্ঞান অর্জন করে। কাজেই শিক্ষার্থীর জ্ঞান অর্জনের জন্য প্রয়োজন তার আগ্রহ, প্রবণতা ও মানসিক ক্ষমতার উপযোগী সমস্যা এবং সক্রিয়তা।

প্রকল্প পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীর শিখন হয় তার কাজের মাধ্যমে। দার্শনিক দিক থেকে জন ডিউই এর প্রবর্তিত সমস্যা-সমাধান পদ্ধতি সক্রিয়তা তত্ত্বের ভিত্তিতে প্রতিষ্ঠিত হলেও উইলিয়াম হার্ড কিলপ্যাট্রিক ১৯১৮ সালে প্রকল্প পদ্ধতির বাস্তব রূপ প্রদান করেন । প্রকল্প বলতে তিনি কোনো উদ্দেশ্যমূলক কাজকে বুঝিয়েছেন, যা একটি সমাজের পরিবেশের মধ্যে আন্তরিকতার সাথে সম্পন্ন করা হয়(æA whole hearted purposeful activity proceeding in a social environment”)। এই পদ্ধতিতে থর্নডাইকের প্রচেষ্টা ও ভুল সংশোধন কৌশলকে প্রত্যক্ষভাবে প্রয়োগ করা হয়। কাজেই পদ্ধতিটি মনোবিজ্ঞানসম্মত। প্রকল্প পদ্ধতি প্রয়োগে চারটি স্তর অনুসরণ করতে হয়-

১.উদ্দেশ্য (Purpose) ২.পরিকল্পনা(Planning) ৩.কার্যসম্পাদন(Execution) ৪. মূল্যায়ন(Evaluation)

নিচে এ স্তরগুলোর সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা হলো:

১. উদ্দেশ্য (Purpose): এক বা একাধিক উদ্দেশ্যকে বিবেচনায় নিয়ে প্রকল্প নির্ধারণ করা হয়। এই স্তরে শিক্ষকের সহযোগিতায় প্রথমেই শিক্ষার্থীরা একটি কাজ বা প্রকল্প স্থির করে। কাজটি করলে তাদের কি উদ্দেশ্য অর্জন হবে তাও নির্ধারণ করে।

২. পরিকল্পনা (Planning): এ স্তরে শিক্ষকের সহযোগিতায় শিক্ষার্থীরা একটি কার্যকর কর্মপরিকল্পনা তৈরি করে। প্রকল্পটির বাস্তবায়ন প্রক্রিয়ার ধারাবাহিক কার্যক্রম এই স্তরে নির্ধারণ করা হয়।

৩. কার্যসম্পাদন (Execution): এ স্তরে শিক্ষার্থীরা তাদের কর্মপরিকল্পনা অনুসারে কর্ম সম্পাদন করে। শিক্ষক পাশে থেকে প্রয়োজনে সহযোগিতা করেন। কার্য সম্পাদন স্তরই প্রকৃতপক্ষে প্রকল্প বাস্তবায়ন স্তর ।

৪. মূল্যায়ন (Evaluation): এ স্তরে যে উদ্দেশ্যের ভিত্তিতে প্রকল্পটি গ্রহণ করা হয়েছিল তা অর্জিত হয়েছে কিনা, তা মূল্যায়ন করা হয়। কার্য সম্পাদন করার সময় উদ্দেশ্য অর্জনে কি কি অসুবিধা হলো তা এই স্তরে জানা যায়।

প্রকল্প পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীরা স্বাধীনভাবে জীবন ঘনিষ্ট সমস্যা নিজের শারীরিক ও মানসিক শক্তি ব্যবহার করে আপ্রাণ চেষ্টার দ্বারা কার্য সম্পাদন করে। ফলে শিক্ষার্থীরা প্রকৃত জ্ঞান ও অভিজ্ঞতা অর্জনের সুযোগ পায়। এই পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীদের মধ্যে পারস্পরিক সহযোগিতা, শ্রদ্ধাবোধ. দলের প্রতি আনুগত্য ইত্যাদি সামাজিক গুণাবলির বিকাশ ঘটে।

প্রকল্প পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- জীবন ঘনিষ্ট সমস্যা সমাধানের সহায়ক ।
- পাঠ্য বিষয়ের সাথে সামাজিক ও প্রাকৃতিক পরিবেশের বাস্তব উপাদানের সমন্বয় সাধন করে।
- শিক্ষার্থী তার সমগ্র চিন্তা ও কর্ম দক্ষতা প্রয়োগ করে স্বাধীনভাবে কাজ করার সুযোগ পায়।
- সক্রিয়তা এ পদ্ধতির প্রধান বৈশিষ্ট্য। প্রকল্প প্রণয়ন থেকে শুরু করে ফলাফল যাচাই পর্যন্ত প্রতিটি ধাপেই শিক্ষার্থীকে সক্রিয় থাকতে হয় ।
- এ পদ্ধতি শিক্ষার্থীর মধ্যে পারস্পরিক সহযোগিতা, শ্রদ্ধাবোধ. দলের প্রতি আনুগত্য ইত্যাদি সামাজিক গুণাবলির বিকাশ সাধন করে।

প্রকল্প পদ্ধতির প্রয়োগ কৌশল

- শ্রেণির শিক্ষার্থীদের প্রয়োজনীয় সংখ্যক দলে বিভক্তকরণ ।
- দলের সাথে আলাপ আলোচনার ভিত্তিতে প্রকল্প নির্বাচন ।
- প্রকল্পের উদ্দেশ্য নিরূপণ ।
- প্রকল্প বাস্তবায়নের উপযোগী কার্য সম্পাদন পরিকল্পনা প্রণয়ন ।
- প্রয়োজনীয় পরামর্শ প্রদান ।
- শিক্ষার্থীদের স্বাধীনভাবে কাজ করার জন্য উৎসাহ প্রদান ।
- শিক্ষক কর্তৃক সম্পাদিত কাজের ফলাফল মূল্যায়ন ।
- প্রকল্পের উদ্দেশ্য যাচাই।

প্রকল্প পদ্ধতির সুবিধা

- শিক্ষার্থীরা হাতে কলমে কাজ করে শিখন অর্জন করে । ফলে চিন্তন ও কর্ম দক্ষতা বৃদ্ধি পায় ।
- শিক্ষার্থীরা জীবন ঘনিষ্ট সমস্যা সমাধানের পরিকল্পনা প্রণয়ন করে এবং বাস্তবতার আলোকে সমস্যার সমাধান করে বলে, কাজের মধ্যে আনন্দ পায়। অর্জিত অভিজ্ঞতা ভবিষ্যতে ব্যবহার করতে পারে ।
- এই পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীরা শুধু পাঠ্য বিষয়ের জ্ঞান লাভ করে না, বরং সমাজের বিভিন্ন বিষয় সম্পর্কেও অভিজ্ঞতা অর্জন করে।
- নিজের চাহিদা ও সামর্থ্য অনুযায়ী স্বাধীনভাবে কাজ করার সুযোগ পায় বলে আত্মসচেতনতা, আত্মনির্ভরতা ও দায়িত্ববোধ বৃদ্ধি পায়।
- দলগত কাজের মাধ্যমে গণতান্ত্রিক মূল্যবোধ এর বিকাশ ঘটে ।
- গণিত বিষয়ের শিক্ষার্থীরা এই পদ্ধতিতে বিশেষভাবে উপকৃত হয়। গণিতের বিমূর্ত ধারণাকে বাস্তবে ব্যবহার করার মাধ্যমে শিখন সহজ ও স্থায়ী হয়।

প্রকল্প পদ্ধতির অসুবিধা

- শ্রেণিতে শিক্ষার্থীর সংখ্যা বেশি হলে একজন শিক্ষকের পক্ষে প্রকল্প পচিালনা করা কঠিন হয়। ফলে ফলপ্রসূ শিখন আশা করা যায় না।
- একটি প্রকল্প সম্পন্ন করতে যথেষ্ট সময় এবং অর্থ প্রয়োজন হয়।
- শিখনের জন্য সকল শিক্ষার্থী সমানভাবে সুযোগ পায় না ।
- প্রকল্প পদ্ধতিতে ব্যবহারিক কাজের উপর বেশি গুরুত্ব দেয়া হয়। এক্ষেত্রে শিক্ষক দক্ষ না হলে শিক্ষার্থীরা হতাশাগ্রস্ত হয়।

৩.৩ আবিষ্কার ও সমস্যা সমাধান পদ্ধতি

আবিষ্কার পদ্ধতি

আবিষ্কার পদ্ধতি বা Heuristic Method এর উদ্ভাবক হেনরি এডওয়ার্ড আর্মস্ট্রং (Henry Edward Armstrong). তিনি ১৮৪৮ সালের ৬ মে ইংল্যান্ডে জন্মগ্রহণ করেন। তার পিতার নাম রিচার্ড আর্মস্ট্রং এবং মাতার নাম ম্যারি অ্যান বিড্‌ল্।


এইচ ই আর্মস্ট্রং(১৮৪৮-১৯৩৭)
ইংলিশ

Heuristic শব্দটি এসেছে গ্রীক শব্দ heurises থেকে। আবিষ্কার পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীর চিন্তা-চেতনা থাকে আবিষ্কারকের। শিক্ষার্থী নিজে আবিষ্কার করে বলে, এই পদ্ধতির নাম দেয়া হয়েছে আবিষ্কার পদ্ধতি।.তিনি প্রথমে এই পদ্ধতিটি বিজ্ঞান শিক্ষণে প্রয়োগ করেন। দেখা যায় বিজ্ঞান শিক্ষণে এই পদ্ধতি খুব বেশি কার্যকর নয়। শিক্ষার্থীদের মানসিকতা পরিপক্ক না হলে বিজ্ঞানীদের মত তারা আবিষ্কার করতে সক্ষম হয় না। বিজ্ঞান শিক্ষায় এই পদ্ধতি অত্যন্ত ব্যয়বহুল ও সময়সাপেক্ষ। কিন্তু গণিত শিক্ষণে এই পদ্ধতি অত্যন্ত কার্যকর এবং ফলপ্রসূ।

শিখন-শেখানো কার্যক্রমে যে পদ্ধতি প্রয়োগের ফলে শিক্ষার্থীরা সমস্যা সমাধানের উপায় খোঁজে এবং প্রাপ্ত তথ্য পরীক্ষা নিরীক্ষার মাধ্যমে যাচাই ও ব্যবহার করে নিজেরা সমস্যাটির সমাধান আবিষ্কার করতে চেষ্টা করে তাকে আবিষ্কার পদ্ধতি বলে। আবিষ্কার পদ্ধতির মূল কথা হলো শিক্ষার্থী মনে করবে সমস্যাটি তার নিজের এবং তাকেই সমাধানটি আবিষ্কার করতে হবে। এ পদ্ধতিতে শিক্ষক-শিক্ষার্থী উভয়েই সক্রিয় থেকে আবিষ্কারকের মনোভাব নিয়ে কাজ করেন। শিক্ষক পাঠের শিখনীয় অংশকে সমস্যার আকারে শ্রেণিতে উপস্থাপন করবেন। তিনি শিক্ষার্থীদেরকে পর্যবেক্ষণ, পরীক্ষা-নিরীক্ষা ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের নিয়মাবলি সম্পর্কিত নির্দেশনা দিবেন এবং স্বাধীনভাবে কাজ করে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার পরিবেশ তৈরি করবেন ।

শিক্ষক সরাসরি সমস্যার সমাধান বলে দিবেন না, ছোট ছোট দিক নির্দেশনা মূলক প্রশ্নের মাধ্যমে শিক্ষার্থী যেন তার লক্ষ্যে পৌঁছাতে পারে সেজন্য প্রয়োজনীয় সহযোগিতা করবেন। এই পদ্ধতিতে প্রচেষ্টা ও ভুলের মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা শিখে, ফলে শিখন স্থায়ী হয় ।

আবিষ্কার পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- শিক্ষার্থীদের অনুসন্ধিৎসু ও কৌতূহলী করে তোলে ।
- শিক্ষার্থীদের সৃজনশীল চিন্তার বিকাশ ঘটায় ।
- শিক্ষার্থীদের পাঠের প্রতি মনোযোগী এবং আগ্রহী করে তোলে ।
- শিক্ষার্থীদের আত্মবিশ্বাস এবং সক্রিয়তা বৃদ্ধি করতে সহায়ক ।
- শিক্ষার্থীদের স্বাধীনভাবে কাজ করার সুযোগ তৈরি করে ।
- শিক্ষার্থীদের ব্যক্তিগত প্রচেষ্টায় সমস্যা সমাধানের অভ্যাস গঠন করে ।

আবিষ্কার পদ্ধতির প্রয়োগ কৌশল

- শিক্ষক পাঠের শিখনীয় অংশকে সমস্যা আকারে উপস্থাপন করবেন ।
- সমস্যাটি সমাধানের জন্য প্রয়োজনীয় নির্দেশনা দিবেন ।
- শিক্ষক সমস্যা সমাধানে শিক্ষার্থীদের প্রয়োজনীয় সহযোগিতার মাধ্যমে উৎসাহ প্রদান করবেন ।
- সমস্যাটি সমাধান করার সময় শিক্ষার্থীদের প্রশ্নসমূহের উত্তর শিক্ষক সরাসরি দিবেন না বরং তিনি ছোট ছোট প্রশ্নের মাধ্যমে তাদেরকে আবিস্কারে উদ্বুদ্ধ করবেন ।
- শিক্ষার্থীদের প্রয়োজনবোধে সমস্যা সমাধানের ইঙ্গিত দিবেন কিন্তু সমাধানটি বলবেন না ।
- শিক্ষার্থীরা সমস্যাটি সমাধানের পথ থেকে সরে না যায় শিক্ষক তা খেয়াল রাখবেন ।
- সমস্যাটি সমাধানের উপায় এবং সমাধান উপস্থাপনের প্রয়োজনীয় পরিবেশ তৈরি করবেন ।

আবিষ্কার পদ্ধতির সুবিধা

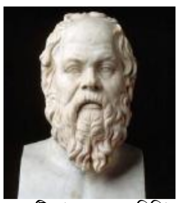
- শ্রেণিতে শিক্ষার্থীরা মনোযোগী এবং সক্রিয় থাকে। ফলে শিক্ষক সহজে পাঠের বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীদের শেখাতে পারেন।
- শিক্ষার্থীদের বৈচিত্র্যময় প্রশ্নের উত্তর দেয়ার কারণে শিক্ষকের দক্ষতা বৃদ্ধি পায় ।
- শিক্ষার্থীদের চিন্তন দক্ষতা, পর্যবেক্ষণ ক্ষমতা, সৃজনশীলতা এবং সমস্যা সমাধান দক্ষতা বৃদ্ধি পায় ।

- নিজ থেকে সমস্যা সমাধানের অভ্যাস গড়ে ওঠে ।
- শিক্ষার্থীদের আবিষ্কারের মনোভাবের উন্নয়ন ঘটে ।
- গণিত বিষয়ের শিক্ষার্থীদের গণিত শিক্ষার লক্ষ্য বাস্তবায়িত হয় ।
- শিক্ষার্থীরা আত্মনির্ভরশীল, আত্মবিশ্বাসী এবং যুক্তিবাদী হয় ।
- বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গির উন্নয়ন হয়।

আবিষ্কার পদ্ধতির অসুবিধা

- অধিক সংখ্যক শিক্ষার্থীর শ্রেণিতে এই পদ্ধতি কার্যকর নয় ।
- বিজ্ঞান শিক্ষায় পদ্ধতিটি অত্যন্ত ব্যয়বহুল এবং সময়সাপেক্ষ।
- প্রয়োগের প্রাথমিক পর্যায়ে বেশি সময় এবং বেশি সহযোগিতা প্রয়োজন হয় ।
- দুর্বল শিক্ষার্থীদেরকে সর্বদা বেশি সহযোগিতা প্রদানের প্রয়োজন হয় যা শ্রেণিতে শিক্ষকের জন্য কঠিন ।
- শিক্ষক সব সময় বেশি সহযোগিতা প্রদান করলে শিক্ষার্থীদের স্বাধীন চিন্তাশক্তির বিকাশ ঘটে না এবং শিক্ষকের ওপর নির্ভরশীল হয়ে পড়ে ।
- এই পদ্ধতি প্রয়োগের জন্য শিক্ষকের প্রশিক্ষণ প্রয়োজন ।

সমস্যা সমাধান পদ্ধতি


সক্রেটিস(৪৭০-৩৯৯বিসি)

প্রাচীনকাল থেকেই শিখন-শেখানো কার্যক্রমে এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা হচ্ছে । গ্রিক দার্শনিক সক্রেটিস(খ্রিস্টপূর্ব ৪৭০-৩৯৯) শিক্ষণের ক্ষেত্রে প্রথমে একটি সমস্যা তৈরি করতেন; পরে সমস্যাটির বাস্তবভিত্তিক সমাধানের জন্য শিক্ষার্থীদের উৎসাহ দিতেন । নীতিগতভাবে সক্রেটিস এই পদ্ধতির প্রবক্তা হলেও মার্কিন দার্শনিক জন ডিউই তার প্রয়োগবাদী দর্শনের ভিত্তিতে এই পদ্ধতিকে একটি পরিণত রূপ দেন। কাজেই জন ডিউই সমস্যা সমাধান পদ্ধতির প্রবর্তক।


জন ডিউই(১৮৫৯-১৯৫২

জন ডিউই ১৮৫৯ সালের ২০ অক্টোবর আমেরিকার বার্লিংটন নামক একটি ছোট্ট শহরে জন্মগ্রহণ করেন। চার ভাইয়ের মধ্যে ডিউই ছিলেন তৃতীয়। ছোটবেলা শিক্ষার প্রতি তার অনুরাগ ছিল। তিনি আমেরিকার ভার্মন বিশ্ববিদ্যালয় থেকে স্নাতক এবং হপকিনস্ বিশ্ববিদ্যালয় থেকে পিএইচডি ডিগ্রি অর্জন করেন। তিনি শিকাগো ও কলম্বিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে অধ্যাপনা করেন এবং বিভিন্ন দেশে আমন্ত্রিত বক্তা হিসাবে বক্তৃতা দেন । তিনি ছিলেন উচ্চ পর্যায়ের লেখক। শিক্ষাক্ষেত্রে প্রয়োগবাদের প্রবক্তা জন ডিউই সারা বিশ্বে একজন শ্রেষ্ঠ শিক্ষা দার্শনিক হিসেবে খ্যাতিমান।

জন ডিউই মনে করতেন, শিক্ষা ব্যক্তির সে সকল গুণের বিকাশ সাধন করবে, যাদ্বারা ব্যক্তি তার পরিবেশের সঙ্গে সার্থক অভিযোজন করতে পারবে এবং সমাজ জীবনের দায়িত্ব সার্থকভাবে পালন করতে সক্ষম হবে। শিক্ষার লক্ষ্য হলো শিক্ষার্থীর সর্বাঙ্গীন বিকাশ সাধনের মাধ্যমে বাস্তব জীবনের উপযোগী করে গড়ে তোলা। জন ডিউই এর মতে শিক্ষার্থীর আগ্রহ ও প্রবণতার ভিত্তিতে সমস্যা নির্বাচন করলে, যখনই সে এই ধরনের সমস্যার সম্মুখীন হবে তখনই বুদ্ধিমত্তা দিয়ে তা সমাধানের চেষ্টা করবে। এই সমাধানের জন্য সে তথ্য সংগ্রহ করবে এবং তা ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করবে। এ ভাবে অর্জিত জ্ঞান শিক্ষার্থী তার বাস্তব জীবনের অন্যান্য ক্ষেত্রে প্রয়োগ করবে।

শ্রেণিকক্ষে পাঠদানের ক্ষেত্রে সমস্যা সমাধান পদ্ধতি হলো এমন একটি পদ্ধতি, যে পদ্ধতিতে শিক্ষক বিষয় সংক্রান্ত সমস্যা শ্রেণিতে উপস্থাপন করবেন এবং সমস্যাটি সমাধানের জন্য শিক্ষার্থীদের উৎসাহ দিবেন। শিক্ষার্থীরা সমস্যার সঠিক সমাধান বের করার জন্য তাদের সামর্থ্য অনুযায়ী চেষ্টা করবে। শিখন-শেখানো কার্যক্রমে এই পদ্ধতি অন্যান্য পদ্ধতির মতই গুরুত্বপূর্ণ এবং কার্যকর। গণিত শ্রেণিতে প্রয়োগের জন্য এই পদ্ধতি অত্যন্ত কার্যকর পদ্ধতি।

এ পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে পঞ্চস্তর(UPTCE) কাঠামোটি নিম্নরূপ:

(১) উপলব্ধি (Understand): কী দেওয়া আছে ? কী বের করতে হবে ?
(২) পরিকল্পনা (Planning): কী করতে পারি ? কিভাবে করতে পারি ?
(৩) প্রচেষ্টা (Trying): পরিকল্পনা অনুসারে কাজ করি ।
(৪) যাচাই(Check): আমি কি সঠিক উত্তর পেয়েছি ? উত্তরটি কি অর্থবহ হয়েছে ?
(৫) সম্প্রসারণ(Extend): আমি কী শিখলাম ? বিকল্প কোন উপায় আছে কি ?

সমস্যা সমাধান পদ্ধতির উদাহরণ: কোন এলাকায় 50000 লোক বাস করে। জনসংখ্যা বৃদ্বিহার 2% হলে, 3 বছর পর ঐ এলাকার লোকসংখ্যা কত হবে?

উপলব্ধি (Understand): কি জানা আছে? কি বের করতে হবে?	বর্তমান লোকসংখ্যা 50000, লোকসংখ্যা বৃদ্ধিহার 2%, বৃদ্ধির সময় 3 বছর; বৃদ্ধিপ্রাপ্ত লোকসংখ্যা = কত?
পরিকল্পনা (Plan): কি করতে পারি? কিভাবে করতে পারি?	লোকসংখ্যা বৃদ্ধি পায় চক্রবৃদ্ধি হারে, চক্রবৃদ্ধির সূত্র $C=P(1+r)^n$; প্রয়োগ করতে পারি; যেখানে লোকসংখ্যা P = 50000, বৃদ্ধিহার r = 2% = .02, n = 3 বছর, বৃদ্ধিপ্রাপ্ত লোকসংখ্যা C = কত?
প্রচেষ্টা (Try): পরিকল্পনা অনুসারে কাজ করি।	$C = P(1+r)^n = 50000(1+.02)^3=50000\times1.02\times1.02\times1.02$ = 53060.4(ক্যালকুলেটরে) ≈ 53060 (লোকসংখ্যা হবে পূর্ণসংখ্যা) ∴ 3 বছর পর ঐ এলাকার লোকসংখ্যা হবে 53060 জন (উত্তর)।
যাচাই (Check): আমি কী উত্তর দিয়েছি? উত্তরটি কি অর্থবহ হয়েছে?	2% সরল হারে বৃদ্ধি পেলে, 50000 জনে প্রতি বছর 1000 জন করে 3 বছরে 3000 জন 3000 বৃদ্ধি পেত। চক্রবৃদ্ধির কারণে সরল হার থেকে 60 জন বেশি বৃদ্ধি পেয়েছে; অতএব ফল সামঞ্জস্যপূর্ণ।
সম্প্রসারণ (Extend): কী শিখলাম ? কোথায় কাজে লাগবে? বিকল্প কৌশল আছে কি?	চক্রবৃদ্ধি হারের সমস্যা সমাধান শিখলাম। চক্র হারে বৃদ্ধি পায় এমন যে কোন বৃদ্ধি (ব্যাংকে গচ্ছিত টাকা) এ সূত্রে বের করা যায়। প্রতি বছরের বৃদ্ধিপ্রাপ্ত মান ঐকিক নিয়মে বের করে, পরবর্তী বছরের জন্য তাকে মূল ধরে তিন বছরের জন্য তিন স্তরে সমাধান করা যায়।

সমস্যা সমাধান পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- শিক্ষার্থীর চিন্তণ দক্ষতা বিকাশের ক্ষেত্র তৈরি হয়।
- বিষয়বস্তুর কাঠিন্য অনুযায়ি একক, জোড়া বা দলীয়ভাবে সমস্যার সমাধান করা যায়।
- শিক্ষার্থীদের বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গী ও উদ্ভাবনীমূলক দক্ষতার বিকাশ সাধনের সহায়ক।
- শিক্ষার্থীরা সমস্যা সমাধানের জন্য আপ্রাণ চেষ্টা করে।
- শিক্ষার্থীরা একটি সমস্যাকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সমস্যায় বিশ্লেষণ করে সমাধান খোঁজার চেষ্টা করে ফলে বিশ্লেষণ ক্ষমতার বিকাশ ঘটে।
- শিক্ষার্থীর পরীক্ষণ, পর্যবেক্ষণ, তথ্য সংগ্রহ, তথ্য ব্যবহার এবং মূল্যায়ন দক্ষতা বিকাশের সহায়ক।

সমস্যা সমাধান পদ্ধতির প্রয়োগ কৌশল

- শিক্ষক পাঠ্যবিষয় সংক্রান্ত সমস্যা সনাক্ত করবেন ।
- শিক্ষক শ্রেণিতে যে ধরনের কাজ দিতে ইচ্ছুক সেভাবে শিক্ষার্থীদের সংগঠিত করবেন ।
- শিক্ষার্থীদের নিকট সমস্যা উপস্থাপন করবেন ।
- সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে যখন বাধার সম্মুখীন হবে, তখন নতুন নতুন সমস্যার সৃষ্টি হবে ।
- শিক্ষার্থী নতুন সমস্যার সমাধানের জন্য পারস্পরিক আলোচনার ভিত্তিতে বিভিন্ন তথ্য সংগ্রহ করবে ।
- প্রাপ্ত তথ্যের যৌক্তিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তা প্রয়োগ করে শিক্ষার্থী তার সমস্যার সমাধান নির্ণয় করবে ।
- শিক্ষক সমাধানটি শ্রেণিতে উপস্থাপনের ব্যবস্থা করবেন এবং মূল্যায়ন করবেন ।

সমস্যা সমাধান পদ্ধতির সুবিধা

- শিক্ষার্থীদের চিন্তন দক্ষতা বৃদ্ধি পায় ।
- শিক্ষার্থীদের যৌক্তিক বিশ্লেষণ এবং সৃজনশীল ক্ষমতার বিকাশ ঘটে।
- নিজে কাজ করার এবং সিদ্ধান্ত গ্রহণ করার ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়।
- শিক্ষার্থীরা আত্মনির্ভরশীল হয়।
- শিক্ষার্থীরা বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গী অর্জন করে।
- পাঠ্যবিষয় সম্পর্কিত জ্ঞান ও ধারণা সুদৃঢ় হয় ।

সমস্যা সমাধান পদ্ধতির অসুবিধা

- বিদ্যালয়ের সকল বিষয় এই পদ্ধতিতে পাঠদান করা যায় না।
- এই পদ্ধতিতে পাঠদান করতে অনেক বেশি সময় প্রয়োজন হয়। ফলে সমগ্র পাঠ্যসূচি শেষ করা যায় না।
- দুর্বল মেধার শিক্ষার্থীরা এ পদ্ধতিতে শিখনে অংশগ্রহণ করতে পারে না, ফলে শ্রেণির শৃঙ্খলা নষ্ট হতে পারে
- তত্ত্বনির্ভর বিষয়বস্তু এই পদ্ধতিতে পাঠদান করা যায় না।
- শিক্ষার্থী সংখ্যা শ্রেণিতে বেশি হলে এই পদ্ধতি প্রয়োগ সম্ভবপর হয় না।
- সঠিক সমাধান খুঁজে না পেলে শিক্ষার্থীদের আগ্রহ নষ্ট হতে পারে ।
- এই পদ্ধতি প্রয়োগের জন্য শিক্ষকের অভিজ্ঞতা ও বিশেষ প্রশিক্ষণ প্রয়োজন।

৩.৪ প্রশ্নোত্তর ও প্রদর্শন পদ্ধতি এবং ডাল্টন পরিকল্পনা

প্রশ্নোত্তর পদ্ধতি

শিক্ষক শিক্ষার্থীর সক্রিয়তার মাধ্যমে শ্রেণিতে পাঠদান কার্যক্রম ফলপ্রসূ হয়। প্রশ্নোত্তর পদ্ধতি শ্রেণিতে পাঠদানের জন্য একটি সফল পদ্ধতি হিসেবে বিবেচিত। প্রশ্নোত্তর পদ্ধতিতে পাঠদানের ক্ষেত্রে শিক্ষক ছোট ছোট প্রশ্নের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের সক্রিয় রাখেন। এই পদ্ধতিতে পাঠদান কার্যক্রমের শুরু থেকে শেষ পর্যন্ত শিক্ষক বিষয়বস্তুর ওপর প্রশ্ন করেন এবং শিক্ষার্থীরা যথাসাধ্য প্রশ্নের উত্তর দিতে চেষ্টা করে। প্রশ্ন হবে সুনির্দিষ্ট এবং বিষয় কেন্দ্রিক। এই পদ্ধতিতে পাঠদান করতে হলে প্রশ্ন করার কৌশল সম্পর্কে শিক্ষককে বিশেষভাবে পারদর্শী হতে হয়। উৎকৃষ্ট মানের প্রশ্ন তৈরি, এবং শ্রেণিতে বিষয় সংশ্লিষ্ট যে কোন ধরনের প্রশ্নের মোকাবেলা করার দক্ষতা শিক্ষকের থাকতে হবে। শিক্ষককে বাড়িতে পড়াশুনা করতে হয় এবং বিষয়বস্তুকে কেন্দ্র করে পাঠদানের জন্য পরিকল্পিতভাবে প্রশ্ন তৈরি করতে হয়। শিক্ষকের দক্ষতা ও কৌশলের ওপর এই পদ্ধতির কার্যকারিতা এবং সফলতা নির্ভর করে।

প্রশ্নোত্তর পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- প্রশ্নের মাধ্যমে শিক্ষক পাঠ শুরু এবং শেষ করেন ।
- শিক্ষক সমগ্র শ্রেণির উদ্দেশ্যে প্রশ্ন করেন বিধায় শিক্ষার্থীদের দৃষ্টি সর্বদা শিক্ষকের দিকে থাকে।
- শিক্ষার্থীদের প্রশ্নের উত্তর দিতে হয় বলে তারা পাঠের বিষয় নিয়ে চিন্তা-ভাবনা করে।
- শিক্ষার্থীদের পাঠের অগ্রগতি যাচাই সহজ হয়।
- শ্রেণি শৃঙ্খলা বজায় থাকে।
- শিক্ষকের বিষয়বস্তু সম্পর্কিত জ্ঞানের গভীরতা বৃদ্ধি পায়।
- দুর্বল শিক্ষার্থীকে চিহ্নিত করা সহজ হয়।

প্রশ্নোত্তর পদ্ধতির প্রয়োগ কৌশল

- শিক্ষক যথাযথভাবে পূর্ব প্রস্তুতি নিয়ে শ্রেণিতে আসবেন।
- শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীকে উদ্দেশ্য করে প্রশ্ন করতে হবে। নির্দিষ্ট শিক্ষার্থীর নিকট থেকে প্রশ্নের উত্তর আদায় করতে হবে।
- পাঠের শুরুতে সহজ এবং ছোট প্রশ্ন করবেন। যেহেতু শিখন সহজ থেকে কঠিন হয় সেহেতু শিক্ষার্থীরা সহজে পাঠে অংশগ্রহণ করতে পারবে।
- সবল দুর্বল সকল পর্যয়ের শিক্ষার্থীদের নিকট থেকে উত্তর আদায়ের চেষ্টা করতে হবে।
- শিক্ষার্থীদের প্রশ্নের উত্তর প্রদানে উদ্বুদ্ধ করতে হবে।
- শিক্ষার্থীদেরকে প্রশ্নের উত্তর প্রদানের জন্য যথেষ্ট সময় দিতে হবে।
- শিক্ষার্থীরা কোনো প্রশ্নের উত্তর প্রদান করতে না পারলে শিক্ষক সহায়তা করবেন।
- শিখনফল অর্জিত হচ্ছে কি না শিক্ষককে এ বিষয়ে সচেতন থাকতে হবে।

প্রশ্নোত্তর পদ্ধতির সুবিধা

- শিক্ষার্থীরা প্রশ্নের উত্তর দেয়ার জন্য চিন্তা-ভাবনা করে বলে শ্রেণিতে মনোযোগী থাকে ফলে শ্রেণি শৃঙ্খলা বজায় থাকে এবং শিক্ষকের পাঠ উপস্থাপনে কষ্ট কম হয়।
- বিষয়বস্তু থেকে অনেক প্রশ্নের উত্তর আদায় হওয়ার কারণে শিক্ষার্থীদের বিষয়বস্তু সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা তৈরি হয়।
- শিক্ষার্থীরা তাদের অজানা প্রশ্নের উত্তরটি শিক্ষকের নিকট থেকে সহজে জেনে নিতে পারে।
- শ্রেণিতে শিক্ষক-শিক্ষার্থী এবং শিক্ষার্থী-শিক্ষার্থী সম্পর্ক সুদৃঢ় হয়।
- শ্রেণিতে শিক্ষার্থীরা সর্বদা সক্রিয় থাকে।

প্রশ্নোত্তর পদ্ধতির অসুবিধা

- শিক্ষকের প্রশ্ন তৈরির দক্ষতা না থাকলে এবং শ্রেণিতে যথাযথভাবে প্রয়োগ করতে না পারলে এই পদ্ধতি কার্যকর হয় না।
- শিক্ষকের পর্যাপ্ত প্রস্তুতি না থাকলে এই পদ্ধতিতে শিক্ষার্থীর শিখন হয় না।
- শ্রেণিতে যেকোন ধরনের প্রশ্নের মোকাবেলা করার সামর্থ্য শিক্ষকের না থাকলে শিক্ষার্থীরা হতাশাগ্রস্ত হতে পারে।

প্রদর্শন পদ্ধতি

শ্রেণিতে শিখন-শেখানো কার্যক্রমে বাস্তব উপকরণ প্রদর্শন করে বিষয়বস্তুকে বাস্তবতার আলোকে উপস্থাপন করার পদ্ধতিকে প্রদর্শন পদ্ধতি বলে। বিষয় সংশ্লিষ্ট আকর্ষণীয় উপকরণ এবং শিক্ষকের উপস্থাপন কৌশলের ওপর প্রদর্শন পদ্ধতির কার্যকারিতা নির্ভর করে। শিক্ষক প্রদর্শনের সহায়ক হিসেবে চার্ট, মডেল এবং অন্যান্য উপকরণ দেখিয়ে শিক্ষার্থীদের প্রশ্নোত্তর এর মাধ্যমে বিষয়বস্তুর ধারণা ব্যাখ্যা করেন। বৈজ্ঞানিক যন্ত্রপাতি শিক্ষার্থীদের সহায়তায় সাজিয়ে শিক্ষক পরীক্ষণ প্রদর্শন করেন। শিক্ষক বৈজ্ঞানিক তথ্য বা তত্ত্ব পরীক্ষণের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের নিকট ব্যাখ্যা করেন। এই পদ্ধতিতে শিক্ষকের সক্রিয়তা এবং শিক্ষার্থীর মনোযোগ অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

Figure 5-6. The demonstration-performance method of teaching has five essential phases.

প্রদর্শন পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য

- প্রদর্শন পদ্ধতি একটি উপকরণ ভিত্তিক পদ্ধতি।
- এই পদ্ধতিতে শিক্ষার্থী অপেক্ষা শিক্ষকের সক্রিয়তা বেশি দেখা যায়।
- শিক্ষক উপকরণ তৈরি এবং তা প্রদর্শন করে পাঠদানে পারদর্শী।
- সুন্দর ও আকর্ষণীয় উপকরণ এবং শিক্ষকের বাচনভঙ্গি শিক্ষার্থীর মনোযোগ আকর্ষণ করে।
- বাস্তব উপকরণ পাঠের বিমূর্ত ধারণাকে মূর্ত করে।

প্রদর্শন পদ্ধতির প্রয়োগ কৌশল

- শিক্ষক পাঠের বিষয়বস্তু সংশ্লিষ্ট এক বা একাধিক উপকরণ নিয়ে শ্রেণিতে আসবেন। পরীক্ষা প্রদর্শনের ক্ষেত্রে শিক্ষক পূর্ব প্রস্তুতি গ্রহণ করবেন।
- শ্রেণির প্রারম্ভিক কার্যক্রম শেষে পাঠের যথোপযুক্ত অংশে উপকরণ প্রদর্শন করে বিষয় বস্তু ব্যাখ্যা করবেন। প্রদর্শন যেন শিক্ষার্থীরা বুঝতে পারে এ বিষয়ে শিক্ষককে সচেতন থাকতে হবে।
- প্রদর্শনের জন্য শ্রেণির এমন জায়গা নির্বাচন করতে হবে যেন সকল শিক্ষার্থী প্রদর্শন দেখতে পায় এবং শিক্ষকের কথা শুনতে পারে।
- শিক্ষক প্রয়োজন অনুসারে প্রদর্শন কাজে শিক্ষার্থীদের সক্রিয় সহযোগিতা গ্রহণ করবেন।
- শিক্ষক প্রদর্শিত পরীক্ষার ফলাফল বোর্ডে লিপিবদ্ধ করবেন। শিক্ষার্থীদেরকে প্রয়োজনীয় সমস্যা সমাধান, চিত্র, গ্রাফ অংকন ইত্যাদি কাজের জন্য সুযোগ দিবেন। মনে রাখতে হবে একটি প্রদর্শনে একাধিক ধারণা গঠন উচিত নয়।

প্রদর্শন পদ্ধতির সুবিধা

- প্রদর্শন পদ্ধতিতে শিক্ষকের এক সেট যন্ত্র বা উপকরণ হলেই চলে। শিক্ষার্থীদের আলাদা আলাদা উপকরণ ব্যবহারের প্রয়োজন হয় না। ফলে এটি কম ব্যয়বহুল।
- বিমূর্ত বিষয়কে বাস্তব উপকরণ ব্যবহার করে মূর্ত ধারণা গঠন করা হয় বলে শিক্ষার্থীরা সহজে শিখতে পারে এবং মনে রাখতে পারে।
- শিক্ষার্থীরা পাঠের বিষয়বস্তুর সাথে প্রদর্শিত বাস্তব জিনিস এর সংযোগ স্থাপনে সমর্থ হয়।
- শিক্ষার্থীরা নিজ হাতে পরীক্ষা না করলেও শিক্ষকের প্রদর্শিত পরীক্ষা পর্যবেক্ষণ ও ফলাফল লিখতে হয়।

প্রদর্শন পদ্ধতির অসুবিধা

- শিক্ষার্থীরা যেহেতু যন্ত্রপাতি অথবা উপকরণ নিজ হাতে ব্যবহার করার সুযোগ পায় না সেহেতু তাদের দক্ষতার বিকাশ ঘটে না।
- উপকরণ আকর্ষণীয় না হলে শ্রেণিতে শিক্ষার্থীদের মনোযোগ থাকে না।
- অধিক সংখ্যক শিক্ষার্থীর শ্রেণিতে প্রদর্শন পদ্ধতিতে পাঠদান করলে শ্রেণির পিছনের সারিতে বসা শিক্ষার্থীরা প্রদর্শন সঠিকভাবে দেখতে পায় না এবং শিক্ষকের কথা স্পষ্ট শুনতে পারে না ফলে তাদের শিখন হয় না।
- উন্নয়নশীল দেশসমূহে অভিজ্ঞ ও দক্ষ শিক্ষকের যথেষ্ট ঘাটতি রয়েছে। শিক্ষক দক্ষতার সাথে প্রদর্শন না করতে পারলে শ্রেণি শৃঙ্খলা নষ্ট হতে পারে।

ডাল্টন পরিকল্পনা (The Dalton Plan)


হেলেন পার্কহার্স্ট(১৮৮৭-১৯৭৩

ডাল্টন পরিকল্পনার প্রবক্তা হেলেন পার্কহার্স্ট (Helen Parkhurst) একজন আমেরিকান শিক্ষাবিদ। তিনি ১৮৮৭ সালের ৩ জানুয়ারি জন্ম গ্রহণ করেন। তিনি আমেরিকার নিউইয়র্কের ডাল্টন স্কুলের প্রতিষ্ঠাতা । ডাল্টন স্কুলে তিনি দীর্ঘদিন প্রধান শিক্ষিকার দায়িত্ব পালন করেন। ১৯২০ সালে এই বিদ্যালয়েই তিনি তার শিক্ষাতত্ত্বের পরীক্ষামূলক প্রয়োগ করেন। বিদ্যালয়ের নামেই তিনি পরিকল্পনাটির নাম দেন The Dalton Plan বা ডাল্টন পরিকল্পনা এবং ১৯২২ সালে Education on the Dalton Plan বইটি প্রকাশ করেন। ১৯৭৩ সালের ১ জুন আমেরিকার কানেক্টিকাটে হেলেন পার্কহার্স্ট মৃত্যুবরণ করেন।

মাধ্যমিক শিক্ষায় শিক্ষার্থীদের ব্যক্তি স্বাধীনতা, সামাজিকীকরণ ও ব্যক্তি স্বাতন্ত্র্যকে গুরুত্ব দিয়ে পার্কহার্স্ট শিক্ষণ পদ্ধতিতে The Dalton Plan বা ডাল্টন পরিকল্পনার সূচনা করেন। পার্কহার্স্ট মনে করেন বিদ্যালয়ের ধরাবাধা নিয়মের মধ্যে শিক্ষক কেন্দ্রিক শিখনের চেয়ে শিক্ষার্থীদের স্বাধীনভাবে শেখার সুযোগ দিলে তারা অনেক বেশি শিখতে পারে।

ডাল্টন পরিকল্পনায় বিদ্যালয়ে প্রতিটি বিষয়ের জন্য আলাদা শ্রেণিকক্ষ থাকে। শ্রেণিকক্ষগুলি এক একটি পরীক্ষাগার। শ্রেণিকক্ষে বেঞ্চের পরিবর্তে দলীয় আলোচনা করার উপযোগী টেবিল থাকে। শ্রেণিকক্ষকে বলা হয় বিষয়কক্ষ। বিষয়কক্ষের দায়িত্বে থাকেন একজন দক্ষ বিষয় শিক্ষক যাকে বলা হয় বিষয় বিশেষজ্ঞ। চার্ট, মডেল, ছবি, বই ইত্যাদি উপকরণ ও যন্ত্রপাতি দ্বারা বিষয়কক্ষ সাজানো থাকে। শিক্ষার্থীরা শ্রেণিকক্ষে স্বাধীনভাবে কাজ করে জ্ঞান আহরণ করতে পারে। শ্রেণিকক্ষে শিক্ষার্থীরা পরস্পর মতবিনিময়ের মাধ্যমে নিজেদের সমস্যাগুলি সমাধান করতে পারে। শিক্ষার্থীরা ইচ্ছা হলে একটি বিষয়কক্ষে সারাদিন কাটিয়ে দিতে পারে আবার ইচ্ছা হলে অন্য বিষয়কক্ষেও যেতে পারে। কাজেই শিখনের ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীদের অবাধ স্বাধীনতা দেওয়া হয়।

শিক্ষার্থীর বিষয়ভিত্তিক এক বছরের কাজকে বলা হয় কনট্র্যাক্ট (Contract). কনট্র্যাক্টকে বিভাজন করে এক মাসের কাজকে অ্যাসাইনমেন্ট, এক সপ্তাহের কাজকে পিরিয়ড এবং এক দিনের কাজকে ইউনিট বলা হয়। মাসের প্রথমেই এক মাসের কাজ নির্দিষ্ট করে দেওয়া হয় এবং শিক্ষার্থীরা কাজটি করার দায়িত্ব গ্রহণ করে। শিক্ষক আগে থেকেই এই কাজের পরিকল্পনা করে রাখেন। শিক্ষার্থীর এক দিন বা এক সপ্তাহের কাজ সাধারণত দেখা হয় না। এক মাসের কাজের অগ্রগতি দেখা হয় এবং শিক্ষার্থীরা কতটুকু শিখল, তার রেকর্ড রাখা হয়। এই রেকর্ড কার্ড তিন ধরনের। একটি শিক্ষার্থীর, একটি অভিভাবকের এবং অন্য একটি শিক্ষকের। এই কার্ডের গ্রাফ দেখে শিক্ষার্থীর উন্নতি এবং অবনতির স্তর নিরূপণ করা যায়। ফলে এই কার্ড শিক্ষক, শিক্ষার্থী ও অভিভাবক সকলকে সক্রিয় করে তোলে।

ডাল্টন পরিকল্পনায় শিক্ষার মান অনুযায়ী শ্রেণিকক্ষ আলাদা করা হয়নি। ফলে যে সকল শিক্ষার্থী এক বা একাধিক কনট্র্যাক্ট শেষ করেছে এবং যে সকল শিক্ষার্থী প্রথম কনট্র্যাক্ট শুরু করেছে তারা একই বিষয়ের কক্ষে কাজ করে। শিক্ষার্থীরা কোন অসুবিধা বোধ করলে অভিজ্ঞদের কাছ থেকে পরামর্শ নিতে পারে। এই পরিকল্পনায় দলগত কাজ ও সম্মেলনের ব্যবস্থা রাখা হয়। সম্মেলনের মাধ্যমে শিক্ষক ও শিক্ষার্থীরা পারস্পরিক আলেচনার প্রেক্ষিতে বিভিন্ন গুরুত্বপূর্ণ সমস্যার সমাধান করে থাকেন।

এছাড়া সাহিত্যসভা, বক্তৃতা, অভিনয়, বিতর্ক, রাজনৈতিক আলোচনা, খেলাধুলা, শরীরচর্চা ইত্যাদি অনুশীলনের ব্যবস্থা করা হয়। পারস্পরিক সহযোগিতা এবং বিভিন্ন কার্যাবলির মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের নানাবিধ সামাজিক গুণাবলির বিকাশ ঘটে।

সাধারণ শিক্ষণে শিক্ষার্থীদের ব্যক্তি স্বাতন্ত্র্যকে মূল্যায়ন করা হয় না । ডাল্টন পরিকল্পনায় শিক্ষার্থীর ব্যক্তি স্বাতন্ত্র্যকে গুরুত্ব দেওয়া হয়। প্রত্যেক শিক্ষার্থী তার নিজস্ব সামর্থ্য ও পছন্দ অনুযায়ী কাজ করে এগিয়ে যেতে পারে। ফলে তার ব্যক্তি স্বাতন্ত্র্য বিকাশের সুযোগ তৈরি হয়।

ডাল্টন পরিকল্পনার বৈশিষ্ট্য

- শিক্ষার্থীদের স্বাধীনভাবে কাজ করার পরিবেশ সৃষ্টি করা হয়।
- বিদ্যালয়ে প্রত্যেক বিষয়ের জন্য এক একটি পরীক্ষাগার বা বিষয়কক্ষ থাকে যার দায়িত্বে থাকেন বিষয় বিশেষজ্ঞ শিক্ষক।
- শিক্ষার্থীরা যখন ইচ্ছা যে কোন শ্রেণিকক্ষে যেতে পারে এবং প্রয়োজনে অন্যদের সহযোগিতা নিয়ে শিখতে পারে।
- বিদ্যালয়ে বিষয়কেন্দ্রিক কোন সময় তালিকা নেই। ফলে শিক্ষার্থীরা যতক্ষণ ইচ্ছা একটি বিষয় নিয়ে কাজ করতে পারে।
- শিক্ষার্থীর সামাজিকীকরণ এই পরিকল্পনার একটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য।
- বিভিন্ন কাজের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের সামাজিক ও সাংস্কৃতিক গুণাবলি বিকাশের সুযোগ তৈরি করা হয়।
- শিক্ষার্থীদের ব্যাক্তিস্বাতন্ত্র্যের উপর বিশেষভাবে গুরুত্ব দেওয়া হয়। ডাল্টন পরিকল্পনা শিক্ষার্থীর নিজস্ব ক্ষমতা অনুযায়ী বিকাশের সুযোগ করে দেয়।
- শিক্ষার্থীদের দায়িত্ববান এবং আত্মনির্ভরশীল হওয়ার সুযোগ তৈরি করে।
- এই পরিকল্পনায় শিক্ষার্থীরা নিজ নিজ দায়িত্বে শিখে, শিক্ষক সহায়কের ভূমিকা পালন করেন।
- শিক্ষার অগ্রগতির রেকর্ড তৈরির মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের মূল্যায়ন করা হয়।

ডাল্টন পরিকল্পনার সুবিধা

- শিক্ষার্থীরা স্বাধীনভাবে শিখতে পারে। শিখনের ক্ষেত্রে তার ইচ্ছা ও আগ্রহকে গুরুত্ব দেওয়া হয়।
- শিক্ষার্থীরা নিজেদের ক্ষমতা ও আগ্রহ অনুযায়ী শেখার সুযোগ পায়।
- বাস্তবতার আলোকে নিজেদের সামর্থ্য ব্যবহার করে শিখে বলে শিখন দীর্ঘস্থায়ী হয়।
- পরীক্ষা, বাড়ির কাজ ইত্যাদি না থাকায় শিক্ষার্থীদের মানসিক চাপ থাকে না।
- শিক্ষার্থীরা পরস্পর মেলামেশার সুযোগ পায় বলে সহযোগিতার বোধ গড়ে ওঠে এবং নানাবিধ সামাজিক গুণাবলির বিকাশ ঘটে।

ডাল্টন পরিকল্পনার অসুবিধা

- ডাল্টন পরিকল্পনার বিষয় কক্ষ সাজাতে প্রচুর অর্থের প্রয়োজন। উন্নয়নশীল দেশের পক্ষে সকল শ্রেণিকক্ষ সাজানোর ব্যয়ভার বহন সম্ভব নয়।
- অল্পবয়সী এবং দুর্বল মেধার শিক্ষার্থীদের এই পরিকল্পনা অনুযায়ী শিখন হয় না।
- শিক্ষার্থীদের যেসব বিষয়ের প্রতি আগ্রহ বেশি থাকে তারা সেসব বিষয়ে এগিয়ে যায়। কম পছন্দের বিষয়ে মনোযোগ দেয় না বলে পিছিয়ে থাকে।
- যে সকল শিক্ষার্থী অন্তর্মুখী বা লাজুক স্বভাবের তারা এই পদ্ধতিতে শিখতে পারে না।
- যে সকল শিক্ষার্থী নিজে কোন বিষয় না বুঝতে পারলে কাউকে প্রশ্ন করে না তারা শিখতে পারে না এবং তাদের মধ্যে হীনমন্যতাবোধ তৈরি হতে পারে।

৩.৫ গণিত শিখনে ভাইগট্স্কির গঠনবাদের প্রয়োগ

ভাইগট্স্কি একজন রাশিয়ান মনোবিজ্ঞানী। তার পুরো নাম লেভ সিমোনোভিচ ভাইগট্স্কি (Lev Semonovitch Vigotsky)। তিনি ১৮৯৬ সালের ৫ নভেম্বর রাশিয়ার অর্চি(Orsche) নামক শহরে জন্মগ্রহণ করেন। তার বাবা ছিলেন ব্যাংক কর্মকর্তা এবং মা গৃহিণি হলেও শিক্ষকতায় প্রশিক্ষণপ্রাপ্ত ছিলেন। আট ভাই বোনের মধ্যে তিনি ছিলেন দ্বিতীয়। ছোট বেলায় তাদের রাতের খাবার টেবিলে সাহিত্য, ইতিহাস, শিল্পকলা, থিয়েটার ইত্যাদি বিষয় আলোচনা হত। ফলে বাল্যকাল থেকেই ভাইগট্স্কির বিভিন্ন বিষয়ের প্রতি আগ্রহ তৈরি হয়। তিনি ২৭০টি বিজ্ঞান বিষয়ক প্রবন্ধ এবং সমাজবিজ্ঞান, সৌন্দর্যতত্ত্ব, শিক্ষণ তত্ত্ব, শিক্ষাবিজ্ঞান ইত্যাদি বিষয়ে ১০টি বই লিখেছেন। ভাইগট্স্কি শিক্ষকতায়ও প্রশিক্ষণ নিতে চেয়েছিলেন। কিন্তু রাশিয়ায় বিপ্লবের আগে ইহুদীদের জন্য সে সুযোগ ছিল না।

ভাইগট্স্কি(১৮৯৬-১৯৩৪)

১৯১৭ সালে মস্কো বিশ্ববিদ্যালয় থেকে তিনি আইন বিষয়ে স্নাতক ডিগ্রী অর্জন করেন। কার্ল মার্কসের সমাজতত্ত্বকে তিনি স্বতন্ত্রভাবে উপস্থাপন করেন, যার মূলে ছিল মনোবিজ্ঞান। তাঁর তত্ত্বে মার্কসীয় তত্ত্ব উন্নয়নের প্রতিফলন ঘটে। ভাইগট্স্কির মতবাদ সামাজিক গঠনবাদ হিসেবে খ্যাত। ১৯৩৪ সালের জুন মাসে যক্ষ্মারোগে আক্রান্ত হয়ে ভাইগট্স্কি মৃত্যুবরণ করেন।

গঠনবাদ

"শিক্ষার্থী তার সামর্থ্য ও অভিজ্ঞতার মাধ্যমে নিজেই নিজের জ্ঞান গঠন করে" –ইহাই গঠনবাদের মূলকথা। শিক্ষা মনোবিজ্ঞানের সমসাময়িক বহুল আলোচিত তত্ত্বগুলির মধ্যে গঠনবাদ তত্ত্বটি সমধিক পরিচিত একটি তত্ত্ব। গঠনবাদ তত্ত্বকে কেন্দ্র করে অনেক শিক্ষাবিজ্ঞানী ও মনোবিজ্ঞানী গবেষণা করেছেন। তার মধ্যে ব্রুনার, জ্যাঁ পিয়াজে, জন ডিউই, ভাইগট্স্কি প্রমুখ উল্লেখযোগ্য। এছাড়া অনেকেই গঠনবাদের আলোকে শিখন তত্ত্ব ও জ্ঞান তত্ত্ব প্রবর্তন করেছেন।

ভাইগট্স্কির সামাজিক গঠনবাদ

সামাজিক গঠনবাদে শিক্ষার্থীর জ্ঞান গঠনের ক্ষেত্রে ব্যক্তি ও সমাজ-সংস্কৃতির আন্তক্রিয়ার উপর গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে। ভাইগট্স্কির তত্ত্বের ৪টি মৌলিক বিষয় হলো-

(১) শিশুরা তাদের জ্ঞান গঠন করে (Children construct their knowledge)
(২) উন্নয়ন তার সামাজিক প্রেক্ষিত থেকে আলাদা হতে পারে না (Development can not be separated from its social context)
(৩) শিখন হল মধ্যস্থতা (Learning is mediated)
(৪) মানসিক উন্নয়নে ভাষা কেন্দ্রিয় ভূমিকা পালন করে (Language plays a central role in mental development)

ভাইগট্স্কি তাঁর তত্ত্বে বিকাশ বলতে মানসিক বিকাশকে বুঝিয়েছেন। মানসিক বিকাশ সংঘঠিত হয় সামাজিক মিথষ্ক্রিয়ার মাধ্যমে। তার মতে- " Every function in child's cultural development appears twice: first on the social level and later on the individual level between people (inter psychological) and then inside the child (intra psychological). This applies equally to the voluntary attention, to logical memory and to the formation of concepts. All the higher functions originate as actual relationship between individuals".

তিনি মনে করেন সমাজ ও সংস্কৃতির মধ্যস্থতায় ব্যক্তির মানসিক উন্নয়ন ঘটে। তাঁর মতে মানুষের দুই ধরনের মানসিক ক্রিয়া রয়েছে। নিম্নস্তরের মানসিক ক্রিয়া এবং উচ্চস্তরের মানসিক ক্রিয়া। নিম্নস্তরের মানসিক ক্রিয়া জন্মগত এবং বংশগত। উচ্চস্তরের মানসিক ক্রিয়া ব্যক্তি ও সমাজ-সংস্কৃতির আন্তক্রিয়ার মাধ্যমে সংগঠিত হয়। ব্যক্তির চিন্তা-চেতনা ও কর্ম সমাজ-সংস্কৃতির উপাদানের মধ্যস্থতায় স্থির হয়। তিনি এর নাম দিয়েছেন মেডিয়েশন।

জ্যাঁ পিয়াজে জ্ঞান গঠনের ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর পরিণমন ও আত্মচিন্তণের উপর গুরুত্ব আরোপ করেছেন। অপরদিকে ভাইগট্স্কি জোর দিয়েছেন ব্যক্তি ও সমাজ-সংস্কৃতির আন্তক্রিয়া বা সামাজিক মিথষ্ক্রিয়ার উপর। উচ্চতর মানসিক ক্রিয়া উন্নয়নের মাধ্যম হিসেবে ভাইগট্স্কি মনস্তাত্বিক হাতিয়ার ব্যবহারের উপর গুরুত্ব দিয়েছেন। মনস্তাত্বিক হাতিয়ার হিসেবে প্রতীক, বস্তু ও অপরাপর ব্যক্তির আচরণের কথা উল্লেখ করেছেন। তার মতে ভাষা হলো একটি প্রতীক বা Psychological tools. উচ্চস্তরের মানসিক ক্রিয়া সংঘটনে ভাষা গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। বস্তুগত বা Materials tools ব্যক্তি ও প্রকৃতির মধ্যে মধ্যস্থতা করে। আবার আন্তমানসিক ক্রিয়ার মাধ্যমে অন্তমানসিক ক্রিয়ার উন্নয়ন ঘটে।

Zone of Proximal Development (ZPD): এটি ভাইগটস্কির সর্বাধিক আলোড়ন সৃষ্টিকারী একটি ধারণা। ভাইগটস্কির মতে, প্রত্যেক শিক্ষার্থীর শিখন সামর্থ্যের একটি নির্দিষ্ট সীমা রয়েছে। তিনি একে Zone of Proximal Development (ZPD) নামে অভিহিত করেছেন। The zone of proximal development is the difference between the level of independent performance and the level of performance under assistance. Vigotsky's ZPD stands for 'the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance, or in collaboration with more capable peers'.

অর্থাৎ , ZPD হলো একজন শিক্ষার্থীর সহায়তা করা কৃতিত্বের স্তর এবং সহায়তা ছাড়া কৃতিত্বের স্তরের পার্থক্য। ভাইগট্স্কি ZPD বলতে শিক্ষক বা অভিজ্ঞ সহপাঠির সহায়তায় সমস্যা সমাধান করার সামর্থ্য উন্নয়ন স্তর ও সহায়তা ছাড়া স্বাধীনভাবে শিক্ষার্থীর সমস্যা সমাধান করার প্রকৃত শিখন উন্নয়ন স্তরের পার্থক্যকে বুঝিয়েছেন।

যখন কোন শিক্ষার্থীকে একটি সমস্যা সমাধানের জন্য দেয়া হয় তখন সে তার সামর্থ্য ও নিজস্ব অভিজ্ঞতা ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান বা ধারণা গঠন করে, যাকে বলা হয় প্রকৃত শিখন উন্নয়ন স্তর বা বর্তমান বোধগম্যতার স্তর। শিক্ষকের কাজ সমস্যা সমাধানে শিক্ষার্থীকে সহযোগিতা করা নয় বরং শিক্ষার্থীর নতুন বিষয়বস্তুর ধারণা গঠনে সহায়তা করা। অর্থাৎ শিক্ষক শিক্ষার্থীদেরকে বর্তমান বোধগম্যতার স্তর থেকে উচ্চ স্তরে নিয়ে যেতে সহায়তা করবেন। ভাইগট্স্কি শিক্ষার্থীর বুদ্ধিমত্তা পরিমাপের সাধারণ পরীক্ষা পদ্ধতিরও বিরোধিতা করেন। তার মতে সাধারণ পরীক্ষা পদ্ধতির চেয়ে শিক্ষার্থীর স্বাধীনভাবে সমস্যা সমাধান অথবা অভিজ্ঞ ব্যক্তির সহযোগিতায় সমস্যা সমাধান পদ্ধতি অধিকতর কার্যকর।

ভাইগট্স্কির 'ধারণা গঠন তত্ত্ব' গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে কার্যকর। গণিত হলো এমন একটি বিজ্ঞান যা ভাষা ও চিন্তাকে বিমূর্ত প্রতীক ও প্রক্রিয়ার সাহায্যে ব্যাখ্যা করে। গণিত শিখনের মূল লক্ষ্য হলো প্রতীক ও প্রক্রিয়া ব্যবহারের মাধ্যমে ধারণা গঠন বা সমস্যা সমাধান। গণিতের ভাষা প্রতিকীয় ভাষা। শিক্ষার্থীর পক্ষে তার চেয়ে অধিকতর জ্ঞান সম্পন্ন ব্যক্তির সহযোগিতা ছাড়া গণিতের প্রতিকীয় ভাষা বুঝা সম্ভব নয়। কোন শিক্ষার্থী যত বেশি শিক্ষক বা অভিজ্ঞ ব্যক্তির সহযোগিতায় গণিতের ধারণা গঠন করবে তার ZPD এর বিকাশ তত গভীর হবে।

ভাইগটস্কি ও পিয়াজেঁর তত্ত্ব গতি বিষয়ের সাথে বেশি সম্পৃক্ত। পিয়াজেঁর পরিণমন ভিত্তিক জ্ঞান তত্ত্ব এবং ভাইগটস্কির ZPD শিক্ষাবিদদের মধ্যে বেশ আলোড়ন সৃষ্টি করে। ভাইগটস্কির ধারণা, চিন্তনের জন্য প্রয়োজন ভাষাজ্ঞান এবং পিয়াজেঁ বলেন, শিক্ষার্থীকে কার্যকরী চিন্তনে সমর্থ করে তুলতে হবে। প্রকৃতপক্ষে এই দুই শিক্ষাবিদের ধারণা সাংঘর্ষিক নয় বরং একে অপরের পরিপূরক।

ভাইগটস্কি তার তত্ত্বে Scaffolding নীতির উল্লেখ করেছেন। তিনি বলেন-ærole of teachers and others in supporting the learner's development and providing support structures to get to the next stage or level". In an educational context, however, scaffolding is an instructional structure whereby the teacher models the desired learning strategy or task then gradually shifts responsibility to the students.

শিক্ষক এবং অন্যান্য সহায়তাকারীদের ভূমিকা হবে শিক্ষার্থীদের এমনভাবে সহায়তা করা যেন তারা উন্নয়নের পরবর্তী স্তরে পৌঁছাতে পারে। Scaffolding একটি নির্দেশনামূলক কাঠামো যেখানে শিক্ষক তার বাছাইকৃত শিখন কৌশলটি ধীরে ধীরে শিক্ষার্থীদের মাঝে স্থানান্তর করেন।

ভাইগটস্কির মতে, শিক্ষকের ভূমিকা শুধুমাত্র বিষয়বস্তুকে সহজে উপস্থাপন করা নয় বরং নতুন বিষয়বস্তুর ধারণা গঠনে সহায়তা করা যেন শিক্ষার্থীর বর্তমান বোধগম্যতার স্তর বা শিখন সামর্থ্যের উন্নয়ন ঘটে। শিক্ষার্থী যখন তার অর্জিত জ্ঞান নতুন পরিবেশে ব্যবহার করতে পারে, তখন বলা যায় তার শিখন সামর্থ্যের উন্নয়ন হয়েছে । ভাইগটস্কির ZPD এবং Scaffolding পরস্পর সংগতিপূর্ণ। ZPD এ শিক্ষার্থীর সামর্থ্য উন্নয়ন স্তরে নিয়ে যাওয়ার জন্য সহায়তা প্রদানের কথা বলা হয়েছে এবং Scaffolding এ বলা হয় সহায়তা প্রদানের মাধ্যমে শিক্ষার্থীকে নির্দিষ্ট বিষয়ে কোন কৌশল অবলম্বনে সামর্থ্য উন্নয়ন স্তরে নিয়ে গেলে তার মধ্যে একটি ধারণা গঠন হয় এবং এক পর্যায়ে সহায়তা না করলেও এই ধারণা বজায় থাকে।

সহজভাবে বলা যায়, শিক্ষক প্রথমত শিক্ষার্থীদেরকে তাদের শিখন সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে সহায়তা করবেন। ফলে শিক্ষার্থীদের সমস্যা সমাধান দক্ষতা বাড়বে। এক পর্যায়ে শিক্ষক আর সহায়তা করবেন না। কিন্তু শিক্ষার্থীদের দক্ষতা এমন হবে যে নিজেরাই নিজেদের সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

শিক্ষার্থীরা কিভাবে শিখে বা ধারণা গঠন করে (How students learn or form concepts)

ভাইগট্স্কি শিক্ষার্থীর শেখার বা ধারণা গঠনের ৪টি স্তর সনাক্ত করেছেন। নিচে স্তরগুলো ব্যাখ্যা করা হলো :

স্তূপ (Heap)

অনেক গুলো বস্তু না সাজিয়ে এলোমেলো ভাবে একত্রে জড়ো করে রাখলে তাকে বলা হয় স্তূপ। এই স্তর হল শিক্ষার্থীর চিন্তা করার প্রাথমিক স্তর। এই স্তরে কতক বিচ্ছিন্ন ধারণা (Idea)/চিন্তা/ভাব দলভুক্ত হয়। কোন ঘটনা বা বিষয়বস্তুর প্রতিচ্ছবি হিসেবে ধারণার এই দলসমূহ মনে স্থান করে নেয়। নিরপেক্ষভাবে যে সকল ধারণার কিছু সাধারণ বৈশিষ্ট্য বিদ্যমান সে সকল ধারণা একত্রিত হয়। গাণিতিক ক্ষেত্রে এই ধারণা একটি চিহ্নের সাথে অন্য চিহ্নকে সংশ্লিষ্ট করে। এই স্তর complex স্তরে যাওয়ার পথ তৈরি করে।

ভাবজট (Complex)

ধারণা গঠনের একটি গুরুত্বপূর্ণ স্তর এটি। এ স্তরে শব্দ ও প্রতীক ব্যবহারের মাধ্যমে দলগুলোর মধ্যে সংযোগ স্থাপন হয়। শিক্ষার্থী বিমূর্ত বিষয় চিন্তা করতে শেখে এবং ধারণাগুলোকে নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের প্রেক্ষিতে দলভুক্ত করে। এই স্তরে শিক্ষার্থী logic বা যুক্তি ব্যবহার করে না বরং অভিজ্ঞতার আলোকে এক বা একাধিক ধারণা সংযোগ করে। শিক্ষার্থী, বিষয়বস্তু, কাজ ও সমাজ এর বিভিন্নতা এই স্তরের ভাবনায় প্রভাব ফেলে।

অনুধারণা (Pseudoconcept)

ভাইগট্স্কির মতে কোন বিষয়বস্তু সম্পর্কে পরিপূর্ণ ধারণা গঠনের পূর্বে একটি অস্পষ্ট ধারণা গঠিত হয়। এই অস্পষ্ট ধারণাকে তিনি বলেছেন pseudoconcept; ভাবজটের পরে ও পরিপূর্ণ ধারণা গঠনের পূর্বে অনুধারণা স্তরের অবস্থান। অনুধারণা ব্যবহারের দিক থেকে ধারণার মতো হলেও প্রকৃতিগতভাবে ভাবজটের ন্যায়। শিক্ষার্থী তার কর্মে ও যোগাযোগে অনুধারণা ব্যবহার করতে পারে। অনুধারণা ব্যক্তি ও সমাজের মধ্যে সংযোগ সাধন করে। অনুধারণা শিক্ষার্থীদেরকে বড়দের সাথে কার্যকর যোগাযোগ করতে সহায়তা করে। এই যোগাযোগ আন্তমানসিক ক্রিয়াকে অন্তমানসিক ধারণায় রূপান্তর করে। কাজেই অনুধারণা শিক্ষার্থীর প্রকৃত ধারণা উন্নয়নের জন্য একটি গুরুত্বপূর্ণ পর্যায়। অনুধারণা স্তরে শিক্ষার্থীরা গাণিতিক কোন বিষয় পুরোপুরি না বুঝেও এলগরিদম, সংজ্ঞা, তত্ত্ব, গাণিতিক সমস্যা সমাধান ইত্যাদি ক্ষেত্রে গাণিতিক চিহ্ন কার্যকরভাবে ব্যবহার করতে সমর্থ হয়। যেমন:

- মরগ্যানের সূত্রটি সম্পর্কে ভাল ধারণা না নিয়েও প্রতীক ও চিহ্ন ব্যবহার করে সূত্রটি প্রমাণ করতে পারে।
- একটি সূত্র সম্পর্কে পরিপূর্ণ ধারণা অর্জন না করেই সমস্যা সমাধানে সূত্রটি প্রয়োগ করতে পারে।

শিক্ষার্থী কিভাবে গাণিতিক চিহ্ন ব্যবহারের মাধ্যমে গাণিতিক ধারণা গঠন করে তা বোঝার জন্য অনুধারণা প্রয়োজন।

ধারণা (Cocept)

এ স্তরে ধারণা গঠিত হয়। চিন্তা বা ভাবের বিভিন্ন অংশ যখন যুক্তিনির্ভর ও বাস্তব হয় তখনই ধারণা গঠিত হয়। এ স্তরে শিক্ষার্থী একটি সূত্র দ্বারা কি বোঝায়, সূত্রটি কিভাবে প্রতিষ্ঠিত হলো, কোন্ কোন্ স্থানে প্রয়োগ করা যায়, এটিকে অন্য রূপে পরিবর্তন করা যায় কিনা ইত্যাদি সম্পর্কে পরিপূর্ণ জ্ঞান রাখে।

৩.৬ গণিত শিখনে কৌশল(একক কাজ, জোড়ায় কাজ, দলীয় কাজ, ব্রেইন স্টর্মিং, সিমুলেশন, জিগ্‌স ইত্যাদি) ও শ্রেণিতে প্রশ্নকরণ (উদ্দেশ্য, প্রয়োজনীয়তা, প্রকারভেদ, উপায় ও কৌশল)

একক কাজ (Individual Work)

শিক্ষক শিক্ষার্থীকে একাকী করার জন্য যে সকল কাজ দিয়ে থাকেন তাই একক কাজ। শ্রেণিতে একাকী শিক্ষক প্রদত্ত প্রশ্নের উত্তর তৈরি করা অথবা সমস্যা সমাধান করা, বিজ্ঞানাগারে প্রত্যেক শিক্ষার্থীর ভিন্ন ভিন্ন যন্ত্রপাতি ব্যবহার করে ব্যবহারিক কাজ করা ইত্যাদি একক কাজের উদাহরণ।

একক কাজের বৈশিষ্ট্য

- শিক্ষার্থী এককভাবে কাজ/সমস্যা সমাধান করে।
- সমস্যাটি শ্রেণির সকল শিক্ষার্থী/বেশিরভাগ শিক্ষার্থী সমাধান করতে পারে।
- কাজটি/সমস্যা সমাধান করার জন্য শিক্ষার্থী তার সমস্ত চিন্তা ও সামর্থ্য দিয়ে চেষ্টা করে।
- কাজের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর জ্ঞান, দক্ষতা ও ব্যাক্তিত্বের প্রকাশ ঘটে।
- শিক্ষার্থীরা মনোযোগী থাকে এবং শ্রেণি শৃঙ্খলা বজায় থাকে।

একক কাজের প্রয়োগ কৌশল

- শিক্ষক নির্দিষ্ট বিষয় ব্যাখ্যা বিশ্লেষণ এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীর মধ্যে ধারণা গঠন করবেন।
- প্রয়োজনীয় নির্দেশনা সহ একটি কাজ/সমস্যা শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর সামনে তুলে ধরবেন।
- শ্রেণির সকল শিক্ষার্থী কাজটি করছে কিনা শিক্ষক তা তদারক করবেন।
- কাজ মূল্যায়নের ব্যবস্থা গ্রহণ করবেন।

একক কাজের সুবিধা

- শিক্ষার্থীর চিন্তাশক্তির বিকাশ ঘটে এবং ব্যাক্তিগত দক্ষতার উন্নয়ন ঘটে।
- শিক্ষার্থী স্বাধীনভাবে কাজ করার সুযোগ পায়।
- শিক্ষার্থী আত্মনির্ভরশীল হয়।
- দুর্বল শিক্ষার্থীকে সহজে আলাদা করা যায়।

একক কাজের অসুবিধা

- অনেক বেশি শিক্ষার্থীর শ্রেণিতে সকলকে মূল্যায়ন করা যায় না বিধায় কৌশলটি প্রয়োগে সুফল পাওয়া যায় না।
- দুর্বল শিক্ষার্থীর উন্নয়ন ঘটে না।
- যে সকল শিক্ষার্থী দ্রুত কাজ করে তাদের মধ্যে ভাসা ভাসা কাজ করার প্রবণতা দেখা যায়।
- শ্রেণি তদারকি করা শিক্ষকের জন্য কঠিন হয়।

জোড়ায় কাজ (Pair Work)

দুইজন বা এক জোড়া শিক্ষার্থীর মিলিত প্রচেষ্টায় সমস্যা সমাধান বা কোন কাজ করাকে জোড়ায় কাজ বলে।

জোড়ায় কাজের বৈশিষ্ট্য

- প্রত্যেক জোড়ায় একজন সবল ও একজন দুর্বল শিক্ষার্থী থাকে।
- দুইজন শিক্ষার্থী পরস্পর জ্ঞান ও দক্ষতা শেয়ার করে।
- অপরের সাথে কাজ করার মানসিকতা তৈরি হয়।
- জোড়ায় কাজ করা শিক্ষার্থীদের মধ্যে পরস্পর বন্ধুত্বপূর্ণ সম্পর্ক তৈরি হয়।
- দুর্বল শিক্ষার্থী অপেক্ষাকৃত সবল শিক্ষার্থীর কাছ থেকে বেশি উপকৃত হয়।

জোড়ায় কাজের প্রয়োগ কৌশল

- সবল ও দুর্বল শিক্ষার্থীর সমন্বয়ে জোড়া গঠন করতে হবে।
- দুইজন শিক্ষার্থী মিলে করতে পারবে এমন কাজ/সমস্যা চিহ্নিত করতে হবে। দীর্ঘ উত্তর কিংবা সমাধান করতে অনেক সময় প্রয়োজন হয় এমন সমস্যা চিহ্নিত করা যাবে না।
- বোর্ডে লিখে/চার্টের মাধ্যমে/ডিজিটাল উপকরণের সাহায্যে কাজ/সমস্যা শিক্ষার্থীর সামনে তুলে ধরতে হবে। সময় নির্ধারণ করে দিতে হবে।
- কাজ পর্যবেক্ষণ ও শ্রেণি তদারকি করতে হবে।
- কাজ উপস্থাপনের ব্যবস্থা করতে হবে।
- কাজের ভুল-ত্রুটি সংশোধন এবং মূল্যায়ন করতে হবে।

জোড়ায় কাজের সুবিধা

- দুইজনে কাজ করার ফলে শিক্ষার্থীদের মনোবল বৃদ্ধি পায়।
- শিক্ষার্থীদের মধ্যে সহযোগিতার মনোভাব গড়ে ওঠে। সমস্যা সমাধান সহজ হয়।
- দুর্বল শিক্ষার্থীদের শিখন উন্নয়ন ঘটে। সবল শিক্ষার্থীদের দক্ষতা বৃদ্ধি পায়।
- শ্রেণি শৃঙ্খলা বজায় থাকে।
- শিক্ষার্থীরা শিখনে আনন্দ পায় এবং শিখন স্থায়ী হয়।

জোড়ায় কাজের অসুবিধা

- মেধাবী শিক্ষার্থীরা দুর্বল শিক্ষার্থীদের সাথে বসতে চায়না। ফলে জোড়া গঠনে সমস্যা হয়।
- সবাইকে উপস্থাপন করার সুযোগ দেয়া যায় না।
- শ্রেণি নিয়ন্ত্রণ কঠিন হয়।
- শ্রেণিতে দুর্বল শিক্ষার্থী বেশি হলে এই কৌশল প্রয়োগ করা যায় না।

দলীয় কাজ (Group Work)

অংশগ্রহণমূলক শিখন-শেখানো কার্যক্রমে দলীয় কাজের ভূমিকা গুরুত্বপূর্ণ। দলীয় কাজে কয়েকজন শিক্ষার্থীর সমন্বয়ে দল গঠন করে একটি কাজ/সমস্যা দেয়া হয়, তারা এটি নিয়ে নিজেরা আলোচনা ও মতবিনিময়ের মাধ্যমে কাজ/সমস্যাটি সমাধান করে।

দলীয় কাজের বৈশিষ্ট্য

- সবল ও দুর্বল শিক্ষার্থীর সমন্বয়ে একটি দলে ৪-৬ জন শিক্ষার্থী কাজ করে।
- প্রত্যেক দলে বিষয় ভিত্তিক সুনির্দিষ্ট কাজ/সমস্যা থাকে।
- শিক্ষার্থীরা স্বাধীনভাবে মতামত প্রকাশ করার সুযোগ পায়।
- প্রত্যেক দলে একজন দলনেতা থাকে। দলনেতা কাজের ফলাফল/সমস্যার সমাধান উপস্থাপন করে।

দলীয় কাজের প্রয়োগ কৌশল

- শিক্ষক ৪-৬ জন সবল-দুর্বল শিক্ষার্থীর সমন্বয়ে দল গঠন করবেন। প্রত্যেক দলে একজন দলনেতা থাকবে।
- সময় ও কার্যক্রম সংক্রান্ত নির্দেশনা দিবেন।
- পূর্বে প্রস্তুতকৃত সমস্যা প্রত্যেক দলে বিতরণ করবেন।
- দলীয় কাজ পর্যবেক্ষণ ও মনিটরিং করবেন।
- প্রত্যেক দলের কাজ দলনেতার মাধ্যমে উপস্থাপন করবেন।
- ত্রুটিসমূহ সংশোধন করে দিবেন।

দলীয় কাজের সুবিধা

- শিক্ষার্থীরা আলোচনার মাধ্যমে সমস্যার সঠিক সমাধান করতে পারে।
- পরস্পর মত বিনিময়ের মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা অপেক্ষাকৃত কঠিন সমস্যা সমাধান করতে পারে।
- দুর্বল শিক্ষার্থীরা উপকৃত হয়।
- পারস্পারিক সহযোগিতার মনোভাব বৃদ্ধি পায়।
- নেতৃত্বের গুণাবলি বিকশিত হয়।
- গণতান্ত্রিক মনোভাব জাগ্রত হয়।
- শিক্ষার্থীরা দায়িত্ববান ও আত্মসচেতন হয়।

দলীয় কাজের অসুবিধা

- শ্রেণিকক্ষের আসন ব্যবস্থা অধিকাংশ বিদ্যালয়ে দলীয় কাজের উপযোগী নয়।
- কোন কোন শিক্ষার্থী দলে নীরব ভূমিকা পালন করে।
- নির্দিষ্ট সময়ে সকল দলের উপস্থাপন অনেকাংশে শেষ করা যায় না।
- এই কৌশল প্রয়োগের জন্য শিক্ষকের দক্ষতা থাকা দরকার।

ব্রেইন স্টর্মিং (Brain storming)

শিক্ষণ-শিখন ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীদের সক্রিয় অংশগ্রহণের একটি উৎকৃষ্ট কৌশল হলো Brain Storming বা মাথা খাটানো। এক্ষেত্রে শিক্ষার্থীকে একটি সমস্যা দিয়ে গভীরভাবে চিন্তা করে সমাধানের জন্য উদ্বুদ্ধ করা হয়। শিক্ষার্থী একক বা দলীয় যেভাবেই কাজ করুক না কেন তার চিন্তার প্রকাশ সমস্যা সমাধানে ভূমিকা রাখবে। শিক্ষার্থীর চিন্তা করার এই প্রক্রিয়াকে ব্রেইন স্টর্মিং বা মাথা খাটানো বলে।

ব্রেইন স্টর্মিং কৌশলের বৈশিষ্ট্য

- বিষয় বস্তু নিয়ে প্রত্যেক শিক্ষার্থীকে একাকী গভীরভাবে চিন্তা করতে হয়।
- চিন্তা করে যে ফলাফল আসে তা নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে খাতায় লিখতে হয়।
- শিক্ষার্থীরা পাঠে মনোযোগী ও সক্রিয় থাকে।
- উপস্থাপিত তথ্যে বৈচিত্রতা পরিলক্ষিত হয়।
- পরস্পর মত বিনিময়ের সুযোগ নেই।

ব্রেইন স্টর্মিং কৌশল প্রয়োগের উপায়

- শিক্ষার্থীরা চিন্তা করতে পারে এমন একটি সমস্যা নির্ধারণ করা।
- চিন্তার প্রকাশ লেখার জন্য সময় নির্ধারণ করে দেয়া।
- উপস্থাপনের সুযোগ করে দেয়া।
- মূল্যায়ন এবং সংশোধন ।

ব্রেইন স্টর্মিং কৌশলের সুবিধা

- শিক্ষার্থীর চিন্তাশক্তির বিকাশ ঘটে।
- শিক্ষার্থী নিজস্ব মতামত প্রকাশ করতে পারে।
- শিক্ষার্থীদের অভিজ্ঞতা ও জ্ঞানের গভীরতা শিক্ষক জানতে পারেন এবং সে অনুযায়ী পরবর্তী পদক্ষেপ গ্রহণ করতে পারেন।
- নিজ চিন্তা থেকে শিখে বলে শিখন স্থায়ী হয়।
- শ্রেণির শৃঙ্খলা বজায় থাকে।

ব্রেইন স্টর্মিং কৌশলের অসুবিধা

- বিষয়বস্তু সম্পর্কে শিক্ষার্থীর স্পষ্ট ধারণা না হলে, ভাল ফলাফল আশা করা যায় না।
- দুর্বল মেধার শিক্ষার্থীরা ভাল মতামত দিতে পারে না।
- বেশি সময় প্রয়োজন হয়।
- নির্দিষ্ট বিষয়ের বাইরেও ফলাফল আসতে পারে।

সিমুলেশন (Simulation)

সিমুলেশন একটি কার্যকর শিক্ষণ কৌশল। এটি মূলত ছদ্ম শিক্ষণ কৌশল। অনেক সময় কোন একটি বিষয়বস্তু সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের ধারণা প্রদানের জন্য বাস্তব অবস্থার মাধ্যমে শিক্ষণ-শিখন কার্যক্রম পরিচালনা করা যায় না। এক্ষেত্রে ঐ বাস্তব অবস্থার কাছাকাছি একটি কৃত্রিম পরিবেশ সৃষ্টি করে বিষয়টি সম্বন্ধে প্রকৃত ধারণা দেয়ার চেষ্টা করা হয়। শিক্ষণ শিখনের এই কৌশলকে সিমুলেশন বা ছদ্ম শিক্ষণ বলে।

সিমুলেশন কৌশলের বৈশিষ্ট্য

- শ্রেণিতে বাস্তব অবস্থার আলোকে কৃত্রিম অবস্থা সৃষ্টি করা হয়।
- প্রশিক্ষণার্থীরা একই শ্রেণিতে শিক্ষক, পর্যবেক্ষক ও শিক্ষার্থীর ভূমিকায় কাজ করে।
- সিমুলেশন কৌশল ব্যবহারের সময় শিক্ষক সাহায্যকারী ও উৎসাহকারী হিসেবে দায়িত্ব পালন করেন।
- প্রশিক্ষণরত শিক্ষকদের পেশাগত দক্ষতা বৃদ্ধির ক্ষেত্রে কার্যকর।
- প্রশিক্ষণার্থীরা শিক্ষণের তাত্বিক ও ব্যবহারিক দিকের সমন্বয় সাধনের ক্ষেত্র সৃষ্টি করে।
- পাঠ পরিকল্পনায় বাস্তবতার প্রতিফলন ঘটানোর সুযোগ তৈরি হয়।
- পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশলের উপযোগিতা যাচাই সম্ভব হয়।
- প্রশিক্ষণার্থীদের পাঠদান কার্যক্রমের সকল দিক যাচাই করা যায়।

সিমুলেশন কৌশল ব্যবহারের উপায়

- বাস্তব অবস্থার কাছাকাছি একটি কৃত্রিম পরিবেশ বা অবস্থা সৃষ্টি করা।
- কৃত্রিম পরিবেশকে শ্রেণিকক্ষের মডেল হিসেবে বিবেচনা করা।
- একজন প্রশিক্ষণার্থী শিক্ষকের ভূমিকায় অবতীর্ণ হয়ে পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়ন করে প্রশিক্ষকের অনুমোদন নিয়ে পাঠপরিকল্পনা অনুযায়ী পাঠদান করা।
- ২/৩ জন প্রশিক্ষণার্থী মূল্যায়ন ছক ব্যবহার করে পাঠদান কার্যক্রম পর্যবেক্ষণ ও মূল্যায়ন করা।
- অবশিষ্ট প্রশিক্ষণার্থীরা শিক্ষার্থীর ভূমিকায় শ্রেণি কার্যক্রমে অংশগ্রহণ করবেন।
- পাঠদান শেষে মূল্যায়ন পত্রগুলো একসাথে করে পাঠের দুর্বল ও সবল দিকগুলো চিহ্নিত করে পাঠদান কার্যক্রম উন্নয়ন করা।
- পর্যায়ক্রমে সকলকেই শিক্ষক ও পর্যবেক্ষক রূপে কাজ করার সুযোগ সৃষ্টি করা।

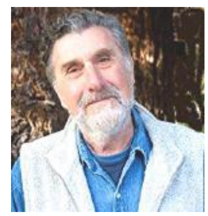
সিমুলেশন কৌশলের সুবিধা

- প্রশিক্ষণার্থীদের ছদ্মশিক্ষণের মাধ্যমে প্রকৃত শিক্ষণের জন্য প্রস্তুত করা যায়।
- প্রশিক্ষণার্থীদের শিক্ষণ জড়তা কেটে যায়।
- সময় ও অর্থের সাশ্রয় হয়।
- প্রশিক্ষণার্থীরা গঠনমূলক সমালোচনার অভিজ্ঞতা অর্জন করে।
- সিমুলেশন কৌশলে সময় বাড়ানো বা কমানো যায়। এতে প্রশিক্ষণার্থীরা উপকৃত হয়।

সিমুলেশন কৌশলের অসুবিধা

- কৃত্রিম পরিবেশে বাস্তবতাকে ফুটিয়ে তোলা কঠিন হয়।
- সহপাঠীদের সাথে প্রশ্নোত্তর বিনিময়ে জড়তা থাকে।
- অনেকে সহপাঠীকে শিক্ষক হিসেবে গুরুত্ব দেন না।
- কৃত্রিমতার অনুশীলনের মাধ্যমে প্রশিক্ষণার্থীদের মধ্যে এক ধরনের আড়ষ্টতা জন্ম নিতে পারে।

জিগ্‌স (Jigsaw)



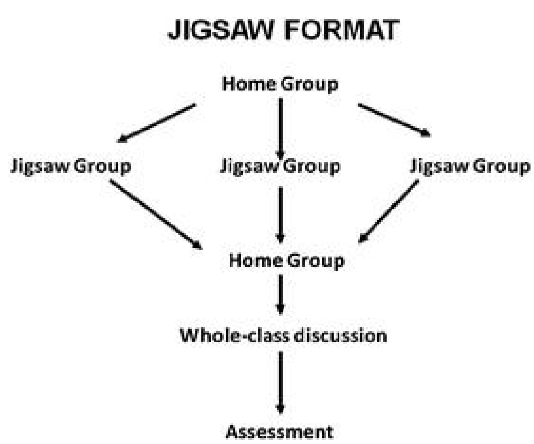
আমেরিকান মনোবিজ্ঞানী Elliot Aronson(জন্ম-১৯৩২) এ কৌশলের উদ্ভাবক। জিগ্‌স কৌশলটি সহযোগিতামূলক শিখন কৌশল হিসেবে খ্যাত। এই কৌশলটি কার্যকরী দল পুনর্বিন্যাস হিসেবেও পরিচিত।

জিগ্‌স কৌশল প্রয়োগের উপায়

- একটি বিষয়বস্তু নির্বাচন করে ৪/৫ টি অংশে ভাগ করতে হবে।
- শ্রেণির শিক্ষার্থীদের কয়েকটি সমান সমান দলে বিভক্ত করবেন। দলের সংখ্যা এবং দলের সদস্যসংখ্যা সমান হবে।
- প্রত্যেক দলে একটি করে বিভাজিত বিষয়বস্তু দিতে হবে।
- প্রত্যেক দলের সদস্যদের একই রকম পরিচিতি বা নাম থাকবে।
- প্রতিটি দল তাদের নির্ধারিত বিষয়বস্তু ভালভাবে পড়বে এবং শিক্ষকের নির্দেশনা অনুযায়ী ফলাফল তৈরি করবে। বিষয়বস্তু বিশ্লেষণ, ফলাফল সম্পর্কে প্রত্যেক শিক্ষার্থীকে পারদর্শী হতে হবে।
- এখন নতুন করে আবার দল গঠন করতে হবে। একই পরিচিতি বা নাম বিশিষ্ট শিক্ষার্থীরা একই দলে থাকবে। অর্থাৎ পূর্বে গঠিত প্রত্যেক দলের একজন করে শিক্ষার্থী নতুন দলে থাকবে।
- নতুন দলে অংশগ্রহণকারীরা প্রত্যেকে তাদের পূর্বের দলে আলোচিত বিষয়বস্তু অন্যদের কাছে ব্যাখ্যা করবে। এইভাবে শ্রেণির সকল শিক্ষার্থী সমস্ত বিষয় সম্পর্কে ধারণা অর্জন করতে সক্ষম হবে।

জিগ্‌স কৌশলের সুবিধা

- একটি বৃহদাকার বিষয়বস্তু থেকে শিক্ষার্থীরা আলোচনার ভিত্তিতে সহজেই নিজেদের ধারণা গঠনে সক্ষম হয়।
- শিক্ষার্থীরা শ্রেণিতে সক্রিয় থাকে।
- দল বদলে শিক্ষার্থীরা আনন্দ পায় এবং সহযোগিতামূলক দৃষ্টিভঙ্গির উন্নয়ন ঘটে।
- দুর্বল শিক্ষার্থীদের উন্নয়ন ঘটে।



জিগ্‌স কৌশলের অসুবিধা

- অধিক সংখ্যক শিক্ষার্থীর শ্রেণিতে এই কৌশল প্রয়োগ করা কষ্টকর।
- শ্রেণিতে যথেষ্ট পরিসরে জায়গা না থাকলে এই কৌশল প্রয়োগ করা যায় না।
- এই কৌশল প্রয়োগে যথেষ্ট সময়ের প্রয়োজন হয়।

শ্রেণিতে প্রশ্নকরণ

শ্রেণিতে শিক্ষক কোন চিহ্ন, প্রতীক, সংকেত বা বাক্যের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর কাছে কিছু জানতে চান । এই কিছু জানতে চাওয়াকেই শ্রেণিতে প্রশ্নকরণ বলে।

শ্রেণিতে প্রশ্নকরণের উদ্দেশ্য

শ্রেণিতে বিভিন্ন কারণে শিক্ষক শিক্ষার্থীদের প্রশ্ন করে থাকেন। গুরুত্বপূর্ণ কিছু কারণ উল্লেখ করা হলো-

- শিক্ষার্থীর বর্তমান পাঠ গ্রহণ করার উপযোগী পূর্বজ্ঞান আছে কিনা তা যাচাই করা
- শিক্ষার্থী শিক্ষকের পাঠ উপস্থাপন শুনছে কিনা তা যাচাই করা
- শিক্ষার্থী পাঠের প্রতি মনোযোগী আছে কিনা তা যাচাই করা
- শিক্ষার্থীর শিখনের প্রতি আগ্রহ বাড়ানো
- শিক্ষার্থীর জ্ঞান ও দক্ষতার স্তর চিহ্নিত করা
- দুর্বল শিক্ষার্থী চিহ্নিত করে নিরাময়ের ব্যবস্থা গ্রহণ
- শিক্ষার্থীর শিখন অর্জন যাচাই করা।

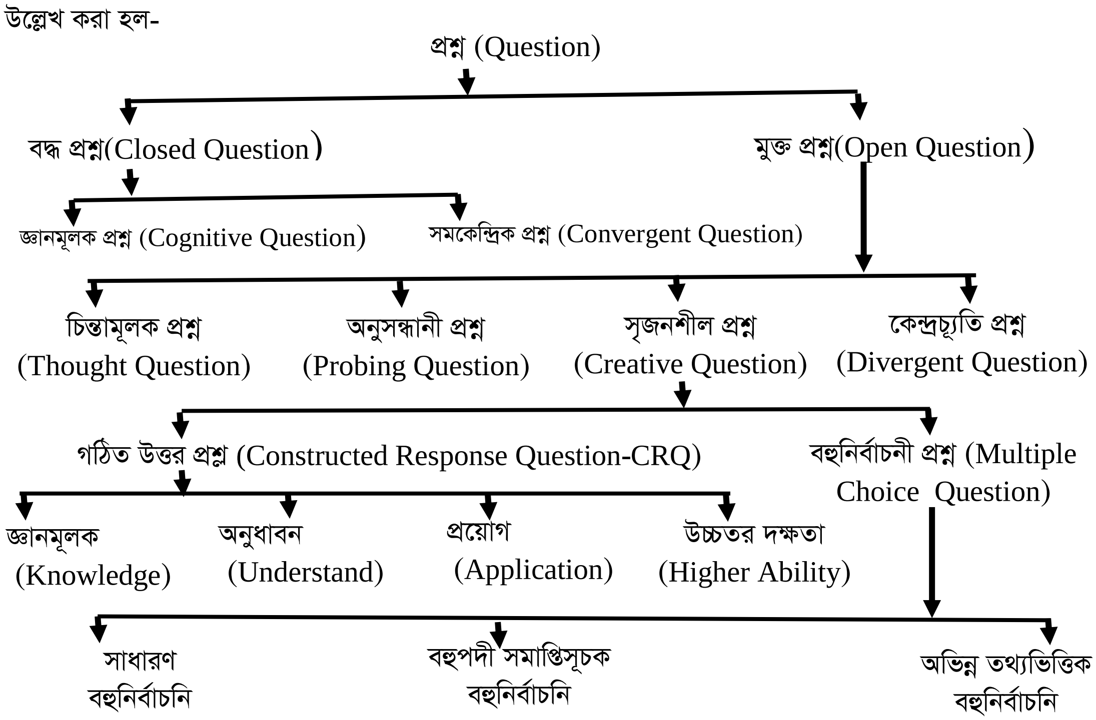
শ্রেণিতে প্রশ্নকরণের প্রয়োজনীয়তা

শ্রেণিতে শিখন-শেখানো কার্যক্রম চলাকালীন শিক্ষার্থীরা তাদের অজানা বিষয়গুলো জানার জন্য শিক্ষকের কাছে প্রশ্ন করেন। আবার শিক্ষক বিষয়বস্তু সম্পর্কে শিক্ষার্থীরা কতটুকু ধারণা অর্জন করলো তা জানার জন্য লিখিত বা মৌখিক প্রশ্ন করেন। এই প্রশ্ন বিনিময়ের মধ্য দিয়া শিক্ষার্থীর বিষয় সম্পর্কে পরিপূর্ণ ধারণা বিকশিত হয়।

শ্রেণিতে কিছু শিক্ষার্থী থাকে যারা কখনই কোন প্রশ্ন করে না। কিন্তু অন্যের প্রশ্নোত্তরের মধ্য দিয়া তাদের অজানা প্রশ্নগুলোর উত্তর জানা হয়ে যায়। শিক্ষার্থীরা প্রশ্ন করলে শিক্ষকের বিষয়বস্তুর ব্যাখ্যা ও বিশ্লেষণ গভীরতর হয়। ফলে শিক্ষার্থীরা উপকৃত হয়। শিক্ষার্থীর শিখন অর্জন যাচাই করার জন্য শিক্ষক প্রশ্নের উত্তর আদায়ের মাধ্যমে কখনও নিজে তৃপ্ত হন, কখনও পরবর্তী পাঠদান কেমন হবে সে বিষয়ে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করতে পারেন। সর্বোপরি শ্রেণিতে প্রশ্ন করণের মাধ্যমে শিক্ষক-শিক্ষার্থী উভয়েই উপকৃত হয়। কাজেই বলা যায় শ্রেণিতে প্রশ্নকরণের গুরুত্ব অপরিসীম।

প্রশ্নের প্রকারভেদ (Classification of Question)

শিক্ষাবিদগণ বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন ভাবে প্রশ্নের শ্রেণিবিভাগ করেছেন। বর্তমান প্রেক্ষাপটে প্রশ্নের আধুনিক শ্রেণিবিভাগ নিচের ছকে উল্লেখ করা হল-



শ্রেণিতে প্রশ্নকরণের উপায় ও কৌশল

শ্রেণিতে শিক্ষণ-শিখন কার্যাবলি চলাকালীন শিক্ষককে এমনভাবে প্রশ্ন করতে হবে যেন শিক্ষার্থীর মনে উদ্দীপনা জাগ্রত হয়। শিক্ষার্থী প্রশ্নের উত্তর প্রদানের জন্য আগ্রহী হয়। এজন্য শিক্ষককে কিছু উপায় ও কৌশল অনুসরণ করতে হয়। নিচে কিছু গুরুত্বপূর্ণ উপায় ও কৌশল উল্লেখ করা হলো-

- শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর উদ্দেশ্যে প্রশ্ন করতে হবে।
- সহজ, সরল ও শিক্ষার্থীর বোধগম্য ভাষায় সংক্ষিপ্তাকারে পাঠ্য বিষয় সংশ্লিষ্ট প্রশ্ন করতে হবে। পাঠের গুরুত্বপূর্ণ অংশকে প্রাধান্য দিয়ে প্রশ্ন করতে হবে।
- প্রশ্ন এমন হবে যেন শিক্ষার্থীরা উত্তর প্রদানে উৎসাহী হয়। শিক্ষার্থীদের উৎসাহ বাড়ানোর জন্য শুদ্ধ উত্তরকারিকে প্রশংসা করতে হবে। ভুল উত্তরের জন্য ইতিবাচক মনোভাব পোষণ করে শোধবাতে হবে।
- শিক্ষার্থীর মুখস্থ করার প্রবণতা হ্রাস পায় এবং জ্ঞান, অনুধাবন ও উচ্চতর চিন্তন দক্ষতা বৃদ্ধি পায় এমন প্রশ্ন করতে হবে। সরাসরি বই থেকে উত্তর পাওয়া যায় এমন প্রশ্ন পরিহার করা শ্রেয়ঃ।
- শিক্ষার্থীর বয়স, মেধা ও সামর্থ্যের প্রতি খেয়াল রেখে প্রশ্ন করতে হবে।
- বিষয়বস্তুর বিশ্লেষণ হয় এমন প্রশ্ন করতে হবে।
- প্রশ্নে অবান্তর শব্দের ব্যবহার কিংবা মাত্রাতিরিক্ত শব্দের ব্যবহার করা যাবে না।

৩.৭ পাঠদানের পর্যায়: প্রাক-সক্রিয় দশা (পরিকল্পনা পর্যায়), সক্রিয় দশা (পাঠদান পর্যায়), পাঠ পরবর্তী দশা (মূল্যায়ন পর্যায়)

শিক্ষার উদ্দেশ্য হলো শিক্ষার্থীর পরিপূর্ণ বা সর্বাঙ্গীন বিকাশ সাধনে সহায়তা করা। শিক্ষার্থীর সর্বাঙ্গীন বিকাশ সাধনে শিক্ষকের ভূমিকা অপরিসীম। শিক্ষা প্রক্রিয়ার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ হলো শ্রেণি পাঠদান। শ্রেণি পাঠদানের মাধ্যমে শিক্ষক শিক্ষার্থীর বিকাশ সাধনে সহায়তা করেন। পাঠদানকে তিনটি পর্যায়ে ভাগ করা হয়েছে। নিচে পর্যায়গুলো বর্ণনা করা হলো-

প্রাক-সক্রিয় দশা (পরিকল্পনা পর্যায়)

এই পর্যায়কে শিক্ষকের প্রস্তুতির পর্যায় বলা হয়। পূর্ব প্রস্তুতি বা পরিকল্পনা ছাড়া কোন কাজই সফলতার সাথে করা যায়না। একজন শিক্ষকও প্রস্তুতি ছাড়া সফলতার সঙ্গে পাঠদান করতে পারেন না । সফলতার সাথে পাঠদানের জন্য প্রয়োজন শিক্ষকের পূর্ব প্রস্তুতি বা পরিকল্পনা প্রণয়ন। শ্রেণিতে পাঠদানের জন্য যাওয়ার যথেষ্ট আগেই একজন শিক্ষককে সংশ্লিষ্ট পাঠের বিষয়বস্তুর ওপর পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়নের মাধ্যমে শ্রেণিতে শিখন-শেখানো কার্যক্রম পরিচালনা করার জন্য প্রস্তুতি নিতে হবে । নির্দিষ্ট বিষয়ে পাঠপরিকল্পনা তৈরির জন্য শিক্ষকের শিক্ষাক্রমের ধারণা, শিক্ষার্থীর মেধা, চাহিদা ইত্যাদি সম্পর্কে যথেষ্ট ধারণা, শিখন-শেখানো পদ্ধতি ও কৌশল সম্পর্কে প্রয়োজনীয় জ্ঞান এবং প্রায়োগিক দক্ষতা, শিক্ষা উপকরণের উৎস, শিক্ষা উপকরণ তৈরি ও ব্যবহার কৌশল ইত্যাদির জ্ঞান থাকতে হবে।

পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়নের মাধ্যমে একজন শিক্ষক নির্ধারিত সময়ে নির্ধারিত বিষয়বস্তুকে ধারাবাহিকভাবে যুক্তিসম্মত উপায়ে শ্রেণিতে উপস্থাপন করতে পারেন। পাঠপরিকল্পনা ছাড়া শিক্ষক যেমন সফলতার সঙ্গে পাঠদান করতে পারেন না, তেমনি শিক্ষার্থীরাও এলোমেলোভাবে পাঠ গ্রহণে অংশগ্রহণ করে। পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়ন করে শ্রেণি পাঠদানে সফল হওয়ার জন্য শিক্ষককে কতগুলো বিশেষ দিক বিবেচনা করতে হবে। যেমন-

- **পাঠের শিরোনাম ও শিখনফল নির্বাচন**

  শিক্ষক প্রথমে বিষয়বস্তু ভিত্তিক পাঠ শিরোনাম ও পাঠের শিখনফল নির্ধারণ করবেন। শিখনফল সর্বদা ক্রিয়াবাচক বাক্যের মাধ্যমে লিখতে হবে। কারিকুলাম ভিত্তিক শিখনফল অনুসরণ করে শিক্ষক নিজে তার পাঠের শিখনফল লিখবেন।

- **বিষয়বস্তুর বিভাজন**

  শিখনফলকে কেন্দ্র করে প্রয়োজনে বিষয়বস্তুকে ২/৩ টি অংশে বিভাজন করে নিতে হবে। প্রতিটি অংশ শেখানোর জন্য সুনির্দিষ্ট কাজ নির্বাচন করতে হবে।

- **সময় ব্যবস্থাপনা**

  পাঠদানের জন্য মোট বরাদ্দকৃত সময়কে বিষয়বস্তুর পরিসর ও পাঠপরিকল্পনার বিভিন্ন ধাপ বাস্তবায়ন বিবেচনায় বিভাজন করে নিতে হবে। পাঠদানে নির্ধারিত সময়সীমা অনুসরণ করতে হবে।

- ❖ **পদ্ধতি ও কৌশল নির্বাচন**

  প্রথমে পাঠ্যাংশটি ভালভাবে পড়তে হবে। কীভাবে পাঠের সর্বোচ্চ শিখনফল অর্জন করা যায় তা চিন্তা করে পদ্ধতি ও কৌশলের তালিকা থেকে সংশ্লিষ্ট বিষয়ের উপযোগী এবং নির্ধারিত পাঠের জন্য উপযুক্ত পদ্ধতি ও কৌশল নির্বাচন করতে হবে। সকল পদ্ধতি যে কোন বিষয় পাঠদানের উপযোগী নয়; আবার যে কোন স্থানে প্রয়োগ করা যায়না। কাজেই পদ্ধতি ও কৌশল নির্বাচনে শিক্ষককে তার শ্রেণির পরিবেশ, বিষয়বস্তু ও শিক্ষার্থীদের বিবেচনায় রাখতে হবে। পাঠদান পদ্ধতি ও কৌশল হবে অংশগ্রহণমূলক, শিক্ষার্থী কেন্দ্রিক এবং আনন্দদায়ক। নির্বাচিত পদ্ধতি ও কৌশল প্রয়োগে শিক্ষকের দক্ষতা থাকা অত্যাবশ্যক।

- ❖ **উপকরণ নির্বাচন ও সংগ্রহ**

  বিষয়বস্তুর ধারণা স্পষ্ট করা এবং শিখন স্থায়ী করার উপযোগী বিষয়বস্তু সংশ্লিষ্ট উপকরণ নির্বাচন করতে হবে। কঠিন ও জটিল বিষয় সহজ ও বোধগম্য করে তোলা যায় এমন উপকরণ নির্বাচন করতে হবে। শিক্ষক নিজে অথবা শিক্ষার্থীর মাধ্যমে এই উপকরণ সংগ্রহ করবেন।

- ❖ **শিক্ষার্থীদের পাঠে সক্রিয় রাখার জন্য কাজ নির্বাচন**

  পাঠের সূচনা থেকে মূল্যায়ন পর্যন্ত প্রতিটি ধাপে শিক্ষার্থীদের সক্রিয় অংশগ্রহণ নিশ্চিত করার লক্ষ্যে প্রয়োজনীয় কাজ ও প্রশ্ন নির্বাচন করতে হবে। পাঠে শিক্ষার্থীর জন্য সৃজনশীল এবং উদ্ভাবনী মূলক কাজ থাকবে।

- ❖ **মূল্যায়ন**

  পাঠ শেষে মূল্যায়ন এর জন্য কৌশল ও প্রশ্ন নির্ধারণ করতে হবে। মূল্যায়নের প্রশ্ন হবে শিখনফল কেন্দ্রিক।

কাজেই পরিকল্পিত পাঠদান নিশ্চিত করতে হলে শিক্ষককে অবশ্যই সংশ্লিষ্ট বিষয়ে বিস্তারিত ও সুনির্দিষ্ট পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়ন করতে হবে এবং যথাযথভাবে শ্রেণিতে প্রয়োগ করতে হবে।

সক্রিয় দশা(পাঠদান পর্যায়)

প্রাক-সক্রিয় দশায় প্রণীত পাঠ পরিকল্পনার বাস্তবায়নই হলো সক্রিয় দশা বা পাঠদান পর্যায়। এই পর্যায়ে শিক্ষক-শিক্ষার্থী সক্রিয় থেকে শিখন-শেখানো কার্যক্রমকে সফল করার প্রচেষ্টায় লিপ্ত হন। পাঠদান পর্যায়ে শিক্ষকের করণীয় সমূহ নিচে ব্যাখ্যা করা হলো-

পাঠ সূচনা/প্রস্তুতি

- পাঠ পরিকল্পনা ও প্রয়োজনীয় শিক্ষা উপকরণসহ শিক্ষক শ্রেণিতে প্রবেশ করবেন।
- শিক্ষার্থীদের সাথে শুভেচ্ছা বিনিময় করবেন।
- শ্রেণির সার্বিক অবস্থা অবলোকন করে প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা গ্রহণ করবেন।
- শ্রেণি নেতার সহায়তায় বাড়ির কাজ আদায় করবেন।
- গল্প/গান/কৌতুক/ছড়া ইত্যাদি পরিবেশনের (শিক্ষার্থী/শিক্ষক) মাধ্যমে শ্রেণিতে আনন্দঘন পরিবেশ সৃষ্টি করবেন।
- শ্রেণির সকলের উদ্দেশ্যে আজকের পাঠের সাথে সংশ্লিষ্ট কিছু প্রশ্ন করবেন। প্রশ্ন করার জন্য যেকোন উপকরণ, বোর্ড ব্যবহার করা যেতে পারে।
- প্রশ্নের উত্তর আদায়, যাচাই ও সংশোধনের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর পূর্বজ্ঞান যাচাই করে পাঠ ঘোষণা করে বোর্ডে পাঠ শিরোনাম লিখে দিবেন এবং শিক্ষার্থীদেরকে নিজ নিজ খাতায় লিখে নিতে বলবেন।

শিখন-শেখানো কার্যাবলি

পাঠ উপস্থাপন/ বিষয় বস্তুর ধারণা গঠন

এই পর্যায়ে শিক্ষক সংক্ষিপ্ত আলোচনা, পাঠের বিষয়বস্তু সংশ্লিষ্ট উপকরণ, বোর্ড ইত্যাদি ব্যবহার করে শিক্ষার্থীদের বিষয়বস্তু সম্পর্কে ধারণা স্পষ্ট করবেন।

আলোচনা বা পাঠ বিশ্লেষণ

- শ্রেণিতে শিক্ষক আলোচনায় শিক্ষার্থীর স্বতঃস্ফূর্ত অংশগ্রহণের পরিবেশ সৃষ্টি করবেন।
- আলোচনার প্রশ্ন এমন হবে যেন শিক্ষার্থীর মধ্যে প্রেষণা সৃষ্টি হয়।
- শিক্ষার্থীর প্রশ্নসমূহ গুরুত্ব সহকারে বিবেচনা করতে হবে।
- শিক্ষার্থী ভুল উত্তর দিলে তার প্রতি ইতিবাচক দৃষ্টিভঙ্গি পোষণ করে উত্তর সংশোধনের মাধ্যমে তাকে উত্তর প্রদানে আরও উৎসাহ দিতে হবে।
- আলোচনার মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের অজানা বিষয়গুলো সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা দিতে হবে।

উপকরণ থেকে শেখানো

- বিষয় সংশ্লিষ্ট উপকরণ, বোর্ড ব্যবহার ইত্যাদি কাজে সমভাবে শিক্ষক-শিক্ষার্থীর সক্রিয় অংশগ্রহণ থাকতে হবে।
- উপকরণ প্রদর্শনে শিক্ষক সহায়তাকারী হিসেবে প্রশ্ন করবেন। প্রশ্নের উত্তর প্রদানের মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা শিখবে।
- সর্বদা আকর্ষণীয় উপকরণ ব্যবহার করতে হবে।
- উপকরণ পাঠের যথোপযুক্ত স্থানে ব্যবহার করতে হবে।
- বাস্তব উপকরণ শিক্ষার্থীকে স্পর্শ করার সুযোগ দিতে হবে।
- শিক্ষক উপকরণ থেকে শিক্ষার্থীর শিখন নিশ্চিত করবেন।
- বোর্ডের যথোপযুক্ত ব্যবহার নিশ্চিত হচ্ছে কিনা শিক্ষক তা পর্যবেক্ষণ করে প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা নিবেন।
- সর্বোপরি শিক্ষক শ্রেণি শৃঙ্খলা ও শিক্ষার্থীর শিখনের প্রতি তীক্ষ্ণ দৃষ্টি রাখবেন।

পদ্ধতি ও কৌশল এর প্রয়োগ

- শিক্ষক শ্রেণিতে সংশ্লিষ্ট বিষয়ের উপযোগী এবং নির্ধারিত পাঠের জন্য উপযুক্ত পদ্ধতি ও কৌশল প্রয়োগ করবেন।
- মুখস্থ বিদ্যা পরিহার করে শিক্ষার্থীদের সক্রিয় অংশগ্রহণের মাধ্যমে শিখনে উদ্বুদ্ধ করতে হবে।
- শিক্ষার্থীর অনুসন্ধিৎস্যা, স্বাধীন চিন্তাশক্তি, বুদ্ধিমত্তা ও বিচার বিশ্লেষণ ক্ষমতা বিকাশের উপযোগী কাজ দিতে হবে।
- শিক্ষক শ্রেণিকক্ষে কর্মমুখর পরিবেশ সৃষ্টি করবেন।
- শিক্ষার্থীদের মনোযোগী ও প্রাণবন্ত থাকার পরিবেশ সৃষ্টি করতে হবে।
- শিক্ষার্থীদের পারস্পরিক সহযোগিতার মাধ্যমে শিখনের ক্ষেত্র তৈরি করতে হবে।
- শিক্ষার্থীদের শিখনে শিক্ষক প্রয়োজনে সহযোগিতা করবেন।
- শিক্ষার্থীদের কাজ উপস্থাপন করার সুযোগ করে দিবেন এবং পর্যালোচনা করবেন।
- মূল্যায়ন ও ভুল-ত্রুটি সংশোধন করে দিবেন।

পাঠ পরবর্তী দশা(মূল্যায়ন পর্যায়)

- এই পর্যায়ে শিক্ষক ছোট ছোট প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের শিখন যাচাই করবেন।
- প্রশ্ন হবে সংক্ষিপ্ত এবং পাঠের উদ্দেশ্য কেন্দ্রিক।
- প্রশ্নোত্তরে মূল্যায়নের মাধ্যমে যে সকল বিষয়ে ত্রুটি বা দুর্বলতা ধরা পড়বে, সে সকল বিষয় পুনরালোচনা করবেন।
- শিক্ষার্থীর সৃজনশীলতা বিকাশে সহায়ক হয় এমন বাড়ির কাজ দিবেন।
- ধন্যবাদ জ্ঞাপন করে শ্রেণিকক্ষ ত্যাগ করবেন।
- শ্রেণিকক্ষ ত্যাগের পর শিক্ষক আজকের পাঠের সবল ও দুর্বল দিকসমূহ চিহ্নিত করবেন।
- শিক্ষক পাঠের সবল দিকসমূহ পরবর্তী পাঠে ব্যবহার করবেন।
- পাঠের দুর্বল দিকসমূহ পরিহার করবেন বা উন্নয়নের মাধ্যমে পরবর্তী পাঠের পরিকল্পনা করবেন।

অনুশীলনী-৩

১. পদ্ধতি ও কৌশলের মধ্যে পার্থক্য নিরূপণ করুন।
২. গণিত শিক্ষায় আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি দুইটি একে অপরের পরিপূরক-উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।
৩. গাণিতিক আরোহ নীতি প্রয়োগ করে n সংখ্যক (প্রথম) স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় করুন।
৪. সংশ্লেষণ পদ্ধতি একটি বিশেষ পদ্ধতি, কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতি সার্বজনীন -উদাহরণ সহ ব্যাখ্যা করুন।
৫. শুধুমাত্র ”বক্তৃতা পদ্ধতি প্রয়োগ করে গণিত শেখানো যায় না ” ব্যাখ্যা করুন ।
৬. আপনার বিদ্যালয়ের গ্রন্থাগারের মেঝেতে টাইল্‌স বসাতে কত টাকা লাগবে? পাঠদানের কোন পদ্ধতি প্রয়োগ করে কিভাবে এটি নির্ণয় করা যায় বর্ণনা করুন।
৭. ডাল্টন পরিকল্পনার কোন দিকটি গণিত শিখনে বেশি উপযোগী বলে আপনি মনে করেন? ব্যাখ্যা করুন।
৮. শিখনে ভাইগট্স্কির গঠনবাদের ভূমিকা ব্যাখ্যা করুন।
৯. গণিত শিক্ষকের আবিষ্কার পদ্ধতির জ্ঞান থাকা অপরিহার্য কেন বর্ণনা করুন।
১০. “শিক্ষার্থীদের গণিত অনুশীলনের জন্য জিগ্‌স অত্যন্ত ফলপ্রসূ একটি কৌশল” আপনার মতামত দিন।

রেফারেন্স-৩

- আহমদ, মোঃ রমিজ উদ্দিন (২০১২), অধুনিক গণিত শিক্ষণ, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।
- রহমান, মোঃ মুজিবুর (২০০৮), (পুনর্মুদ্রণ, এপ্রিল, ২০১০), শ্রেণি পাঠদানের আধুনিক পদ্ধতি ও কৌশল এবং শ্রেণি ব্যবস্থাপনা, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।
- রহমান, মোঃ মুজিবুর (২০১১), (পুনর্মুদ্রণ, মার্চ, ২০১৪), মাধ্যমিক শিক্ষা, শিক্ষাক্রম ও শিশুর ক্রমবিকাশ, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।
- শাহ্ , ড. ডি. এম. ফিরোজ (দ্বিতীয় প্রকাশ, ২০১৬), গণিত শিক্ষণ, মিতা ট্রেডার্স, বুকস এন্ড কম্পিউটার কমপ্লেক্স, ৩৮/৩, বাংলাবাজার,ঢাকা ।
- ঘোষ, শৈলেন্দ্র কুমার (১৯৯৫), গণিত শিক্ষণ, সোমা বুক এজেন্সী, কলকাতা।
- আলী, মুহম্মদ আন্‌ওয়ার (১৯৯৭), গণিত শিক্ষণ, বাংলা একাডেমি, ঢাকা।
- ঢালী, স্বপন কুমার (২০০০), গণিত শিক্ষণ, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৪, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।
- রায়, সুশীল (২০১৩), শিক্ষাতত্ত্ব ও শিক্ষাদর্শন, সোমা বুক এজেন্সী, কলকাতা।
- বেগম, রাশিদা ও গিয়াসউদ্দিন আহমদ (২০০০), শিক্ষার ভিত্তি, মাধ্যমিক শিক্ষা উন্নয়ন প্রকল্প, শিক্ষা মন্ত্রণালয়, ঢাকা।
- খান, মোঃ লুৎফর রহমান ও আব্দুল মালেক(২০০০), সামাজিক বিজ্ঞান শিক্ষণ, মাধ্যমিক শিক্ষা উন্নয়ন প্রকল্প, শিক্ষা মন্ত্রণালয়, ঢাকা।
- মালেক, ড. আব্দুল ও অন্যান্য (ষষ্ঠ সংস্করণ,ফেব্রুয়ারি, ২০১৭), শিক্ষাবিজ্ঞান ও বাংলাদেশে শিক্ষা, র‌্যামন পাবলিশার্স, ২৬ বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০।
- হোসেন, ড. শেখ আমজাদ (২০০৭), (পুনর্মুদ্রণ অক্টোবর, ২০০৮), শিখন, মূল্যযাচাই এবং প্রতিফলনমূলক অনুশীলন, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।
- বানু সেলিনা ও অন্যান্য (২০০৮), মডিউল ১ ও ৩ সামাজিক বিজ্ঞান শিক্ষণ, টিচিং কোয়ালিটি ইমপ্রুভমেন্ট ইন সেকেন্ডারি এডুকেশন প্রজেক্ট, মাধ্যমিক ও উচ্চ শিক্ষা অধিদপ্তর, শিক্ষা মন্ত্রণালয়।
- প্রশিক্ষণ ম্যানুয়াল (২০০৮), মাধ্যমিক গণিত, টিচিং কোয়ালিটি ইমপ্রুভমেন্ট ইন সেকেন্ডারি এডুকেশন প্রজেক্ট, মাধ্যমিক ও উচ্চ শিক্ষা অধিদপ্তর, শিক্ষা মন্ত্রণালয়।
- উদ্দিন, ড. মোঃ মোহসীন ও অন্যান্য (২০০৮), গণিত শিক্ষণ, মডিউল ১ ও ৩ , টিচিং কোয়ালিটি ইমপ্রুভমেন্ট ইন সেকেন্ডারি এডুকেশন প্রজেক্ট, মাধ্যমিক ও উচ্চ শিক্ষা অধিদপ্তর, শিক্ষা মন্ত্রণালয়।
- মণ্ডল, ড. অমূল্য চন্দ্র ও অন্যান্য (অক্টোবর-২০১৪), উচ্চতর গণিত, নবম-দশম শ্রেণি, এনসিটিবি, ঢাকা।
- **এহসান, ড. মোঃ আবুল (১৯৯৭) , শিক্ষাক্রম উন্নয়ন : নীতি ও পদ্ধতি, ছাত্রবন্ধু লাইব্রেরি, ঢাকা।**
- হোসেন, ড. শেখ আমজাদ (২০০৯), আবশ্যকীয় শিক্ষণ দক্ষতা , প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা।
- রহমান, মোঃ মুজিবুর (২০০৫), (পুনর্মুদ্রণ, মার্চ, ২০০৮), শিক্ষার দার্শনিক সামাজিক ও মনস্তাত্ত্বিক ভিত্তি, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।

ইউনিট ৪ : গণিতে শিক্ষা উপকরণ ও সংরক্ষণ

শিখন কার্যক্রম পরিচালনা করতে যেসব বস্তু বা শিখন সামগ্রী ব্যবহার করা হয় সেগুলোকেই শিক্ষা উপকরণ বলা হয়। সবচেয়ে পরিচিত এবং ব্যবহৃত শিক্ষা উপকরণ হল পাঠ্যপুস্তক। এ ছাড়া শ্রেণিকক্ষে সাধারণভাবে ব্যবহৃত বিভিন্ন দ্রব্য যেমন: হোয়াইট বোর্ড, মার্কার, চক, চকবোর্ড, ডাস্টার ইত্যাদিও শ্রেণিকক্ষের সাধারণ উপকরণ। কিন্তু যদি কোন বিষয়ের শিখন কার্যক্রমে সে বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত বিভিন্ন উপকরণ ব্যবহার করা হয় সেগুলোকে বিশেষ উপকরণ বলা হয়। গণিত-এর কোন বিষয়ের শ্রেণি কার্যক্রমে সে বিষয় সংশ্লিষ্ট বিশেষ উপকরণ ব্যবহার করা হলে সেগুলোই গণিত শিক্ষা উপকরণ। গণিত শিক্ষা উপকরণ তৈরি, ব্যবহার এবং সংরক্ষণ সম্পর্কে প্রত্যেক গণিত শিক্ষকের ধারণা থাকা অবশ্যই প্রয়োজন। এই ইউনিটের সিলেবাসে উল্লিখিত বিষয়বস্তুকে দুইটি সাব ইউনিটে বিভক্ত করা হয়েছে।

৪.১ শিক্ষা উপকরণ: ধারণা ও প্রকারভেদ, গণিতে শিক্ষা উপকরণ ব্যবহারের নীতিমালা

৪.২ স্বল্প ব্যয়ে ও বিনামূল্যে গণিতে শিক্ষা উপকরণ তৈরি, শিক্ষা উপকরণ সংরক্ষণ

৪.১ শিক্ষা উপকরণ: ধারণা ও প্রকারভেদ, গণিতে শিক্ষা উপকরণ ব্যবহারের নীতিমালা

শিক্ষা উপকরণ : ধারণা ও প্রকারভেদ

শিখন কার্যক্রম ফলপ্রসূ করার জন্য শিক্ষা উপকরণের কোন বিকল্প নাই। পাঠের বিষয়কে সহজ, আনন্দদায়ক ও আকর্ষণীয় করার জন্য অবশ্যই শিক্ষা উপকরণ ব্যবহার করা প্রয়োজন। উপকরণ শিক্ষার্থীর অধিক ইন্দ্রিয়কে একই সাথে সক্রিয় করে পাঠের প্রতি মনোযোগ সৃষ্টিতে সহায়তা করে। উপকরণের ব্যবহারের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর সক্রিয় অংশগ্রহণ ও চিন্তনদক্ষতার বৃদ্ধির সাথে স্থায়ী শিখন হয়।

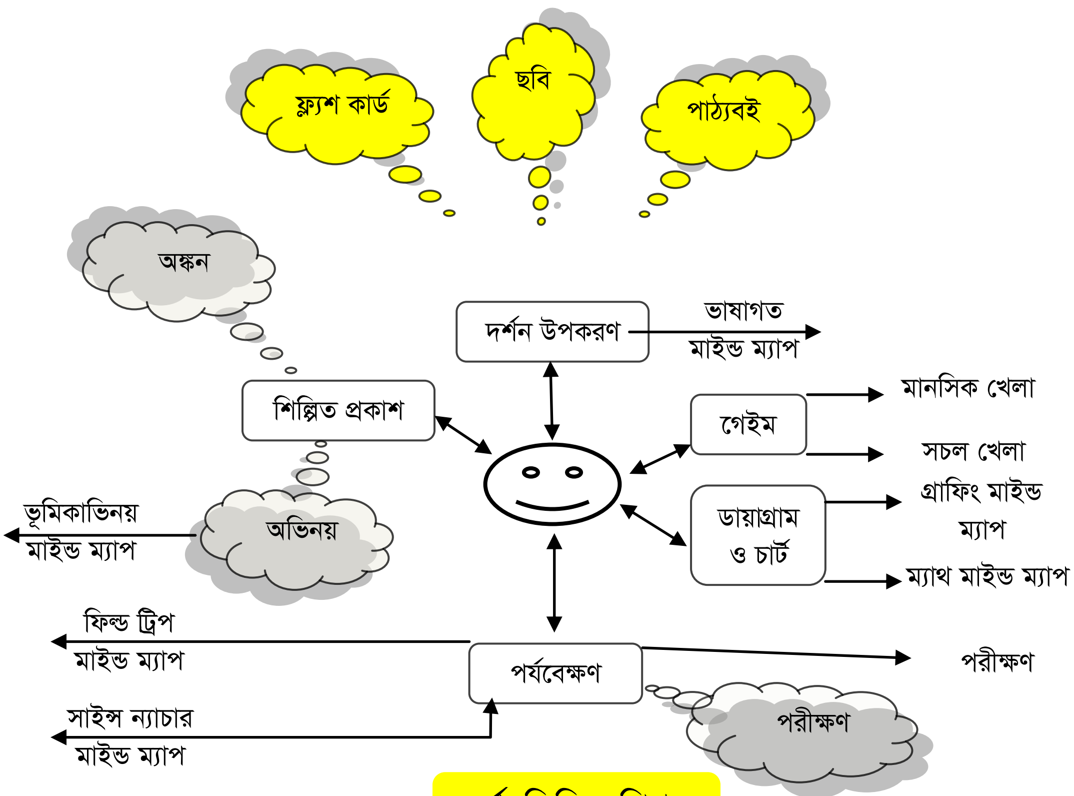
বিভিন্ন ধরনের উপকরণ রয়েছে। তবে সাধারণভাবে উপকরণসমূহকে নিম্নোক্ত উপায়ে তিন ভাগে ভাগ করা যায়,

- দর্শন উপকরণ
- শ্রবণ উপকরণ
- শ্রবণ-দর্শন উপকরণ

দর্শন উপকরণ

যে সকল উপকরণ ব্যবহারের মাধ্যমে পাঠের বিভিন্ন বিষয় শিক্ষার্থীর নিকট প্রত্যক্ষভাবে দৃষ্টিগোচর করিয়ে পাঠের বিষয়কে সহজবোধ্য এবং আকর্ষণীয় করার চেষ্টা করা হয় সেগুলোকে দর্শন উপকরণ বলা হয়। দর্শন উপকরণের কিছু উদাহরণ নিচে দেয়া হল,

- বাস্তব বস্তু
- ভিডিও
- ছবি
- চার্ট
- মডেল
- ম্যাপ
- ফ্ল্যাশ কার্ড
- ফ্লানেল বোর্ড
- বুলেটিন বোর্ড
- চকবোর্ড
- ওভারহেড প্রজেক্টর
- স্লাইড



দর্শনভিত্তিক শিখন

শ্রবণ উপকরণ

যে সব উপকরণ শ্রবণের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর শিখন কার্যক্রম আনন্দদায়ক ও সহজবোধ্য করে তোলে সেগুলোকে শ্রবণ উপকরণ বলা হয়। নিচের উপকরণসমূহ শ্রবণ উপকরণের অন্তর্ভুক্ত।

- রেডিও
- রেকর্ডার
- গ্রামাফোন

শ্রবণ-দর্শন উপকরণ

যে সব উপকরণ শ্রবণ ও দর্শন উভয় মাধ্যমে শিক্ষার্থীর শিখন কার্যক্রম আনন্দদায়ক ও সহজবোধ্য করে তোলে সেগুলোকে শ্রবণ-দর্শন উপকরণ বলা হয়। নিচের উপকরণসমূহ শ্রবণ-দর্শন উপকরণের অন্তর্ভুক্ত।

- টেলিভিশন
- ভিডিও
- ফিল্ম প্রজেক্টর
- ফিল্ম স্ট্রিপ
- কম্পিউটার

ইন্দ্রিয়ের উপর উপকরণের প্রভাব

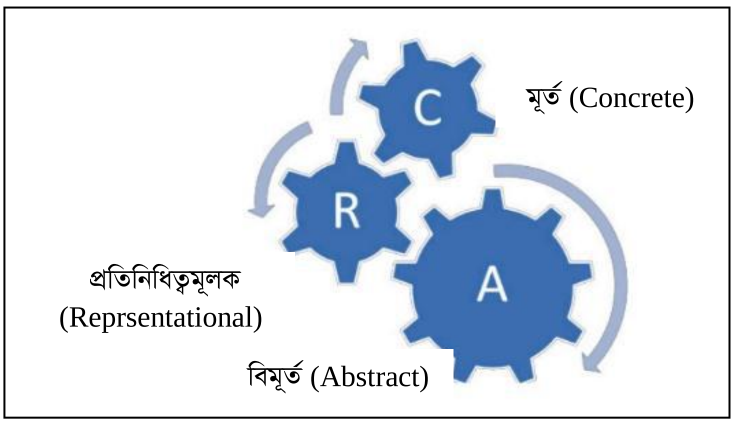
- দেখায়
- শোনায়
- ঘ্রাণ লওয়ায়
- স্বাদ লওয়ায়
- ত্বকানুভূতিতে
- ৬ষ্ঠ ইন্দ্রিয়ানুভূতি?

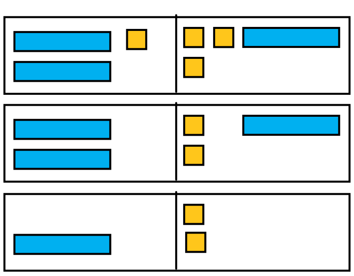
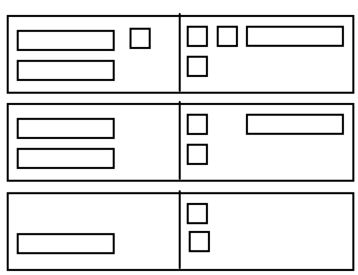
গণিতে শিক্ষা উপকরণ ব্যবহারের নীতিমালা

গণিত একটি বিমূর্ত বিষয়। গণিত শিক্ষা উপকরণ বিমূর্ত এই গণিতকে বাস্তবের সাথে সম্পর্কিত করে শিক্ষার্থীর শিখন প্রক্রিয়াকে আকর্ষণীয় ও ত্বরান্বিত করে। উপকরণ ব্যবহারের করে গণিত শিক্ষাথীকে আনন্দের মাধ্যমে গণিতের প্রতি আগ্রহী করা যায় এবং শ্রেণিতে সহজেই সক্রিয় রাখা যায়। শিক্ষার্থীরা সাধারণত গণিত বুঝে করে না, কিছু গাণিতিক ফর্মূলা বা সূত্র মূখস্ত করে এবং কিছু নিয়ম অনুসরণ করে গাণিতিক সমস্যার ফলাফল নির্ণয় করে। কোন একটি গাণিতিক সমস্যা বিভিন্ন উপায়ে সমাধান করা যেতে পারে। কিন্তু শিক্ষার্থী সাধারণত গাণিতিক সমস্যার ফলাফল নির্ণয়েই সন্তুষ্ট থাকে। গণিতের প্রতি আগ্রহ না জন্মানোর কারণে বিভিন্ন উপায়ে সমাধানের চিন্তায় যেতে চায় না।

শিক্ষার্থীকে গণিতের প্রতি আগ্রহী করা এবং তার গাণিতিক চিন্তন দক্ষতা বৃদ্ধিতে শ্রেণিকক্ষে গণিত শিক্ষা উপকরণ ব্যবহার আপরিহার্য। গণিত মূলত আকর্ষণীয় ও মজার একটি বিষয় যদি উপযুক্ত শিক্ষা উপকরণ ব্যবহারের মাধ্যমে তা আনন্দদায়ক করা হয়। শিক্ষার্থীর গাণিতিক চিন্তনদক্ষতা বৃদ্ধি করতে পারলে তারা গাণিতিক সমস্যাবলি বিভিন্নভাবে সমাধানেই কেবল সন্তুষ্ট থাকবে না, নতুন নতুন গাণিতিক সমস্যা তৈরি করতেও আগ্রহী হবে। এবং এভাবেই গণিত ও বিজ্ঞান মনস্ক জাতি গঠন সম্ভব হবে।

বিভিন্ন গবেষকের মতে গণিত শিখনে নিচের C-R-A (Concrete-Representational-Abstract) মডেলটি বেশ কার্যকর,

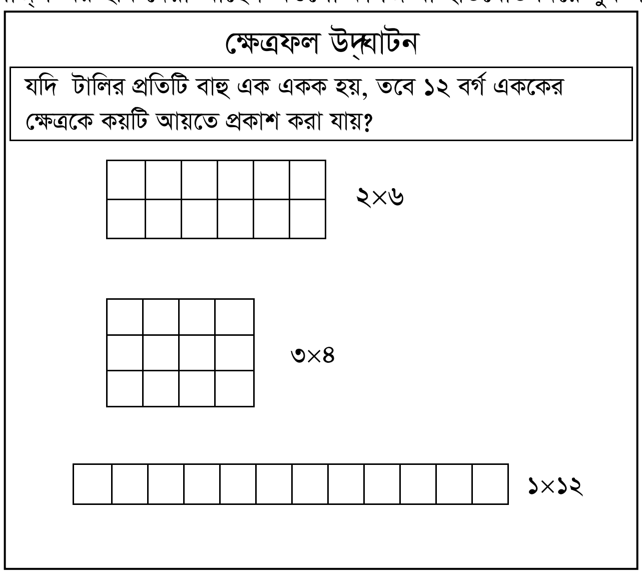


কনক্রিট বা মূর্ত স্তর (C)	প্রতিনিধিত্বমূলক স্তর (R)	এবস্ট্রাক্ট বা বিমূর্তস্তর (A)
শিক্ষার্থী সমীকরণ সমাধান করতে এলজে টাইল ব্যবহার করে: $2x + 1 = 3 + x$ 	শিক্ষার্থী কনক্রিট মডেলের অনুরূপ এঁকে সমীকরণ সমাধান করে: $2x + 1 = 3 + x$ 	শিক্ষার্থী কনক্রিট মডেলের সাথে বীজগাণিতক পদ্ধতির চিত্ররূপের সংযোগ করে: $2x + 1 = 3 + x$ $2x + 1 - 1 = 3 + x - 1$ $2x = 2 + x$ $2x - x = 2 + x - x$ $x = 2$

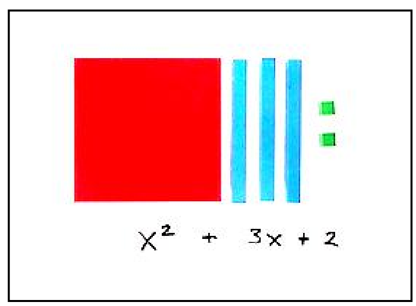
গণিত শিখন কার্যক্রমে শিক্ষা উপকরণ ব্যবহারের নীতিমালা :

- উপকরণ অবশ্যই পাঠের বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত হতে হবে
- কোন কাজে কখন কোন উপকরণ ব্যবহার করবেন পূর্বেই তার পরিকল্পনা করতে হবে
- শিক্ষার্থীর কাছে উপকরণ দেয়ার পর তারা কি করবে সে সম্পর্কে অবশ্যই সুস্পষ্ট নির্দেশনা থাকতে হবে
- শিক্ষার্থী উপকরণ নিয়ে নির্দেশনা অনুযায়ী কাজ করছে কিনা তা অবশ্যই শিক্ষককে মনিটর করতে হবে এবং প্রয়োজনে সহায়তা করতে হবে
- সব শিক্ষার্থী প্রদত্ত নির্দেশনা অনুসরণ করতে পারছে কিনা সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে
- প্রয়োজনে মাঝে মাঝে শিক্ষার্থীদের হিন্টস বা ক্লু দিতে হবে
- শিক্ষার্থীরা যেন কোন উপকরণ অগোছালোভাবে শ্রেণির কোথাও না ফেলে সে নির্দেশনাও দিতে হবে
- ব্যবহার শেষে শিক্ষার্থীরা অবশ্যই উপকরণগুলো গুছিয়ে শিক্ষকের কাছে রাখবে
- উপকরণের কোন চার্ট টাঙ্গানো হলে কাজ শেষে তা নামিয়ে রাখতে পারেন
- চার্টের সাইজ অবশ্যই শ্রেণি উপযোগী হতে হবে
- শ্রেণির শিক্ষার্থী সংখ্যা অনুযায়ী অবশ্যই পর্যাপ্ত উপকরণ নিয়ে যেতে হবে
- উপকরণ আকর্ষণীয় হতে হবে যেন শিক্ষার্থীর আগ্রহ ও সক্রিয়তা বৃদ্ধি পায়
- উপকরণ এমন হবে যেন শিক্ষার্থীর গাণিতিক চিন্তন দক্ষতা বৃদ্ধি পায়
- উপকরণের আধিক্যে যেন কোনভাবেই পাঠের আসল উদ্দেশ্য ব্যহত না হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

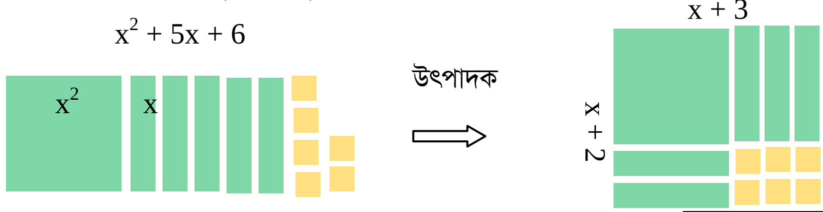
গণিত শিক্ষা উপকরণের কিছু ধারণা নিচের ছবিগুলোর মাধ্যমে দেয়া হল। এখানে গাণিতিক চার্ট, বাস্তববস্তু, গেইম এবং কিছু পাজ্‌ল এর ছবি দেয়া আছে। এগুলো কাগজ বা হার্ডবোর্ড দিয়ে খুব সহজে তৈরি করা সম্ভব।

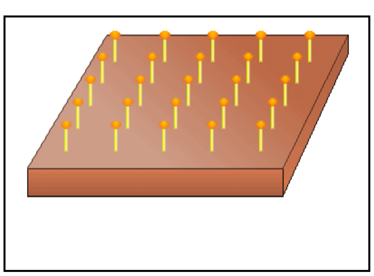


এলজে-টাইল

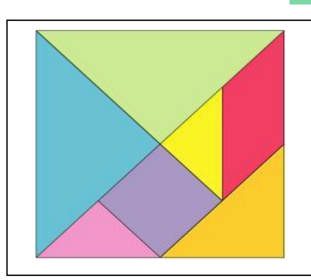


উৎপাদক নির্ণয়ে এলজে-টাইল (বীজটালি) ব্যবহার

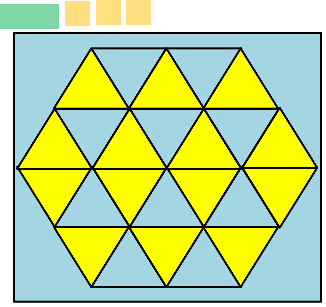




জিওবোর্ড



ট্যানগ্রাম



টার্সিয়া

৪.২ স্বল্প ব্যয়ে ও বিনামূল্যে গণিতে শিক্ষা উপকরণ তৈরি এবং উপকরণ সংরক্ষণ

স্বল্প ব্যয়ে ও বিনামূল্যে গণিতে শিক্ষা উপকরণ তৈরি

কার্যকর, ফলপ্রসূ ও আদন্দদায়কভাবে শিখন কার্যক্রম পরিচালনা করার জন্য শিক্ষা উপকরণের কোন বিকল্প নাই। উপকরণের অপরিহার্যতার কারণেই বিশ্বের বিভিন্ন উন্নত দেশে শিক্ষা উপকরণ তৈরি করার জন্য একটি কোম্পানি থাকে। সে কোম্পানি বিভিন্ন বিষয় ভিত্তিক শিক্ষা উপকরণ তৈরি করে। শিক্ষা প্রতিষ্ঠানসমূহ স্বল্প মূল্যে কোম্পানি থেকে তাদের প্রয়োজনীয় শিক্ষা উপকরণ ক্রয় করে। সেখানে বিদ্যালয়গুলোতে শ্রেণিকক্ষসমূহ বিষয় ভিত্তিকভাবে নির্ধারিত হওয়াতে প্রতিটি নির্দিষ্ট শ্রেণিকক্ষ সে বিষয়ের উপকরণ দিয়ে সাজানো থাকে। গণিতের শ্রেণিকক্ষ বিভিন্ন ধরনের গাণিতিক চার্ট, মডেল, কোটেশন ইত্যাদি দিয়ে সাজানো থাকে। শিক্ষা উপকরণ তৈরির ক্ষেত্রে আমাদের ও চিন্তাা করতে হবে। স্বল্প ব্যয়ে ও বিনামূল্যে গণিতে প্রচুর শিক্ষা উপকরণ তৈরি করা সম্ভব।

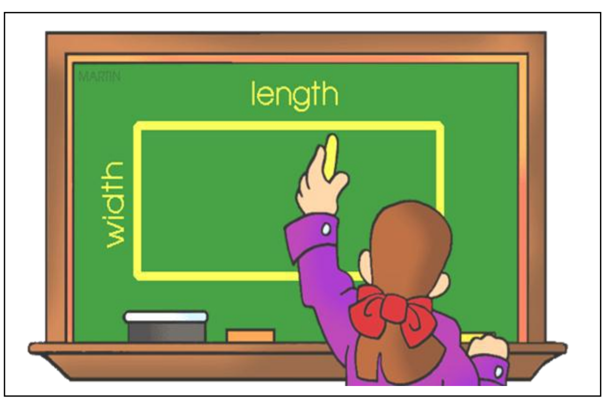
বিদ্যালয়ের শ্রেণিকক্ষে এবং চারপাশে যা কিছু আছে প্রায় সবকিছু-কে গণিতের কোন না কোন বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত করা যায় এবং এগুলো সবই বিনামূল্যে গণিত শিক্ষা উপকরণ। এসব চারপাশের গণিত শিক্ষা উপকরণকে শ্রেণিকক্ষের পাঠদানের বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত করে গণিত শিখন কার্যক্রম আনন্দদায়ক ও কার্যকর করা সম্ভব। শিক্ষক নিজেও প্রয়োজন অনুযায়ী স্বল্পমূল্যের বিভিন্ন উপকরণ তৈরি করতে পারেন। শিক্ষক শিক্ষার্থীদের দিয়েও বিভিন্ন উপকরণ তৈরি করাতে পারেন। এ ছাড়া বিভিন্ন অনলাইন ও অফলাইন গণিত সফটওয়্যার এবং গণিত ওয়েবসাইট গণিত শিখন কার্যক্রমে অনেক চমৎকার এবং আকর্ষণীয় উপকরণ হিসাবে কাজ করে।

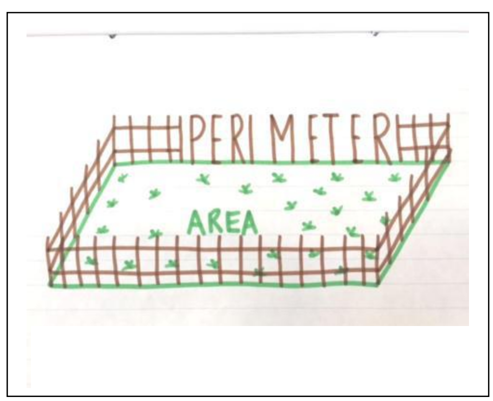
গণিত শিখন কার্যক্রমের জন্য সহজভাবে তৈরি বা সংগৃহিত উপকরণ বিভিন্ন প্রকার হতে পারে-

চারপাশ বা পরিবেশ থেকে সংগৃহিত বাস্তব জিনিস	কাগজ ভাঁজ করা
মডেল	ডিজিট্যাল কনটেন্ট
চার্ট, ছবি	অনলাইন ও অফলাইন গণিত সফটওয়্যার
ম্যাপ	গণিত ওয়েবসাইট

বাস্তব জিনিস

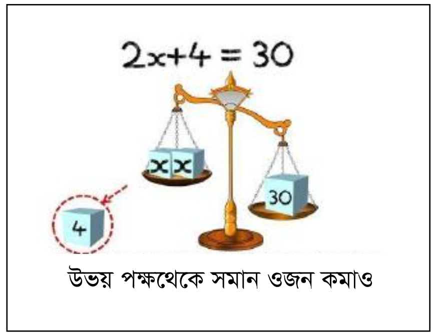
শ্রেণিকক্ষ এবং শ্রেণিকক্ষের যাবতীয় বস্তু বোর্ড, ডাস্টার, কাগজ, কলম, টেবিল, চেয়ার, বই, খাতা, দরজা, জানালা, বাইরের মাঠ-ঘাট, গাছপালা, পুকুর-নদী ইত্যাদি সব কিছুই গণিতের কোন না কোন বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত করা যায়। সেট, ফাংশন ও রিলেশন, সমীকরণ, অনুপাত-সমানুপাত, ভগ্নাংশ, জ্যামিতিক চিত্র ও বিভিন্ন পরিমাপ এবং উচ্চতা নির্ণয় ইত্যাদি বিষয়ের শিখন কার্যক্রমে বাস্তব এইসব বিনামূল্যের উপকরণ ব্যবহার করে খুব সহজেই শিক্ষার্থীকে আগ্রহী এবং সক্রিয় করে তোলা যায় এবং শিক্ষার্থীর গাণিতিক চিন্তন দক্ষতা বৃদ্ধি করা যায়।



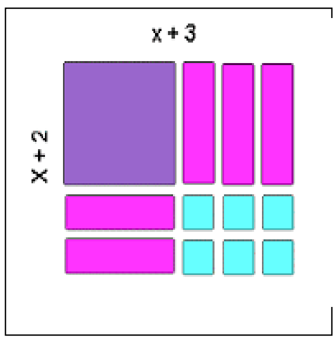


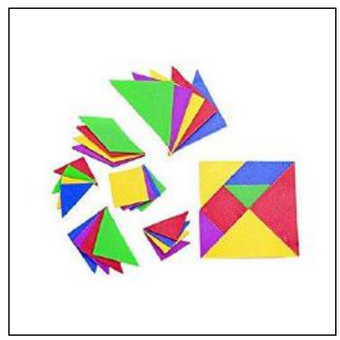
মডেল

বিভিন্ন ধরনের ঘনক, বীজগাণিতিক সূত্রাবলি, সংখ্যা-সেটের ধারণা, বিভিন্ন ধরনের ধারা ইত্যাদি বিষয়ের বিভিন্ন মডেল স্বল্প খরচে এবং সহজে তৈরি করা যায়। বিভিন্ন রঙের কাগজ, হার্ডবোর্ড শোলা ব্যবহার করে এসব মডেল তৈরি করা যায়। এ ধরনের মডেল ব্যবহার করে সহজেই শিক্ষার্থীদের পাঠে আগ্রহী করে তোলা যায়।



এ ছাড়া Geoboard, Tangrams, Algebraic Tiles, Tarsia Puzzle ইত্যাদি বিভিন্ন হার্ডবোর্ড/কার্ড দিয়ে খুব সহজে তৈরি করা যায়। এইসব উপকরণ ব্যবহারের মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা বিভিন্ন ধরনের জ্যামিতিক ক্ষেত্রফল ইনভেস্টিগেট করতে আগ্রহী হয়। বিভিন্ন আকৃতি তৈরি করা এবং বীজগাণিতিক সমীকরণ মডেলের মাধ্যমে সমাধান করে শিক্ষার্থী ধীরে ধীরে মূর্ত থেকে বিমূর্ত চিন্তায় অগ্রসর হয়।

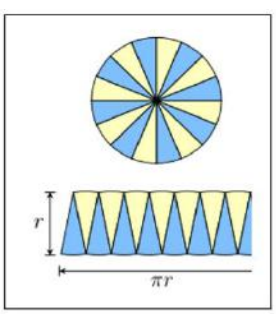




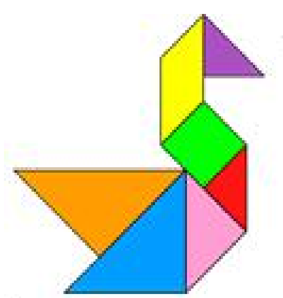
চার্ট

অনেক সময় গাণিতিক চার্টের ব্যবহার গণিত শিখন কার্যক্রমকে আনন্দদায়ক ও আকর্ষণীয় করে তোলে। তবে চার্ট তৈরি করার সময় কতগুলো বিষয় অবশ্যই লক্ষ রাখতে হবে:

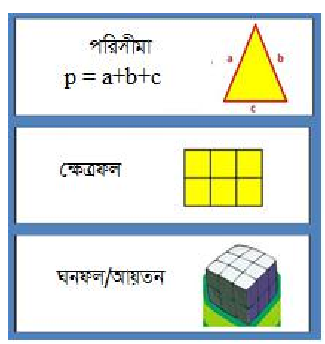
- চার্টের আকার যেন আদর্শ মাপের অর্থাৎ শ্রেণি উপযোগী হয়
- চার্টের রঙ এবং চার্টে ব্যবহৃত বিভিন্ন রঙের কাগজের মধ্যে যেন সুন্দর সামঞ্জস্য থাকে
- চার্টে একটি শিরোনাম থাকবে
- চার্টের চারদিকে যেন মার্জিন থাকে
- চার্টে যেন অধিক লেখা না থাকে।



বৃত্তের ক্ষেত্রফল

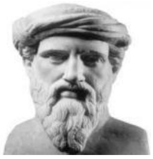


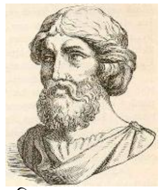
ট্যানগ্রামগঠিত আকৃতি



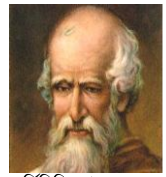
ছবি

গণিতবিদদের ছবি ব্যবহার করে গণিতের প্রতি আকর্ষণ ও আগ্রহ তৈরি করা সম্ভব। সে সাথে তাদের জীবনের কিছু দিক তুলে ধরে শিক্ষার্থীকে সক্রিয় রাখা যায়।


থেলিস (৬২৪-৫৪৬বিসি) গ্রীক


পিথাগোরাস (৫৭০-৪৯৫বিসি)

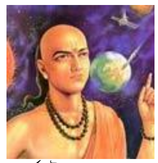

ইউক্লিড (৩০০ বিসি) গ্রীক


আর্কিমিডিস (২৮৭-২১২ বিসি)


ইরাটোসথেনিস (২৭৬-১৯৪বিসি) গ্রীক


ডায়োফ্যান্টাস (২০০-২৮৪ এডি), গ্রীক


হিপাতিয়া (৩৭০-৪১৫ এডি) মিশরীয়

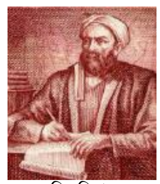

আর্যভট্ট (৪৭৬-৫৫০ এডি) ভারতীয়


ব্রহ্মগুপ্ত (৫৯৭-৬৬৮ এডি) ভারতীয়


ভাস্করাচার্য-১ (৬০০-৬৮০ এডি) ভারতীয়


আল-খারিজমি (৭৮০-৮৫০) বাগদাদী


ইবনে হাইথাম (৯৬৫-১০৪০) ইরাকী


আল বিরুনি (৯৭৩-১০৪৮) ইরানী

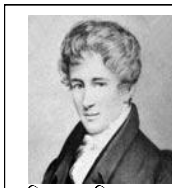

ফিবোনাক্কি (১১৭৫-১২৫০) ইতালীয়


জন নেপিয়ার (১৫৫০-১৬১৭) স্কটিশ

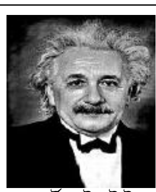

রেনে দেকার্তে (১৫৯৬-১৬৫০) ফরাসী


পিয়ারে দ্যা ফের্মা (১৬০৭-৬৫) ফরাসী


আইজাক নিউটন (১৬৪২-১৭২৬) ইংলিশ

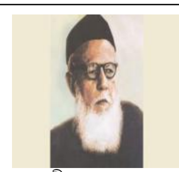

নিলস হেনরিক এ্যাবেল (১৮০২- ১৮২৯) নরয়েজিয়ান


এডা লাভলেইস (১৮১৫-৫২) ইংলিশ


এলবার্ট আইনস্টাইন (১৮৭৯-১৯৫৫) জার্মান


এমি নইথার (১৮৮২-১৯৩৫) জার্মান


পিসি মহলানবিশ (১৮৯৩- ১৯৭২) ভারতীয় বাঙালি


ড. কাজী মোতাহার হোসেন (১৮৯৭-১৯৮১) বাংলাদেশি

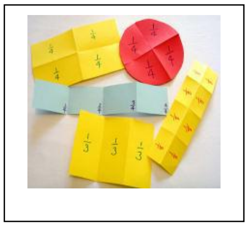
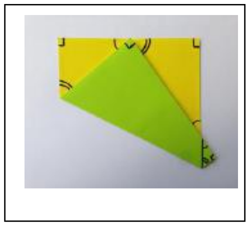
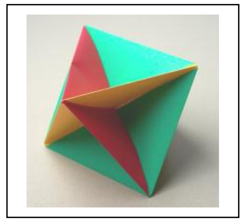
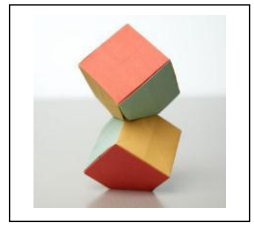

এন্ড্রু ওয়াইলস (১৯৫৩- ...) ব্রিটিশ

ম্যাপ

বিভিন্ন দেশ বা স্থানের ম্যাপ ব্যবহার করে শিক্ষার্থীদের গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে দেয়া যায়। এতে শিক্ষার্থীর গাণিতিক চিন্তন দক্ষতা বৃদ্ধির সাথে সাথে বাস্তব জ্ঞানও বৃদ্ধি পায়।

কাগজ ভাঁজ করা

কাগজ ভাঁজ করে বিভিন্ন গাণিতিক ধারণা ব্যাখ্যা করা যায় এবং বিভিন্ন গাণিতিক মডেলও তৈরি করা যায়। রঙিন কাগজ ভাঁজ করে গাণিতিক ধারণা ব্যাখ্যা করলে ধারণাগুলো শিক্ষার্থীর কাছে মূর্ত হয়ে উঠে এবং শিক্ষার্থী ও কাগজ ভাঁজে উদ্বুদ্ধ হয়। এতে আনন্দ ও আগ্রহের সাথে শিক্ষার্থীর মানসিক, মৌলিক ও যৌক্তিক চিন্তার বিকাশ ঘটে।

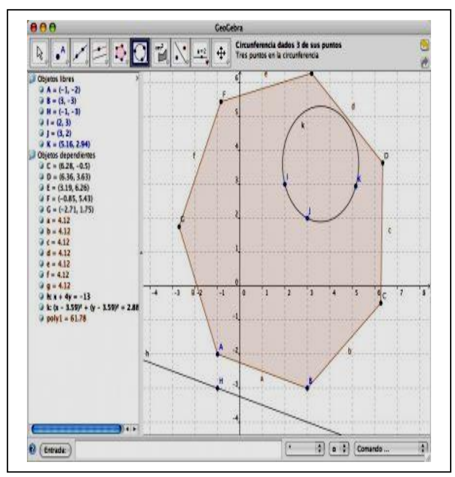





ডিজিট্যাল কনটেন্ট

ইন্টারনেট থেকে গাণিতিক বিষয়ের ভিডিও, ছবি ইত্যাদি ডাউনলোড করে মাল্টিমিডিয়া প্রজেক্টরের মাধ্যমে সহজেই শিক্ষার্থীদের শিখন প্রক্রিয়ায় ব্যবহার করা যায়। এতে শিক্ষার্থী আনন্দের সাথে শিখনে সক্রিয় থাকে। সরকার শ্রেণিকক্ষে ডিজিট্যাল কনটেন্ট ব্যবহারের উপর যথেষ্ট গুরুত্ব আরোপ করছেন। সবচেয়ে জনপ্রিয় এবং উল্লেখযোগ্য ব্লগসাইট শিক্ষক বাতায়নে শিক্ষকের **তৈরী প্রচুর ডিজিট্যাল কনটেন্ট আপলোড করা আছে। শিক্ষক শিক্ষক-বাতায়ন থেকে প্রয়োজন মত কনটেন্ট ডাউনলোড করে শ্রেণিকক্ষে ব্যবহার করতে পারেন।** www.teachers.gov.bd

অনলাইন ও অফলাইন সফটওয়্যার

বিভিন্ন ধরনের গাণিতিক সফটওয়্যার রয়েছে। তার মধ্যে Geogebra, Tarsia Puzzle, Gapminder হল অফলাইন সফটওয়্যার। এগুলো ইন্টারনেট থেকে ডাউনলোড করে ইনস্টল করে নিতে হবে। গণিত শিখন কার্যক্রমে এই সফটওয়্যার গুলো ব্যবহার করে খুব সহজেই শিক্ষার্থীকে আনন্দের মাধ্যমে আগ্রহী এবং সক্রিয় করা যায় এবং গাণিতিক চিন্তন দক্ষতা বাড়ানো যায়। এ ছাড়া অনলাইন সফটওয়্যারগুলোর মধ্যে রয়েছে Desmos, Kahoot, Padlet ইত্যাদি। এই সফটওয়্যারগুলো ব্যবহারের মাধ্যমে শিখন কার্যক্রম অনেক বেশি ইন্টারেক্টিভ করা সম্ভব।



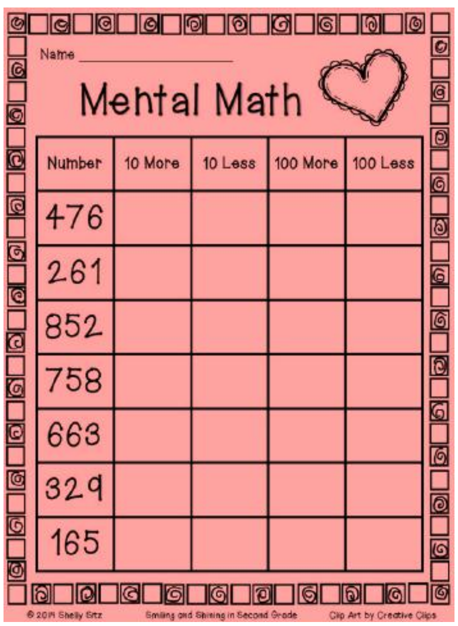
বিভিন্ন গণিত খুব সহজেই ইন্টারেক্টিভ করা যায়। নিচে কয়েকটি গণিত ওয়েবসাইট ও সফটওয়্যারের এড্রেস দেওয়া হল।

www.mathfun.com www.mrbartonmaths.com www.buzzmath.com www.mathplay.com
www.kahoot.com www.desmos.com
www.padlet.com www.gapminder.com
www.tes.com/teaching-resource/tarsia-jigsaw-maker

শিক্ষা উপকরণ সংরক্ষণ

শিক্ষা উপকরণ তৈরি কষ্টসাধ্য এবং সময়সাপেক্ষ ব্যাপার। একজন আদর্শ গণিত শিক্ষক প্রচন্ড ব্যস্ততার মাঝেও এ কষ্টসাধ্য কাজটি নিজে করে থাকেন এবং শ্রেণি কার্যক্রমে ব্যবহার করেন। কিন্তু তৈরিকৃত উপকরণ যদি প্রয়োজনীয় যত্নের সাথে সংরক্ষণ করা না হয় তবে শিক্ষকের সমস্ত কষ্ট সহজেই নষ্ট হয়ে যায়। গণিত শিখন কার্যক্রমকে ফলপ্রসূ ও কার্যকর করার জন্য গণিত শিক্ষা উপকরণ তৈরি করা যেমন গুরুত্বপূর্ণ তেমনি তৈরী উপকরণ সঠিকভাবে সংরক্ষণ করাও অত্যন্ত প্রয়োজন। এ ব্যাপারে প্রশাসনের সহযোগিতা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

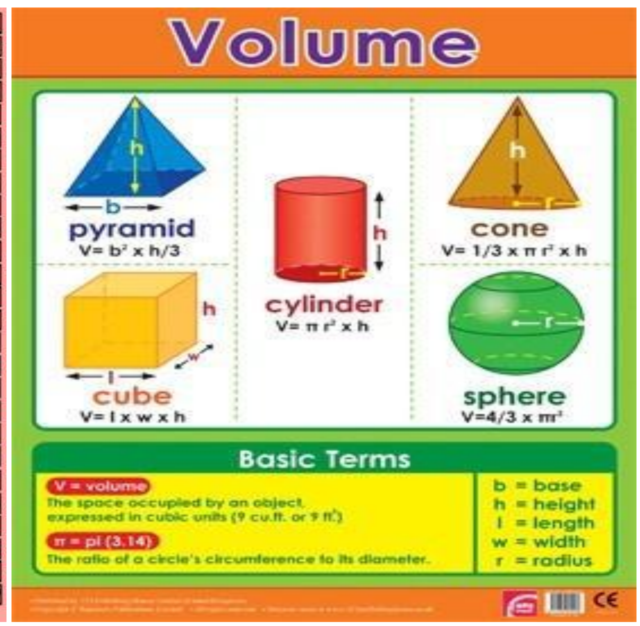
উপকরণ সংরক্ষণের জন্য বিদ্যালয়ের লাইব্রেরিতে একটি কর্নার বা একটি কক্ষের ব্যবস্থা করা যেতে পারে। সাজিয়ে রাখার জন্য আলমারি বা রেকের ব্যবস্থা থাকবে। উপকরণগুলো সেখানে রাখা এবং সেখান থেকে নেয়ার একটি নীতিমালা করা যেতে পারে যাতে সবাই যত্নের সহিত সেগুলো ব্যবহার করে। এভাবে উপকরণ সংরক্ষণের ব্যবস্থা করা সম্ভব হলে শিক্ষক-শিক্ষার্থীর মধ্যে উপকরণ তৈরির আগ্রহ অনেক বেড়ে যাবে। এবং কয়েক বছর পর দেখা যাবে প্রতিটি বিদ্যালয়ে একটি করে গণিত উপকরণ কক্ষ তৈরি হয়ে গেছে।


Name ____________

Mental Math

Number	10 More	10 Less	100 More	100 Less
476				
261				
852				
758				
663				
329				
165				

© 2014 Shelly Sitz   Smiling and Shining in Second Grade   Clip Art by Creative Clips



কাজ: ১। ৬ষ্ঠ থেকে ৯ম শ্রেণির গণিত বই থেকে যে কোন ২টি পাঠের বিষয় চিহ্নিত করে পাঠে ব্যবহারযোগ্য উপকরণ চিহ্নিত করুন। চিহ্নিত পাঠের বিষয়সমূহের শিখন কার্যক্রমে উপকরণগুলো কখন, কিভাবে ব্যবহার করতে হবে- যুক্তিসহ একটি পর্যালোচনা লিখুন।
২। গাণিতিক মডেল ও চার্ট তৈরি করুন। যেমন: Geoboard, Tangrams, Algebraic Tiles, Tarsia Puzzle

অনুশীলনী-৪

১।Tarsia এক ধরনের-
ক) গেম   খ) কুইজ   গ) পাজল   ঘ) অনলাইন সফটওয়্যার
২। গণিত শিখনে C-R-A মডেলটি ব্যাখ্যা করুন।
৩। একটি করে অনলাইন ও অফলাইন সফটওয়্যারের নাম লিখুন এবং গণিত শিখনে এদের প্রয়োগ ব্যাখ্যা করুন।
৪। মানচিত্র গণিত শিখনে একটি চমৎকার উপকরণ- ব্যাখ্যা করুন।
৫। গণিত শিখন কার্যক্রমে শিক্ষা উপকরণের ভূমিকা ব্যাখ্যা করুন।
৬। পাঠের সাথে সম্পর্কিত ৫টি গণিত শিক্ষা উপকরণ চিহ্নিত করে শিখন কার্যক্রমে তাদের ব্যবহার ব্যাখ্যা করুন।

রেফারেন্স: www.le.ac.uk/oerresources/ssds/presentationskills
www.indiastudychannel.com/resources

ইউনিট ৫ : গণিত শিক্ষণ দক্ষতা

শিক্ষক শ্রেণিকক্ষে যে কাজ বা আচরণের মাধ্যমে শিখন-শেখানো কার্যক্রম পরিচালনা করেন, সে কাজগুলোকে বিভিন্ন গুচ্ছে সনাক্ত করা যায়। শিক্ষকের শিক্ষণ কাজের এসব গুচ্ছই শিক্ষণ দক্ষতা। প্রায় সকল বিষয়েই কিছু সাধারণ শিক্ষণ দক্ষতা এবং বিষয় ভিত্তিক বিশেষ বিশেষ দক্ষতা রয়েছে। প্রশ্নকরণ শিক্ষণ দক্ষতা প্রায় সকল বিষয়েই সাধারণ। কিন্তু সমস্যা সমাধান দক্ষতাটি গণিত বা গণিত কেন্দ্রিক বিষয়ের বিশেষ দক্ষতা। গণিত শিক্ষণে যে যে শিক্ষণ দক্ষতা ব্যবহৃত হয়, তাই গণিত শিক্ষণ দক্ষতা।

ইউনিট বিভাজন :

৫.১ অনুশিক্ষণ: ধারণা, দক্ষতাসমূহ, চক্র, দক্ষতাভিত্তিক পাঠপরিকল্পনা প্রণয়ন

অনুশিক্ষণ (Microteaching)

শিক্ষক প্রশিক্ষণে শিক্ষার্থী শিক্ষকদের শিক্ষণ দক্ষতা বৃদ্ধির জন্য অনুশীলনের উপায় হিসাবে **১৯৬৩** সালে স্ট্যানফোর্ড ইউনিভার্সিটিতে ডি. ডব্লিউ এলেন অনুশিক্ষণ কৌশল প্রচলন করেন। অনুশিক্ষণ শিক্ষকের পর্যবেক্ষণযোগ্য, নিয়ন্ত্রণ ও পরিমাপযোগ্য আচরণের মাধ্যমে সুসংজ্ঞায়িত শিক্ষণ দক্ষতা অনুশীলনের সুযোগ দেয়।

ধারণা

অনুশিক্ষণ শিক্ষক প্রশিক্ষণ পর্যায়ে ব্যবহৃত একটি আধুনিক কৌশল। এর মাধ্যমে শিক্ষকদের শিক্ষণ দক্ষতা অনুশীলন করা হয়, যেন প্রশিক্ষণার্থী শিক্ষক শিক্ষণে দক্ষ হয়ে ওঠেন। অনুশিক্ষণে নিম্নরূপ ব্যবস্থা নেওয়া হয়–

- একবারে একটি শিক্ষণ দক্ষতার উপর গুরুত্ব দিয়ে অনুশীলন করা হয়
- বিষয়বস্তু একটি ধারণায় সীমিত রাখা হয়
- শ্রেণির আকার ৫ থেকে ৭ জনে (প্রকৃত বা সাথী শিক্ষার্থী) সীমিত রাখা হয় এবং
- শ্রেণির সময়কাল হয় ৫ থেকে ৭ মিনিট।

মনে রাখতে হবে অনুশিক্ষণ শিক্ষক প্রশিক্ষণ কর্মসূচিতে অনুশীলন-শিক্ষণের (Practice Teaching), কোন প্রতিস্থাপক নয়, বরং সম্পূরক।

শিক্ষণ দক্ষতা

শিক্ষকের শিক্ষণমূলক আচরণসমূহ গুচ্ছবদ্ধ করে বিভিন্ন দক্ষতায় বিভক্ত করা হয়। যেমন, প্রেষণা সৃষ্টি (Motivation), প্রশ্নকরণ, উদ্দীপক চালন (stimulus variation), ব্যাখ্যাকরণ, বলবৃদ্ধিকরণ (reinforcement), সমাপ্তিকরণ (closure), চকবোর্ড ব্যবহার, প্রযুক্তির ব্যবহার ইত্যাদি।

বিভিন্ন দক্ষতাসংশ্লিষ্ট আচরণসমূহ সনাক্ত করতে পারলে অনুশিক্ষণে সঠিক ফিডব্যাক পাওয়া যায় ও দেওয়া যায়। উদাহরণ স্বরূপ এখানে দুইটি দক্ষতার আচরণিক উপাদান বিশ্লেষণ করে দেখানো হল।

ক) প্রেষণা সৃষ্টি: পাঠের শুরুতে শিখনের জন্য শিক্ষার্থীদের মন প্রস্তুত করে নিতে হয়। শিক্ষককে নিশ্চিত হতে হবে যে, শিক্ষার্থীরা শিখতে ইচ্ছুক। শিখন অর্থপূর্ণ হয় যখন নতুন জ্ঞানকে পূর্বজ্ঞানের সাথে সমন্বয় করে ধারণা পুনর্গঠন করা হয়। তাই শিক্ষককে একটা মঞ্চ তৈরি করে নিতে হবে যেন, শিক্ষার্থী ইতোমধ্যে অর্জিত জ্ঞান বা ধারণা স্মরণে এনে নতুন অভিজ্ঞতার সাথে সম্পৃক্ত করতে পারে। এজন্য নিম্নরূপ আচরণ জরুরী :

- শিক্ষার্থীদের সাথে চিন্তা ও আবেগিক ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক গড়ে তোলার জন্য শুভেচ্ছা বিনিময় এবং পাঠ প্রাসঙ্গিক পরিস্থিতি, ঘটনা বা ছোটখাটো গল্পের অবতারণা করা।
- পূর্বজ্ঞান স্মরণে এনে তাকে নতুন জ্ঞানের সাথে সমন্বয় করার জন্য প্রাসঙ্গিক ছবি, চিত্র, চার্ট, মডেল বা অন্য কোন আগ্রহ/উদ্দীপনা সৃষ্টিকারি উপাদান দেখিয়ে পূর্বজ্ঞান যাচাই ও স্মরণমূলক প্রশ্ন করা।

খ) চকবোর্ড ব্যবহার দক্ষতার উপাদান ও আচরণের বর্ণনা :

	উপাদান	আচরণ
১	হাতের লেখার বোধগম্যতা	স্পষ্ট অক্ষরে লেখা। অক্ষর ও শব্দের মাঝে যথাযথ ফাঁক রাখা। অক্ষরের আকারের সামঞ্জস্য রক্ষা করা।
২	লেখার পরিচ্ছন্নতা	লাইনের সরলতা রক্ষা করা। লাইনের মাঝে যথাযথ ফাঁক রাখা। ওভার রাইটিং বা কাটাছেঁড়া না করা। প্রাসঙ্গিক বিষয় চিহ্নিত করা।
৩	বোর্ডের কাজের যথোপযুক্ততা	লেখায় বিষয়বস্তুর ধারণার ধারাবাহিকতা বজায় রাখা। সংক্ষিপ্ততা ও সরলতা রক্ষা করা। মনোযোগ আকর্ষণের জন্য ফোকাসিং করা।
৪	চিত্র সংগঠন	যথাসম্ভব নিখুঁত অঙ্কন, লেবেলিং ও স্পষ্টিকরণ করা।
৫	শিক্ষক ও বোর্ডের অবস্থান	শিক্ষক চলাফেরায় যেন শিক্ষার্থীদের থেকে বোর্ডের কাজ আড়াল না করেন। বোর্ড পয়েন্টার ব্যবহার করা।

অনুশিক্ষণ

শিক্ষকের শিক্ষণ দক্ষতা উন্নয়নের জন্য অনুশিক্ষণ একটি কৌশল।

অনুশিক্ষণ কৌশলের নীতিমালা: অনুশিক্ষণ কৌশল নিম্নরূপ ধারণা ও নীতিমালার উপর প্রতিষ্ঠিত:

- শিক্ষণ প্রক্রিয়া বিভিন্ন শিক্ষণ আচরণে বিশ্লিষ্ট হতে পারে, যাকে বলা হয় শিক্ষণ দক্ষতা।
- শিক্ষণ দক্ষতাকে সংজ্ঞায়ন করা যায়, অনুশীলন করা যায়, পর্যবেক্ষণ করা যায়, নিয়ন্ত্রণ করা যায়, পরিমাপ এবং মূল্যায়ন করা যায়।
- কোন আচরণে বলবৃদ্ধি সে আচরণ পুনরায় ঘটার সম্ভাবনা বাড়ায় এবং তা না হলে পুনরায় ঘটার সম্ভাবনা কমে যায় - স্কিনারের এ তত্ব অনুশিক্ষণের ফলাবর্তন অধিবেশনের মৌলিক ভিত্তি।

মাইক্রো টিচিং বা অনুশিক্ষণের 'টিচ-ফিডব্যাক-রিটিচ' প্যাটার্ন থেকে প্রতীয়মান হয়, আচরণের নতুন প্যাটার্ন অর্জনের লক্ষ্যে স্কিনারের 'পরপর নৈকট্যকরণ (successive approximation)' তত্ত্ব অনুসৃত হয়েছে।

অনুশিক্ষণ প্রক্রিয়ার স্তর: শিক্ষণ দক্ষতা উন্নয়নের জন্য ব্যবহৃত অনুশিক্ষণ কৌশলটি কয়েকটি স্তরে বিভক্ত:

১. **পরিকল্পনা:** প্রশিক্ষণার্থী শিক্ষক বিষয়বস্তুর একটি ধারণাকে কেন্দ্র করে নির্বাচিত একটি শিক্ষণ দক্ষতার উপর জোর দিয়ে অনুশিক্ষণ পাঠ-পরিকল্পনা তৈরি করবেন। এ বিষয়ে তিনি শিক্ষক প্রশিক্ষক বা বই পুস্তক, ইন্টারনেট ইত্যাদির সহায়তা নিতে পারেন। অনুশিক্ষণ পরিবেশ/পরিস্থিতি সংগঠনের জন্য একটি আদর্শ রূপ দেওয়া হল:

- শ্রেণির শিক্ষার্থী সংখ্যা: ৫ – ১০ (অন্তত ১ জন পর্যবেক্ষক)
- শিক্ষার্থীর ধরন: সত্যিকার শ্রেণি শিক্ষার্থী অথবা সাথী প্রশিক্ষণার্থী
- পর্যবেক্ষক: শিক্ষক প্রশিক্ষক এবং প্রশিক্ষণার্থী শিক্ষক
- অনুশিক্ষণ পাঠচক্রের সময়কাল: ৩৬মিনিট:

  ক) শিক্ষণ অধিবেশন – ৬ মিনিট
  খ) ফলাবর্তন বা ফিডব্যাাক অধিবেশন – ৬ মিনিট
  গ) পুনপরিকল্পনা প্রণয়ন/নবায়ন – ১২ মিনিট
  ঘ) পুনশিক্ষণ কাল – ৬ মিনিট
  ঙ) পুনফলাবর্তন – <u>৬ মিনিট</u>
  মোট- ৩৬ মিনিট।

২. **দক্ষতা অনুশীলন (শিক্ষণ অধিবেশন) :** এ স্তরে প্রশিক্ষণার্থী শিক্ষক ৬ মিনিটে উপস্থাপনযোগ্য তার তৈরী পাঠ পরিকল্পনা বাস্তবায়ন করবেন। ঘোষিত দক্ষতার প্রেক্ষিতে তৈরী পর্যবেক্ষণ **তালিকা** নিয়ে এ পাঠ সংশ্লিষ্ট শিক্ষক প্রশিক্ষক এবং সাথী প্রশিক্ষণার্থীরা পর্যবেক্ষণ করবেন এবং লিপিবদ্ধ করবেন। যেখানে সম্ভব প্রশিক্ষণার্থী শিক্ষক তাঁর ক্লাশ ভিডিও বা অডিওতে রেকর্ড করবেন।

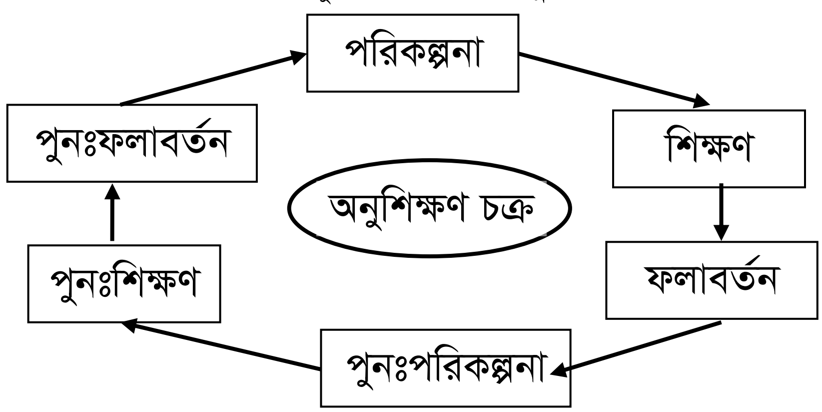
৩. **ফলাবর্তন বা ফিডব্যাক প্রদান :** প্রশিক্ষণার্থী শিক্ষককে পাঠ উপস্থাপন শেষে সাথে সাথে ফিডব্যাক দেওয়া জরুরী। বিবেচ্য শিক্ষণ দক্ষতাকে গুরুত্ব দিয়ে আচরণিক উপাদান সমন্বিত পর্যবেক্ষণ তালিকায় লিপিবদ্ধ বিষয়ানুসারে ফিডব্যাক দিবেন। শিক্ষার্থী হিসাবে অংশগ্রহণকারি সাথীরাও ফিডব্যাক দিতে পারেন। প্রয়োজনে রেকর্ডকৃত পাঠ দেখে বা শুনে ফিডব্যাক নিতে পারেন।

৪. **পুনপরিকল্পনা (রিপ্ল্যান) :** বিভিন্ন উৎস থেকে ফিডব্যাক নিয়ে প্রশিক্ষণার্থী শিক্ষক তার পাঠের পুনরায় পরিকল্পনা করবেন। এর জন্য তিনি ১০/১২ মিনিট সময় পাবেন।

৫. **পুনশিক্ষণ (রিটিচিং) :** পুনরায় প্রস্তুত পাঠ পরিকল্পনা অনুসারে পূর্বের ক্লাশ সেটিং পুনর্বিন্যাস করে বা ঠিক রেখে আরও ৬ মিনিটের জন্য পাঠ পুনরায় উপস্থাপন করবেন ।

৬. **পুনফিডব্যাক:** প্রশিক্ষণার্থী তার পুনউপস্থাপনের আচরণের আলোকে আগের ফিডব্যাক গ্রহণের নীতিতে পুনরায় ফিডব্যাক গ্রহণ করবেন।

অনুশিক্ষণ চক্র: অনুশিক্ষণ প্রধানত ৬ স্তর বিশিষ্ট একটি চক্রক্রমিক প্রক্রিয়া যা চলতে থাকে যতক্ষণ না প্রশিক্ষণার্থী নির্ধারিত শিক্ষণ দক্ষতার কাঙ্ক্ষিত মান অর্জন করেন। অনুশিক্ষণ স্তরগুলোকে নিম্নরূপ চক্রাকারে দেখানো যায়:



প্রশিক্ষণার্থী শিক্ষকের বিবেচ্য দক্ষতার যথার্থ উন্নতি না হওয়া পর্যন্ত এ চক্রের পুনরাবৃত্তি চলবে।

অনুশিক্ষণ পাঠপরিকল্পনা (নমুনা)

বিষয়: জ্যামিতি বিষয়বস্তু: ত্রিভুজের প্রকারভেদ

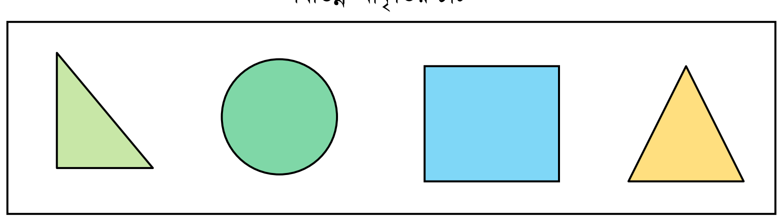
বিবেচ্য শিক্ষণ দক্ষতা: প্রশ্নকরণ

শিক্ষণ কাল: ৬মিনিট।

প্রেষণা সৃষ্টিমূলক আচরণ:

- আমরা এ কক্ষে কি কি আকার আকৃতি দেখতে পাই?
- পূর্বে তৈরী একটি চার্ট দেখিয়ে;

বিভিন্ন আকৃতির চার্ট



- এখানে কি কি চিত্র দেখা যায়?
- সবচে কম সংখ্যক বাহুদ্বারা গঠিত জ্যামিতিক চিত্রের নাম কী?

উপস্থাপন ও ব্যাখ্যামূলক আচরণ :

- একটি ত্রিভুজ আঁকতে দিলে আমরা কতভাবে তা আঁকতে পারি?
- কোণ ও বাহু ভেদে ত্রিভুজ কত প্রকার? এর বেশি কম কি হতে পারে?
- কোণভেদে এক প্রকার ত্রিভুজের নাম বল। এ ত্রিভুজটি বাহুভেদে কত প্রকার হতে পারে?
- সমকোণী ত্রিভুজ বাহুভেদে কত প্রকার হয়? এঁকে দেখাও।
- বাহু ও কোণ ভেদে এদের নাম কী হবে?
- স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে কী ঘটে?
- সমকোণী বা স্থূলকোণী ত্রিভুজ সমবাহু না হওয়ার কারণ কে ব্যাখ্যা করতে পারবে? ব্যাখ্যা কর।
- কর্মপত্রের ব্যবহার: জোড়ায় জোড়ায় আলোচনা করে প্রদত্ত ছকটি পূরণ কর: (উপরে ও বাঁয়ের নামের প্রেক্ষিতে যে ঘরের ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব সে ঘরে টিক '√' এবং না হলে, ক্রস '×' চিহ্ন দাও)

কোণ ও বাহু ভেদে ত্রিভুজের প্রকার: (হাঁ ঘরে টিক এবং না ঘরে ক্রস দাও দুটি করে দেখান হলে)

কোণভেদে ত্রিভুজ → বাহুভেদে ত্রিভুজ↓	সূক্ষ্মকোণী	সমকোণী	স্থূলকোণী
সমবাহু	√	×	
সমদ্বিবাহু			
বিষমবাহু			

ধারণা গঠন: এবার বল, কোণ ও বাহু মিলিয়ে নামকরণ করলে ত্রিভুজ কত প্রকার হয়? এগুলোর নাম কী?
সম্প্রসারণ মূলক চিন্তা: আর কী উপায়ে ত্রিভুজের শ্রেণিকরণ করা যায়? ভেবে দেখ।

৫.২ শিক্ষণ মডেল: ধারণা ও উপাদান, কয়েকটি শিক্ষণ মডেল: Concept Attainment Model(CAM), Inquiry Training Model(ITM)

শিক্ষণ মডেলের ধারণা ও উপাদান

শিক্ষা বিজ্ঞানী ও মনোবিজ্ঞানীগণের দীর্ঘ সময়ের গবেষণা ও অভিজ্ঞতার ফসল স্বরূপ অনেক শিখন তত্ত্ব আবিষ্কৃত হয়েছে। এ শিখন তত্ত্বসমূহের উপর ভিত্তি করে গবেষকগণ পাঠদানের জন্য বিভিন্ন কৌশল অবলম্বনের সুপারিশ করেছেন। এ সকল কৌশলের কোনোটিকে এককভাবে সেরা হিসেবে বিবেচনা করার সুযোগ নেই। বরং বিভিন্ন ক্ষেত্রে ভিন্ন ভিন্ন কৌশল কার্যকরী বলে প্রতীয়মান হয়েছে। মূলত এ জাতীয় কৌশলগুলোকে শিখনের সুনির্দিষ্ট লক্ষ্য অর্জনের জন্য "শিক্ষণ মডেল" হিসেবে বিবেচনা করা হয়ে থাকে।

Bruce Joyce এবং Marsha Weil (1980)-এর মতে, "Teaching models are just instructional designs. They describe the process of specifying and producing particular environmental situations which cause the student interact in such a way that specific changes occur in his behavior. It is a plan or pattern that can be used to shape curriculums (long-term courses of studies), to design instructional materials, and to guide instruction in the classroom and other settings"।

শিক্ষণ মডেলের কাজ

শিক্ষা বিজ্ঞানীগণ শিক্ষণ মডেলের কতিপয় কাজের উল্লেখ করেছেন। এগুলোর মধ্যে উল্লেখযোগ্য হচ্ছেঃ

- কারিকুলাম ডিজাইন করা।
- শিক্ষককে পাঠদানের যথোপযুক্ত কলাকৌশল ও শিখন সামগ্রী নির্বাচনে সহায়তা প্রদান করা।
- শিক্ষণ পদ্ধতি কার্যকর করার জন্য পরিকল্পনাকারী ও শিক্ষকদের নির্দেশনা প্রদান করা এবং শিক্ষণ প্রক্রিয়া কার্যকরভাবে সম্পন্ন করার উপায় উল্লেখ করা।
- শিক্ষক-শিক্ষার্থীর মিথস্ক্রিয়া সৃষ্টিতে সহায়তা করা।

- শিক্ষার্থীদের আচরণিক পরিবর্তনে নির্দেশনা প্রদান করা।
- শিক্ষার্থীদের ফিডব্যাক গ্রহণের সময়ে প্রতিফলন অনুশীলনে শিক্ষকদেরকে মৌলিক নির্দেশনা দানে সহায়তা করা।
- শিক্ষকের নিজের সবল ও দুর্বল দিকগুলো নিজে নিজে বিশ্লেষণ ও মূল্যায়নের মাধ্যমে শিক্ষণ পরিকল্পনা প্রণয়ন, বাস্তবায়ন ও উপযুক্ত ফলোআপ কার্যক্রম গ্রহণে সহায়তা দান।
- একটি সম্পূর্ণ ও নিখুঁত শিক্ষণ পরিকল্পনা গঠন করা।

শিক্ষণ মডেলের প্রকারভেদ

শিক্ষা বিজ্ঞানীগণ শিক্ষণ মডেলগুলোকে বিভিন্ন দৃষ্টিকোণ থেকে শ্রেণিবদ্ধ করেছেন। *Bruce Joyce, Marsha Weil ও Emily Calhoun (1985) তাঁদের রচিত Models of Teaching বইয়ে শিক্ষণ মডেলগুলোকে Families of teaching models নামে ৪টি পার্টে (Part) শ্রেণিবদ্ধ করেছেন। এগুলো হচ্ছে:

Part 1: The Social Interaction Family

মডেলের নাম	প্রবক্তা
1. Group investigation model (GIM)	*Herbert Thelen*
2. Role playing model (RPM)	*Fannie & Gerorge Shaftel*
3. Jurisprudential inquiry model (JIM)	*Donald Oliver*
4. Laboratory training model (LTM)	*National Training Laboratory*
5. Social simulation model (SSM)	*Cyberneticcs Psychologists*
6. Social inquiry model (SIM)	*Thelen, Oliver, Sharer*

এ মডেলগুলোর আলোচ্য বিষয় হলো:

- শিখনের অংশীদার: দ্বৈত বা জোড়ায় কাজ, দলীয় অনুসন্ধানমূলক কাজ।
- ভূমিকাভিনয়ের মাধ্যমে সামাজিক ব্যবহার ও মূল্যবোধ শিখন।
- সামাজিক রীতি-নীতি শিখন।
- ব্যক্তিগত পার্থক্য অনুধাবন ও অভিযোজন।

Part 2: The Information-Processing Family

মডেলের নাম	প্রবক্তা
1. Concept Attainment Model (CAM)	*Jerome S Bruner**
2. Inductive Thinking Model (ITM)	*Hilda Taba*
3. Inquiry Training Model (ITM)	*J. Richard Suchman*
4. Advance Organizer Model (AOM)	*David Ausubel*
5. Memory Model (MM)	*Jerry Lucas*
6. Biological Science Inquiry Model (BSIM)	*Joseph Schwab*
7. Cognitive Development Model (CDM)	*Jean Piaget, Kohlberg, Siegal*

এ মডেলগুলোর আলোচ্য বিষয় হলো :

- আরোহী চিন্তন: তথ্য সংগ্রহ, সংগঠন ও সুসংবদ্ধ করে কাজে লাগানো।
- চিন্তনের মৌলিক দক্ষতার মাধ্যমে ধারণা অর্জন।
- মুখস্ত করণ: সরাসরি কোন ঘটনা সম্পর্কে জানা।
- অগ্রণী সংগঠকের কাছে উপস্থাপনের মাধ্যমে শিখন।
- অনুসন্ধানমূলক প্রশিক্ষণের মাধ্যমে ঘটনা থেকে তত্ব গঠন।
- Synectics বা সৃজনশীল চিন্তন দক্ষতার বিকাশ।
- জ্ঞান ও বুদ্ধিমত্তার উন্নয়ন।

Part 3: The Personal Family

মডেলের নাম	প্রবক্তা
1. Non-Directive Teaching Model (NTM)	*Carl Rogers*
2. Synetics Model (SM)	*William J. J. gordon*
3. Awareness Training Model (ATM)	*William Schutz and George Brown*
4. Class Room Teaching Model (CTM)	*William Glasser*

এ মডেলগুলোর আলোচ্য বিষয় হলো :

- শিক্ষার্থীকেন্দ্রিক অনির্দেশনামূলক শিক্ষণ।
- আত্মনির্ভরতার ধারণা।

Part 4: The Behavioral Systems Family

মডেলের নাম	প্রবক্তা
1. Contingency Management Model (CMM)	*B. F. skinner**
2. Self-Control Through Operant Methods (STOM)	*B. F. Skinner*
3. Stress Reduction Model (SRM)	*Joseph Wolpe*
4. Desensitisation Model (DSM)	*Rimm & Master*
5. Assertive Training Model (ATM)	*Wolpe & Lazarus*

এ মডেলগুলোর আলোচ্য বিষয় হলো:

- মাস্টারি লার্নিং (Mastery Learning), ডাইরেক্ট ইন্সট্রাকশন (Direct Instruction), সামাজিক শিখন মতবাদ
- আত্মনিয়ন্ত্রণ শিখন: ফিডব্যাক প্রক্রিয়ার মাধ্যমে আচরণ সংশোধন।
- সিমুলেশনের মাধ্যমে সাধারণ দক্ষতা থেকে শুরু করে মহাকাশ অনুসন্ধানের প্রশিক্ষণ।
- শিখন ও শিক্ষাদানের শর্তাবলি।

শিক্ষণ মডেলের উপাদানসমূহ

প্রত্যেক শিক্ষণ মডেলের আবশ্যিক বা সাধারণ উপাদান থাকা দরকার। Joyce ও Weil শিক্ষণ মডেলের নিম্নোক্ত উপাদানসমূহের উল্লেখ করেছেন। তবে মডেল ভেদে উপাদানগুলো ভিন্ন হতে পারে। এগুলো হচ্ছেঃ

১. ফোকাস (Focus)
২. বিন্যাস (Syntax)
৩. সামাজিক কাঠামো (Social system)
৪. প্রতিক্রিয়ার নীতিমালা (Principles of reaction)
৫. সহায়তার পদ্ধতি (Support system)
৬. প্রয়োগ (Application)

ফোকাস(Focus) : এটি সংশ্লিষ্ট শিক্ষণ মডেলের কেন্দ্রীয় বিষয় নির্দেশ করে। শিখনের লক্ষ্যকে কেন্দ্র করে ফোকাস নির্ধারিত হয়।

বিন্যাস (Syntax): কোন পাঠের বিভিন্ন ধাপের ধারাবাহিক কার্যক্রমের বিবরণ প্রদানই হচ্ছে বিন্যাস (Syntax)। যেমন: Concept Attainment Model-এ পাঠ দানের শুরুতে উক্ত পাঠের বিশেষ বিশেষ ধারণাসমূহের অবতারণা করার জন্য উদাহরণ প্রদান করে পাঠ শুরু করা।

সামাজিক কাঠামো (Social system) : শিক্ষক-শিক্ষার্থীর সম্পর্কের ধরন, প্রকৃতি ইত্যাদির বিবরণ প্রদান। তিন ধরনের সামাজিক কাঠামো বিদ্যমান। এগুলো হচ্ছে :

১. উঁচু মাত্রার সামাজিক কাঠামো (Highly structured)
২. নিম্ন মাত্রার সামাজিক কাঠামো (Low structured)
৩. মধ্যম মাত্রার সামাজিক কাঠামো (Moderately structured)।

উঁচু মাত্রার সামাজিক কাঠামোতে শিক্ষক পূর্ব নির্ধারিত পরিকল্পনা অনুযায়ী শিক্ষার্থীদেরকে নিয়ন্ত্রিত পরিবেশে পাঠ পরিচালনা করেন। নিম্ন মাত্রার সামাজিক কাঠামোর বেলায় শিক্ষক ও শিক্ষার্থীগণের মিথষ্ক্রিয়া সর্বোচ্চ সম্ভব স্বাধীনভাবে পরিচালিত হয়। মধ্যম মাত্রায় শ্রেণি কার্যক্রমে মিথষ্ক্রিয়া নির্ভর করে পাঠের প্রয়োজন, প্রকৃতি, কাজের ধরন ইত্যাদির উপর।

প্রতিক্রিয়ার নীতি (Principles of reaction) : পাঠে শিক্ষক ও শিক্ষার্থীর প্রত্যাশিত কার্যক্রম ও প্রতিক্রিয়ার প্রকৃতির বিবরণ লিপিবদ্ধ করা হয়। এটি শিখনের মডেল বিশেষে শিক্ষককে প্রত্যেক শিক্ষার্থীর কার্যকলাপের প্রতি প্রতিক্রিয়া প্রদর্শনের প্রয়োজনীয় নির্দেশনা প্রদান করে।

সহায়তা দানের প্রক্রিয়া (Support system) : প্রত্যেক শিখন মডেলে শিক্ষণ-শিখন কার্যক্রম পরিচালনার জন্য কতিপয় সুনির্দিষ্ট শর্ত থাকে। এ সকল শর্ত শিখনের লক্ষ্য অর্জনে সুযোগ সৃষ্টি করে দেয়। শিক্ষক শিক্ষার্থীর প্রযোজন অনুযায়ী বাড়তি সুযোগ-সুবিধা ও সহায়তা প্রদান করে থাকেন।

প্রয়োগ (Application) : শিক্ষার্থী প্রাপ্ত ধারণাসমূহ নতুন নতুন ক্ষেত্রে প্রয়োগে সক্ষম হন।

কয়েকটি উল্লেখযোগ্য শিক্ষণ মডেল

Concept Attainment Model (CAM)

১৯৫৬ সালে A Study of Thinking বইয়ে Jerome S. Bruner, Jacqueline J. Goodnew ও George A. Austin প্রথম Concept Attainment Model (CAM) সম্পর্কে আলোকপাত করেন। Jerome Bruner ছিলেন New York University-এর Law School-এর মনোবিজ্ঞানী। তিনি তাঁর সহযোগীদের নিয়ে দীর্ঘ গবেষণার পর এ শিখন মডেল সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা উপস্থাপন করেন।

শিক্ষার্থীদেরকে কোন নির্দিষ্ট বিষয়বস্তুর নির্দিষ্ট একটি অংশের গভীর ও নিখুঁত ধারণা প্রদানের জন্য এ শিখন মডেল ব্যবহার করা হয়ে থাকে। এতে শিক্ষার্থীরা শিক্ষক কর্তৃক পূর্বগঠিত কোন বিষয়বস্তুর নির্দিষ্ট অংশের বৈশিষ্ট্য খুঁজে বের করে। শিক্ষার্থীরা উক্ত নির্দিষ্ট পাঠ্যাংশ কি কি ধারণাগত বৈশিষ্ট্য বহন করে এমন উদাহরণ এবং উক্ত ধারণার বৈশিষ্ট্য অনুপস্থিত এমন উদাহরণের মধ্যে তুলনা করে দু'টি গ্রুপে বিভাজন করে। মূলত CAM হচ্ছে পরোক্ষভাবে শিখন শেখানোর কৌশল যা কাঠামোবদ্ধ বা সুসংবদ্ধ অনুসন্ধান প্রক্রিয়া দ্বারা পরিচালিত। এতে পাঠ্যাংশ সম্পর্কে শিক্ষার্থীর চিন্তা ও তাদের পূর্ব অভিজ্ঞতাকে কাজে লাগিয়ে কোন সুনির্দিষ্ট ধারণাকে দৃঢ় করা হয়।

ধারণা'র অর্থ (Meaning of Concept)

CAM–এর অন্যতম প্রধান বিষয় হচ্ছে '***ধারণা***'। এ সম্পর্কে বিভিন্ন মতামত পাওয়া যায়। Selvan (1993)-এর মতে, শিক্ষার্থীর মানসপটে কতিপয় বস্তু, কোন ঘটনা বা কিছু অভিজ্ঞতার যে প্রতিরূপ বা কল্পমুর্তি গঠিত হয় তা'ই হচ্ছে ধারণা। Dr Surjoday Bhattacharya (2014)-এর মতে, æConcepts are the ideas of abstractions that are formed as a result of categorizing data from a number of observations." অর্থাৎ পর্যবেক্ষণের ফলে প্রাপ্ত তথ্যকে শ্রেণিবদ্ধ করার ফল স্বরূপ যে বিমূর্ত কল্পনা বা ভাবের সৃষ্টি হয় তা'ই হচ্ছে ধারণা।

Munn (1967, pp. 350-351))-এর মতে, æA concept is a process which represents the similarities in otherwise diverse objects, situations, or events. Concepts are products of reasoning and, once developed, play an important role in further thinking. A large proportion of the words in any complex language represents concepts." Munn আরো উল্লেখ করেন যে, ধারণা উন্নয়নের জন্য দু'টি পর্যায়ক্রমিক প্রক্রিয়া প্রয়োজন: (১) সারসংক্ষেপকরণ (abstracting), (২) সাধারণীকরণ (generalizing)। সারসংক্ষেপ করা অর্থ হচ্ছে বিভিন্ন বস্তু বা বিষয়ের সাধারণ বৈশিষ্ট্য প্রত্যক্ষণ করা। অপর পক্ষে, সাধারণীকরণ হচ্ছে সতর্ক প্রত্যক্ষণের ফলে সুচিন্তিত সিদ্ধান্ত। কোনো কোনো সময় এ দু'টিকে পৃথক করা যায় না। যেমন: মৌলিক সংখ্যা, উৎপাদক, অনুপাত ইত্যাদি এক একটি ধারণা।

Bruner Et al (1956)-এর মতে, æA concept is a class or grouping response, an act of categorization, involves rendering different things equivalent."

বিভিন্ন মতামত বিবেচনা করে দেখা যায়, ধারণা হচ্ছে কোন বিষয়বস্তু সম্পর্কে শ্রেণিবদ্ধ সাধারণ বৈশিষ্ট্য।

ধারণার উপাদানসমূহ (Elements of Concept)

প্রত্যেক ধারণার কতগুলো উপাদান আছে। এগুলো হচ্ছে:

নাম (Name): প্রত্যেক ধারণার একটি নাম থাকে। কোন ক্যাটাগরির জন্য প্রদত্ত পদাবলি বা লেবেল হচ্ছে এর নাম। যেমন: রেখা, বাহু, চলরাশি, অনুপাত ইত্যাদি। এটি একটি সাধারণ পদ, যা কোন নির্দিষ্ট বিষয়বস্তুকে নির্দেশ করে, যদিও উক্ত নির্দিষ্ট বিষয়বস্তুর খুটিনাটি বিশ্লেষণ করলে আইটেম ভেদে কিছু সাধারণ বৈশিষ্ট্য ভিন্ন হতে পারে।

গুণ (Attributes) : কোন ধারণার সাধারণ ফিচার বা বৈশিষ্ট্যাবলি যা একটি থেকে অন্যটিকে আলাদা করে এবং কোন উদাহরণকে একটি নির্দিষ্ট ক্যাটাগরিতে স্থান করে দেওয়ার সুযোগ করে দেয়, তা'ই হচ্ছে এর গুণ। প্রত্যেক 'গুণ'-এর একটি মান (Value) থাকে। প্রত্যেক ধারণার ২টি গুণ থাকে:

- **আবশ্যিক গুণ (Essential attributes):** কোন বিষয়ের সাধারণ ফিচার বা বৈশিষ্ট্যাবলি হচ্ছে এর আবশ্যিক গুণ। যেমন: প্রত্যেক ত্রিভুজের ৩ টি বাহু ও ৩ টি কোণ থাকে।
- **অনাবশ্যক গুণ (Non-essential attributes):** যে সকল গুণ কোন ধারণাকে চিহ্নিত করতে সাহায্য করে না বা ভূমিকা রাখে না তা'ই হচ্ছে এর অনাবশ্যক গুণ। কোন বিষয়ের সাধারণ ফিচার বা বৈশিষ্ট্যাবলি ব্যতীত অন্যান্য গৌণ বৈশিষ্ট্যাবলিও অনাবশ্যক গুণ হিসেবে বিবেচিত হয়। যেমন: প্রত্যেক ত্রিভুজের ৩ টি বাহু ও ৩ টি কোণ থাকে; কিন্তু সমকোণী ত্রিভুজ ব্যতীত অন্য ত্রিভুজে অতিভুজ, লম্ব, ভূমি থাকে না। ফলে, ত্রিভুজ চিহ্নিত করণে অতিভুজ, লম্ব, ভূমি সাধারণত বিবেচ্য নয়।

উদাহরণ (Examples-positive ও Negative**):** ব্রুনার এ'টি ব্যাখ্যার জন্য exemplar ব্যবহার করেছেন। প্রত্যেক ধারণার একাধিক উদাহরণ থাকতে পারে। এ সকল উদাহরণের মধ্যে কিছু আবশ্যিক গুণ এবং কিছু অনাবশ্যক গুণ থাকে। ব্রুনারের মতে, যেসব ধারণার উদাহরণে প্রয়োজনীয় আবশ্যিক গুণাবলি পাওয়া যায় তাকে ধনাত্মক উদাহরণ বলে। আর ঋণাত্মক উদাহরণের বেলায় ধারণার কিছু কিছু বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করে অর্থাৎ এক-দু'টি মাত্র আবশ্যিক গুণাবলি উপস্থিত থাকে। যেমন: বৃত্ত হিসেবে মহিলাদের হাতের চুড়ি একটি ধনাত্মক উদাহরণ; আর ঘড়ির ডায়াল ঋণাত্মক উদাহরণ। কারণ কোন কোন ঘড়ির ডায়াল বৃত্তাকার ব্যতীত ওভাল বা চৌকোণাকারও হতে পারে।

সংজ্ঞা বা বিধি (Definition/Rule): ধারণার সর্বশেষ উপাদান হচ্ছে সংজ্ঞা বা বিধি। এ ক্ষেত্রে সংজ্ঞা বা বিধি বলতে কোন বিশেষ ধারণার গুণসমূহের বিবরণকে বুঝায়। কোন ধারণার সঠিক বিধি বা বিবরণ দ্বারা উক্ত ধারণার কার্যকর ব্যবহার, এর আবশ্যিক ও অনাবশ্যক গুণাবলি এবং ধনাত্মক উদাহরণ ও ঋণাত্মক উদাহরণকে বুঝাবে। যেমন: সমবাহু ত্রিভুজের সকল বাহু যেমন সমান, তেমনি সকল কোণও সমান এবং প্রত্যেক কোণের পরিমাণ ৬০°।

ধারণা'র প্রকারভেদ(Types of Concept)

Bruner তিন ধরনের ধারণার অবতারণা করেছেন। এগুলো হচ্ছে:

- সংযোজক ধারণা (Conjunctive Concept)
- বিয়োজক ধারণা (Disjunctive Concept)
- সম্বন্ধযুক্ত ধারণা (Relational Concept)

সংযোজক ধারণা (Conjunctive Concept)

প্রত্যেক উদাহরণে আবশ্যিক সকল বৈশিষ্ট্য একত্রে উল্লেখ পাওয়া গেলে উক্ত ধারণা পূর্ণতা পাবে এবং গ্রহণযোগ্য হবে। যেমন: বাহুভেদে ত্রিভুজ শিখনের ক্ষেত্রে এর বিশেষ বৈশিষ্ট্যসমূহ উল্লেখ্য।

বিয়োজক ধারণা (Disjunctive Concept)

বিয়োজক ধারণার ক্ষেত্রে প্রত্যেক উদাহরণে এর আবশ্যিক বৈশিষ্ট্যাবলির দু-একটির উল্লেখ পাওয়া গেলেও এর অন্যান্য বৈশিষ্ট্যাবলি অনুপস্থিত থাকে। যেমন: ট্রাপিজিয়াম শিখনের ক্ষেত্রে দেখা যায় দু'টি বাহু সমান্তরাল ও অপর দু'বাহু অসমান্তরাল যা সামান্তরিকের বৈশিষ্ট্যের আংশিক ঘাটতি।

সম্বন্ধযুক্ত ধারণা (Relational Concept)

কোন উদাহরণে ধারণাসমূহের বৈশিষ্ট্যাবলির কয়েকটির উল্লেখ পাওয়া যায় এবং এদের মধ্যে আন্তসম্পর্ক বিদ্যমান। যেমনঃ দুটি রাশির গসাগু নির্ণয়ের ক্ষেত্রে দেখা যায় গুণিতক, গুণনীয়ক, উৎপাদক এবং কোন কোন ক্ষেত্রে মৌলিক রাশির ধারণাগত বৈশিষ্ট্যসমূহ বিবেচ্য হয় যা পরস্পরের সাথে সম্পর্কযুক্ত।

Concept Attainment Model (CAM) বাস্তবায়নের ধাপসমূহঃ

পর্যায় ১: একটি ধারণা নির্বাচন

পর্যায় ২: শিক্ষার্থীদের নিকট ২/৩টি বৈশিষ্ট্যের বিশদ ব্যাখ্যা প্রদান

পর্যায় ৩: শিক্ষার্থীদের নিকট বাস্তব/যথার্থ উদাহরণ ও অভাববোধক বা সম্পর্কহীন উদাহরণ প্রদান

পর্যায় ৪: শিক্ষার্থী কর্তৃক উদাহরণ প্রদান

পর্যায় ৫: প্রয়োজনে সংগতিপূর্ণ ধারণা প্রদান

Concept Attainment Model-এর সুবিধাঃ

- শিক্ষার্থী কী জানে এবং আরো কী জানা দরকার তা বের করতে সাহায্য করে।
- বিভিন্ন দৃষ্টিকোণ থেকে কোন ধারণা কিভাবে গঠন করতে হয় তা রপ্ত করতে শিখে।
- কতগুলো প্রাসঙ্গিক ও সম্পর্কযুক্ত ধারণা থেকে উপযুক্ত তথ্য বাছাই করতে শিখে।
- ধারণা ব্যবহার করে একাধিক উদাহরণ তৈরি করতে শিখে।
- যুক্তির মাধ্যমে শিখনে অভ্যস্ত হয়।
- কল্পনা করতে শিখে।
- বুদ্ধিমত্তার বিকাশ ঘটে।
- তীক্ষ্ণ প্রত্যক্ষণ করতে শিখে।
- পদ্ধতিগত বিশ্লেষণী দক্ষতা বৃদ্ধি পায়।
- পাঠে সক্রিয় থাকে।
- স্ব-শিখনে উদ্বুদ্ধ হয়।
- চাপ সামলে নিতে অভ্যস্ত হয়।

Concept Attainment Model-এর অসুবিধাঃ

- যথেষ্ট সময় ব্যয় হয় কিন্তু সে তুলনায় শিখন হয় কম।
- অনেক সময় মনগড়া সিদ্ধান্তে উপনীত হয়।
- কোন কোন শিক্ষার্থী নিষ্ক্রিয় থাকতে পারে।
- লাজুক শিক্ষার্থীরা খুব একটা উপকৃত হয় না।

৫.৩ কয়েকটি উল্লেখযোগ্য শিক্ষণ মডেল: 5E Model of BSCS, Inductive Thinking Model, Mastery Learning Model

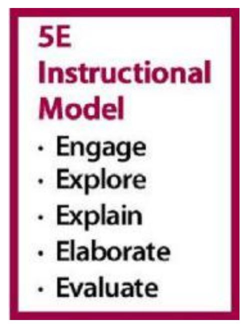
BSCS -এর 5E মডেল (5E Model of BSCS)

১৯৫৮ সালে আমেরিকায় Biological Sciences Curriculum Study (BSCS) গঠিত হয়। প্রথম দিকে জীববিজ্ঞান বিষয়ক শিখন উন্নয়নের জন্য এর সূচনা হলেও বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখায়ও এর ব্যাপক ব্যবহার হতে থাকে। মূলত Johann Friedrich Herbart-এর পঞ্চসোপান, Dewey-এর Model of Reflective Thinking, Heiss, Obourn, ও Hoffman-এর Learning Cycle, Robert Karplus ও J. Myron Atkin-এর SCIS(Science Curriiculum Improvement Study) Learning Cycle দ্বারা প্রভাবিত হয়ে Roger Bybee-এর নেতৃত্বে একদল বিজ্ঞানী এ মডেলটির সূত্রপাত করেন। এ মডেল অনুযায়ী শিখন ৫টি ধাপে পরিচালনার কথা বলা হয়েছে। এগুলো হচ্ছে: Engagement, Exploration, Explanation, Elaboration Evaluation. ধাপগুলোর প্রত্যেকটি শব্দের প্রথম বর্ণ E হওয়ায় এ মডেলটিকে 5E মডেল নামকরণ করা হয়েছে। নিচে 5E মডেলের ধাপগুলোর সংক্ষিপ্ত বিবরণ দেয়া হলো:

ফোকাস(Focus)	বিবরণ (Description)
নিয়োজন (Engagement)	শিক্ষক শিক্ষার্থীদের পূর্ব জ্ঞানকে কাজে লাগিয়ে কৌতূহল উদ্দীপক সংক্ষিপ্ত কার্যক্রমের মাধ্যমে নূতন কোন ধারণা গঠনের জন্য সক্রিয় শিখনে নিয়োজিত করেন। কার্যক্রমটি শিক্ষার্থীর পূর্ব ও বর্তমান জ্ঞানের মধ্যে সংযোগ স্থাপন, পূর্ব ধারণাকে কাজে লাগায় এবং চিন্তন দক্ষতাকে শাণিত করে পাঠের শিখনফল অর্জনে সহায়তা করবে এমন হতে হয়। এ ক্ষেত্রে শিক্ষার্থী কোন বিষয়বস্তু, সমস্যা, পরিস্থিতি বা ঘটনার উপর মনোযোগ দিয়ে থাকে। প্রশ্ন জিজ্ঞাসা, অর্থ নিরূপণ, অসঙ্গতিপূর্ণ বা সমস্যামান ঘটনা প্রত্যক্ষণ ইত্যাদির মাধ্যমে শিক্ষার্থীকে বিভিন্ন কাজে নিয়োজিত করা হয়। এখানে ‘কার্যক্রম’ শব্দটি মানসিক ও শারীরিক উভয় অর্থে বুঝাবে।
অনুসন্ধান (Exploration)	এ পর্যায়ে শিক্ষার্থী মনস্তাত্ত্বিকভাবে ধারণা অনুসন্ধান ও তথ্য সংগ্রহ করে। এ অনুসন্ধান কার্যক্রমগুলো এমনভাবে সাজানো হয় যেন সমগ্র শ্রেণির শিক্ষার্থীরা একটি সাধারণ ও সুনির্দিষ্ট অভিজ্ঞতার মাধ্যমে ধারণা সূত্রবদ্ধ করতে পারে; প্রক্রিয়া বা কার্যধারা অনুসরণে সক্ষম হয় এবং প্রয়োজনীয় দক্ষতা অর্জন করে। প্রয়োজনে পূর্ব ধারণা সংশোধন বা পরিমার্জন করা হয়। এ ধাপে শিক্ষার্থীরা নূতন ধারণা গঠন, প্রশ্ন জিজ্ঞাসা ও কোন কিছুর সম্ভাব্যতা নিরূপণ এবং নক্সা সহকারে প্রাথমিক অনুসন্ধান পরিচালনার জন্য ল্যাব কার্যক্রমও পরিচালনা করতে পারে। শিক্ষক এ পর্যায়ে কোচ বা ফেসিলিটেটর হিসাবে প্রয়োজনীয় সহায়তা প্রদান করবেন।
ব্যাখ্যা (Explanation)	‘Explanation’ শব্দটি ধারণা, প্রক্রিয়া বা দক্ষতাকে সহজ, বোধগম্য ও সুস্পষ্ট করা অর্থে বুঝায়। এ পর্বে শিক্ষক শিক্ষার্থীকে কোন সুনির্দিষ্ট বিষয়ে মনোযোগ দিয়ে তার ধারণাগত বোধগম্যতা, প্রক্রিয়াগত দক্ষতা বা আচরণগত পরিবর্তন প্রদর্শনের সুযোগ তৈরি করে দেন। প্রথমে শিক্ষক শিক্ষার্থীকে নির্দিষ্ট বিষয়ে তার ধারণা ব্যাখ্যা করতে দেন। পরে শিক্ষক সরাসরি, স্পষ্ট ও আনুষ্ঠানিকভাবে ধারণা, প্রক্রিয়া বা দক্ষতার সূত্রপাত ও বৈজ্ঞানিক বা প্রযুক্তিগত ব্যাখ্যা প্রদান করেন। এ ধাপের মূখ্য বিষয় হচ্ছে শিক্ষার্থীর কাছে ধারণা, প্রক্রিয়া বা দক্ষতাগুলোকে সংক্ষিপ্ত পরিসরে সরল ও স্পষ্টভাবে সরাসরি উপস্থাপন করে পরবর্তী ধাপে এগিয়ে নিয়ে যাওয়া।
সম্প্রসারণ বা বিস্তৃতি (Elaboration)	শিক্ষক বিভিন্ন কার্যক্রম পরিচালনার মাধ্যমে শিক্ষার্থীর ধারণাগত বোধগম্যতা ও দক্ষতা বৃদ্ধি করেন। শিক্ষার্থী নূতন অভিজ্ঞতার আলোকে আরো গভীর ও অধিক বোধশক্তি, তথ্য, পর্যাপ্ত দক্ষতার উন্নয়ন করে। Audrey Champagne (1987) এ বিষয়ে বলেন: বিস্তৃতি পর্যায়ে শিক্ষার্থী দলীয় আলোচনা ও তথ্য আহরণমূলক কার্যক্রমের মাধ্যমে নিজেকে পাঠে সম্পৃক্ত করে। দলীয় আলোচনা কালে কাজকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করে নেওয়া হয়। শিক্ষার্থী শিক্ষক, পুস্তক, ইলেকট্রনিক ডাটাবেজ, জার্নাল, পরীক্ষণ এমনকি পরস্পরের সাথে শেয়ারিং-এর মাধ্যমে তথ্য

ফোকাস(Focus)	বিবরণ (Description)
	সংগ্রহ করে। এ কার্যক্রমকে 'তথ্য ভিত্তি' (Information Base) নামে অভিহিত করা হয়েছে। দলীয় আলোচনা ও ব্যক্তিগত প্রচেষ্টার মাধ্যমে শিক্ষার্থী কাজের ধারণা, তথ্য ভিত্তি ও সম্ভাব্য কৌশল ব্যবহার করে কাজটি সুসম্পন্ন করে। মনে রাখতে হবে যে মিথষ্ক্রিয়া এ পর্বের অন্যতম কৌশল। এ পর্বে শিক্ষার্থী নতুন নতুন পরিস্থিতি ও সমস্যায় একই বা সমজাতীয় বিষয়াবলি ব্যাখ্যা করার সুযোগ পাবে। কোন ধারণা, প্রক্রিয়া বা দক্ষতাকে সাধারণীকরণ (Generalization) করাই এ পর্বের প্রাথমিক লক্ষ্য।
মূল্যায়ন (Evaluation)	মূল্যায়ন পর্বে শিক্ষার্থীর বোধগম্যতা ও সামর্থ্য যাচাই করা হয় এবং শিখনের উদ্দেশ্য অর্জনে শিক্ষার্থীর উন্নয়ন ও অগ্রগতি পরিমাপ করার সুযোগ সৃষ্টি হয়। শিক্ষার্থী প্রদর্শনের মাধ্যমে নিজের শিখন উপস্থাপন করে আত্ম-মূল্যায়ন করতে পারে এবং শিক্ষক তার শিখন মূল্যায়ন করে থাকেন। অধিকন্তু শিক্ষার্থী ফিডব্যাক ও ব্যাখ্যার সঠিকতা সম্পর্কে জানতে পারে। শুরু থেকে বিভিন্ন পর্বে মূল্যায়ন করা হলেও এ পর্বে শিক্ষক আনুষ্ঠানিক মূল্যায়ন করে থাকেন। শিক্ষক অবশ্যই শিখনফল অর্জিত হয়েছে কিনা তা যাচাই করবেন। এ পর্বে প্রত্যেক শিক্ষার্থীর অর্জন যাচাই করতে হবে।

5E Model-এর সুবিধা:



- শিক্ষার্থীর বিষয়বস্তুগত জ্ঞান বৃদ্ধি পায়
- বৈজ্ঞানিক যুক্তি উপস্থাপনের দক্ষতা সম্প্রসারিত হয়
- গবেষণা কাজের জটিলতা ও অস্পষ্টতা দূরীভূত হয়
- ব্যবহারিক দক্ষতা বিকশিত হয়
- দলে কাজ করার সামর্থ্য তৈরি হয়
- বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গি ও আগ্রহ সৃষ্টি হয়।

5E Model-এর অসুবিধা:

- প্রচুর সময় ব্যয় হয়
- কঠিন বিষয়বস্তুর ক্ষেত্রে শিখনে অন্তরায় সৃষ্টি হয়
- কম পারঙ্গম শিক্ষার্থীরা অনেক সময় শিখনে আগ্রহ হারিয়ে ফেলে।

Inductive Thinking Model (ITM)

এস্তোনিয় বংশোদ্ভূত আমেরিকা প্রবাসী কারিকুলাম থিয়রিস্ট Hilda Taba ১৯৬৭ সালে Inductive Thinking Model (ITM) প্রবর্তন করেন। 'কন্ট্রা কোস্টা স্কুল ডিস্ট্রিক্ট'-এ পরিচালিত তাঁর বিখ্যাত কাজ æTeaching Strategy”-এর উপর ভিত্তি করে মডেলটি প্রণীত হয়। তিনি বিশ্বাস করতেন যে শিখন বিকাশে জ্ঞানার্জন, বোধগম্যতা এবং ফ্যাক্ট এর চেয়ে ভাবনা ও ধারণার ব্যবহারের উপর জোর দেওয়া দরকার।

Hilda Taba 'চিন্তন' সম্পর্কে তিনটি স্বীকার্য উল্লেখ করেছেন:

১. 'চিন্তন' শেখানো যায়

২. 'চিন্তন' হচ্ছে ব্যক্তি ও উপাত্তের মধ্যে সক্রিয় লেনদেন

৩. 'চিন্তা করার প্রক্রিয়া' ধারাবাহিকভাবে উদ্ভূত হয় যা বৈধ বা বিধিসম্মত (Lawful)।

ITM মডেলের উদ্দেশ্য

- উপাত্ত সংগ্রহ করা, বিন্যস্ত করা ও তা যথাযথভাবে ব্যবহার করা
- শিক্ষার্থীর মানসিক প্রক্রিয়া উন্নয়নে শিক্ষণ কৌশল ডিজাইন করা
- শিক্ষার্থীর সামর্থ্য শ্রেণিবদ্ধ করা
- তথ্য ব্যবহারের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর সক্ষমতার বিকাশ সাধন
- শিক্ষার্থীর পদ্ধতিগত ধারণা বিকাশে প্রণোদিত করা।

ITM মডেলের উপাদানসমূহ (Components of Inductive Thinking Model)

অন্যান্য মডেলের ন্যায় এ মডেলেরও বিভিন্ন উপাদান বিদ্যমান। এগুলো হচ্ছে:

Focus, syntax, social system, principles of reaction, support system, application

সিনট্যাক্স (Syntax)

শিক্ষাদান কৌশলের ধারাবাহিক কার্যক্রমের সমন্বয়ই সিনট্যাক্স। ৩টি শিক্ষাদান কৌশলের আওতায় ৯টি পর্বে সিনট্যাক্সকে ভাগ করা হয়েছে। বিভাগগুলো নিম্নরূপ:

কৌশল ১: ধারণা গঠন (Concept Formation)

পর্ব ১: গণনা ও তালিকাবদ্ধ করা (Enumerate and list)

পর্ব ২: দল গঠন করা (Group)

পর্ব ৩: লেবেল ও শ্রেণিবদ্ধ করা (Label, Categorize)

কৌশল ২: উপাত্তের ব্যাখ্যা (Interpretation of Data)

পর্ব ৪: মাত্রা ও সম্পর্ক নির্ধারণ (Identify dimensions and relationships)

পর্ব ৫: মাত্রা ও সম্পর্ক ব্যাখ্যা (Explain dimensions and relationships)

পর্ব ৬: অনুমিতি বা উপসংহার করা (Make inferences)

কৌশল ৩: নীতির প্রয়োগ (Application of Principles)

পর্ব ৭: পরিণাম সম্পর্কে ভবিষ্যদ্বাণী করা, অপরিচিত ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য বস্তু সম্পর্কে ব্যাখ্যা দান ও অনুসিদ্ধান্ত গঠন (Predict consequences, Explain unfamiliar Phenomenon & Hypothesize)

পর্ব ৮: ভবিষ্যদ্বাণী ও পরিণামের ব্যাখ্যা বা সমর্থন করা (Explain and/or support the predictions and hypotheses)

পর্ব ৯: ভবিষ্যদ্বাণী যাচাই করা (Verifying the prediction)।

ধারণা গঠন (Concept formation)

এ পর্যায়ে সমস্যার সাথে সম্পর্কিত উপাত্ত সনাক্ত ও তালিকাবদ্ধ করা হয়, একই জাতীয় আইটেমসমূহকে একই দলভুক্ত করে এগুলোকে কোন নাম দিয়ে লেবেলিং করে শ্রেণিবদ্ধ করা হয়। শিক্ষক শিক্ষার্থীকে সমস্যার সাথে সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ উপাত্তসমূহের তথ্য আহরণে উৎসাহিত করেন। প্রাপ্ত তথ্যগুলোকে প্রাথমিকভাবে বিভিন্ন দলভুক্ত করে আরো তথ্য আহরণ করতে দেওয়া হয়। এ প্রসঙ্গে 'হিলদা তাবা' কয়েকটি সহায়ক প্রশ্নের অবতারণা করেছেন। প্রশ্নগুলো হচ্ছে:

১। তুমি কী দেখছো? - শিক্ষার্থীকে একটি তালিকা তৈরি করতে দেওয়া।

২। কোনগুলোকে একসাথে করা যায়? - দলভুক্ত করা।

৩। দলভুক্ত বিষয়বস্তুগুলোকে কি কি নামকরণ করা যায়? - লেবেল ও শ্রেণিবদ্ধ করা।

এর উদ্দেশ্য হচ্ছে শিক্ষার্থীদেরকে তাদের মাঝে তথ্য প্রক্রিয়াকরণের ধারণাগত প্রক্রিয়া পরিচালনার দক্ষতা বৃদ্ধি করা। নিচের ছকে বিষয়টি উপস্থাপন করা হলো :

	প্রত্যক্ষ কার্যক্রম	অপ্রত্যক্ষ মানসিক ক্রিয়াকলাপ	উদ্বুদ্ধ করণ প্রশ্ন
১	গণনা ও তালিকাবদ্ধ করা (Enumerate and list)	পৃথকীকরণ (পৃথক পৃথক আইটেম খোঁজে বের করা)	তুমি কী দেখছো? নোট নিয়েছ কি?
২	দল গঠন করা (Group)	সাধারণ ধর্ম, সারসংক্ষেপ চিহ্নিত করা	কোনগুলোকে একসাথে করা যায়? মানদণ্ড কী?
৩	লেবেল ও শ্রেণিবদ্ধ করা (Label, Categorize)	আইটেমগুলোকে সাজানো	দলভুক্ত বিষয়বস্তুগুলোকে কি কি নামকরণ করা যায়? কোনটির সাথে কোনটি মিল খায়?

উপাত্তের ব্যাখ্যা (Interpretation of Data)

এ পর্যায়ে সমস্যাটির বিশদীকরণ, অনুমান ও সাধারণীকরণ করা হয়। ধরা যাক, শিক্ষার্থীকে বীজগণিতীয় লসাগু নির্ণয়ের জন্য কতগুলো উদাহরণ দেখতে দেওয়া হলো। এরপর, নিচের প্রশ্নটি দেওয়া হলো।

প্রশ্ন: রাশিগুলোর মধ্যে উৎপাদকগুলো লক্ষ্য করে ২, ৩, ৪ টি উৎপাদকের বেলায় কিভাবে বীজগণিতীয় লসাগু নির্ণয় করবে ব্যাখ্যা কর। নিচের ছকে বিষয়টি উপস্থাপন করা হলো:

	প্রত্যক্ষ কার্যক্রম	অপ্রত্যক্ষ মানসিক ক্রিয়াকলাপ	উদ্বুদ্ধ করণ প্রশ্ন
১	বৈশিষ্ট্যসূচক লক্ষণ (Identify points)	পৃথকীকরণ (পৃথক পৃথক আইটেম খোঁজে বের করা)	তুমি কী দেখছো? কী প্রত্যক্ষ করছো? খোঁজে দেখো?
২	তথ্য সনাক্তকরণ আইটেমসমূহের ব্যাখ্যা (Explaining items of identified information)	একটি বিষয়ের সাথে আরেকটির সংযোগ করা। কারণ ও ফলাফলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা।	কী ঘটেছে?
৩	অনুমিতি বা উপসংহার করা (Making inference)	সমস্যার গভীরে প্রবেশ করা, তাৎপর্য বের করা, জ্ঞাত তথ্যাদি বিচার করা	এ গুলোর অর্থ কী? এটি তোমার মনে কিসের ভাবনা জাগায়? কী উপসংহারে আসা যায়?

নীতির প্রয়োগ (Application of Principles)

এ পর্যায়ে শিক্ষার্থীকে ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য বস্তু বা বিষয়কে ব্যাখ্যা করতে বলা হয়। এখানে সমস্যাটি বিশ্লেষণ পূর্বক কার্যকারণ সম্পর্কিত পূর্ব জ্ঞান ব্যবহার করে পূর্বে গৃহীত অনুমানটি যাচাই করে নেওয়া হয়। অনুমান যাচাইয়ে যৌক্তিক নীতি মেনে চলা ও ব্যবহার করা হয়। নিচের ছকে বিষয়টি উপস্থাপন করা হলো:

	প্রত্যক্ষ কার্যক্রম	অপ্রত্যক্ষ মানসিক ক্রিয়াকলাপ	উদ্বুদ্ধ করণ প্রশ্ন
১	অনুমান ও ভবিষ্যদ্বাণী করা	সমস্যার পরিস্থিতি বিশ্লেষণ	কী ঘটবে যদি ... ... হয়?
২	ভবিষ্যদ্বাণী ও পরিণামের ব্যাখ্যা বা সমর্থন করা	কারণ ও ফলাফলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যেন ভবিষ্যদ্বাণী করা যায়	এটি ঘটবে বলে তুমি মনে কর কেন?
৩	ভবিষ্যদ্বাণী যাচাই করা	আবশ্যকীয় ও যথোচিতভাবে যৌক্তিক নীতি ব্যবহার	-

সামাজিক কাঠামো (Social system)

শিক্ষক তথ্যের সূত্রপাতকারী। তিনি প্রযোজনীয় নিয়ন্ত্রণের মাধ্যমে দলীয় কাজ প্রদান করেন এবং পূর্বেই কাজের ধারাবাহিক তালিকা তৈরি করে রাখবেন। এ ছাড়া, শ্রেণিতে সহযোগিতামূলক ও গণতান্ত্রিক পরিবেশ নিশ্চিত করেন। এভাবে শিক্ষার্থীকে শিখনে সক্রিয়ভাবে নিয়োজিত করেন।

প্রতিক্রিয়ার নীতি (Principle of reaction)

শিক্ষার্থী যেন প্রয়োজনীয় তথ্য পেতে পারে সে বিষয়ে শিক্ষক খেয়াল রাখবেন। দল বড় হলে প্রত্যেক শিক্ষার্থী যেন কাজে অংশ নিয়ে থাকে তা নিশ্চিত করা হয়। কাজ প্রদানকালে সুস্পষ্ট নির্দেশনা প্রদানের ব্যবস্থা থাকবে। এ ছাড়া, শ্রেণিতে সর্বোচ্চ শিখন নিশ্চিত করণের জন্য শিক্ষক জোরদার পর্যবেক্ষণ অব্যাহত রাখবেন। শিক্ষক নিশ্চিত হবেন যে শিক্ষার্থী নূতন অভিজ্ঞতা অর্জন ও শিখন কার্যক্রমে অংশগ্রহণে প্রস্তুত আছে।

সমর্থন কাঠামো (Support system)

অনেক বেশি তথ্য প্রয়োজন হয় এমন ক্ষেত্রে এ মডেলটি বিভিন্ন বিষয় ও বিষয়বস্তুভেদে শিক্ষকগণ শিখন কার্যক্রমে ব্যবহার করে থাকেন। এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীর উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণের সাধারণ বোধগম্যতা ও চিন্তন দক্ষতা বৃদ্ধিতে সাহায্য করেন।

নির্দেশনামূলক ও প্রতিপালনমূলক প্রভাব (Instructional and nurturant effects)

মূলত শিক্ষার্থীর ধারণা গঠনে অনেক বেশি অপরিশোধিত তথ্য-উপাত্ত ব্যবহার করা হয় এমন ক্ষেত্রে এ মডেলটি ব্যবহার করা হয়। এর প্রতিপালনমূলক প্রভাবের আওতায় যৌক্তিক ভাষা শিক্ষণ, পদ বা শব্দের অর্থ জানা, জ্ঞানের প্রকৃতি বুঝা ইত্যাদি কাজ সম্পন্ন করার দক্ষতা উন্নয়নকে বিবেচনা করা হয়।

প্রয়োগ (Application)

হিলদা তাবা'র আইটিএম মডেলটি নিম্নোক্ত কাজে ব্যবহৃত হচ্ছে:

- চিন্তন ক্ষমতা বৃদ্ধি
- অনেক বেশি তথ্য প্রক্রিয়াকরণ
- শিক্ষাক্রমের বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রয়োগ
- ফলদায়ক ও সৃজনশীল চিন্তনে
- সমস্যা সমাধানমূলক কাজে তথ্য ব্যবহারের ক্ষেত্রে
- তরুণ শিক্ষার্থীর ধারণা গঠন কৌশল হিসাবে
- ধারণার প্রকৃতি বুঝতে।

ITM মডেলের সুবিধা:

- শিক্ষার্থীর চিন্তন দক্ষতা ও সৃজনশীলতা বৃদ্ধিতে সহায়তা করে
- তরুণ শিক্ষার্থীর ধারণাগত শিখন ও চিন্তন প্রক্রিয়া বিকাশে বিশেষ সহায়ক
- শিক্ষার্থীর সহজাত ক্ষমতা বিকাশে ভূমিকা রাখে
- শিক্ষার্থীর যৌক্তিক বিশ্লেষণী দক্ষতা, বোধগম্যতা, বিষয়গত জ্ঞানের উন্নয়ন ঘটে।

ITM মডেলের অসুবিধা:

- মডেলটি প্রয়োগে যথেষ্ট দক্ষ শিক্ষক প্রয়োজন
- দীর্ঘ প্রক্রিয়া ও অনেকগুলো ধাপ অনুসরণ করতে হয় বিধায় অনেক সময় বিরক্তি উৎপাদন করে
- শিক্ষার্থীর তুলনায় শিক্ষককেই বেশি সক্রিয় থাকতে হয়।

Mastery Learning Model (MLM)

বিখ্যাত শিক্ষা বিজ্ঞানী Benjamin Bloom ১৯৬৮ সালে সর্বপ্রথম Mastery Learning Model (MLM) আনুষ্ঠানিকভাবে প্রস্তাব করেন। মডেলটির প্রস্তাবনা অনুযায়ি শিক্ষার্থীকে কোন বিষয়ে অবশ্যই একটি নির্দিষ্ট মাত্রার পান্ডিত্য অর্জন করতে হবে। এ মাত্রাটি শিক্ষক ঠিক করে থাকেন; কিন্তু তা ৯০% পর্যন্ত হতে পারে। শিক্ষার্থী প্রয়োজনীয় পূর্বজ্ঞান অর্জন না করা পর্যন্ত পরবর্তী শিখন তথ্যে অগ্রসর হওয়া যাবে না। যতক্ষণ পর্যন্ত শিক্ষার্থী নির্দিষ্ট মাত্রার শিখন অর্জন করতে পারবে না, ততক্ষণ পর্যন্ত প্রয়োজনীয় সহায়তা প্রদান অব্যাহত থাকবে। এ চক্রটি শিক্ষার্থীর শিখন প্রক্রিয়া সুসম্পন্ন না হওয়া পর্যন্ত চলতে থাকবে। সাধারণ শিখন কার্যক্রমে সকল শিক্ষার্থীর জন্য একই সময় বরাদ্দ করা থাকে। কিন্তু, আলোচ্য মডেল অনুযায়ী প্রত্যেক শিক্ষার্থীকে একটি নির্দিষ্ট বিষয়বস্তু পরিপূর্ণভাবে শিখনের জন্য পৃথক পৃথক সময় ও সুযোগ দিতে হবে।

Mastery-এর অর্থ

‘মাস্টারি’ কথাটির সংজ্ঞায়ন করতে গিয়ে Bloom, Hastings ও Madaus (১৯৭১) চারটি পর্যায়ের উল্লেখ করেছেন।

প্রথমত: শিক্ষক সনাতন ব্যবস্থায় সকল শিক্ষার্থীর শিখনের জন্য প্রত্যাশিত শিখনফল নির্ধারণ করবেন।

দ্বিতীয়ত: তিনি প্রত্যাশিত শিখনফলের উপর ভিত্তি করে ‘প্রান্তিক মূল্যযাচাই’ করার জন্য অভীক্ষা প্রণয়ন করেন। এ অভীক্ষার মাধ্যমে তিনি সকল শিক্ষার্থীর জন্য একটি কাঙ্ক্ষিত আদর্শ মান নির্ধারণ করেন।

তৃতীয়ত: শিক্ষক পুরো পঠিতব্য বিষয়বস্তুকে ধারাবাহিকভাবে কতগুলো ছোট ছোট অংশে অর্থাৎ ‘ইউনিট’-এ বিভাজন করেন যা দুই সপ্তাহ ধরে শেখানো হবে।

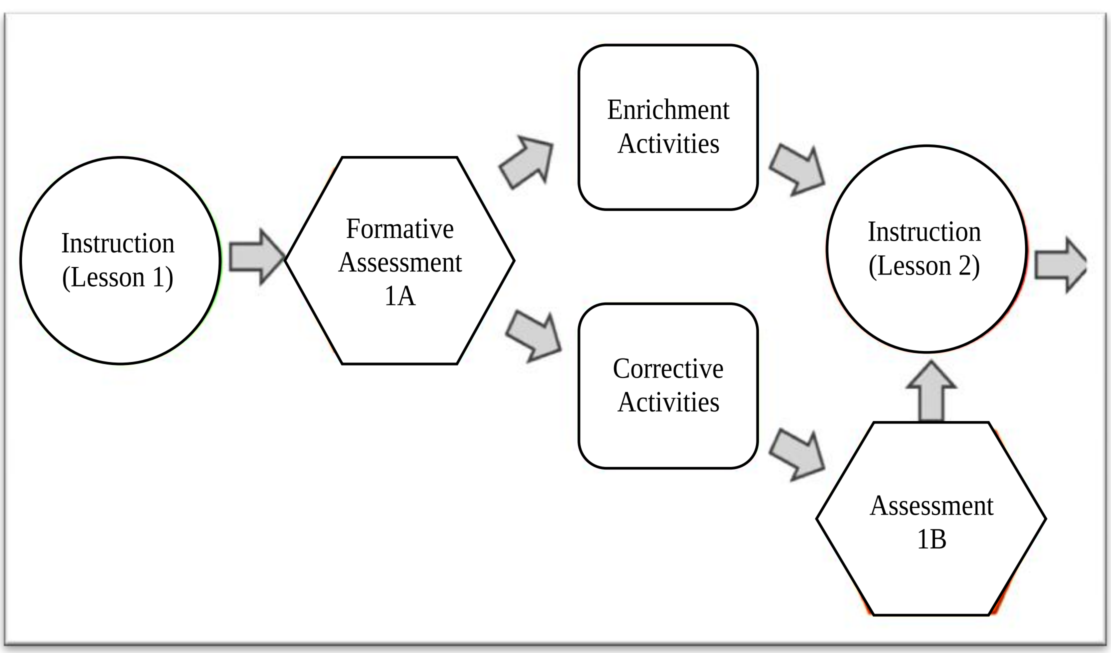
চতুর্থত: প্রত্যেকটি পাঠ্যাংশের জন্য ‘বিভাজিত শিখনফল’ নির্ধারণ করেন।

‘বিভাজিত শিখনফল’ নির্ধারণের পর ‘মাস্টারি লার্নিং’-এর পরিকল্পনা পর্যায় শুরু হয়। শিক্ষক এমনভাবে শিক্ষণ পদ্ধতি ও কৌশল ঠিক করেন যেন প্রত্যেক শিক্ষার্থী ব্যক্তিগতভাবে নিজকে পাঠে নিয়োজনের মাধ্যমে প্রত্যেক ইউনিটের ‘বিভাজিত শিখনফল’ অর্জন করতে পারে। এপর্যায়ে দলীয় কাজের মাধ্যমে পাঠদানকে উৎসাহিত করা হয়।

দ্বিতীয়ত: প্রতি ইউনিট শেষে ‘ফিডব্যাক’ ও সংশোধনের সুযোগ রাখা হয়। এ উদ্দেশ্যে ‘গঠনকালীন মূল্যযাচাই’ করার মাধ্যমে সংশ্লিষ্ট ইউনিটের শিখনফল অর্জিত হয়েছে কিনা তা যাচাই করা হয়। এ ক্ষেত্রে ৮০% থেকে ৯০% অর্জনকে আদর্শমান ধরে উক্ত ইউনিটের মাস্টারি অর্জনকে স্বীকৃতি দেওয়া হয়।

তৃতীয়ত: শিক্ষক প্রত্যেক ইউনিটের গঠনকালীন মূল্যযাচাই-এর জন্য প্রণীত অভীক্ষার প্রতি আইটেমের জন্য বিকল্প শিক্ষণ সামগ্রী ও বিকল্প কার্যপ্রণালী বা ‘সংশোধক (Correctives)’ তৈরি করে রাখেন। তবে, পুনশিক্ষণের এ সকল শিক্ষণ সামগ্রী ও শিক্ষণ কৌশল প্রথমবার ব্যবহৃত শিক্ষণ সামগ্রী ও শিক্ষণ কৌশল থেকে ভিন্নতর হবে। শিক্ষণ কৌশলের মধ্যে ক্ষুদ্র দলে স্টাডি, ব্যক্তিগত টিউটরিং, বিকল্প শিক্ষণ সামগ্রী যথা: বই, ওয়ার্কবুক, শ্রবণ-দর্শন উপকরণ সরবরাহ, ইত্যাদি হতে পারে। কোন শিক্ষার্থী যদি শিখনে অসুবিধায় পড়ে বা গঠনকালীন মূল্যযাচাইয়ে প্রত্যাশিত মানের নিচে চলে যায়, তখন উক্ত শিক্ষার্থীর প্রয়োজন অনুযায়ী অন্য কোন বিকল্প পন্থায় এগিয়ে নেওয়ার ব্যবস্থা করতে হবে।

নিম্নে Mastery Learning Model (MLM)-এর একটি ফ্লো-ডায়াগ্রাম প্রদান করা হলো :



৫.৪ বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনা, ইউনিট পরিকল্পনা

বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনা

যথাসময়ে যথাযথ কাজের রূপরেখাই পরিকল্পনা। বিদ্যালয়ের একটি সাংবার্ষিক কর্মসূচি থাকে। সে কর্মসূচির সাথে মিল রেখে শিক্ষক শিক্ষা বছরে যে শ্রেণিতে যে বিষয়ে পাঠ পরিচালনা করবেন, তার একটা পরিকল্পনা প্রণয়ন করে নিবেন। এ পরিকল্পনা শ্রেণি ও বিষয় ভিত্তিক হবে। পরিকল্পনার ফলে সময় ও পাঠ্যসূচির সাথে তাল রেখে শিখন শেখানো কার্যক্রম এগিয়ে চলবে। একটি উদাহরণের মাধ্যমে বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনার একটি রূপরেখা দেওয়া হল। অবশ্য শিক্ষক তাঁর প্রতিষ্ঠানের কর্মসূচির সাথে মিল রেখে প্রয়োজনীয় রদবদলের মাধ্যমে নিজেই নিজের পরিকল্পনা তৈরি করবেন।

বার্ষিক ছুটির তালিকা পর্যালোচনা করে ছুটির দিনগুলো বের করে নিতে হবে:

<u>ছুটির হিসাব</u>

সাপ্তাহিক ছুটি		৫২ দিন
নির্ধারিত বার্ষিক ছুটি		৮৮ দিন
মোট ছুটি		১৩০দিন
মোট কর্মদিবস	(৩৬৫ -১৩০)	= ২৩৫ দিন

পরীক্ষার ডিউটি(ষান্মাসিক,বার্ষিক,টেস্ট,এসএসসি)	২০ দিন
সহপাঠ কার্যাবলি ও পরীক্ষার ফল তৈরী	২০ দিন
শ্রেণিপাঠে প্রাপ্য ২৩৫ - (২০+২০) =	১৯৫ দিন

রুটিনে সাপ্তাহিক কার্যদিবস ৬দিন; ১৯৫দিন ÷ ৬ ≈ ৩৩ সপ্তাহ;

সাপ্তাহিক রুটিনে গণিতে(৭ম) প্রাপ্য ক্লাশ সংখ্যা = ৪

৩৩ সপ্তাহে প্রাপ্য ক্লাশ সংখ্যা ৩৩×৪ =	১৩২
অধ্যায় ভিত্তিক ক্লাশ ও কুইজ টেস্ট	১০
পরীক্ষাপূর্ব পুনরালোচনা (৪+৬)	১০
শিক্ষকের নৈমিত্তিক ছুটি	১০ দিন
মোট প্রকৃত পাঠ সংখ্যা (১৩২ - ৩০) =	১০২

ক্লাশ রুটিনে যে বিষয়ে সপ্তাহে ৪টি করে ক্লাশ থাকে তার পাঠ সংখ্যা মোটামোটি ১০২ হলে, তৈরী পরিকল্পনা যথাযথ বাস্তবায়ন সম্ভব। সাপ্তাহিক পাঠ সংখ্যা কম-বেশি হলে, সে অনুপাতে পাঠ সংখ্যাও কম-বেশি হবে। সপ্তাহে গণিতের ৪টি ক্লাশ ধরে ৭ম শ্রেণির গণিত বিষয়ের অধ্যায় ভিত্তিক পাঠ বিভাজন দেখানো হল:

বিষয়ভিত্তিক বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনা :

গণিত-৭ম শ্রেণি

- **শিখনফল ও বিষয়বস্তু অনুযায়ী পাঠসংখ্যা নির্ধারণ**

শিক্ষক: **প্রতিষ্ঠান:** **শিক্ষাবর্ষ:**

অধ্যায়	বিষয়বস্তু	শিখনফল	অনুশিলনী নং	বর্ণিত ধারণার নং	উদাহরণ নং	সমস্যা সংখ্যা	পাঠ সংখ্যা	মন্তব্য
১	মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা	• সংখ্যার বর্গ ও বর্গমূল ব্যাখ্যা করতে পারবে। • উৎপাদক ও ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে বর্গমূল নির্ণয় করতে পারবে। • সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় পদ্ধতিগুলো প্রয়োগ করে বাস্তব জীবনের সমস্যা সমাধান করতে পারবে। • মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা সনাক্ত করতে পারবে। • সংখ্যারেখায় মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা দেখাতে পারবে।	১.১	১.১ - ১.৩	১- ৫	১ - ৬	৪	
			১.২	১.৪ - ১.৮	১- ৮	১ -১৮	৫	
২	সমানুপাত ও লাভ ক্ষতি	• বহুরাশিক ও ধারাবাহিক অনুপাত ব্যাখ্যা করতে পারবে। • সমানুপাতের ধারণা ব্যখ্যা করতে পারবে। • সমানুপাত সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান করতে পারবে। • লাভ-ক্ষতি কী তা ব্যাখ্য করতে পারবে। • লাভ-ক্ষতি সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান করতে পারবে। • কর, ভ্যাট, কমিশন ও মূদ্রা বিনিময় সংক্রান্ত দৈনন্দিন জীবনের সমস্যা সমাধান করতে পারবে। • ঐকিক ও অনুপাত ব্যবহার করে বাস্তব জীবনে সময় ও কাজ নল ও চৌবাচ্চা, সময় ও দূরত্ব এবং নৌকা ও স্রোত বিষয়ক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।	২.১	২.১-২.২	১-৮	১-১৬	৫	
			২.২	২.৩	৯-১৯	১-১৫	৫	
			২.৩	২.৪	২০-২২	১-২১	৬	
৩	পরিমাপ	• দৈর্ঘ্য ও পরিমাপের আন্ত সম্পর্ক ব্যাখ্যা এবং এ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান করতে পারবে। • ওজন ও তরল পদার্থের আয়তনপরিমাপ কীভাবে করা হয় তা ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং এ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে। • স্কেল ব্যবহার করে আয়তাকার ও বর্গাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ পরিমাপ করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।	৩	৩.১-৩.৪	১-৭	১-১৭	৫	

		• ওজন পরিমাপের বিভিন্ন পরিমাপক ব্যবহার করে দ্রব্যাদির ওজন পরিমাপ করতে পারবে। • তরল পদার্থের আয়তন পরিমাপের বিভিন্ন পরিমাপক ব্যবহার করে যেকোন তরল পদার্থের পরিমাপ করতে পারবে। • দৈনন্দিন জীবনে আনুমানিক পরিমাপ করতে পারবে।						
		পাটিগণিতে পাঠ সংখ্যা = ৩০						
৪	বীজগণিতীয় রাশির গুণ ও ভাগ	• বীজগণিতীয় রাশির গুণ ও ভাগ করতে পারবে। • বন্ধনী ব্যবহারের মাধ্যমে বীজগণিতীয় রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ সংক্রান্ত দৈনন্দিন জীবনের সমস্য সমাধান করতে পারবে।	৪.১	৪.১-৪.৫	১-১০	২৮	২	
			৪.২	৪.৬-৪.১০	১১-২০	৩৫	৩	
			৪.৩	৪.১১	২১-২৫	২৮	২	
৫	বীজগণিতীয় সূত্াবলি ও প্রয়োগ	• বর্গ নির্ণয়ে বীজগণিতীয় সূত্রের বর্ণনা ও প্রয়োগ করতে পারবে। • বীজগণিতীয় সূত্র ও অনুসিদ্ধান্ত প্রয়োগ করে রাশির মান নির্ণয় করতে পারবে। • বীজগণিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবে। • গুণনীয়ক ও গুণিতক কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবে। • অনুর্ধ্ব তিনটি বীজগণিতীয় রাশির সাংখ্যিক সহগসহ লসাগু ও গসাগু নির্ণয় করতে পারবে।	৫.১	৫.১	১-১৫	৩৪	৩	
			৫.২	-	১৬-২১	১২	২	
			৫.৩	৫.২	২২-৩১	২০	২	
			৫.৪	৫.৩-৫.৫	৩২-৩৭	৩৪	৩	
৬	বীজগণিতয় ভগ্নাংশ	• বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবে। • বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের লঘুকরণ ও সাধারণ হরবিশিষ্টকরণ করতে পারবে। • বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ ও সরলীকরণ করতে পারবে।	৬.১	৬.১-৬.৪	১-৬	২০	২	
			৬.২	৬.৫	৭-১৫	২৬	৩	
৭	সরল সমীকরণ	• সমীকরণের পক্ষান্তর বিধি, বর্জন বিধি,আড়গুণন বিধি, প্রতিসাম্য বিধি ব্যাখ্যা করতে পারবে। • সরল সমীকরণ গঠন ও সমাধান করতে পারবে। • লেখচিত্র কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবে। • লেখচিত্রের অক্ষ ও সুবিধাজনক একক নিয়ে বিন্দুপাতন করতে পারবে। • লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণ সমাধান করতে পারবে।	৭.১	৭.১-৭.২	১-৫	২০	৩	
			৭.২	৭.৩	৭-৯	১৫	৩	
			৭.৩	৭.৪-৭.৬	১-৩	১১	৩	
		বীজগণিতে পাঠ সংখ্যা =৩১						

৮	সমান্তরাল সরলরেখা	• সমান্তরাল সরলরেখা ও ছেদক দ্বারা উৎপন্ন কোণের বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করতে পারবে। • দুইটি সরলরেখার সমান্তরাল হওয়ার শর্ত বর্ণনা করতে পারবে। • দুইটি সরলরেখার সমান্তরাল হওয়ার শর্ত প্রমাণ করতে পারবে।		৮.১-৮.৪		৬	৩	
৯	ত্রিভুজ	• ত্রিভুজের অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ কোণ বর্ণনা করতে পারবে। • ত্রিভুজের মৌলিক উৎপাদকগুলো প্রমাণ করতে পারবে। • বিভিন্ন শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজ আঁকতে পারবে। • ত্রিভুজের বাহু ও কোণের পারস্পরিক সম্পর্ক ব্যবহার করে জীবনভিত্তিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে। • ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ভূমি ও উচ্চতা মেপে ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।	৯.১	৯.১-৯.৪ উপ ১		৫	২	
			৯.২	৯.৫-৯.৬ উপ ২-৪		১৬	৫	
			৯.৩	৯.৭ সম্পা ১-৬		১৬	৫	
১০	সর্বসমতা ও সদৃশতা	• বিভিন্ন জ্যামিতিক আকার ও আকৃতি হতে সর্বসম এবং সদৃশ আকার ও আকৃতি চিহ্নিত করতে পারবে। • সর্বসমতা ও সদৃশতার মধ্যে পার্থক্য করতে পারবে। • ত্রিভুজের সর্বসমতা প্রমাণ করতে পারবে। • ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের সদৃশতা ব্যাখ্যা করতে পারবে। • সর্বসমতা ও সদৃশতার বৈশিষ্ট্যর ভিত্তিতে সহজ সমস্যার সমাধান করতে পারবে।	১০.১	১০.১-১০.২ উপ ১-২		৮	৪	
			১০.২	উপ ৩-৫		৯	৩	
			১০.৩	১০.৩-১০.৬		১১	৫	
			১০.৪			৪	৩	
		জ্যামিতিতে পাঠ সংখ্যা = ৩০						
১১	তথ্য ও উপাত্ত	• গণসংখ্যা সারণি কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবে। • শ্রেণি ব্যবধানের মাধ্যমে অবিন্যস্ত উপাত্ত বিন্যস্ত আকারে প্রকাশ করতে পারবে। • আয়তলেখ অঙ্কন করতে পারবে। • অঙ্কিত আয়ত লেখ হতে প্রচুরক বের করতে পারবে। • অঙ্কিত আয়ত লেখ হতে উপাত্ত সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবে।	১১	১১.১-১১.৪	১-৩	১২	১১	
		পরিসংখ্যানে পাঠ সংখ্যা = ১১						
		গণিতে মোট পাঠ সংখ্যা = ১০২						

- **মাস অনুযায়ি পাঠ বন্টন**

(২০১৭ সালের ক্যালেন্ডার অনুযায়ি ছুটি ও কর্মদিবস বিবেচনায় নিয়ে এ ছক তৈরি করা হল)

মাস	কর্ম দিন	পাটি	বীজ গ	জ্যামি	তথ্য উপা	পাঠ সং	ক্লাশ টেস্ট	রিভিউ	পরীক্ষা	সহ পাঠ	নৈ ছুটি	অন্য বিষয়	মোট	মন্তব্য
জা	২৩	৩	৩	৩	২	১১	১			৫	১	৫	২৩	
ফে	২০	৩	৩	২	২	১০	১		২	৫	১	১	২০	
মা	২৪	৩	৩	৩	২	১১	১		২		১	৯	২৪	
এ	২৩	৩	৩	৩	২	১১	১				১	১০	২৩	
মে	১৩	২	২	২		৬	১				১	৫	১৩	
জু	১৬	২	৩	২		৭	১	৪			১	২	১৬	
জু	১৫	২	২	২		৬			৮			১	১৫	
আ	২৩	৩	৩	৪	১	১১	১				১	১০	২৩	
সে	২০	৩	৩	৩	১	১০	১					৯	২০	
অ	২০	৩	৩	৩	১	১০	১				১	৮	২০	
ন	২০	৩	৩	৩		৯	১	৬	২		১	১	২০	
ডি	১৮								৬	১০		২	১৮	
মো	২৩৫	৩০	৩১	৩০	১১	১০২	১০	১০	২০	২০	১০	৬৩	২৩৫	

ইউনিট পরিকল্পনা

কারিকুলাম বা পাঠ্যপুস্তকের পাঠ্য বিষয়বস্তু কতক ইউনিট/অধ্যায়ে বিভক্ত থাকে। অধ্যায় ভিত্তিক শিখনফল এবং প্রতি অধ্যায়ের জন্য বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনায় নির্ধারিত পাঠ সংখ্যা বিবেচনায় নিয়ে ইউনিট পরিকল্পনা করতে হয়। ইউনিট প্ল্যান এর কাজের স্তরগুলোকে 5E মডেলদ্বারা চিহ্নিত করা যায়ঃ Engage (নিয়োজিত কর) , Explore (উদ্ঘাটন কর), Explain (ব্যাখ্যা কর), Elaborate (বিস্তৃত কর), Evaluate (মূল্যায়ন কর)।

এখানে একটি ইউনিট পরিকল্পনার নমুনা দেওয়া হলঃ

ইউনিট পরিচিতিঃ গণিত, ৭ম শ্রেণি, অধ্যায় **১১ঃ** তথ্য ও উপাত্ত

লক্ষ্যঃ তথ্য ও উপাত্ত সংগ্রহ এবং প্রক্রিয়াকরণ সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণা গঠন।

শিখনফল

১. তথ্য ও উপাত্ত কী বলতে পারবে এবং সংগ্রহ ও সংগঠন করতে পারবে
২. অবিন্যস্ত উপাত্ত ক্রমবিন্যাস ও শ্রেণিবিন্যাস করতে পারবে
৩. গণসংখ্যা সারণি কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
৪. শ্রেণি ব্যবধানের মাধ্যমে অবিন্যস্ত উপাত্ত বিন্যস্ত আকারে প্রকাশ করতে পারবে।
৫. আয়তলেখ অঙ্কন করতে পারবে।
৬. অঙ্কিত আয়তলেখ হতে প্রচুরক বের করতে পারবে।
৭. অঙ্কিত আয়তলেখ হতে উপাত্ত সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবে।

ইউনিটের পাঠ সংখ্যা: ১১

সামগ্রী: সাদা কাগজ, ছক কাগজ, পেন্সিল, রং পেন্সিল, মিটার স্কেল, পোস্টার কাগজ (প্রতি পাঠে প্রতি দলের জন্য যথেষ্ট সংখ্যক)।

<table>
<tr><td>পাঠ</td><td>শিখনফল</td><td>কাজ</td><td colspan="4">উদাহরণ/নির্দেশনা</td></tr>
<tr><td rowspan="7">১</td><td rowspan="7">১</td><td>তথ্য সংগ্রহের জন্য দল গঠন:</td><td colspan="4">শিক্ষকের সহায়তায় ৪/৫টি দল গঠন</td></tr>
<tr><td>কোন দল কী তথ্য সংগ্রহ করবে তার পরিকল্পনা:</td><td colspan="4">শিক্ষার্থীদের বয়স, ওজন, উচ্চতা,কোন বিষয়ে পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর, পরিবারের লোকসংখ্যা, মাসিক/বার্ষিক আয় ইত্যাদির যেকোন একটি/দুটি</td></tr>
<tr><td>তথ্য ক্ষেত্র নির্ধারণ:</td><td colspan="4">পরিবারের আকার (লোকসংখ্যা) ও বয়স</td></tr>
<tr><td>নমুনায়ন:</td><td colspan="4">শ্রেণির শিক্ষার্থীদের নিজ নিজ পরিবার (পরিবার সংখ্যা এমন নিবে, যেন উপাত্ত আকার (সংখ্যা) ৩০ থেকে ৪০ এর মধ্যে থাকে)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">দলীয়ভাবে তথ্য সংগ্রহের ছক তৈরি:</td><td>পরিবার নং</td><td>লোকসংখ্যা</td><td>তাদের বয়স (পূর্ণ বছরে)</td><td>মন্তব্য</td></tr>
<tr><td>১</td><td>৫</td><td>৩, ১০,১৩,৩৫, ৪০</td><td>নমুনা উপাত্ত</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td rowspan="4">২</td><td rowspan="4">১ ও ২</td><td>দলীয়ভাবে তথ্য সংগ্রহ</td><td colspan="4">তৈরী ছক ব্যবহার করে নমুনার তথ্য সংগ্রহ করবে (দল থেকে দলে গিয়ে)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">অবিন্যস্ত উপাত্ত সংগঠন ও পরিবেশন</td><td colspan="4">বিভিন্ন পরিবারের লোকের সংখ্যা: ৫,৩,৪,৬, ... অথবা</td></tr>
<tr><td colspan="4">বিভিন্ন পরিবারের লোকদের বয়স (বছরে): ৩, ১০,১৩,৩৫, ৪০, ...</td></tr>
<tr><td>উৎস ভিত্তিক উপাত্তের প্রকার নির্ধারণ:</td><td colspan="4">শিক্ষার্থীদের মাধ্যমে নেওয়া বলে, তা প্রাথমিক/মাধ্যমিক উপাত্ত</td></tr>
<tr><td rowspan="2">৩</td><td rowspan="2">২, ৩ ও ৪</td><td>ক্রমবিন্যাস</td><td colspan="4">উপাত্ত মানের উর্ধ্ব বা নিম্নক্রমে সাজানো (অতিরিক্ত কাজ: মধ্যক নির্ণয়)</td></tr>
<tr><td>শ্রেণি বিন্যাস (গণসংখ্যা সারণী গঠন):</td><td colspan="4">সম ব্যবধানে বয়স শ্রেণি গঠন, টালিকরণ, গণসংখ্যা নির্ধারণ ও পোস্টারে উপস্থাপন (বিভিন্ন দলের কাজে ভিন্নতা থাকতে পারে)</td></tr>
<tr><td>৪</td><td>৫,৬ ও ৭</td><td>আয়ত লেখ অঙ্কন এবং এ থেকে প্রচুরক নির্ণয় ও ব্যাখ্যা</td><td colspan="4">শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে ছক কাগজে আয়তলেখ অঙ্কন, প্রচুরক নির্ণয় ও সংব্যাখ্যান (পাঠ্যবই ১৪৯ ও ১৫০ পৃ: দ্রষ্টব্য)</td></tr>
<tr><td>৫</td><td>যাচাই</td><td>কুইজ অনুষ্ঠান (দলীয়)</td><td colspan="4">শিক্ষক পরিচালনা করবেন (পূর্ব থেকে প্রাসঙ্গিক কুইজ প্রশ্ন তৈরি করে নিবেন)</td></tr>
<tr><td colspan="7">অনুশীলনী-১১ অনুশীলন</td></tr>
<tr><td>৬</td><td>১,২,৩</td><td colspan="5">পাঠ্যপুস্তকে বর্ণিত ধারণা-১১.১,১১.২, উদাহরণ-১ নিয়ে আলোচনা এবং সমস্যা ১,২,৩,৪ এর সমাধান ও বাড়ির কাজ</td></tr>
<tr><td>৭</td><td>২,৩</td><td colspan="5">ধারণা-১১.৩ এবং সমস্যা নং ৫,৬,৭</td></tr>
<tr><td>৮</td><td>২,৩,৫,৬</td><td colspan="5">ধারণা-১১.৪, উদাহরণ-২ নিয়ে আলোচনা এবং ক্লাশে ও বাড়ির কাজ হিসাবে সমস্যা-৮,৯,১০ সমাধান</td></tr>
<tr><td>৯</td><td>৫,৬</td><td colspan="5">সমস্যা ১১, ১২</td></tr>
<tr><td>১০</td><td>মূল্যযাচাই</td><td colspan="5">শ্রেণি মূল্যায়ন (ক্লাশ টেস্ট): এক পিরিয়ডে সমাপনযোগ্য একটি প্রশ্নপত্র প্রস্তুত করে পরীক্ষা নিবেন।</td></tr>
<tr><td>১১</td><td></td><td colspan="5">ইউনিট কার্যক্রম পর্যালোচনা, শিক্ষার্থীদের ও শিক্ষকের প্রতিফলন এবং ইউনিট সমাপ্তিকরণ</td></tr>
</table>

৫.৫ পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়ন: ধারণা, কাঠামো ও উপস্থাপন কৌশল

পাঠ পরিকল্পনার ধারণা

দৈনন্দিন পাঠে কোন বিষয়ে শিক্ষক এক পিরিয়ডে কি বিষয়বস্তুর উপর পাঠ পরিচালনা করবেন, এর লক্ষ্য উদ্দেশ্য বা শিখনফল কী, কি কি শিখন সামগ্রী প্রয়োজন, কী পদ্ধতি বা কৌশলে শ্রেণিতে পাঠ উপস্থাপন করবেন, বিষয়বস্তুর পরিসর কী হবে, কিভাবে মূল্যায়ন করবেন ইত্যাদির একটা সাজানো রূপরেখাই হল পাঠ পরিকল্পনা।

বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনা অনুসারে অধ্যায়ের পাঠ সংখ্যা বিবেচনায় নিয়ে পাঠের বিষয়বস্তুর পরিসর নির্ধারণ করতে হবে। অন্যথায় নির্দিষ্ট সময়ে নির্ধারিত বিষয়বস্তুর পাঠ সমাপন করা সম্ভব হবে না। কারিকুলামে বর্ণিত শিখনফল থেকে শিখনফল নিয়ে প্রয়োজনে বিভাজন করে পাঠের বিষয়বস্তুর সাথে সমন্বয় করবেন এবং অর্জিত শিখনফলের মূল্যায়ন করবেন। বিষয়বস্তুর পরিসর নির্ধারণে পাঠ্যপুস্তকের সহায়তা নেবেন। সংশ্লিষ্ট অধ্যায়ে বর্ণিত ধারণা, উদাহরণ এবং অনুশীলনীর সমস্যা নির্বাচন করবেন। লক্ষ্য রাখতে হবে এ নির্বাচন যেন শিখনফলের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ হয়। তাহলে অর্জনযাচাই বা মূল্যায়ন সঠিক হবে।

পাঠ পরিকল্পনার কাঠামো

পাঠ পরিকল্পনার কয়টি স্তর বা সোপান থাকবে এবং কোন সোপানে কী কার্যক্রম থাকবে এর রূপরেখাই পাঠ পরিকল্পনার কাঠামো। বিভিন্ন শিক্ষাবিদ বিভিন্ন সময়ে পাঠ পরিকল্পনার জন্য বিভিন্ন কাঠামোর সুপারিশ করেছেন। তবে সব কাঠামোতেই প্রধান তিনটি সোপান: প্রস্তুতি (Preparation), উপস্থাপন (Presentation) ও মূল্যায়ন(Evaluation) রয়েছে, কেবল বিভিন্ন কাঠামোতে বিভিন্ন নামে চিহ্নিত হয়েছে বা উপস্তরে বিভক্ত হয়েছে।

জে এফ হার্বাট (১৭৭৬ - ১৮৪১) এর পঞ্চ সোপান কাঠামো

প্রেষণা সৃষ্টি (Motivation)	
উপস্থাপন ((Presentation)	
সংযোগকরণ(Association)	
আত্মস্থকরণ (Generalization)	
প্রয়োগ/মূল্যায়ন(Application)	

আধুনিক কাঠামো

পাঠ সংগঠন(Organizing lesson)	
উপস্থাপন (Presentation)	
নিয়ন্ত্রিত অনুশীলন (Controlled Practice)	
স্বাধীন অনুশীলন (Free Practice)	
ফলাবর্তন (Feedback)	

পাঠ পরিকল্পনা উপস্থাপন কৌশল

শিক্ষার্থীরা কী শিখতে যাচ্ছে এবং ক্লাশে তাদের কি কি করতে হবে মূল পাঠে যাওয়ার আগেই তাদের তা জানতে দিন। এটা সঠিক পথে থেকে কাজ করতে সহায়তা করবে। সংক্ষিপ্ত একটি আলোচ্যসূচি বোর্ডে লিখে দিতে পারেন অথবা উদ্দেশ্যাবলির একটি হ্যান্ডআউট দিতে পারেন । ক্লাশের সময়ের অর্থপূর্ণ সংগঠন কেবল অপেক্ষাকৃত ভাল শিখনেরই সহায়ক নয়, বরং শ্রেণি কাজ অনুসরণে এবং কাজের যৌক্তিকতা অনুধাবনেও সহায়ক। বোর্ডে দেওয়া আলোচ্যসূচি আপনাকে ও শিক্ষার্থীদেরকে সঠিক পথে এগিয়ে যেতে সহায়তা করবে। সুপারিশকৃত অন্যান্য কৌশল:

- একটা ইতিবাচক শ্রেণি পরিবেশ প্রতিষ্ঠা করুন
- সুস্পষ্ট নির্দেশনা দিয়ে ক্লাশ শুরু করুন
- শিক্ষার্থীদের মনোযোগ বজায় রাখুন
- যথোপযুক্ত শিক্ষণ গতি বজায় রাখুন
- স্বতন্ত্র, জোড়া ও/বা দলীয় কাজ দিন
- ক্লাশে কী ঘটছে মূল্যায়ন করুন
- শিক্ষক-শিক্ষার্থী ও শিক্ষার্থী-শিক্ষার্থী ইতিবাচক সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করুন
- যে কাজ তাদের দিয়ে করানো সম্ভব তা নিজে করতে যাবেন না
- বলায় ও কাজে সরল ও সংক্ষিপ্ত নীতি (KISS-Keep It Short and Simple) ব্যবহার করুণ ।

পাঠ পরিকল্পনার উপর প্রতিফলন

বিভিন্ন বাহ্যিক পরিবেশ পরিস্থিতির কারণে একটি পাঠ, পরিকল্পনা অনুসারে নাও চলতে পারে। এতে নিরুৎসাহিত হবেন না। এটা অনেক অভিজ্ঞ ও দক্ষ শিক্ষকের বেলায়ও ঘটতে পারে। পাঠ শেষে কিছু সময় রাখুন যেন, কোন কাজ ভাল হয়েছে, কোনটি তেমন হয়নি এবং অন্যভাবে আপনি কী করতে পারতেন তা নিজে নিজে পর্যালোচনার জন্য। ফলপ্রসূ ও কম ফলপ্রসূ সময় ও কাজের ব্যবস্থাপনা সনাক্ত করুন। পরিকল্পনা ও সময় ব্যবস্থাপনায় অতিরিক্ত ফিডব্যাক এর জন্য সংশ্লিষ্ট ওয়েবসাইট ভিজিট করতে পারেন এবং সহকর্মীদের সাথে শেয়ার করতে পারেন।

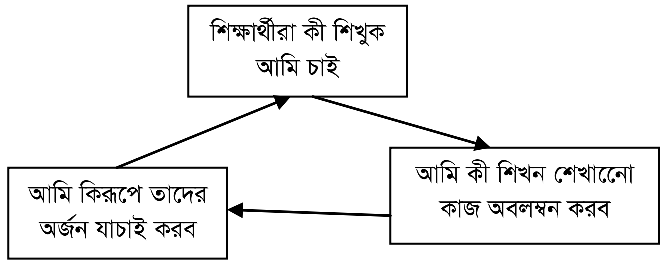
উপসংহার

পাঠ পরিকল্পনা যেন অতি দীর্ঘ না হয়। এতে সকল কাজের পদ্ধতিগত বিশদ বর্ণনা থাকার প্রয়োজন নাই। সকল শিক্ষার্থীর সকল প্রশ্ন বা উত্তর থাকবে না। লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য এবং সামগ্রী ব্যবহার করে শ্রেণি কাজের একটা রূপরেখা থাকবে। পাঠ পরিকল্পনা হল আপনি কী করতে চান এবং কিভাবে করতে চান তার একটি স্মারক মাত্র। একটি ফলপ্রসূ পাঠ পরিকল্পনা এমন নয় যে, যা পরিকল্পনা করা হয়েছে শ্রেণিতে তা হুবহু সংগঠিত হবে; বরং শিক্ষক শিক্ষার্থী উভয়ই শিক্ষা গ্রহণ করবে।

পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়ন কৌশল

শিক্ষার্থীর কী শেখা প্রয়োজন, শ্রেণিতে কত কার্যকর ভাবে তা শেখার পরিবেশ সৃষ্টি করা যায় -এর পথ নক্সাই হল শিক্ষকের পাঠ পরিকল্পনা। এতে থাকে:

- শিক্ষণ উদ্দেশ্য বা শিখনফল
- শিখন শেখানো কার্যক্রম
- অর্জন যাচাই কৌশল



পাঠ পরিকল্পনা তৈরীর সোপান

১. শিখনফল বর্ণনা

শিক্ষণ উদ্দেশ্য বা শিখনফল নির্ধারণের জন্য নিচের প্রশ্নের উত্তর বিবেচনা করুন:

- **পাঠের বিষয়বস্তু কী?**
- শিক্ষার্থী কী শিখুক আমি চাই?
- এ পাঠের শেষে তারা কী বুঝতে ও করতে পারবে?
- এই বিশেষ পাঠ থেকে তারা কী সক্ষমতা নিয়ে বের হবে আমি চাই?

শিখনফল নির্ধারণ হয়ে গেলে এগুলোকে অগ্রাধিকার ভিত্তিতে সাজান। সময় সংকীর্ণতার কারণে অধিক গুরুত্বপূর্ণ ধারণা আলোচনা থেকে যেন বাদ না পড়ে যায়।

- তারা কোন গুরুত্বপূর্ণ ধারণা গঠন করবে, কোন দক্ষতা আয়ত্ব করবে এবং প্রয়োগ করবে?
- এগুলো গুরুত্বপূর্ণ কেন?
- যদি সময়ে না কুলায় কোনগুলো বাদ দেওয়া উচিত হবে না?
- বিপরীত ভাবে সময়ের স্বল্পতার কারণে কোনগুলো বাদ দেওয়া যায়?

২. সূচনা কার্যক্রম নির্ধারণ

একটি সৃজনশীল সূচনা পর্ব দিয়ে পাঠ শুরু করুন। শিক্ষার্থীর মনোযোগ আকর্ষণের জন্য বিভিন্ন কৌশল অবলম্বন করতে পারেন (ব্যক্তিগত বিশেষ ঘটনা, ঐতিহাসিক ঘটনা, চিন্তন উদ্রেককারী সংকট, বাস্তব বৈশ্বিক উদাহরণ, সংক্ষিপ্ত ভিডিও ক্লিপ, বাস্তব প্রয়োগ, অনুসন্ধানী প্রশ্ন ইত্যাদি)। সূচনা পরিকল্পনায় নিচের প্রশ্নগুলো বিবেচনা করুন: শিক্ষার্থীরা এ বিষয়বস্তু সম্পর্কে কিছু জানে কিনা বা এ বিষয়ে কোন পূর্বধারণা আছে কিনা, তা কী করে যাচাই করা যায়? এ বিষয়ে কি কি সাধারণ ধারণা (বা ভুল ধারণা) শিক্ষার্থীদের থাকতে পারে? এ বিষয়বস্ত সূচনা করতে আমার কী করা প্রযোজন?

৩. সুনির্দিষ্ট শিখন কার্যক্রম (পাঠের মূল অংশ) পরিকল্পনা

শিক্ষার্থীদের মনোযোগ আকর্ষণের জন্য বিভিন্ন উপায় নির্ধারণ করুন। উদাহরণ ও কাজ পরিকলপনায় সময়ের দিকে লক্ষ রাখুন। কোন কাজে কত সময় দিবেন, বর্ধিত ব্যাখ্যা ও আলোচনার জন্য সময় রাখুন; কিন্তু এক কাজ দ্রুত লয়ে শেষ করে অন্য কাজে বা সমস্যায় যাওয়ার প্রস্তুতি রাখুন। সাথে সাথে গঠিত ধারণা যাচাইয়েরও কৌশল অবলম্বন করুন। এজন্য নিচের প্রশ্নগুলো সহায়ক হতে পারে:

- এ বিষয়বস্তু ব্যাখ্যা করতে আমি কী করব?
- ভিন্ন উপায়ে চিত্রসহ ব্যাখ্যা করতে কী করা যায়?
- কিভাবে শিক্ষার্থীদেরকে বিষয়বস্তুতে নিয়োজিত রাখা যায়?
- বিষয়বস্তুটি বোঝার জন্য সহায়ক বাস্তবজীবন ভিত্তিক কোন উদাহরণ, পরিস্থিতি বা মিল কি খুঁজে পাওয়া যায়?
- আরো ভালভাবে বিষয়বস্তুটি শিক্ষার্থীদের বোঝার জন্য কী করা প্রয়োজন?

৪. উপলব্ধি যাচাই পরিকল্পনা

উপলব্ধি যাচাই মূলক প্রশ্ন চিন্তা করে বের করুন। কোন প্রশ্নের উত্তর কিভাবে (মৌখিক বা লিখিত) নিতে চান স্থির করুন। এজন্য নিচের প্রশ্নগুলো বিবেচনা করুন:

- শিক্ষার্থীদের উপলব্ধি যাচাইয়ের জন্য কী প্রশ্ন করব? :
- শিক্ষার্থীরা কী প্রদর্শন করে বোঝাবে যে, তারা পাঠ অনুসরণ করছে?
- শিখনফলে ফের দৃষ্টি দিতে হবে, আর কী কাজ করে শিক্ষার্থীরা বোঝাবে যে প্রত্যেক শিখনফল অর্জিত হয়েছে?

শিক্ষার্থীদের প্রশ্ন করতে উৎসাহিত করুন। সময় ব্যবস্থাপনার দিকে খেয়াল রাখুন। কোন প্রশ্ন আলোচনার জন্য ফলপ্রসূ হবে, কোন প্রশ্ন বিষয়বস্ত থেকে শ্রেণিকে বিচ্যুত করবে লক্ষ্য রাখুন। সকল শিখনফল সম্পন্ন করা এবং শিক্ষার্থীদের উপলব্ধির মধ্যে ভারসাম্য রাখার চিন্তা মাথায় রাখতে হবে।

৫. পর্যালোচনার মাধ্যমে উপসংহার

পাঠের প্রধান প্রধান দিক নিয়ে সারসংক্ষেপ করুন। বিভিন্ন উপায়ে তা করা যায়। আপনি নিজেও তা করতে পারেন (আজ আমরা যা শিখলাম ...) অথবা একজন শিক্ষার্থীকে সারসংক্ষেপে সহায়তা করতে বলতে পারেন অথবা সকলকে এক টুকরা কাগজে নিজ নিজ উপলব্ধি অনুযায়ি প্রধান প্রধান দিক লিখতে বলতে পারেন। ক্লাশ শেষে এগুলো তারা জমা দিয়ে যাবে। শিক্ষক এগুলো যাচাই করে দেখবেন এবং কোন অস্পষ্ট বিষয় থাকলে পরবর্তী ক্লাশে এ নিয়ে আলোচনা করবেন। কেবল সারাংশ করেই পাঠ সমাপন করবেন না; বরং আগামি পাঠের পূর্বধারণা দিয়ে এ বিষয়বস্তুর সাথে সম্পর্ক দেখাবেন। আগামি পাঠের পূর্বধারণা শিক্ষার্থীদেরকে বৃহত্তর প্রেক্ষিতে চিন্তা করতে উদ্দীপ্ত করবে।

৬. একটি সময়রেখা তৈরি করা

একটি পাঠে অনেক বেশি শিখনফল নিয়ে পাঠ প্রস্তুত করা ঠিক নয়। ২/৩টি শিখনফলের মধ্যে পাঠ সীমিত রাখুন। পিরিয়ড বা ক্লাশের মোট সময়ের দিকে লক্ষ্য রেখে প্রত্যেক স্তরের প্রয়োজনীয় সময় বরাদ্দ করুন। পরিকল্পনা অনুযায়ি ক্লাশ না চললে বিচলিত হওয়ার কারণ নেই। পকিল্পনা শিক্ষার্থীদের চাহিদা অনুযায়ি তাৎক্ষণিক সমন্বয় করুন। এ বিষয়ে কঠোর না হয়ে নমনীয় হউন। অতিরিক্ত উদাহরণ ও বিকল্প কাজ আপনাকে নমনীয় হতে সহায়তা করবে। এখানে বাস্তব সময়রেখা নির্ধারণে জন্য কিছু কৌশলের কথা বলা হল:

- প্রত্যেকটি কাজ কত সময় নিবে পরিকল্পনা করুন এবং প্রত্যকটির জন্য কিছু অতিরিক্ত সময় রাখুন।
- প্রত্যেক কাজের পাশে সময় উল্লেখ করুন।
- পাঠের শেষে কিছু সময় রাখুন অবশিষ্ট কোন প্রশ্ন থাকলে তার উত্তরের জন্য এবং সারসংক্ষেপ করার জন্যা।
- অতিরিক্ত কাজ বা আলোচনার পরিকল্পনা রাখুন যদি সময় হাতে থাকে তা কাজে লাগানোর জন্য।
- নমনীয় হউন, শিক্ষার্থীর চাহিদা অনুযায়ি পাঠ সমন্বয় করার জন্য প্রস্তুত থাকুন এবং আপনার মূল পরিকল্পনায় অনমনীয় না থেকে কোনটি বেশি ফলপ্রসূ তার প্রতি আলোকপাত করুন।

কতিপয় নমুনা পাঠ পরিকল্পনা

নমুনা পাঠ পরি কল্পনা -১

গণিত-৬ষ্ঠ শ্রেণি,
পাঠ শিরোনাম: গসাগু/গসাউ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান (প্রশ্নমালা-১.৩ ,পাঠ-১), সময়: ৫০ মিনিট
শিক্ষক পরিচিতি:

শিখনফল

১. উৎপাদকের সাহায্যে গসাউ নির্ণয় করতে পারবে। (প্রশ্ন-১)
২. ইউক্লিডীয় পদ্ধতিতে গসাউ নির্ণয় করতে পারবে। (প্রশ্ন-২)
৩. আধুনিক পদ্ধতিতে গসাউ নির্ণয় করতে পারবে।
৪. গসাগু সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান। (প্রশ্ন ৩-১৩)

ধারণা

- গসাগু দ্বারা বোঝায় গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক। গুণনীয়ক ও উৎপাদক সমার্থক শব্দ । তাই গুণনীয়ক এর স্থলে উৎপাদক বসিয়ে গসাগুকে গসাউ বলা হয়।
- যে সকল ভাজকদ্বারা দুই বা ততোধিক সংখ্যা বিভাজ্য হয়, তাদের বৃহত্তম ভাজকটিই গসাউ, গসাগু বা গসাভা।
- সকল সংখ্যাই **১** দ্বারা বিভাজ্য। তাই দুটি সংখ্যার অন্য কোন সাধারণ ভাজক (উৎপাদক/গুণনীয়ক) না পাওয়া গেলে **১**ই হবে তাদের গসাউ।
- যে দুটি সংখ্যার গসাউ **১**, এরাই সহমৌলিক সংখ্যা। (৮, ৯) = ১ $\Rightarrow$ ৮ ও ৯ সহমৌলিক। কয়েকটি সংখ্যাকে কমা দ্বারা আলাদা করে প্রথম বন্ধনীভুক্ত করা হলে, এ দ্বারা সংখ্যাগুলোর গসাউ বোঝায়।
- যে যে সংখ্যার গসাউ নির্ণয় করতে হবে, এদেরকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে, সাধারণ উৎপাদকগুলোর গুণফল নিলেই গসাউ পাওয়া যায়।
- গসাউ নির্ণয়ের ইউক্লিডীয় পদ্ধতি হল: ছোট সংখ্যাটি দ্বারা এর বড়টিকে ভাগ করা$\rightarrow$অবশিষ্ট দ্বারা ভাজককে ভাগ করা$\rightarrow$এভাবে ক্রমান্বয়ে ভাগ করে যাওয়া, যে পর্যন্ত না, নিঃশেষে বিভাজ্য হয়। এ প্রক্রিয়ায় শেষ ভাজকটি হল গসাউ। আরও যদি সংখ্যা থাকে, প্রথম দুই সংখ্যা থেকে প্রাপ্ত গসাউ দ্বারা পরবর্তী বড় সংখ্যাটিকে একই নিয়মে ভাগ করে যেতে হয়। সর্বশেষ প্রাপ্ত শেষ ভাজকই গসাউ। এ ভাগ প্রক্রিয়ায় যে স্তরে গিয়ে নিঃশেষে বিভাজ্য হয়, সেখানে ভাজক ও ভাগফলের গুণফলকে ভাজ্যের নিচে লিখে বিয়োগ দেখানো আবশ্যক নয়।
- কোন বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা একাধিক সংখ্যাকে ভাগ করলে যদি ভাগশেষ থাকে, তবে ভাজ্য থেকে ভাগশেষ গুলো যথক্রমে বিয়োগ করে নিঃশেষে ভাজ্য সংখ্যা পাওয়া যায়। এ ভাজ্যগুলোর গসাগুই হবে নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যা।
- যে যে সংখ্যার গসাউ নির্ণয় করতে হবে, এদের মাঝে একটি অপরটির গুণিতক হলে, গুণিতক বাদ দিয়ে গসাউ নির্ণয় করা যায়। যেমন: (৮, ১২, ১৬) = (৮, ১২) = ৪(২,৩) = ৪; এখানে, প্রথম বন্ধনী গসাউ এর প্রতীক। প্রথমে ৮ এর গুণিতক ১৬ বাদ দেওয়া হয়েছে। ৮ ও ১২ থেকে ৪ সাধারণীকরণ করা (কমন নেওয়া) হয়েছে। ২ ও ৩ সহমৌলিক বিধায় গসাউ ৪ লেখা হয়েছে।

শিখন সামগ্রী

বাস্তব উপকরণ: তেঁতুল বীচি, ম্যাচ বাক্স, পোস্টার পেপার, মার্কার (দলীয় কাজের জন্য)
অর্ধবাস্তব উপকরণ: পাঠের ভেতরে নির্দেশিত তৈরী চার্ট, কর্মপত্র ও ছকের পোস্টার (প্রদর্শনের জন্য)
সাধারণ উপকরণ: চক, ডাস্টার, পাঠ্যপুস্তক, বোর্ড পয়েন্টার, পাঠ পরিকল্পনা।

পাঠ সংগঠন: **সময়: ১০ মিনিট**

ক) শুভেচ্ছা বিনিময়
খ) শ্রেণির পরিবেশ অবলোকন এবং প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা গ্রহণ
গ) বাড়ির কাজ আদায়
ঘ) আনন্দদায়ক পরিবেশ সৃষ্টি: ছোট্ট মজার গল্প/ছড়া/গানের কলির অবতারণা

ঙ) পাঠ সূচনা :

শিক্ষক এক হাতে ৪টি বীচি এবং অপর হাতে ৬টি ম্যাচ কাঠি নিবেন। ৪টি বীচি দেখিয়ে প্রশ্ন করবেন, এ ৪টি বীচি কত জনকে সমভাবে দেওয়া যায়? ৬টি কাঠি কত জনের মাঝে সমবন্টন করা যায়? যত জনকে বীচি দেওয়া হবে তত জনকেই যদি কাঠি দেওয়া হয়, তা হলে সর্বাধিক কত জনকে বেছে নেওয়া যায়? ৪টি ও ৬টি সর্বাধিক কত জনের মাঝে সমবন্টন করা যায়? ৪কে কোন কোন সংখ্যা দ্বারা সমভাবে ভাগ করা যায়? ৬ কে কোন কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা যায়? ৪ ও ৬ এর সাধারণ ভাজকগুলো কি কি? এর মধ্যে বৃহত্তম কোনটি? বৃহত্তম সাধারণ ভাজককে আর কী বলা যায়? বলা যায় গরিষ্ঠ সাধারণ উৎপাদক/গুণনীয়ক; সংক্ষেপে গসাউ/গসাগু।

চ) পাঠ ঘোষণা: আমাদের আজকের পাঠ: **' গসাউ নির্ণয় এবং এ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান'**

তারিখ: ....../ ....../ ......

শিক্ষণ শিখন কার্যাবলি:	**সময়: ৩০ মিনিট**

উপস্থাপন : **৫ মিনিট**

২×৩ = ৬ ; এখানে ২ ও ৩ গুণ হয়ে কী উৎপাদন করেছে? ৬। অতএব ৬ এর উৎপাদক ২ ও ৩। আর কোন কোন সংখ্যা গুণ হয়ে ৬ উৎপাদিত হয়? ১×৬ = ৬। তা হলে ৬ এর উৎপাদকগুলো কি কি? উৎপাদকে উৎপাদকে গুণ হয়ে গুণফল হিসাবে নতুন সংখ্যা গঠিত হয়। তাই উৎপাদকের অপর নাম গুণনীয়ক। গুণনীয়ক বা উৎপাদককে ভাগ প্রক্রিয়ায় সংজ্ঞায়িত করা যায় এভাবে; যে যে সংখ্যা দ্বারা একটি সংখ্যা নিঃশেষে বিভাজ্য হয়, সে ভাজকগুলো ভাজ্যের গুণনীয়ক বা উৎপাদক। এক্ষেত্রে উৎপাদক, ভাজক ও গুণনীয়ক সমার্থক শব্দ।

দুইটি সংখ্যা ধরি ৮ ও ১২ ; এ সংখ্যাগুলো কোন কোন সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য?

৮ এর উৎপাদক = ১, ২, ৪, ৮

১২ এর উৎপাদক = ১, ২, ৩, ৪, ৬, ১২

৮ ও ১২ এর সাধারণ উৎপাদক = ১, ২, ৪ [যা সব ক্ষেত্রে আছে তাই সাধারণ]

৮ ও ১২ এর গরিষ্ঠ সাধারণ উৎপাদক = ৪ [গরিষ্ঠ= সব চেয়ে বড় = বৃহত্তম]

৮ ও ১২ এর গ সা উ = ৪ [তিনটি শব্দের প্রথম বর্ণ নিয়ে গসাউ]

'উৎপাদক' স্থলে 'গুণনীয়ক' বসালে 'গসাউ' স্থলে 'গসাগু' হয়। গসাগু/গসাউ এর গাণিতিক প্রতীক প্রথম বন্ধনী। একাধিক সংখ্যা কমাদ্বারা আলাদা করে প্রথম বন্ধনীভুক্ত করা হলে সংখ্যাগুলোর গসাউ বোঝায়।

গাণিতিক প্রতীকে সহমৌলিক পদ্ধতিতে গসাউ নির্ণয়:

গসাউ (৮ , ১২, ২৪)

= (৮ , ১২, ২৪) ← গসাউ এর গাণিতিক প্রতীক

= (৮, ১২) ← গুণনীয়ক ১২ রেখে এর গুণিতক ২৪ বাদ

= ৪(২, ৩) ← সাধারণীকরণ বা কমন নেওয়া

= ৪×১ = ৪ ← ২ ও ৩ সহমৌলিক এবং এদের গসাউ ১

কর্মপত্র-১ (একক কাজ): **৫ মিনিট**

ছকে দেওয়া সংখ্যা জোটগুলোকে মৌলিক উৎপাদকে প্রকাশ কর এবং গসাউ নির্ণয় কর (দুটি দেখান হল)।

সংখ্যা জোট	মৌলিক উৎপাদকে প্রকাশ	গসাউ = সাধারণ উৎপাদকের গুণফল
ক) ৬০, ৯৬	৬০ = ২×২×৩×৫ ৯৬ = ২×২×২×২×২×৩	(৬০, ৯৬) = ২×২×৩ = ১২
গ) ১০৫, ১৬৫		
ঘ) ৩৮৫, ২৮৬, ৪১৮		
ঙ) ৫২৫, ৪৯৫, ৫৭০	৫২৫ = ৩×৫×৫×৭ ৪৯৫ = ৩×৩×৫×১১ ৫৭০ = ২×৩×৫×১৯	(৫২৫, ৪৯৫, ৫৭০) = ৩×৫ =১৫

কর্মপত্র-২ (জোড়ায় কাজ) : **৫ মিনিট**

ভাগ (ইউক্লিডীয়)/সহমৌলিক প্রক্রিয়ায় ছকের সংখ্যা জোটের গসাউ নির্ণয় কর (দুইটি করে দেখান হল) :

সংখ্যা জোট	**ভাগ প্রক্রিয়ায় গসাউ নির্ণয়**	**গাণিতিক প্রতীকে গসাউ**
ক) ৩২৩, ৪৩৭	ছোট সংখ্যা দিয়ে বড়টিকে ভাগ: ৩২৩) ৪৩৭ (১ ৩২৩ ১১৪)৩২৩(২ ২২৮ ৯৫)১১৪(১ ৯৫ ১৯)৯৫(৫ এখানে শেষ ভাজক =১৯	∴ (৩২৩, ৪৩৭) = ১৯
খ) ৪৯৬, ৭৭৫		
গ) ১৪৪, ২৪০, ৬১২		
ঘ) ৪০৫, ৪৫০, ১১০৭ সহমৌলিক পদ্ধতি: (৪০৫, ৪৫০, ১১০৭) = ৩(১৩৫, ১৫০, ৩৬৯) = ৩×৩ (৪৫, ৫০, ১২৩) = ৩×৩ (৩×৩×৫, ২×৫×৫, ৩×৪১) = ৩×৩ ×১ = ৯	ছোট সংখ্যা দিয়ে এর বড়টিকে ভাগ: ৪০৫) ৪৫০ (১ ৪০৫ ৪৫)৪০৫(৯ ৪০৫ প্রাপ্ত শেষ ভাজক দিয়ে অন্যটিকে ভাগ: ৪৫)১১০৭(২৪ ৯০ ২০৭ ১৮০ ২৭)৪৫(১ ২৭ ১৮)২৭(১ ১৮ ৯)১৮(২ এখানে শেষ ভাজক = ৯	∴ (৪০৫, ৪৫০, ১১০৭) = ৯

কর্মপত্র-৩ (দলীয় কাজ) **৫মিনিট**

পাঠ্যপুস্তকের প্রশ্নমালা ১.৩ এর সমস্যা নং ৫ ও ১৩ সমাধান কর:

[বিশ্লেষণ মূলক প্রশ্ন: এ সমস্যায় কি দেওয়া আছে? কি নির্ণয় করতে বলা হয়েছে? কিভাবে করা যায়? নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যাদ্বারা কোন সংখ্যাকে ভাগ করলে, ভাগশেষ কত থাকে ? নিঃশেষে বিভাজ্য সংখ্যাগুলো পাওয়ার উপায় কী? দুটি সংখ্যার বৃহত্তম ভাজক/উৎপদক/গুণনীয়ক কী করে পাওয়া যায়?]

দলীয় কাজ উপস্থাপন ও পর্যালোচনা: **১০মিনিট**

মূল্যায়ন ও পুনঃশিক্ষণ :	সময়: **১০ মিনিট**

প্রশ্নোত্তরে মূল্যায়ন: **৩ মিনিট**

- গসাগু/ গসাউ বলতে কি বোঝায়?
- উৎপাদক পদ্ধতিতে গসাউ নির্ণয়ের ধাপগুলো কী?
- ইউক্লিডীয় পদ্ধতিতে গসাউ নির্ণয়ের ধাপগুলো কী?
- দুইটি সংখ্যার গসাউ ১ হয় কখন?
- দুইটি সংখ্যার মধ্যে ছোট সংখ্যাটি গসাগু হয় কখন?

পুনশিক্ষণ: **২ মিনিট**

প্রশ্নোত্তরে মূল্যায়নের মাধ্যমে যে সব বিষয়ে দুর্বলতা ধরা পড়বে, সে সব বিষয়ে পুনরালোচনা করবেন।

সম্প্রসারিত কাজ: **২ মিনিট**

১) ০, ৮, ১২ এর গসাগু কত?

প্রতিফলন **২মিনিট**

বাড়ির কাজ: **১ মিনিট**

সমস্যা- ২(ছ), ৩, ৬ (পরিমার্জন: 'ব.কি.' স্থলে বমি ধর্তব্য), ৮, ১১ ('বালক' স্থলে বালক-বালিকা ধর্তব্য)

নমুনা পাঠ পরিকল্পনা -২

পাঠ শিরোনাম: সরল সমীকরণ সমাধান	**সময়: ৫০ মিনিট**
বীজগণিত-৬ষ্ঠ শ্রেণি (২য় পাঠ, প্রশ্নমালা ৩.১)	
শিক্ষক পরিচিতি:	

শিখনফল

১. সমীকরণ কাকে বলে বলতে পারবে
২. সমীকরণে কি কি থাকে বলতে পারবে
৩. সরল সমীকরণ সমাধান করতে ও শুদ্ধি পরীক্ষা করতে পারবে
৪. সমীকরণে ব্যবহৃত চল, ধ্রুব, সম্পর্ক চিহ্ন, প্রক্রিয়া চিহ্ন সনাক্ত করতে পারবে।

ধারণা

- দুটি বীজ গাণিতিক রাশির সম্পর্ক সমান হলে তাকে সমীকরণ বলে।
- অজানা বা অজ্ঞাত রাশি, প্রক্রিয়া চিহ্ন এবং সমান চিহ্ন সংবলিত শুদ্ধ গাণিতিক বাক্যই সমীকরণ।
- অজ্ঞাত রাশির প্রাপ্ত মান দ্বারা সমীকরণের সমান চিহ্নের বাম পক্ষ ও ডান পক্ষ সমান হয় কিনা, তা দেখাই শুদ্ধি পরীক্ষা।
- অজ্ঞাত রাশির প্রাপ্ত মান শুদ্ধি পরীক্ষায় সঠিক হলে তাকে সমীকরণের বীজ বলে।
- একটি সমীকরণে চলক, ধ্রুবক, সমান চিহ্ন (=) এবং প্রক্রিয়া চিহ্ন থাকে।

শিখন সামগ্রী

বাস্তব উপকরণ : ১ ডজন মার্বেল/সীম বা তেঁতুলবীচি।

অর্ধবাস্তব উপকরণ: পাঠে বর্ণিত চার্ট/পোস্টার (কাজের মাধ্যমে ধারণা গঠন)।

মুদ্রিত/লিখিত বস্তু : পাঠ পরিকল্পনা, কর্মপত্র লিখিত পোস্টার (কাজের মাধ্যমে ধারণা গঠন)।

সাধারণ উপকরণ: পাঠ্যপুস্তক, চক/ মার্কার, ডাস্টার ও চকবোর্ড / হোয়াইট বোর্ড, বোর্ড পয়েন্টার।

পাঠ সূচনা:	**সময়: ১০ মিনিট**

ক) শুভেচ্ছা বিনিময়

খ) শ্রেণির পরিবেশ অবলোকন এবং প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা গ্রহণ

গ) বাড়ির কাজ আদায়: শ্রেণিনেতা বাড়ির কাজ আদায় করে রাখবে। উপস্থিতির সাথে কাজ মিলিয়ে নিন।

ঘ) আনন্দদায়ক পরিবেশ সৃষ্টি: কৌতূক/ছড়া/গান/ ছোট গল্পের অবতারণা

ঙ) পূর্বজ্ঞান যাচাই/আগাম সংগঠন:

ধাঁধাঁর মত করে একটি সমস্যা তুলে ধরবেন। এ পেকেটে কত মার্বেল আছে? এতে যত মার্বেল আছে তার সাথে আরও 3টি মার্বেল যোগ করলে 9টি মার্বেল হবে। সমস্যাটির সমীকরণরূপ কি হবে? পেকেটে কয়টি মার্বেল আছে তা কী করে সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়?

চ) পাঠ ঘোষণা: আমাদের আজকের পাঠ হল (পাঠ শিরোনাম বোর্ডে লিখে দিবেন):

‘ সরল সমীকরণ সমাধান (3.1)’ **তারিখ: .. .. ..**

শিক্ষণ শিখন কার্যক্রম:	**সময়: ৩০ মিনিট**

ক) উপস্থাপন: **৫মিনিট** বোর্ডে লিখুন:

$x + 3 = 9$

এ বাক্যটিকে কী বলা হয় ? এতে কি কি প্রতীক বা চিহ্ন আছে ?

x এর মান কত হলে সমান চিহ্নের বাম পক্ষ ও ডান পক্ষ সমান হবে? x এর এ মানটি কী করে পাওয়া যাবে?

কত যোগ বা বিয়োগ করলে বাম পক্ষে কেবল x থাকবে?

বাম পক্ষ থেকে 3 বাদ দিয়ে বা বিয়োগ করে, উভয় পক্ষ সমান রাখতে ডান পক্ষে কি করতে হবে?

প্রক্রিয়াটি সকলে খাতায় করার চেষ্টা কর। একটু সময় দিয়ে প্রশ্ন করুন, প্রক্রিয়াটি বোর্ডে এসে কে করতে পারবে?

নাম ধরে ডেকে একজনকে বোর্ডে এনে প্রক্রিয়াটি করতে দিন। প্রয়োজনে সহায়তা করুন।

x সমান কত পাওয়া গেল?

এ ভাবে একটি সমীকরণ থেকে অজানা মানের বর্ণ প্রতীকের মান নির্ণয় করার প্রক্রিয়াকে কী বলা হয়?

অজানা বা অজ্ঞাত রাশির মানকে সমীকরণের কী বলা হয়?

খ) একক কাজ: **৫মিনিট**

কর্মপত্র-১: শুদ্ধি পরীক্ষাসহ সমাধান কর:

1. $3x = 9$ 2. $4x = 32$ 3. $x+7 = 9$

প্রথমটি করে দেওয়া হল:

1. $3x = 9$

$\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ [উভয় পক্ষে 3 দ্বারা ভাগ করে; ‘ $\Rightarrow$ ’ কে ‘সমতুল’ বা ‘অর্থাৎ’ পড়া হয়, ইম্প্লাইজ (implies)]

$\Rightarrow x = 3$

শুদ্ধি পরীক্ষা: (অজ্ঞাত রাশির প্রাপ্ত মান দ্বারা সমীকরণের বাম পক্ষ ও ডান পক্ষ সমান হয় কিনা, তা দেখাই শুদ্ধি পরীক্ষা)

বাম পক্ষ = $3x = 3.3 = 9$ = ডান পক্ষ

$\therefore$ সমীকরণটির বীজ 3

গ) জোড়ায় কাজ: **৫ মিনিট**

কর্মপত্র-২: শুদ্ধি পরীক্ষাসহ সমাধান কর:

4. $x - 10 = 12$ 5. $2x + 1 = 7$

ঘ) দলীয় কাজ: **৫ মিনিট**

কর্মপত্র-৩: শুদ্ধি পরীক্ষাসহ সমাধান কর:

6. $7x + 10 = 52$ 7. $3x - 2 = 19$

ঙ) দলীয় কাজ উপস্থাপন ও পর্যলোচনা: **১০ মিনিট**

মূল্যায়ন ও পুনঃশিক্ষণ	**সময়: ১০ মিনিট**

ক) প্রশ্নোত্তরে মূল্যায়ন: **৩ মিনিট**

- সমীকরণ কী? অজ্ঞাত রাশি বা চল কী?
- শুদ্ধি পরীক্ষা কী? সমীকরণের বীজ বলতে কি বোঝায়?
- একটি সমীকরণে কি কি প্রতীক বা চিহ্ন থাকে?

খ) পুনঃশিক্ষণ: **৩ মিনিট**

যে যে বিষয়বস্তুতে দুর্বলতা রয়েছে বলে মনে হবে, সে সব বিষয়ে জোর দিয়ে পুনরালোচনা করবেন।

ঘ) পাঠ সম্প্রসারণ: **৩ মিনিট**

নিচের সমীকরণ দুটির মধ্যে কী মিল এবং কী গড়মিল আছে ?

১. $x+3=9$

২. $x^2+1=5$

ঙ) বাড়ির কাজ : **১ মিনিট**

পাঠ্যপুস্তকের প্রশ্নমালা ৩.১ এর ২ থেকে ৬ নং পর্যন্ত সমীকরণগুলো সমাধান কর এবং শুদ্ধি পরীক্ষা কর।

নমুনা পাঠ পরিকল্পনা -৩

শিক্ষক পরিচিতি:

পাঠ পরিচিতি: $(a+b)^2$এর সূত্রের জ্যামিতিক ধারণা গঠন, বীজগণিত, ৭ম শ্রেণি, প্রশ্নমালা-

সময়: ৫০ মিনিট

শিখনফল (Learning Outcomes)

- a, a^2, b, b^2, ab, এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিতে পারবে
- $(a+b)^2$এর জ্যামিতিক চিত্র আঁকতে পারবে
- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ সূত্রের জ্যামিতিক প্রমাণ দিতে পারবে

ধারণা (Concepts)

- একমাত্রিক রাশি a বা b দ্বারা জ্যামিতিক ভাবে রেখাংশ বোঝায়
- a^2 দ্বারা a রেখাংশের উপর গঠিত বর্গ বোঝায়। অনুরূপে b^2 দ্বারা বোঝায় b এর উপর অঙ্কিত বর্গ
- ab দ্বারা বোঝায় একটি আয়ত যার দৈর্ঘ্য a এবং প্রস্থ b, যখন $a>b$
- $(a+b)^2$ ক্ষেত্রে একটি a^2 ক্ষেত্র একটি b^2 ক্ষেত্র এবং দুটি ab ক্ষেত্র গঠন করা যায়
- উক্ত চিত্র থেকে জ্যামিতিক ভাবে $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ এর সূত্রটি প্রমাণিত হয়।

শিখন সামগ্রী (Learning Materials & Aids)

- **বাস্তব উপকরণ:** পোস্টার পেপার, মার্কার. স্কেল, জ্যামিতি বাক্স (বোর্ডে ও ব্যক্তিগত ব্যবহারের জন্য)
- **অর্ধবাস্তব উপকরণ:** পাঠে নির্দেশিত চার্ট, সমস্যার পোস্টার, কর্মপত্র ও ছকের পোস্টার (প্রদর্শনের জন্য)
- **সাধারণ উপকরণ:** চক, ডাস্টার, পাঠ্যপুস্তক, পয়েন্টার কাঠি, পাঠ পরিকল্পনা।

পাঠ সংগঠন (Organizing the Lesson): **সময়: ১০ মিনিট**

ক) শুভেচ্ছা বিনিময়

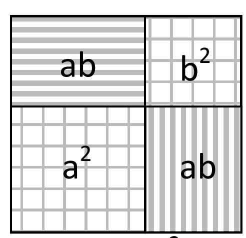
খ) শ্রেণির পরিবেশ অবলোকন এবং প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা গ্রহণ

গ) বাড়ির কাজ আদায়

ঘ) আনন্দদায়ক পরিবেশ সৃষ্টি: ছোট্ট মজার গল্প/ছড়া/চুটকি/গানের কলির অবতারণা

ঙ) পূর্বজ্ঞান যাচাই ও পাঠ সূচনা: পোস্টারে আঁকা চিত্রটি দেখিয়ে, এ দ্বারা কি বোঝায় প্রশ্ন করব। বিভিন্ন জন বিভিন্ন উত্তর দিতে পারে। কেহ ভুল উত্তর দিলে, শ্রেণির সহায়তায় শোধরাতে চেষ্টা করব।

- ভেতরের বড় বর্গের বাহু a, এবং ছোট বর্গের বাহু b হলে, এদের ক্ষেত্রফল কী হবে?
- এ ছাড়া আর কি ধরনের ক্ষেত্র এ চিত্রে আছে? এগুলোর ক্ষেত্রফল কী হবে ?
- এ চারটি ক্ষেত্র মিলে যে সার্বিক ক্ষেত্র, এর প্রতি বাহু কত? ক্ষেত্রফল কত?



$(a+b)^2$

চ)পাঠ ঘোষণা: আজ আমরা জ্যামিতিক ভাবে $(a+b)^2$ এর সূত্র গঠন করব –এই বলে পাঠ শিরোনাম বোর্ডে লিখে দেব:
জ্যামিতিক ভাবে $(a+b)^2$এর সূত্র গঠন **তারিখ: .... /..../....**

শিখন-শেখানো কার্যাবলি (Teaching Learning Activities):	**সময়: ৩০মিনিট**

ক) উপস্থাপন : **৫ মিনিট**

- $(a+b)^2$রাশিতে কয়টি উৎপাদক আছে? এদের গুণফল কত? বোর্ডে এসে কে নির্ণয় করতে পারবে ?
- এক জনকে বোর্ডে এসে করতে দেব এবং প্রয়োজনে সহায়তা দেব (কাজ শেষে ধন্যবাদ দেব)।
- তাহলে $(a+b)^2$ এর সূত্রটি কী দাঁড়ায়?

খ) কর্মপত্র-১ (একক কাজ-Individual Work): **৫ মিনিট**

- একটি রেখাংশ এঁকে, চিহ্নিত কর a দ্বারা।
- রেখাংশটি এক পাশে কিছু অংশ বর্ধিত করে, বর্ধিত অংশকে চিহ্নিত কর b দ্বারা।
- পুরো রেখাংশের দৈর্ঘ্য কত হবে?
- পুরো রেখাংশের উপর একটি বর্গ আঁক। এ বর্গটি কোন রাশির বর্গ?

গ) কর্মপত্র-২ (জোড়ায় কাজ- Pair Work): **৫ মিনিট**

- পূর্বে আঁকা বর্গের ভেতর a চিহ্নিত অংশের উপর একটি বর্গ আঁক।
- এর ক্ষেত্রফল কত?
- এ বর্গের বাহু বর্ধিত করে আর কি কি ক্ষেত্র পাওয়া যায়?

ঘ) কর্মপত্র-৩ (দলীয় কাজ- Group Work): **৫মিনিট**

- কর্ম পত্র ১ ও ২ এ আঁকা চিত্র থেকে $(a+b)^2$ এর সূত্রটি গঠন কর।
- গঠিত সূত্র প্রয়োগ করে $(2x+3y)$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

ঙ) দলীয় কাজ উপস্থাপন ও পর্যালোচনা (Group Work Presentation): **১০ মিনিট**

মূল্যায়ন ও পুনঃশিক্ষণ (Evaluation & Feedback):	সময়: **১০ মিনিট**

ক) প্রশ্নোত্তরে মূল্যায়ন: **৩ মিনিট**

- $(a+b)^2$ এর সূত্রের জ্যামিতিক চিত্রে বর্গ ও আয়ত মিলে কয়টি ক্ষেত্র আছে ?
- $(a+b)^2$ এর সূত্র থেকে a^2+b^2 এর সূত্র নির্ণয় করার উপায় কী?
- $(x+y)^2 =$ কত?
- $87 \times 87 + 2 \times 87 \times 13 + 13 \times 13$, এ রাশির সরল মান কত? এর বর্গমূল কত?

খ) পুনঃশিক্ষণ (Reteaching): **৩ মিনিট**

যে বিষয়ে দুর্বলতা রয়েছে বলে মনে হবে, সে বিষয়ে পুনরালোচনা করবেন।

গ) সম্প্রসারিত কাজ (Lesson Extension): **৩ মিনিট**

একটি বর্গাকৃতি ভূমিতে 20 ফুট বর্গ ও 10 ফুট বর্গ কক্ষসহ মোট চার কক্ষের একটি গৃহ-নক্সা (প্ল্যান) অঙ্কন কর। পূর্ণ গৃহ এবং প্রত্যেক কক্ষের কালি কত?

ঘ) বাড়ির কাজ (Home Task): **১ মিনিট**

- বর্গ নির্ণয় কর: i. a+5 ii. x+2y iii. 2a+b+c
- শ্রেণিতে করা কাজগুলো ফ্রেশ কর।

নমুনা পাঠ পরিকল্পনা -৪

পাঠ শিরোনাম: সন্নিহিত সম্পূরক কোণের ধারণা **সময়: ৫০ মিনিট**
গণিত (জ্যামিতি- ২য় অধ্যায়, পাঠ-২), ৬ষ্ঠ শ্রেণি
শিক্ষক পরিচিতি:

শিখনফল

১. কোণ ও সরলকোণ কী তা বলতে পারবে।
২. সন্নিহিত কোণ বলতে কী বোঝায় ব্যাখ্যা করতে পারবে।
৩. সমকোণ ও লম্ব কী বলতে ও সনাক্ত করতে পারবে।
৪. পূরক ও সম্পূরক কোণের মধ্যে পার্থক্য করতে পারবে।
৫. সন্নিহিত সম্পূরক কোণ ব্যাখ্যা করতে এবং সনাক্ত করতে পারবে।

ধারণা

- **কোণ:** কোণ একটি আকৃতি, যার দুইটি বাহু (রেখাংশ বা রশ্মি) এবং একটি শীর্ষ বিন্দু আছে। কোণের বাহুদ্বয় রশ্মি হলে কোণের শীর্ষবিন্দু থেকে নির্গত বলে ধরা হয়। কোণের বাহুদ্বয় রেখাংশ হলে কোণের শীর্ষবিন্দুতে গিয়ে মিলিত হয়েছে বলে ধরা হয়। একই শীর্ষবিন্দুতে দুই বাহুর মধ্যবর্তী আকৃতিকে কোণ বলে।
- **সরলকোণ:** যে কোণের বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় বিপরীত মুখি অবস্থায় থাকে, তাকে সরলকোণ বলে।
- **সন্নিহিত কোণ:** দুইটি কোণ সন্নিহিত হয় তিনটি শর্তে; একই শীর্ষবিন্দু থাকবে, একটি সাধারণ বাহু থাকবে, এবং সাধারণ বাহুর বিপরীত পাশে কোণ দুইটি অবস্থান করবে।
- **সমকোণ, লম্ব ও সরলকোণ সম্পর্ক:** দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে, ছেদ বিন্দুতে যে চারটি কোণ উৎপন্ন হয়, কোণগুলো যদি পরস্পর সমান হয়, তবে প্রত্যেকটি কোণকে বলা হয় সমকোণ। সমকোণের বাহুদ্বয় (রেখাংশ বা রশ্মি) পরস্পর লম্ব। দুই সমকোণ মিলে সরল কোণ হয়।
- সমকোণকে সমান ৯০ ভাগ করে প্রতি ভাগকে বলা হয় ডিগ্রি। অর্থাৎ ১ সমকোণ = ৯০ ডিগ্রি। তাই কখনো বলা হয়, '৯০ ডিগ্রি কোণকে সমকোণ বলে'। অনুরূপে বলা যায়, '১৮০ ডিগ্রি কোণকে সরলকোণ বলে'। ২ সমকোণ = ১৮০° = ১ সরলকোণ (° এটি ডিগ্রি প্রতীক)।
- **পূরক কোণ:** একটি কোণ যদি এক সমকোণের চেয়ে ছোট হয়, তবে এক সমকোণ পূরণ করতে আরও যে পরিমাণ কোণের প্রয়োজন, তাই তার পূরক কোণ। 'পূরক কোণ' কথাটি দ্বারা দুইটি কোণের সমষ্টিগত সম্পর্ক বোঝায়, যেন, এদের সমষ্টি এক সমকোণ হয়।
- **সম্পূরক কোণ:** একটি কোণ যদি এক সরলকোণের চেয়ে ছোট হয়, তবে এক সরলকোণ পূরণ করতে আরও যে পরিমাণ কোণের প্রয়োজন, তাই তার সম্পূরক কোণ। অর্থাৎ দুইটি সম্পূরক কোণের সমষ্টি এক সরলকোণ। সম + পূরক = সম্পূরক । অর্থাৎ দুইটি পরস্পর পূরক কোণের যে কোনো একটির সাথে এক সমকোণ যোগ করলে, এরা পরস্পর সম্পূরক কোণে পরিণত হয়। তাই দুইটি সম্পূরক কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা এক সরলকোণ। 'সম্পূরক কোণ' কথাটি দ্বারা দুইটি কোণের সমষ্টিগত সম্পর্ক বোঝায়, যেন, এদের সমষ্টি দুই সমকোণ বা এক সরলকোণ হয়।
- **সন্নিহিত সম্পূরক কোণ:** 'সন্নিহিত কোণ' দ্বারা বোঝায় দুইটি কোণের অবস্থানগত সম্পর্ক (এক শীর্ষ, সাধারণ বাহু, সাধারণ বাহুর বিপরীত পাশে অবস্থান) এবং 'সম্পূরক কোণ' দ্বারা বোঝায় দুইটি কোণের সমষ্টিগত সম্পর্ক যেন, সমষ্টি এক সরলকোণ বা দুই সমকোণ বা ১৮০ ডিগ্রি। দুইটি কোণ যদি এমন হয় যে, অবস্থানগত ভাবে এরা সন্নিহিত এবং সমষ্টিগত ভাবে সম্পূরক, তবেই এরা সন্নিহিত সম্পূরক কোণ।

অতএব দুইটি সন্নিহিত সম্পূরক কোণের বৈশিষ্ট্য:

১. অভিন্ন শীর্ষবিন্দু ২. একটি সাধারণ বাহু ৩. সাধারণ বাহুর বিপরীতে কোণদ্বয়ের অবস্থান ৪. কোণদ্বয়ের সমষ্টি ১৮০°।

শিখন সামগ্রী

সাধারণ উপকরণ: পাঠ্য বই, চক, ডাস্টার ব্ল্যাক/হোয়াইট বোর্ড, পাঠ পরিকল্পনা।

বাস্তব উপকরণ: বোর্ডে ব্যবহার যোগ্য জ্যামিতিক যন্ত্রপাতি-১ সেট এবং প্রত্যেক শিক্ষার্থীর নিজস্ব সেট, পোস্টার পেপার, মার্কার, কোণ তৈরি করে দেখানোর জন্য অন্তত দুইটি কাঠি।

অর্ধবাস্তব উপকরণ: বিভিন্ন প্রকার কোণের চার্ট ও কর্মপত্র লেখা পোস্টার।

পাঠ সংগঠন (Organizing the Lesson):	সময়: ১০ মিনিট

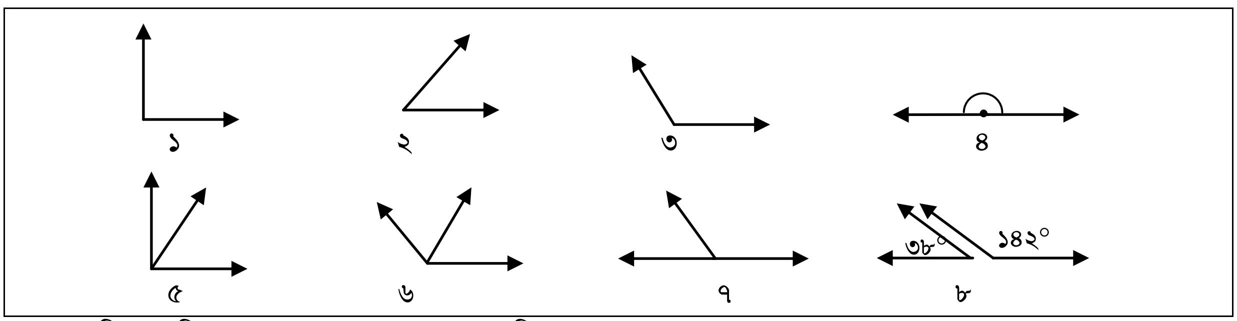
ক) শুভেচ্ছা বিনিময়
খ) শ্রেণির পরিবেশ অবলোকন এবং প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা গ্রহণ
গ) বাড়ির কাজ আদায়
ঘ) আনন্দদায়ক পরিবেশ সৃষ্টি: কৌতূক/ছড়া/গান/ ছোট গল্পের অবতারণা
ঙ) পাঠ সূচনা/ঘোষণা :
নিকট পরিবেশ থেকে পাঠ শুরু করবেন। আমরা আমাদের শ্রেণীকক্ষে কি কি আকৃতি দেখতে পাচ্ছি?
টেবিলের কোনা দেখিয়ে এখানে কি কোণ আছে? এ কোণ কিভাবে সৃষ্টি হয়েছে? আমরা কাগজে কি ভাবে কোণ আঁকতে পারি? কোণ কী ? কোণ কিভাবে গঠিত হয়? বিভিন্ন প্রকার কোণের চার্ট দেখাবেন। চার্টের ক্রমিক নম্বর অনুসারে কোণের নাম বলবে। সন্নিহিত, পূরক, সম্পূরক এ শব্দ গুলোর সাধারণ অর্থ জিজ্ঞেস করবেন।
আজ আমরা সন্নিহিত সম্পূরক কোণের ধারণা গঠন করতে চেষ্টা করব।

'সন্নিহিত সম্পূরক কোণ' তাং ...../ ...../.....

শিক্ষণ শিখন কার্যক্রম:	সময়: ৩০ মিনিট

ক) উপস্থাপন: **৫ মিনিট**
শিক্ষক হাতের কনুই ভাঁজ করে সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ ও সরলকোণ দেখাবেন। একটি কাঠির উপর একটি কাঠি লম্ব ভাবে ধরে সমকোণ দেখাবেন। একটি কোণ ছোট করে কাঠিটি ধরবেন, সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ দেখাবেন। দুই বাহু একই সরলরখায় নিয়ে সরলকোণ দেখাবেন।
কোণের একটি চার্ট দেখাবেন:

চার্ট



প্রথম সারিতে ক্রমিক নম্বর ধরে কোণের নাম বলতে দিবেন।
নিচের সারির জন্য প্রশ্ন করবেন,

- জোড়া কোণগুলোর মধ্যে কোন জোড়ার সমষ্টি জানা এবং কোনটি অজানা?
- কোন কোণজোড়া ১ সমকোণ পূরণ করে? কোন জোড়া দুই সমকোণ বা ১ সরলকোণ পূরণ করে?
- সমকোণ পূরণকারী কোণদ্বয় পূরক এবং সরলকোণ পূরণকারী কোণদ্বয় সম্পূরক হলে, পূরক ও সম্পূরক কোণ জোড়া সনাক্ত করতে পারবে কে? প্রয়োজনে সহায়তা করুন।

খ) একক কাজ (কর্মপত্র-১): **৫ মিনিট**
রেখাংশ দিয়ে কোণ আঁক। রশ্মি দিয়ে কোণ আঁক। রেখা দিয়ে কোণ আঁক।

- কোণ কি ভাবে গঠিত হয় বা উৎপন্ন হয়?

যে বিন্দুতে কোণ উৎপন্ন হয়, তা কোণের শীর্ষবিন্দু। তোমার আঁকা কোণের শীর্ষবিন্দুগুলোর একেকটি নাম দাও। যে রেখাংশ, রশ্মি বা রেখা দিয়ে কোণ এঁকেছ, এগুলোকে বলা হয় কোণের বাহু।

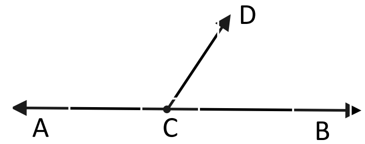
- তোমার আঁকা প্রতিটি কোণের কয়টি বাহু আছে?
- একটি কোণের কি কি অঙ্গ আছে?
- তুমি তোমার বন্ধুকে কী বলে কোণ চেনাতে পারবে?

গ) জোড়ায় কাজ (কর্মপত্র-২): **৫ মিনিট**

চিত্র অনুযায়ী শূন্য স্থান পূরণ কর:

চত্রে AB একটি .... ।

C, AB এর একটি ....। CA, CB, CD তিনটি .... ।



ACD কোণের শীর্ষবিন্দু ..... এবং বাহু দুইটি ..... ও .....

ACB কোণের শীর্ষবিন্দু ..... এবং বাহু দুইটি ..... ও .....

DCB কোণের শীর্ষবিন্দু ..... এবং বাহু দুইটি ..... ও ..... ।

কোণের নাম করার কৌশলটি কি? মাঝে কোন লেটার থাকে?

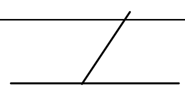
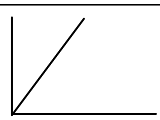
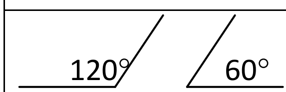
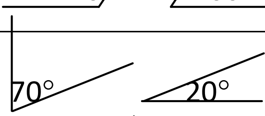
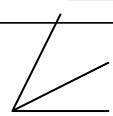
একটি বাহু যদি দুইটি কোণের বাহু হয়, তাকে বলে সাধারণ বাহু। ACD ও ACB কোণের সাধারণ বাহু .... ।

ACB ও DCB কোণের সাধারণ বাহু ....। DCB ও ACD কোণের সাধারণ বাহু ....

কোন দুইটি কোণ, সাধারণ বাহুর, দুই পাশে আছে? .... ও .... কোণদ্বয় সন্নিহিত কোণ। কারণ, ১)এ দুইটি কোণের শীর্ষবিন্দু ....; ২) একটি .... বাহু আছে; ৩) কোণদ্বয় .... দুই পাশে অবস্থিত।

ঘ) দলীয় কাজ (কর্মপত্র-৩): **৫ মিনিট**

নিচের ছকে প্রতি ক্ষেত্রে দুইটি করে কোণের চিত্র দেওয়া আছে। নির্দেশ অনুসারে ছকটি পূরণ কর:

দুইটি কোণের চিত্র	সম্পর্ক ভিত্তিক নাম		
	অবস্থানগত সম্পর্ক	সমষ্টিগত সম্পর্ক	অবস্থান ও সমষ্টি ভিত্তিক
			
			
	অসন্নিহিত	সম্পূরক	অসন্নিহিত সম্পূরক কোণ
			
			
কোন্ দুইটি কোণের ক্ষেত্রে প্রান্তীয় বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত? এদের অপরাপর বিশেষ বৈশিষ্ট্য কি কি? --------- ---			

ঙ) দলীয় কাজ উপস্থাপন ও পর্যালোচনা: **১০ মিনিট**

মূল্যায়ন ও পুনঃশিক্ষণ: **সময়: ১০ মিনিট**

ক) প্রশ্নোত্তর: **৩ মিনিট**

- কোণ কী?
- সরলকোণ কী?
- সন্নিহিত কোণ বলতে কি বোঝায়?
- সমকোণ কী এবং লম্ব কী?
- পূরক ও সম্পূরক কোণের মধ্যে পার্থক্য কর।
- সন্নিহিত সম্পূরক কোণ বলতে কী বোঝায়? এঁকে দেখাও।

খ) পুনঃশিক্ষণ: **৩ মিনিট**

যে বিষয়ে দুর্বলতা রয়েছে বলে মনে হবে, সে বিষয়ে পুনরালোচনা করবেন।

গ) সম্প্রসারিত কাজঃ **৩ মিনিট**

সরলরেখার এক বিন্দু থেকে একই পাশে দুইটি রশ্মি আঁক। কয় জোড়া সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হল? সরলরেখার এক পাশের সকল কোণের সমষ্টি কত?

ঘ) বাড়ির কাজঃ **১ মিনিট**

সন্নিহিত সম্পূরক কোণের চিত্র আঁক। কেন এ চিত্র সন্নিহিত সম্পূরক হল তার কারণ ব্যাখ্যা কর।

নমুনা পাঠ পরিকল্পনা -৫

শিক্ষক পরিচিতিঃ
পাঠ পরিচিতিঃ উপপাদ্য- ১৪ঃ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।
গণিত (জ্যামিতি), ৭ম শ্রেণি **সময়ঃ ৫০ মিনিট**

শিখনফল (Learning Outcomes)

১. কাগজের ত্রিভুজ ভাঁজ করে দেখাতে পারবে যে ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ
২. কাগজের ত্রিভুজের কোণ কেটে নিয়ে রেখার এক পাশে স্থাপন করে উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারবে
৩. চাঁদার সাহায্যে কোণ পরিমাপ করে উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারবে
৪. বহুভুজের সূত্র থেকে উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারবে
৫. ত্রিভুজের একই ক্রমের তিনটি বহিস্থ কোণ চক্রের সাহায্যে উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারবে
৬. ত্রিভুজ বিভক্ত করণ পদ্ধতিতে উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারবে।

ধারণা (Concepts)

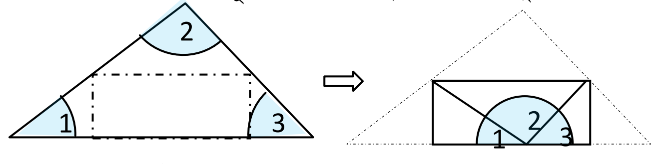
- কাগজের ত্রিভুজের কোনাগুলো ভাঁজ করে কোণের শীর্ষগুলো একই বিন্দুতে আনা যায়, যেন সরলকোণ হয়।
- কাগজের ত্রিভুজের তিনটি কোনা ছিঁড়ে নিয়ে একই শীর্ষে সরলরেখার এক পাশে বসালে সরলকোণ হয়।
- চাঁদার সাহায্যে যেকোনো ত্রিভুজের কোণগুলো পরিমাপ করে সমষ্টি নিলে ১৮০° হয়।
- n বাহু বিশিষ্ট বহুভুজের কোণের সমষ্টি $(2n - 4)$ সমকোণ; −এ সূত্র প্রয়োগে উপপাদ্যটি প্রমাণিত হয়।
- একই ক্রমে ত্রিভুজের তিনটি বহিস্থ কোণের সমষ্টি এক চক্র বা চার সমকোণ। ৩ শীর্ষে উৎপন্ন তিন জোড়া সন্নিহিত কোণের সমষ্টি ছয় সমকোণ। এ দুই এর বিয়োগফল থেকে উপপাদ্যটি প্রমাণিত হয়।
- একিট শীর্ষ থেকে ভূমিতে রেখা টেনে ত্রিভুজকে ক্রমান্বয়ে বিভক্ত করে আরোহী পদ্ধতিতে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়

শিখন সামগ্রী (Learning Materials & Aids)

বাস্তব উপকরণঃ পোস্টার পেপার, মার্কার, কয়েকটি কাগজের ত্রিভুজ, জ্যামিতি বাক্স (বড় ও ছোট)
অর্ধবাস্তব উপকরণঃ পাঠে নির্দেশিত চার্ট, সমস্যার পোস্টার, কর্মপত্র ও ছকের পোস্টার (প্রদর্শনের জন্য)
সাধারণ উপকরণঃ চক, ডাস্টার, পাঠ্যপুস্তক, পয়েন্টার কাঠি, পাঠ পরিকল্পনা।

পাঠ সংগঠন (Organizing the Lesson): **সময়ঃ ১০ মিনিট**

ক) শুভেচ্ছা বিনিময়
খ) শ্রেণীর পরিবেশ অবলোকন এবং প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা গ্রহণ
গ) বাড়ির কাজ আদায়
ঘ) আনন্দদায়ক পরিবেশ সৃষ্টিঃ ছোট্ট মজার গল্প/ছড়া/গানের কলির অবতারণা
ঙ) আগাম সংগঠকঃ 1, 2, 3 দ্বারা কোণগুলো চিহ্নিত করা ভারি কাগজের একটি ত্রিভুজ দেখিয়ে বলব, এটা কি? এটি ভাঁজ করে তিনটি কোণ একই শীর্ষে আনা যায় কিভাবে? উপরের কোণের শীর্ষকে ভূমিতে নিতে বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখা বরাবর ভাঁজ করতে হবে।



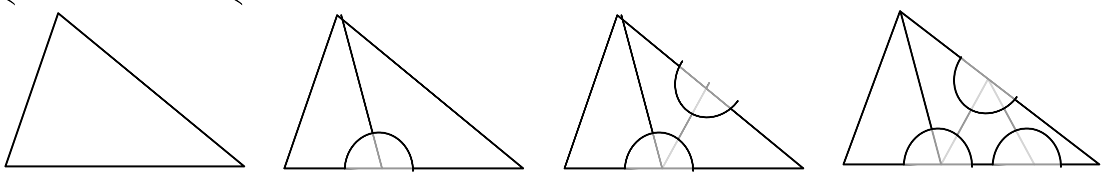
পরে ভূমি সংলগ্ন দুই কোণ ভাঁজ করে একই শীর্ষ বিন্দুতে আনতে হবে।
ত্রিভুজটির তিন কোণ একই শীর্ষে পাশাপাশি বসে কি ধরনের কোণ সৃষ্টি করল? সরলকোণ সমান কত সমকোণ?

চ) পাঠ ঘোষণাঃ আজ আমরা প্রমাণ করব, ‘ **ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ**’ তারিখঃ ....

শিখন-শেখানো কার্যাবলি (Teaching Learning Activities): **সময়: ৩০মিনিট**

উপস্থাপন : **৫ মিনিট**

বোর্ডে একটি ত্রিভুজ আঁকব। এক শীর্ষ থেকে ভূমিতে একটি রেখাংশ এঁকে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে প্রশ্ন করব, ত্রিভুজের (২য় চিত্র) সংখ্যা বৃদ্ধি পেল কয়টি? কোণ বৃদ্ধি পেল কি পরিমাণ? ত্রিভুজ বিভক্তকারী দ্বিতীয় রেখাংশ আঁকব; এবার (৩য় চিত্র) ত্রিভুজ বৃদ্ধি পেল কয়টি? কোণ বৃদ্ধি পেল কি পরিমাণ?

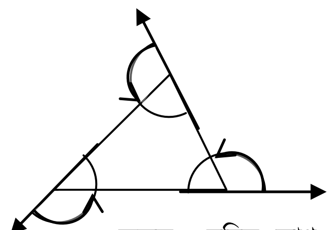


একই ত্রিভুজে পরবর্তী তিনটি চিত্রের কাজ ক্রমান্বয়ে করা হবে

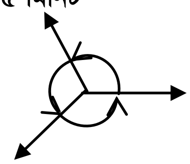
এ ভাবে তৃতীয় রেখাংশ এঁকে অনুরূপ প্রশ্ন করব। প্রতি স্তরে ক্রমান্বয়ে ত্রিভুজ বৃদ্ধি পায় কয়টি? কোণ বৃদ্ধি পায় কি পরিমাণ? অতএব ত্রিভুজের কোণ সম্পর্কে কি সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়?

কর্মপত্র-১ (একক কাজ-Individual Work): **৫ মিনিট**

- একটি ত্রিভুজ আঁক।
- বাহু তিনটি একই ক্রমে বর্ধিত কর।
- প্রতি শীর্ষের কোন জোড়া কি ধরনের?
- এ তিন জোড়া কোণের সমষ্টি কত?
- কেবল বহিস্থ তিন কোণের সমষ্টি কত?
- তাহলে, ত্রিভুজের অন্তস্থ তিন কোণের সমষ্টি কত হবে?



অন্তস্থ ও বহিস্থ কোণ



বহিস্থ কোণের সমষ্টি

(একই ক্রমে বর্ধিত বাহুদ্বারা গঠিত সকল বহিস্থ কোণ মিলে একটি পূর্ণচক্র হয়; তাহলে পরিমাণ কত?)

কর্মপত্র-২ (তিন জন মিলে কাজ- Triple- Work): **৫ মিনিট**

প্রত্যেকে স্বাধীন ভাবে একটি করে ত্রিভুজ আঁক। ত্রিভুজের নাম দাও ABC;

চাঁদার সাহায্যে কোণগুলো পরিমাপ করে যৌথ ভাবে ছকটি পূরণ কর:

নাম (সংক্ষেপে)	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	সমষ্টি	গড়	মন্তব্য
১.						
২.						
৩.						

কর্মপত্র-৩ (দলীয় কাজ- Group Work): **১০ মিনিট**

(ইঙ্গিত মূলক প্রশ্ন: উপপাদ্যটির সাধারণ নির্বচন কি? বিশেষ নির্বচন কী হবে? সমষ্টি নির্ণয়ের জন্য তিনটি কোণকে এক শীর্ষে নেওয়ার উপায় কি? প্রয়োজনীয় অঙ্কন সম্পন্ন কর। যৌক্তিক ভাবে বিশেষ নির্বচনটি প্রমাণ কর।)

দলীয় কাজ উপস্থাপন ও পর্যালোচনা (Group Work Presentation): **১০ মিনিট**

মূল্যায়ন ও পুনঃশিক্ষণ (Evaluation & Feedback): সময়: **১০ মিনিট**

ক) প্রশ্নোত্তরে মূল্যায়ন: **৩ মিনিট**

- যৌক্তিক ভাবে উপপাদ্যটি প্রমাণের জন্য কি কি পূর্ব ধারণার প্রয়োজন?
- কি কি কৌশল অবলম্বন করে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হল?
- একটি চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি কত হবে?

খ) পুনঃশিক্ষণ (Reteaching): **৩ মিনিট**

যে বিষয়ে দুর্বলতা রয়েছে বলে মনে হবে, সে বিষয়ে পুনরালোচনা করবেন।

গ) সম্প্রসারিত কাজ (Lesson Extension): **৩ মিনিট**

n সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট বহুভুজের কোণের সমষ্টির সূত্র কি? সূত্র প্রয়োগে উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

ঙ) বাড়ির কাজ (Home Task): **১ মিনিট**

অনুরূপ কোণের ধারণা ব্যবহার না করে উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

নমুনা পাঠ পরিকল্পনা -৬

শিক্ষক পরিচিতি:
পাঠ পরিচিতি: 30° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়, ত্রিকোণমিতি, ৯ম শ্রেণি, প্রশ্নমালা-
সময়: ৫০ মিনিট

শিখনফল (Learning Outcomes)

- একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করতে পারবে যার একটি কোণ 30°
- সমকোণী ত্রিভুজে বিবেচ্য কোণ সাপেক্ষে লম্ব ও ভূমি সনাক্ত করতে পারবে
- 30°কোণ বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর মান নির্ধারণ করতে পারবে
- নির্ধারিত সমকোণী ত্রিভুজ থেকে, 30° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করতে পারবে।

ধারণা (Concepts)

- সমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলো সমান এবং প্রত্যেক কোণের পরিমাণ 60°
- সমবাহু ত্রিভুজের যেকোন শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুতে লম্ব আঁকলে, সে লম্ব শীর্ষ কোণ ও বিপরীত বাহুকে সমদ্বিখন্ডন করে এবং 30° ও 60° কোণ বিশিষ্ট দুটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠিত হয়
- সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো পিথাগোরাসের সূত্রে আবদ্ধ: $(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$
- অতিভুজ 2a ধরা হলে, 30° কোণের বিপরীত বাহু a এবং অপরটি হয় $a\sqrt{3}$
- সমকোণী ত্রিভুজের সংশ্লিষ্ট দুই বাহুর মান ব্যবহার করে 30°বা 60°কোণের যেকোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করা যায়।
- কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের জন্য বিবেচ্য কোণের বিপরীত বাহুকে লম্ব ধরতে হয়।

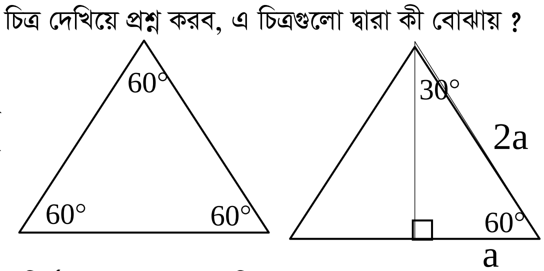
শিখন সামগ্রী (Learning Materials & Aids)

বাস্তব উপকরণ: পোস্টার পেপার, মার্কার, জ্যামিতি বাক্স (ব্যক্তিগত এবং বোর্ডে ব্যবহারের জন্য)
অর্ধবাস্তব উপকরণ: পাঠে নির্দেশিত চার্ট, কর্মপত্র লিখিত পোস্টার
সাধারণ উপকরণ: চক, ডাস্টার, পাঠ্যপুস্তক, পয়েন্টার কাঠি, পাঠ পরিকল্পনা।

পাঠ সংগঠন (Organizing the Lesson): **সময়: ৫মিনিট**

ক) শুভেচ্ছা বিনিময়
খ) শ্রেণির পরিবেশ অবলোকন এবং প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা গ্রহণ
গ) বাড়ির কাজ আদায়
ঘ) আনন্দদায়ক পরিবেশ সৃষ্টি: ছোট্ট মজার গল্প/ছড়া/গানের কলির অবতারণা
ঙ) আগাম সংগঠক (Advance Organizer): পোস্টারে চিত্র দেখিয়ে প্রশ্ন করব, এ চিত্রগুলো দ্বারা কী বোঝায় ?

দ্বিতীয় ত্রিভুজে আঁকা লম্বের মান কিভাবে নির্ণয় করা যায়? বিভিন্ন জন বিভিন্ন উত্তর দিতে পারে। শুদ্ধ উত্তরের জন্য ধন্যবাদ দেব। উত্তর ভুল হলে, সম্পূরক প্রশ্নের মাধ্যমে সঠিক উত্তরের দিকে নিয়ে যাব।



চ)পাঠ ঘোষণা: **‘ <u>30° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়</u>’** **তারিখ: .... /..../....**

শিখন-শেখানো কার্যাবলি (Teaching Learning Activities): **সময়: ৩৫মিনিট**

উপস্থাপন : **১০ মিনিট**

কি উপায়ে সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা যায়? একজনকে বোর্ডে একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকতে বলব। অপর একজনকে একটি কোণের সমদ্বিখন্ডক আঁকতে বলব। সমবাহু বা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখন্ডক বিপরীত বাহুকে কি ভাবে বিভক্ত করে? (সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরকোণের সমদ্বিখন্ডক ভূমির লম্ব-সমদ্বিখন্ডক)

সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর সম্পর্ক-সূত্র কি? অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে কে ?
এক জন বোর্ডে এসে করবে: পিথাগোরাসের সূত্র : (অতিভুজ)^2 = (লম্ব)^2 + (ভূমি)^2

$\Rightarrow$ (লম্ব)^2 = (অতিভুজ)^2 - (ভূমি)^2 = $(2a)^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow$ লম্ব = $a\sqrt{3}$

কর্মপত্র-১ (একক কাজ-Individual Work): **৫ মিনিট**

- সমকোণী ত্রিভুজে বিবেচ্য কোণের প্রেক্ষিতে লম্ব বা ভূমি সনাক্ত করার উপায় কি ?
- $30°$কোণ বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ আঁক এবং কোণটি চিত্রে নির্দেশ কর।
- অতিভুজকে 2a ধরে অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ধারণ কর এবং চিত্রে নির্দেশ কর।

কর্মপত্র-২ (জোড়ায় কাজ- Pair Work)): **৫ মিনিট**

- সমকোণী ত্রিভুজের তিন বাহু থেকে কয়টি অনুপাত পাওয়া যায়? এ অনুপাতগুলোর নাম কি কি?
- $30°$কোণ সাপেক্ষে একটি অনুপাতের মান নির্ণয় দেখান হল: $\sin 30° = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$
- অন্য অন্ততঃ দুটি অনুপাতের মান নির্ণয় কর।

কর্মপত্র-৩ (দলীয় কাজ- Group Work): **১০ মিনিট**

- $30°$কোণ বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজকে ABC ত্রিভুজ হিসাবে চিহ্নিত কর।
- AB, BC, CA বাহুকে পিথাগোরাসের সূত্রে প্রকাশ কর।
- অতিভুজকে যেকোনো চলক ধরে, সে অনুসারে অপর দুই বাহুর মান নির্ধারণ কর।
- এ মান থেকে প্রথম তিনটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় কর।

দলীয় কাজ উপস্থাপন ও পর্যালোচনা (Group Work Presentation): ৫ মিনিট

মূল্যায়ন ও পুনঃশিক্ষণ (Evaluation & Feedback): সময়: **১০ মিনিট**

ক) প্রশ্নোত্তরে মূল্যায়ন: **৩ মিনিট**

- $30°$ কোণ বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ গঠনের উপায় কি?
- সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ $30°$ হলে, অপর সূক্ষ্মকোণটি কত ?
- সমকোণী ত্রিভুজে বিবেচ্য একটি কোণ সাপেক্ষে লম্ব ও ভূমি সনাক্ত করবে কি করে?
- এখানে সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 2a ধরার সুবিধা কি?

খ) পুনঃশিক্ষণ (Reteaching): **৩ মিনিট**

যে বিষয়ে দুর্বলতা রয়েছে বলে মনে হবে, সে বিষয়ে পুনরালোচনা করবেন।

গ) সম্প্রসারিত কাজ (Lesson Extension): **৩ মিনিট**

$\tan 45° = 1$, এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

ঙ) বাড়ির কাজ (Home Task): **১ মিনিট**

$60°$ কোণের প্রথম তিনটি অনুপাতের মান নির্ণয় কর। বিপরীত অনুপাত নির্ণয়ের কৌশল কী?

নমুনা পাঠ পরিকল্পনা -৭

একটি সংক্ষিপ্ত পাঠ পরিকল্পনা

বিষয়: গণিত; বিষয়বস্তু: প্রতিসমতা; শ্রেণি: ৭ম

কাজের সময়: ৩০ - ৪০ মিনিট

শিখন সামগ্রি: কাগজ কাটা জ্যামিতিক আকৃতি, কাঁচি।

উদ্দেশ্য: জ্যামিতিক চিত্র এবং ছবি বিশ্লেষণ করে প্রতিসমতার ধারণা গঠন করবে এবং বর্ণনা করবে।

চিন্তন দক্ষতার স্তর: উপলব্ধি, প্রয়োগ, বিশ্লেষণ।

কাজ: (পূর্ণ দলে)

১. সর্বসম চিত্র সনাক্ত করবে (আকার ও আকৃতিতে চিত্র সমান হলেই সর্বসম)। সর্বসম চিত্রের একটি অপরটির উপর এমনভাবে বসানো যায় যে, সকল প্রান্তরেখা বা সীমারেখা হুবহু মিলে যায়। একজন শিক্ষার্থীকে তার দুই হাতের তালু মিলিয়ে দেখাতে বলুন। একজনকে দুই হাতের আকার আকৃতি সম্পর্কে বলতে দিন। তাদেরকে বিভিন্ন আকার আকৃতির কাগজ দিয়ে একই আকার আকৃতির কাগজ সনাক্ত করে সর্বসমতার ধারণা আবিস্কার করতে দিন।

২. শিক্ষার্থীদেরকে প্রতিসম চিত্র (ত্রিভুজ, আয়ত, বর্গ, হর্তন, রুহিতন ইত্যাদি) কেটে বা ভাঁজ করে অর্ধেক করতে দিন। ব্যাখ্যা করুন যে, একটি চিত্র প্রতিসম হয়, যখন তার দুই অর্ধেক সর্বসম হয় এবং কাটা বা ভাঁজ রেখাটি হল তার প্রতিসাম্য রেখা। একটা আকৃতির একাধিক প্রতিসাম্য রেখা থাকতে পারে।

নির্দেশিত কাজ:

শিক্ষার্থীদেরকে পূর্বে কাটা কিছু আকৃতি এবং ইংরেজি বড়হাতের লেটার (B,C,D,E,H) বিতরণ করে প্রতিসাম্য রেখা সনাক্ত করতে দিন। কোন কোন আকৃতির একাধিক প্রতিসাম্য রেখা আছে বের করতে বলুন। কোন কোন লেটারের প্রতিসাম্য রেখা খাড়া বা অনুভূমিক বলতে দিন।

ছক পূরণ কর: প্রতিসমতা নির্ধারণের ছক

আকৃতি	প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা	আকৃতিটি কি প্রতিসম? হ্যাঁ/না
বিষমবাহু ত্রিভুজ		
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ		
সমবাহু ত্রিভুজ		
আয়ত		
বর্গ		
রম্বস		
সামান্তরিক		
বৃত্ত		

স্বাধীন কাজ:

১. শিক্ষার্থীরা জোড়ায় জোড়ায় কাজ করবে। একজন একটি চিত্রের এক অর্ধেক আঁকবে। অপরজন অপর অর্ধেক আঁকবে যেন, পুরা চিত্রটি প্রতিসম হয়।

২. একটা চিত্র প্রতিসম বা প্রতিসম নয় ব্যাখা করার জন্য বাক্য গঠন করতে দিন:

.... প্রতিসম কারণ, ...

.... প্রতিসম নয় কারণ, ...

প্রতিসম চিত্রের সর্বসম দুইটি...........................

আয়ত ও বর্গ উভয় চিত্রই ----------; কিন্তু, পার্থক্য হল,---------------------------।

৫.৬ পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়ন: ডিজিটাল ফরমেট ও অন্যান্য বিবেচ্যসমূহ

পাঠ পরিকল্পনা প্রণয়ন: ডিজিটাল ফরমেট ও অন্যান্য বিবেচ্য বিষয়সমূহ যে কোন পাঠকে শ্রেণিকক্ষে আলোচনা বা উপস্থাপন করার জন্য একটি পরিকল্পনার প্রয়োজন হয়। যদিও সেটি সবসময় লিখিত হতে হবে এমনটি নয়। শিক্ষক তাঁর ইচ্ছেমত সেটি করতে পারেন। কখনও বা ছোট নোট আকারে লিখে নেয়া যেতে পারে। শিক্ষক চাইলে পরিকল্পনা তার মাথায়ও রাখতে পারেন। এই পরিকল্পনায় যদি এমন কোন উপাদান থাকে যা তিনি ডিজিটাল ফরমেটে উপস্থাপন করবেন, সেটি ডিজিটাল পাঠ পরিকল্পনা হিসেবে গণ্য হবে। উদাহরণসরূপ বলা যায় যদি শিক্ষক Euclidean geometry সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের সাথে আলোচনা করবেন। সেখানে তিনি গণিতবিদ ইউক্লিডের ছবি দেখাতে চান অথবা Wikipedia তে Euclidean geometry সম্পর্কে কিরূপ বর্ণনা দেয়া আছে তা তিনি শিক্ষর্থীদের সাথে আলোচনা করতে চান। সেক্ষেত্রে শিক্ষককে কিছু দক্ষতা পূর্ব থেকেই আয়ত্ব করে নিতে হবে। যেমন ইন্টরনেট থেকে কীভাবে এ সকল তথ্য খুঁজে পাওয়া যায় অথবা তথ্য কীভাবে ডাউনলোড করা যায় এবং তা শিক্ষার্থীদের মাঝে উপস্থাপন করা যায় ইত্যাদি। এমন অবস্থায় শিক্ষক পূর্বে তৈরি করা একটি ডিজিটাল কন্টেন্ট ব্যবহার করে পাঠ পরিচালনা করতে পারেন। বিদ্যালয়ে ইন্টারনেট থাকলে তা ব্যবহার করে অথবা তিনি তাঁর ডাটা ব্যবহার করে সরাসরি গুগল থেকে পূর্ব নির্ধারিত বিষয় দেখিয়ে পাঠে অগ্রসর হতে পারেন। তিনি চাইলে শিক্ষার্থীদের ব্যবহার করে তাদের মাধ্যমেও পাঠটিকে আরো অংশগ্রহণমূলক করতে পারেন। উল্লেখ্য যে গণিতের বিমূর্ত বিষয়গুলোকে মূর্ত করে শ্রেণিকক্ষে উপস্থাপন করার ক্ষেত্রে মাল্টিমিডিয়া ক্লাশরুমের বিকল্প কিছু হতে পারে না। এ ক্ষেত্রে অবশ্যই স্মরণ রাখা বাঞ্ছনীয় যে মাল্টিমিডিয়া ব্যবহার করে পাঠ পরিচালনা করার সময় মাল্টিমিডিয়া প্রজেক্টর এবং তৈরিকৃত পাঠ দু'টোই যেন Value add করে। অর্থ্যৎ যে কাজটি আমি খুব সহজেই হাতে কলমে করাতে বা দেখাতে পারি সেটি করার জন্য যেন এসকল উপকরণ ব্যবহার থেকে বিরত থাকি। শুধু মাল্টিমিডিয়া ব্যবহার করে পাঠ পরিচালনা করাই কিন্তু ডিজিটাল ফরমেট নয়। বরং যে কোন ডিভাইস ব্যবহার করে পাঠ উপস্থাপন করাই ডিজিটাল ফরমেট।

গণিত বিষয়ে ডিজিটাল পাঠ পরিকল্পনা তৈরি করার ক্ষেত্রে সাধারণ পাঠ পরিকল্পনার বাইরেও যে যে বিষয়গুলো বিবেচনায় রাখা প্রয়োজন তা নিম্নরূপ:

প্রসঙ্গ বিষয় (Theme) : ডিজিটাল ফরমেটে নির্দিষ্ট বিষয়টি উপস্থাপনের মূল উদ্দেশ্য বর্ণনা করুন।

শিখনফল: স্পষ্ট ভাষায় শিখনফল উল্লেখ করুন।

ধারণা: সংশ্লিষ্ট বিষয়ের সংক্ষিপ্ত ও বর্ণনামূলক ধারণা উল্লেখ করুন।

যোগ্যতা (Competencies): বিষয়টির উদ্দেশ্য অর্জনে কী কী দক্ষতা প্রয়োজন তা উল্লেখ করুন।

শিক্ষা উপকরণ: পাঠে ব্যবহৃত হবে এমন শিক্ষা উপকরণগুলোর তালিকা উল্লেখ করুন।

পূর্বশর্ত: সংশ্লিষ্ট বিষয়টি হৃদয়ঙ্গম করার জন্য শিক্ষার্থীদের কী জাতীয় পূর্ব অভিজ্ঞতা থাকা বাঞ্ছনীয় তা উল্লেখ করুন।

শিখন যাচাই: শিক্ষার্থীদের অর্জিত ফলাফল যাচাই পদ্ধতি উল্লেখ করুন।

উপরোল্লিখিত ফরমেটে একটি ডিজিটাল পরিকল্পনা তৈরি করা যেতে পারে। প্রসঙ্গত উল্লেখ করা যায় যে, শুধু ডিজিটাল পাঠ পরিকল্পনা তৈরি করতে পারাই যথেষ্ট নয় বরং একটি পাঠ কে শিক্ষার্থীদেরে ব্যবহার করে অংশগ্রহণমূলক পদ্ধতিতে উপস্থাপন করতে পারাটাই অধিকতর উপযোগী। সেক্ষেত্রে একজন শিক্ষক নিজে ডিজিটাল পাঠ পরিকল্পনা তৈরি না করেও শিক্ষক বাতায়নসহ যে কোন ওয়েব পোর্টাল থেকে কন্টেন্ট ডাউনলোড করে তা সংযোজন বিয়োজনপূর্বক শ্রেণিকক্ষে ব্যবহার করতে পারেন। যথাযথ সক্রিয় শিক্ষার্থীকেন্দ্রিক পাঠ পরিচালনাই অধিকতর কাম্য।

যে সকল রিসোর্স বা সামগ্রী ব্যবহার করে একটি ডিজিটাল পাঠ তৈরি ও উপস্থাপন করা যেতে পারে তা নিম্নরূপঃ

হার্ডওয়্যার রিসোর্স/সামগ্রীঃ

ডেক্সটপ কম্পিউটার, ল্যাপটপ, স্মার্টবোর্ড/ইন্টারঅ্যাক্টিভ বোর্ড, মাল্টিমিডিয়া প্রজেক্টর, ওভার হেড প্রজেক্টর (OHP), টেলিভিশন, রেডিও, ডিজিটাল ক্যামেরা, স্পীকার, লেজার পয়েন্টার, স্ক্যানার, ইত্যাদি।

সফ্টওয়্যার রিসোর্স/সামগ্রীঃ

MS Word, MS Excel, MS Power Point, (MS Office), VLC Media Player, A tube Catcher, Paint, Image Processing Software, Browser, etc.

Internet Resources:

URL of Youtube Videos

URL of Blogs

URL of Wikies

URL of Webpages

E-Learning Materials, etc.

Media:

Text

2D & 3D Image

Audio

Video

Animation, etc.

একটি ডিজিটাল কন্টেন্ট তৈরিতে ম্লিলিখিত ধাপগুলো অনুসরণ করা যেতে পারে। যেমন-

প্রেষনা সৃষ্টি

পূর্বের পাঠ যাচাই

পাঠ ঘোষণা

শিখন শেখানো কার্যক্রম (অংশগ্রহণমূলক পদ্ধতিতে)

পাঠ মূল্যায়ন

পুনরালোচনা

অর্পিত কাজ (প্রয়োজন অনুসারে)

উল্লেখ্য যে একটি ক্লাশে বা একটি বিষয়বস্তু উপস্থাপনে সবগুলো ধাপ অনুসরণ করা বাধ্যতামূলক নয়। এ বিষয়ে শিক্ষকের সম্পূর্ণ স্বাধীনতা রয়েছে। তিনি যে কয়টি ধাপে ডিজিটাল উপকরণ ব্যবহার করা প্রয়োজন মনে করবেন সে কয়টি ধাপেই ব্যবহার করবেন। এমনও হতে পারে তিনি শুধু মূল্যায়নের ক্ষেত্রে ডিজিটাল উপকরণ ব্যবহার করেছেন। শুধুমাত্র একটি কার্যকর পাঠ পরিচালনা করাই হবে শিক্ষকের মূল উদ্দেশ্য।

INSTRUCTIONAL PROCEDURE

Steps	Content	Specification	Media effects	Slide view	Learning experience	Evaluation
Motivation						
Topic Announcement						
Presentation						
Application						
Supervision						
Recapitulation						
Assignment						

Digital Signature of the Teacher:

অনুশীলনী-৫

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১) নিচের কোনটি অনুশিক্ষণ চক্রের অন্তর্ভুক্ত নয়?

ক. প্রেষণা খ. পরিকল্পনা

গ. ফলাবর্তন ঘ. পুনশিক্ষণ

২) অনুশিক্ষণের প্রধান কাজ কী?

ক. শিক্ষার্থীর শিখন সংগঠন খ. পাঠপরিকল্পনা প্রণয়ন

গ.শিক্ষণ দক্ষতার উন্নয়ন ঘ. শিক্ষণ পদ্ধতির উন্নয়ন

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন

১) দৃশ্যপট : শিক্ষক প্রশিক্ষণ প্রক্রিয়ায় বহুল ব্যবহৃত কতিপয় পদ: শিক্ষণ পদ্ধতি, শিক্ষণ দক্ষতা, শিক্ষণ অনুশীলন, অনুশিক্ষণ, প্রদর্শনী পাঠ।

ক. শিক্ষণ দক্ষতা কী?

খ. অনুশিক্ষণের প্রয়োজনীয়তা এবং কৌশল বুঝিয়ে দিন।

গ. দৃশ্যপটে উল্লেখিত পদসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক ব্যাখ্যা করুন এবং একটি ধারণা-চিত্র গঠন করুন ।

২) শিক্ষণ মডেল বলতে কী বোঝেন?

৩) শিক্ষণ মডেলের কাজ কী?

৪) শিক্ষণ মডেলের আবশ্যিক বা সাধারণ উপাদানগুলো ব্যাখ্যা করুন।

৫) CAM-এর সাহায্যে একটি পাঠ পরিকল্পনা তৈরি করুন।

৬) 5E মডেলের ধাপগুলোর সংক্ষিপ্ত বিবরণ দিন।

৭) 5E-এর সাহায্যে একটি পাঠ পরিকল্পনা তৈরি করুন।

৮) শিক্ষণে Inductive Thinking Model (ITM)-এর ব্যবহার লিখুন।

৯) Mastery Learning Model (MLM) -এর সাহায্যে একটি পাঠ পরিকল্পনা তৈরি করুন।

১০) দৃশ্যপট : একজন শিক্ষক পাঠ পরিচালনার জন্য বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনা, ইউনিট পরিকল্পনা, দৈনন্দিন পাঠ পরিকল্পনা ইত্যাদি প্রস্তুত করে থাকেন।

ক. বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনা কী?

খ. বার্ষিক পাঠ পকিল্পনা তৈরীর উদ্দেশ্য ও কৌশল ব্যাখ্যা করুন।

গ. ইউনিট প্ল্যান ও বার্ষিক পাঠ পরিকল্পনার সম্পর্ক বিশ্লেষণ করুন ।

রেফারেন্স-৫

Rrabhakaram, K. S., & Rao, D. B. (2006). *Concept Attainment Model in Mathematics Teaching.* New Delhi: Discovery Publishing House.

Siddiqui, M. H., & Khan, M. S. (2007). *Models of Teaching-Theory and Research*. New Delhi: A P H Publishing Corporation.

Khirwadkar, A. (2007). *Teaching of Chemistry: Modern Methods*. New Delhi: Sarup & Sons

Fink, D. L. (2005). Integrated course design. Manhattan, KS: The IDEA Center. Retrieved from http://ideaedu.org/wp-content/uploads/2014/11/Idea_Paper_42.pdf.

Hilda Taba, *Teacher's Handbook for Elementary Social Studies (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1967), p. 92. ,. 101.,. 109.*

Bloom, B. S., Hastings,, J. T., &Madaus, G. F. (1971). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning.*New York: McGraw-Hill.

Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Scotter, P. V., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2016). *The BSCS 5E Instructional Model: Origins and effectiveness.* Colorado: BSCS - Biological Sciences Curriculum Study.

Guskey, T. (2005, April). *Formative classroom assessment and Benjamin S. Bloom: Theory, research, and implications.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Joyce, B.; Weil, M. (2003). *Models of Teaching* (5th ed.). New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited.

Kılıç, D., Gündoğdu, K., & Kayabaşı, Y. (016). Mastery Learning Model. In C. Akdeniz, H. Bacanlı, E. Baysen, M. Çakmak, N. Çeliköz, N. Doğruer, . . . E. Karataş, *Learning And Teaching: Theories, Approaches and Models* (pp. 100-115). TÜRKİYE: Çözüm Eğitim Yayıncılık.

Siddiqui, M. H. (2013). Inductive Thinking Model of Teaching: Increase Capacity to Handle Information. *PARIPEX - INDIAN JOURNAL OF RESEARCH, 2*(3), 71-73.

ইউনিট ৬ : গণিত বিষয়বস্তু

গণিত শিক্ষককে শিক্ষার উদ্দেশ্য, শিখন শেখানো পদ্ধতি ও কৌশল, গণিতের ইতিহাস ইত্যাদি জানলেই কেবল চলবে না; পদ্ধতির সাথে বিষয়বস্তুর সমন্বয় সাধনের জন্য বিষয়বস্তুরও ভাল ধারণা থাকা প্রয়োজন। এ অধ্যায়ে মাধ্যমিক স্তরের গণিত বিষয়বস্তুর গুরুত্বপূর্ণ কতিপয় ধারণা সংযোজন করা হয়েছে।

৬.১ বাস্তব সংখ্যা ও প্যাটার্ন (Real Number and Pattern)

বাস্তব সংখ্যা ও প্যাটার্ন সাব ইউনিটে পর্যায়ক্রমে বাস্তব সংখ্যা, স্বাভাবিক সংখ্যা, স্বাভাবিক সংখ্যার বৈশিষ্ট্য, পূর্ণসংখ্যা, ধনাত্মক সংখ্যা, ঋণাত্মক সংখ্যা এবং শূন্য, মূলদ সংখ্যা, অমূলদ সংখ্যা, বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য, ভগ্নাংশ সংখ্যা, দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা, বাস্তব সংখ্যার শ্রেণি বিভাগ, বাস্তব সংখ্যার ভেনচিত্র, বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা, প্যাটার্ন, সংখ্যা ও জ্যামিতিক প্যাটার্ন, ম্যাজিক বর্গ বিষয়বস্তুগুলো আছে। বইয়ে বিষয়বস্তুগুলো পর্যায়ক্রমে আলোকপাত করা হয়েছে।

বাস্তব সংখ্যা (Real Number)

অনেকেই মনে করেন, গণনা থেকেই গণিতের সৃষ্টি। প্রাচীন প্রস্তর যুগে মানুষ যখন গুহায় বসবাস করত তখনও গণনা প্রচলিত ছিল। সংখ্যাগুলো সর্বদা বস্তুর সাথে সংশ্লিষ্ট ছিল এবং এক-এক মিল করে গণনা করা হত। বানিজ্য প্রসারের ফলে সংখ্যার ধারণা ক্রমশ স্পষ্ট হয়ে উঠে। সভ্যতার বিকাশের সাথে সাথে সংখ্যার ধারণা খুব দ্রুত বিকাশ লাভ করে। যীশুখ্রীষ্টের জন্মের প্রায় দুই হাজার বছর পূর্বে সংখ্যাভিত্তিক গণিতের সৃষ্টি হয়। আহ্‌মিজ পাপিরাস থেকে জানা যায় যে, মিশরীয়রা ভগ্নাংশ ব্যবহার করতেন আজ থেকে প্রায় চার হাজার বছর পূর্বথেকে। শূন্য, ঋণাত্মক , পূর্ণ ও ভগ্নাংশের ধারণার বিকাশ ঘটান ভারতীয় ও চীনা গণিতবিদগণ।

বহু বছর পূর্বে ইতালিতে হিসাব-নিকাশের জন্য ট্যালি ব্যবহার করত। এর আগে মানুষ কাদামাটির ক্লে-তে দাগ কেটে হিসাব করত। এছাড়াও সংখ্যার বিবর্তনের ক্ষেত্রে মেক্সিকোর মায়া সভ্যতা, সুমেরীয় ও ব্যবিলনীয় সভ্যতা এবং ভারতীয়দের শূন্য ও দশভিত্তিক গণনা পদ্ধতি বিশেষভাবে প্রণিধানযোগ্য। আজকের বাস্তবসংখ্যা সহস্র বছরের বিবর্তনের ফল। প্রাচীন কাল থেকে বাংলা সংস্কৃতিতে কড়া, গন্ডা, জোড়া, ডজন, কুড়ি ইত্যাদি গুচ্ছ আকারে সংখ্যার প্রচলন পরিলক্ষিত হয়।

স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Numbers)

আমরা প্রতিনিয়ত দৈনন্দিন কাজে যে সকল সংখ্যা ব্যবহার করি তাই গণনাকারী বা স্বাভাবিক সংখ্যা। বাস্তব সংখ্যার মধ্যে সর্বপ্রথম মানুষ ব্যবহার করে স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো। সু-প্রাচীন কাল থেকে স্বাভাবিক সংখ্যার ব্যবহার হয়ে আসছে। আদিম যুগের মানুষ গুহায় বসবাস করত এবং পশুপালন করত। তারা সকালে পশুকে খাওয়ানোর উদ্দেশ্যে একটি পশু বের করত সাথে সাথে গুহার মুখে একটি পাথর রাখত। এভাবে যতগুলো পশু বের করত ঠিক ততগুলো পাথর গুহার মুখে রাখত। বিকালে যখন আবার পশুগুলো গুহার ভিতরে নিয়ে যেত তখন পশুর ও পাথর সংখ্যা এক-এক মিল করে সমান হলে বুঝত যে পশুর সংখ্যা ঠিক আছে বা কোন পশু হারিয়ে যায়নি।

অন্যথায় তারা ধরে নিত যে, যে কয়টি পাথর রয়ে গেছে ঠিক ঐ কয়টি পশু হারিয়ে গেছে বা হিংস্র প্রাণী খেয়ে ফেলেছে। মূলত আদিম যুগে এভাবে গণনার কাজটি শুরু হয়। এই গণনা থেকেই স্বাভাবিক সংখ্যা উৎপত্তি। এ সংখ্যাগুলো স্বাভাবিকভাবেই মানব সভ্যতায় প্রবেশ করেছে। আজকের যে স্বাভাবিক সংখ্যা তা প্রাচীন এ সংখ্যা বিবর্তিত ও পরিণত রূপ। স্বাভাবিক সংখ্যা এক থেকে শুরু হয়েছে এবং এগুলো অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। স্বাভাবিক সংখ্যা ইংরেজিতে Natural Number বলা হয়। এদের সেটকে '**N**' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যার সেট নিম্নরূপ-

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \dots ...\}$

স্বাভাবিক সংখ্যার বৈশিষ্ট্য

গণিতবিদ পিয়ানো স্বাভাবিক সংখ্যার ৫টি বৈশিষ্ট্যের কথা উল্লেখ করেছেন বলে এগুলোকে পিয়ানোর স্বীকার্য (Peano's Axioms) বলা হয়। স্বীকার্যগুলো হলো-

১। 1 একটি স্বাভাবিক সংখ্যা

২। প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n'-এর একটি অনন্য অনুগামী স্বাভাবিক সংখ্যা n আছে। যেমন- $1^{\circ}=2$, $2^{\circ}=3$, $3^{\circ} = 4$ ইত্যাদি।

৩। 1 কোন স্বাভাবিক সংখ্যার অনুগামী নয়

৪। ভিন্ন ভিন্ন স্বাভাবিক সংখ্যার অনুগামী স্বাভাবিক সংখ্যাও ভিন্ন, গাণিতিকভাবে স্বাভাবিক সংখ্যা m, n যদি এমন হয় যে, $m^{\circ}= n^{\circ}$ তবে $m = n$

৫। $S \subseteq N$ যদি এমন হয় যে, ক) $1 \in S$ এবং খ) $k \in N \rightarrow k^{\circ} \in S$, তবে $S = N$.

[আধুনিক সংস্করণে ১ নং ও ৩ নং স্বীকার্যে 1 কে 0 দ্বারা প্রতিস্থাপন করা হয়েছে]

1 ব্যতীত স্বাভাবিক সংখ্যাকে দুই ভাগে ভাগ করা হয়: মৌলিক সংখ্যা ও যৌগিক সংখ্যা।

মৌলিক সংখ্যা (Prime Number)

মৌলিক সংখ্যা হচ্ছে সে স্বাভাবিক সংখ্যা, যা তার ছোট এবং 1এর বড় কোন সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য নয়। যেমন; 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ইত্যাদি। [যে সংখ্যক বস্তু একাধিক সমান সমান সারিতে সাজানো যায় না তাই মৌলিক সংখ্যা।]

যৌগিক সংখ্যা (Composite Number)

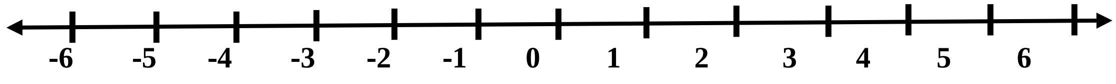
যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা 3 এর চেয়ে বড় কিন্তু মৌলিক সংখ্যা নয় তাদের যৌগিক সংখ্যা বলে। 3 এর চেয়ে বড় যে সংখ্যার দুইটির অধিক গুণনীয়ক/উৎপাদক থাকে তাকে যৌগিক সংখ্যা বলে। যেমন; 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 ইত্যাদি। যৌগিক সংখ্যাকে কৃত্রিম বা মিশ্র স্বাভাবিক সংখ্যাও বলা হয়। যে সংখ্যক বস্তু একাধিক সমান সারিতে সাজানো যায় তাই যৌগিক সংখ্যা।

পূর্ণসংখ্যা (Integers)

শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখন্ড সংখ্যাকে পূর্ণসংখ্যা বলে। সকল ঋণাত্মক অখন্ড সংখ্যা ও শূন্যকে যদি সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সাথে একত্রিত করি তাহলে আমরা যে সংখ্যাগুলো পাব তাই পূর্ণসংখ্যা। অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যা 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, … , শূন্য(0) এবং -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, …এই সবগুলো সংখ্যাকেই একত্রে পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। পূর্ণসংখ্যার সেটকে Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়। জার্মান শব্দ Zahlen থেকে Z নেওয়া হয়েছে যার অর্থ সংখ্যা।

পূর্ণসংখ্যার সেট, $Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}= \{0, \pm1, \pm2, ...\}$

পূর্ণসংখ্যাকে সংখ্যারেখায় প্রকাশ:



কখনো কখনো Z সেটকে নিম্নরূপ তিনটি উপসেটে প্রকাশ করা হয়:

ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট, $Z- = \{ ... -3, -2, -1\}$; অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট, $Z^{+} = \{ 0, 1, 3, ...\} = W$

এবং ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট $Z_{+} = \{1, 2, 3, ...\} = N$

পূর্ণসংখ্যাকে বিভিন্ন ভাগে ভাগ করা যায়, যেমন- জোড় সংখ্যা (Even Numbers) ও বিজোড় সংখ্যা (Odd Numbers)

জোড় সংখ্যা : যে সকল সংখ্যাকে 2 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হয় সে সকল সংখ্যাকে জোড় সংখ্যা বলে। এ সকল সংখ্যাকে গাণিতিকভাবে 2q দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে $q \in Z$ ।

জোড় সংখ্যার সেট, E = { …, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, … }

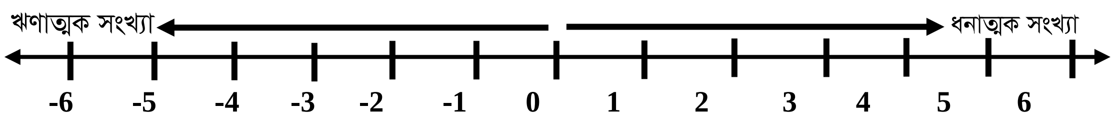
বিজোড় সংখ্যাঃ যে সকল পূর্ণসংখ্যা 2 দ্বারা (নিঃশেষে)বিভাজ্য নয়, তাদের বিজোড় সংখ্যা বলে। বিজোড় সংখ্যাকে গাণিতিকভাবে (2q+1) দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে $q \in Z$ ।

বিজোড় সংখ্যার সেট, **O** = { … ,-5, -3, -1, 1, 3, 5, …}

ধনাত্মক সংখ্যা, ঋণাত্মক সংখ্যা এবং শূন্য

শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যা(ভগ্নাংশসহ) মিলে হয় বাস্তবসংখ্যা (Real number) । অর্থাৎ যে সকল সংখ্যাকে সংখ্যারেখার মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তাদেরকে বাস্তব সংখ্যা বলে। বাস্তব সংখ্যা ছাড়া আর এক ধরনের সংখ্যা আছে যাদের বলা হয় কাল্পনিক সংখ্যা (Imaginary number)। বাস্তব ও কাল্পনিক এ দুই ধরনের সংখ্যা দ্বারা যুক্ত সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা (complex number) বলে।

ধনাত্মক সংখ্যা হল শূন্যের চেয়ে বড় সংখ্যা এবং ঋণাত্মক সংখ্যা হল শূন্যের চেয়ে ছোট সংখ্যা। গাণিতিকভাবে যদি x যেকোন সংখ্যা হয় তবে ধনাত্মক সংখ্যা হল $x > 0$ এবং ঋণাত্মক সংখ্যা হল $x < 0$। সংখ্যারেখায় শূন্যসহ ধনাত্মক সংখ্যা ও ঋণাত্মক সংখ্যা-



সংখ্যারেখায় ঋণাত্মক সংখ্যাগুলো ‘0’ এর বাম দিকে এবং ধনাত্মক সংখ্যাগুলো ‘0’ এর ডান দিকে সীমাহীনভাবে বিস্তৃত। ‘0’ শূন্যকে চিহ্ন নিরপেক্ষ সংখ্যা ধরা হয়। সংখ্যারেখায় পূর্ণসংখ্যার ফাঁকে ফাঁকে রয়েছে ভগ্নাংশ সংখ্যা এবং সাধারণ ভগ্নাশে প্রকাশযোগ্য নয় এমন অগণিত সংখ্যা। সংখ্যারেখার প্রতিটি বিন্দুই একটি বাস্তব সংখ্যা নির্দেশ করে।

বাস্তব সংখ্যাকে প্রধানত দুই শ্রেণিতে ভাগ করা হয়ঃ মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যা

মূলদ সংখ্যা(Rational Number)

$\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলে, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ । যেমন- $\frac{5}{1} = 5,\ \frac{13}{2} = 6.5,\ \frac{5}{3} = 1.666\ ...$ ইত্যাদি। পূর্ণসংখ্যা এবং সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশযোগ্য সংখ্যাই মূলদ সংখ্যা। সকল মূলদ সংখ্যার সেটকে Q দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number)

মূলদ সংখ্যা বাদে বাকি সকল বাস্তব সংখ্যাই অমূলদ সংখ্যা। অর্থাৎ যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়

না, তাদের অমূলদ সংখ্যা বলে, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ । যেমন, $\sqrt{2} = 1.414213\ ...\ ,\ \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.58113\ ...$ ইত্যাদি। সকল অনাবৃত্ত অসীম দশমিক সংখ্যাই অমূলদ সংখ্যা। অমূলদ সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ করা যায় না। পূর্ণবর্গ নয় এমন সংখ্যার বর্গমূল, পূর্ণঘন নয় এমন সংখ্যার ঘনমূল ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা। যেমনঃ 2, 3, 5 ইত্যাদির বর্গমূল বা ঘনমূল অমূলদ সংখ্যা।

অমূলদ সংখ্যাকে কোন মূলদ সংখ্যা দ্বারা গুণ, ভাগ, যোগ ও বিয়োগ করলেও তা অমূলদ সংখ্যা হয়। তবে শূন্য দ্বারা ভাগ গ্রহণযোগ্য নয়। বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের ভাগফল একটি অমূলদ সংখ্যা। যদি কোন বৃত্তের ব্যাস মূলদ সংখ্যা হয় তবে তার পরিধি একটি অমূলদ সংখ্যা। অমূলদ সংখ্যাকে দশমিকে প্রকাশ করলে তা অনাবৃত্ত ও অসমাপ্ত হবে। সংখ্যারেখায় মূলদ সংখ্যার চেয়ে অমূলদ সংখ্যাই বেশি।

সকল অমূলদ সংখ্যার সেটকে I দ্বারা নির্দেশ করা হলে, $Q \cup I = R$, যেখানে R বাস্তব সংখ্যার সেট।

বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্য : বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্যসমূহ নিম্নরূপ-

1. আবদ্ধতা (Closure): $a, b \in R$ হলে, (i) $a + b \in R$, (ii) $a - b \in R$, (iii) $ab \in R$ এবং $\frac{a}{b}(b \neq 0) \in R$
2. অনন্যতা (Uniqueness): $a, b, c, d \in R$ হলে, এবং $a = b$ ও $c = d$ হলে, (i) $a + c = b + d$ এবং (ii) $ac = bd$
3. বিনিময়যোগ্যতা (Commutativity): $a, b \in R$ হলে, (i) $a + b = b + a$ এবং (ii) $ab = ba$
4. সংযোজনযোগ্যতা (Associativity): $a, b, c \in R$ হলে, (i) $(a + b) + c = a + (b + c)$ এবং (ii) $(ab)c = a(bc)$
5. বন্টনযোগ্যতা (Distributivity): $a, b, c \in R$ হলে, (i) $a(b + c) = ab + ac$ এবং (ii) $(b + c)a = ba + ca$
6. অভেদকের অস্তিত্ব (Existence of identity): $a \in R$ হলে, (i) $a + 0 = 0 + a = a$ এবং (ii) a.1= $1.a = a$; 0 ও 1 কে যথাক্রমে যোগ ও গুণের অভেদক বলা হয়।
7. বিপরীতকের অস্তিত্ব (Existence of inverse): শূন্য ব্যতীত প্রত্যেক $a \in R$ এর জন্য একটি মাত্র $-a \in R$ বিদ্যমান যেন, (i) $a + (-a) = (-a) + a = 0$ এবং (ii) $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$
8.

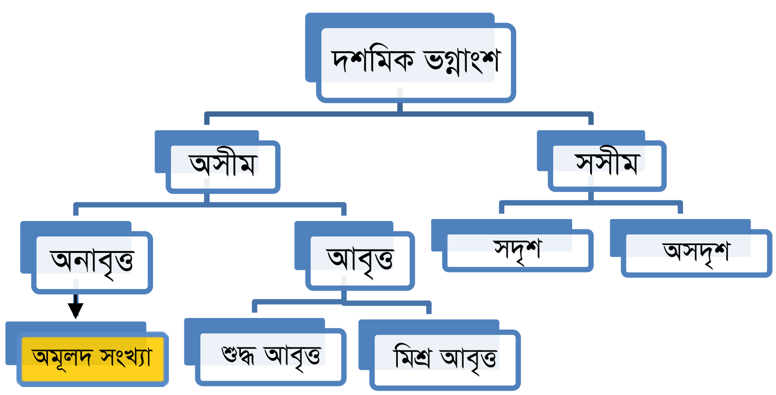
ভগ্নাংশ সংখ্যা (Fractional Numbers): $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে ভগ্নাংশ সংখ্যা বলা হবে, যদি $q \neq 0$, $q \neq 1$ এবং $q \neq p$ হয়। যেমন, $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{-7}{11}$ ইত্যাদি। $\frac{p}{q}$ প্রকৃত ভগ্নাংশ হবে যদি $p < q$ এবং $\frac{p}{q}$ অপ্রকৃত ভগ্নাংশ হবে যদি $p > q$ হয়। প্রকৃত ভগ্নাংশের উদাহরণ: $\frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{19}{23}$ ইত্যাদি এবং অপ্রকৃত ভগ্নাংশের উদাহরণ: $\frac{23}{3}, \frac{14}{10}, \frac{19}{16}$ ইত্যাদি।

দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা

মূলদ ও অমূলদ সংখ্যাকে দশমিক বিন্দু সমন্বয়ে প্রকাশ করা হলে তাদের দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা বলে:

$7 = 7.0$, $\frac{15}{2} = 7.5$, $\frac{10}{3} = 3.33333 \ldots$, $\sqrt{3} = 1.732 \ldots$ ইত্যাদি।

দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যাকে নিম্নরূপে শ্রেণি বিভাগ করা যায়:

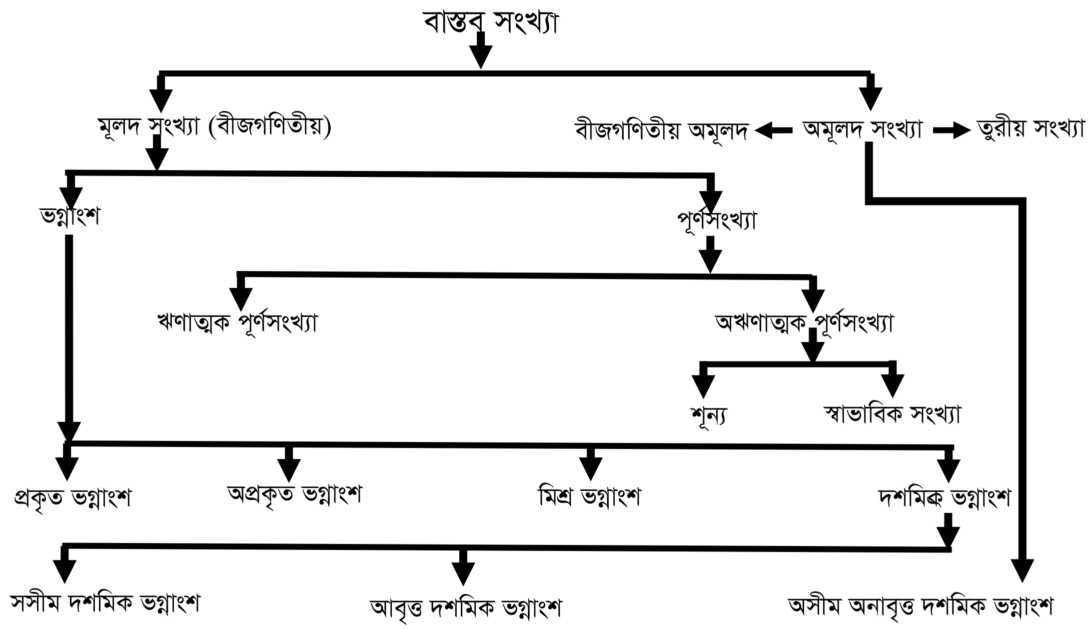


সসীম দশমিক সংখ্যায় দশমিক বিন্দুর ডানে নির্দিষ্ট সংখ্যক অঙ্ক থাকে। যেমন, 2.576872, এখানে দশমিক বিন্দুর ডানে ছয়টি অঙ্ক আছে। যদি কোন সংখ্যায় দশমিক বিন্দুর ডানে অঙ্ক সংখ্যা নির্দিষ্ট থাকে, তবে তাকে সসীম দশমিক বলা হয়। যে সকল সংখ্যায় দশমিক বিন্দুর ডানে অঙ্ক সংখ্যা সীমিত নয়, তাকে অসীম দশমিক সংখ্যা বলে। যেমন, 1.333 … …; 2.123512367 … … ইত্যাদি। অসীম দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানে একটি বা একাধিক অঙ্কের বার বার পুনরাবৃত্তি ঘটলে ঐ সংখ্যাকে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ বলে। যেমন, $1.2323 \ldots$; $7.\dot{5}3\dot{2}$ ইত্যাদি।

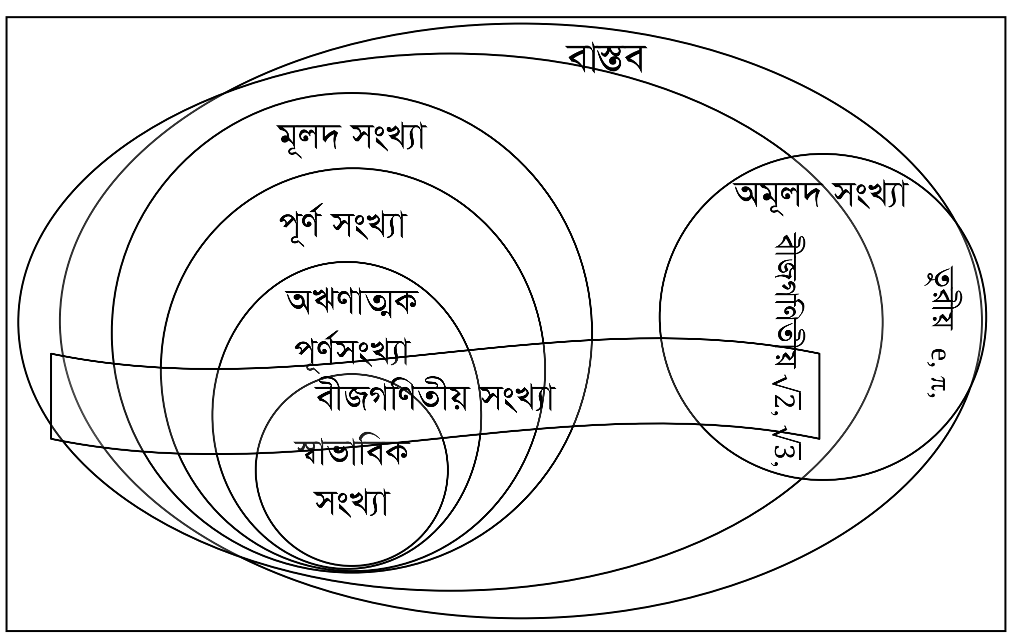
অসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যার মধ্যে যেসব সংখ্যার দশমিক বিন্দুর ডানের অঙ্কগুলোর কোন পর্যায়েই পুনরাবৃত্তি না হয়ে অনবরত চলতে থাকে ঐ সংখ্যাগুলোকে অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ বলে। এ অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোই অমূলদ সংখ্যা। যেমন, $\sqrt{2} = 1.414213 \ldots$; e = 2.71828182845… ; π = 3.1415926… , φ = 1.6180339887 … ইত্যাদি।

বীজগণিতীয় সংখ্যা ও তুরীয় সংখ্যা: সংখ্যার আরো শ্রেণিবিভাগ হল বীজগণিতীয় সংখ্যা (Algebraic Number) ও তুরীয় (Transcendental Number) সংখ্যা। বহুপদীয় সমীকরণের সমাধান থেকে বীজ হিসাবে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাই বীজগণিতীয় সংখ্যা। বাস্তব সংখ্যার বাইরেও বীজগণিতীয় সংখ্যা আছে। তবে সকল বাস্তব সংখ্যাই বীজগণিতীয় নয়। তুরীয় সংখ্যা বীজগণিতীয় নয়। যেমন, π, e ; এগুলো কোন অনন্ত ধারার সমষ্টি। সকল মূলদ সংখ্যাই বীজগণিতীয় সংখ্যা। অমূলদ সংখ্যার দুইটি শ্রেণি; বীজগণিতীয় অমূলদ ও তুরীয় অমূলদ সংখ্যা। তুরীয় সংখ্যাকে পরাবাস্তবও বলা হয়।

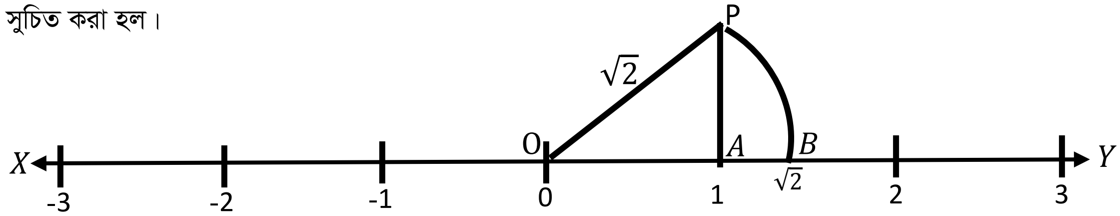
বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিভাগ :



বাস্তব সংখ্যার ভেনচিত্র



বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: XY দুইদিকে সীমাহীনভাবে বিস্তৃত একটি সরলরেখা যা সংখ্যারেখা। সংখ্যারেখার মধ্যে যেকোন একটি বিন্দু O নিই। O বিন্দুটিকে 0(শূন্য) ধরে শূন্যের ডানদিকে ধনাত্মক ও বামদিকে ঋণাত্মক সংখ্যগুলো দ্বারা সুচিত করা হল।



মনে করি $AP \perp XY$ এবং OA = AP = 1; তাহলে OAP একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ, অতিভুজ OP = $\sqrt{OA^2 + AP^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; এখন, O-কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ XY কে B বিন্দুতে ছেদ করে। OB = $\sqrt{2}$, অতএব যেকোন মূলদ বা অমূলদ সংখ্যা সংখ্যারেখার উপরস্থ কোন বিন্দু দ্বারা সূচিত করা যায়।

প্রতিজ্ঞা: $\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা।

প্রমাণ: যদি $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে

ধরি, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, যেখানে p ও q পরস্পর সহমৌলিক সংখ্যা।

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 2q = \frac{p^2}{q}$ [উভয় পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত: $2q$ পূর্ণ সংখ্যা। পক্ষান্তরে $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়, কারণ p ও q পরস্পর সহমৌলিক

অতএব $2q \neq \frac{p^2}{q}$, অর্থ্যাৎ $2q$ **এবং** $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না।

$\therefore \sqrt{2}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোন সংখ্যা হতে পারে না; অর্থ্যাৎ $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$,

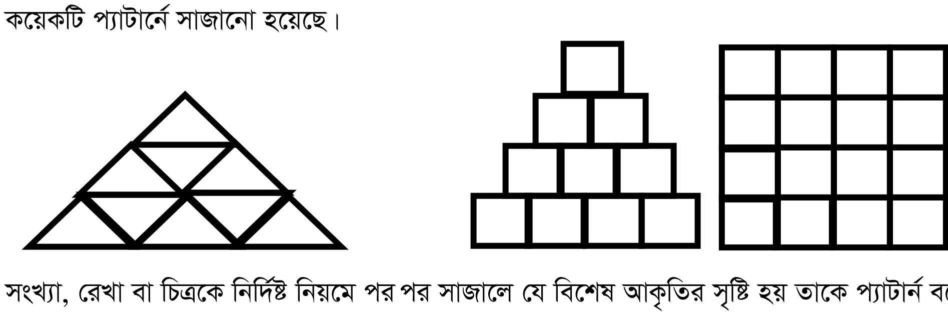
কিন্তু $\sqrt{2}$ একটি বাস্তব সংখ্যা; কারণ এর বর্গ $(\sqrt{2})^2 = 2$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

$\therefore \sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

কাজ: প্রমাণ করুন যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

প্যাটার্ন

বিশ্ব জগতের এক বিশাল অংশ জুড়ে রয়েছে নানা রকম প্যাটার্ন। সংখ্যা সৃষ্টির পর থেকে গণনার ক্ষেত্রে আমরা নানা রকম প্যাটার্ন দেখতে পাই। প্রকৃতির প্রতিটি বস্তু বা কণা কোন না কোন প্যাটার্নে সাজানো। সৌরজগতের গ্রহ, উপগ্রহগুলোও একটি প্যাটার্নে সাজানো। প্রকৃতির পাশাপাশি আমাদের প্রাত্যহিক জীবনের মানব সৃষ্ট অনেক কিছুতেও প্যাটার্ন আছে। যেমন- জালের গিটের প্যাটার্ন, বাড়ির কাঠামোর প্যাটার্ন ইত্যাদি। এ প্যাটার্নগুলোর মধ্যে কিছু আছে সংখ্যা প্যাটার্ন এবং কিছু রয়েছে জ্যামিতিক প্যাটার্ন। এ বইতে উভয় প্রকার প্যাটার্ন আলোচনা করা হয়েছে। নিচের চিত্রের টাইলসগুলো লক্ষ করি। এগুলো কয়েকটি প্যাটার্নে সাজানো হয়েছে।



সংখ্যা, রেখা বা চিত্রকে নির্দিষ্ট নিয়মে পর পর সাজালে যে বিশেষ আকৃতির সৃষ্টি হয় তাকে প্যাটার্ন বলে।

সংখ্যা প্যাটার্ন

সংখ্যা দ্বারা গঠিত প্যাটার্নকে সংখ্যাপ্যাটার্ন বলে। সংখ্যাকে নির্দিষ্ট নিয়মে সাজালে সংখ্যা ক্রমের বা সংখ্যার যে বৈশিষ্ট্য বর্ণিত হয় সে ক্রম বা বৈশিষ্ট্যই হল সংখ্যা প্যাটার্ন। বিভিন্ন ধরনের সংখ্যা প্যাটার্ন রয়েছে। নিম্নে একটি সংখ্যা প্যাটার্ন দেখানো হল-

১
১ ১
১ ২ ১
১ ৩ ৩ ১
১ ৪ ৬ ৪ ১

ইরাটোস্থিনিস (Eratosthenes) ছাঁকনির সাহায্যে সহজেই মৌলিক সংখ্যা নির্ণয় করা যায় । ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো একটি চার্টে লিখি। এবার সবচেয়ে ছোট মৌলিক সংখ্যা ২ কে গোল দ্বারা চিহ্নিত করি এবং এর গুণিতকগুলো প্রতি জোড় কটিতে/কলামে রেখা টেনে কেটে দেই। এভাবে ক্রমান্বয়ে ৩, ৫ ও ৭ কে মৌলিক সংখ্যা হিসাবে বৃত্তস্থ করি এবং এদের গুণিতকগুলো কেটে দেই।

তালিকায় যে সংখ্যাগুলো টিকে রইল সেগুলো মৌলিক সংখ্যা হিসাবে বৃত্তস্থ করি।

ইরাটোসথেনিস (২৭৬-১৯৪বিসি) গ্রীক

~~১~~	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	~~৯~~	১০
১১	১২	১৩	১৪	১৫	১৬	১৭	১৮	১৯	২০
~~২১~~	২২	২৩	২৪	২৫	২৬	~~২৭~~	২৮	২৯	৩০
৩১	৩২	~~৩৩~~	৩৪	৩৫	৩৬	৩৭	৩৮	~~৩৯~~	৪০
৪১	৪২	৪৩	৪৪	৪৫	৪৬	৪৭	৪৮	~~৪৯~~	৫০
~~৫১~~	৫২	৫৩	৫৪	৫৫	৫৬	~~৫৭~~	৫৮	৫৯	৬০
৬১	৬২	~~৬৩~~	৬৪	৬৫	৬৬	৬৭	৬৮	~~৬৯~~	৭০
৭১	৭২	৭৩	৭৪	৭৫	৭৬	~~৭৭~~	৭৮	৭৯	৮০
~~৮১~~	৮২	৮৩	৮৪	৮৫	৮৬	৮৭	৮৮	৮৯	৯০
~~৯১~~	৯২	~~৯৩~~	৯৪	৯৫	৯৬	৯৭	৯৮	~~৯৯~~	১০০

স্বাভাবিক ক্রমিক সংখ্যার যোগফল বের করার জন্য সংখ্যা প্যাটার্ন ব্যবহার করা যায়। মনে করি, ১ থেকে ১০পর্যন্ত ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর যোগফল ক। ক=১+২+৩+৪+৫+৬+৭+৮+৯+১০

লক্ষ করি, প্রথম ও শেষ পদের যোগফল ১ + ১০ = ১১, দ্বিতীয় ও শেষ পদের আগের পদের যোগফলও ২ + ৯ = ১১ ইত্যাদি। একই যোগফলের প্যাটার্ন অনুসরণ করে ১০ জোড়া সংখ্যা পাওয়া গেল । সুতরাং যোগফল ১১× ১০ = ১১০। এ থেকে স্বাভাবিক ক্রমিক সংখ্যার যোগফল বের করার একটি নিয়ম পাওয়া গেল। নিয়মটি হলো- প্রদত্ত যোগফলের সাথে সংখ্যাগুলো বিপরীত ক্রমে লিখে যোগ করে পাই

ক = ১ + ২ + ৩ + ৪ + ৫ + ৬ + ৭ + ৮ + ৯ + ১০

ক = ১০+৯ + ৮ + ৭ + ৬ + ৫ + ৪ + ৩ + ২ + ১

২ক = ১১+১১+১১+১১+ ১১+ ১১+ ১১+ ১১+ ১১+ ১১ (যোগ করে)

$\Rightarrow$ ২ক = ১১× ১০ = ১১০

$\Rightarrow$ ক = ৫৫

$\therefore$ ক = $\dfrac{(\text{প্রথম সংখ্যা + শেষ সংখ্যা}) \times \text{পদ সংখ্যা}}{২}$

ম্যাজিক বর্গ

তিন ক্রমের ম্যাজিক বর্গ গঠনের জন্য একটি বর্গকে তিন সারি ও তিন কলামে ভাগ করে নয়টি ছোট বর্গ করা হয়। সকল ক্ষুদ্র বর্গে ১ থেকে ৯ পর্যন্ত ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা এমন ভাবে সাজাতে হয় যাতে পাশাপাশি, উপরনিচ, কোনাকুনি যোগ করলে প্রতি লাইনের যোগফল একই হয়। এই অভিন্ন যোগফলকে ম্যাজিক সংখ্যা বলে। তিন ক্রমের স্বাভাবিক ম্যাজিক বর্গের ম্যাজিক সংখ্যা হয় ১৫।

সংখ্যাগুলো সাজানোর বিভিন্ন কৌশলের একটি হলো কেন্দ্রের ছোট বর্গে মধ্য সংখ্যা ৫ বসবে। চার কোনায় চারটি জোড় সংখ্যা এমনভাবে বসবে যেন কর্ণ দুইটি বরাবর যোগফল ১৫ হয়। বাকি বিজোড় সংখ্যাগুলো প্রত্যেক পাশের মাঝের ফাঁকা ঘরে বসাতে হবে যেন পাশাপাশি, উপর-নিচ যোগফল ১৫ পাওয়া যায়।

	৫	

⇨

২		৪
	৫	
৬		৮

⇨

২	৯	৪
	৫	
৬	১	৮

⇨

২	৯	৪
৭	৫	৩
৬	১	৮

৪ ক্রমের ম্যাজিক বর্গে ষোলটি ছোট বর্গ করা হয়। ১ থেকে ১৬ পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যা এমন ভাবে সাজাতে হয় যেন সারি, কলাম ও কর্ণ বরাবর যোগফল একই হয়। চার ক্রমের স্বাভাবিক ম্যাজিক বর্গের ম্যাজিক সংখ্যা হয় ৩৪। সংখ্যাগুলো সাজানোর বিভিন্ন নিয়ম রয়েছে। একটি নিয়ম হলো: যেকোনো কোনা থেকে শুরু করে সংখ্যাগুলো ক্রমান্বয়ে লিখতে হবে। দুই কর্ণ বরাবর সংখ্যাগুলো বাদ দিতে হবে। এবার বিপরীত কোনা থেকে শুরু করে কর্ণ বরাবর ফাঁকা ঘরে বাকি সংখ্যাগুলো উল্টাক্রমে বসবে।

১	২	৩	৪
৫	৬	৭	৮
৯	১০	১১	১২
১৩	১৪	১৫	১৬

⇨

	২	৩	
৫			৮
৯			১২
	১৪	১৫	

⇨

১৬	২	৩	১৩
৫	১১	১০	৮
৯	৭	৬	১২
৪	১৪	১৫	১

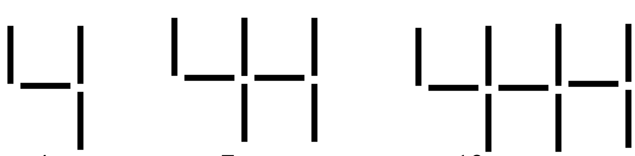
কাজ ১। ০, ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ২১, ৩৪, ... এ সংখ্যা ক্রমকে ফিবোনাক্কি ক্রম বলা হয়, এ ক্রমে বিদ্যমান প্যাটার্ন ব্যাখ্যা করুন।

২। ৫ ক্রমের ম্যাজিক বর্গ গঠন করুন।

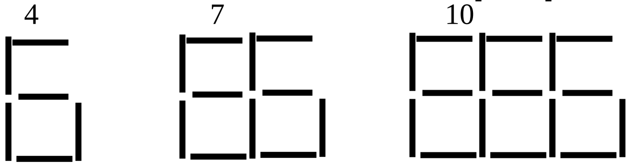
জ্যামিতিক প্যাটার্ন

শ্রেণিকক্ষের জানালার গ্রীলে বিভিন্ন জ্যামিতিক প্যাটার্ন দেখা যায়। বিভিন্ন ভবনের ডিজাইনেও জ্যামিতিক প্যাটার্ন লক্ষ করা যায়। এছাড়াও প্রাকৃতিকভাবে সৃষ্ট বিভিন্ন স্থানে জ্যামিতিক প্যাটার্ন বিদ্যমান, যেমন- মৌমাছির বাসা। কৃত্রিমভাবে তৈরি আরো বহু স্থাপনায় জ্যামিতিক প্যাটার্ন রয়েছে। চিত্রের বর্ণগুলো সমান দৈর্ঘ্যে রেখাংশের দ্বারা তৈরি করা হয়।

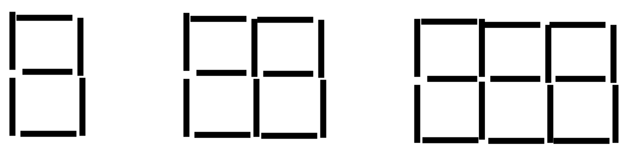
এ রকম কয়েকটি অঙ্কের চিত্র লক্ষ করি-



4　　7　　10　　13 → 3x+1



6　　11　　16　　21 → 5y+1



7 12 17 22 $\rightarrow$ 5z+2

চিত্রগুলো তৈরি করতে কতগুলো রেখাংশ প্রয়োজন তার প্যাটার্ন লক্ষ করি।

n তম চিত্র তৈরির জন্য রেখাংশের সংখ্যা প্রতি প্যাটার্নের শেষে বীজগণিতীয় রাশির সাহায্যে দেখানো হয়েছে।

কাজ: ইংরেজি 3 সংখ্যাটির ডিজিটালরূপ অংকন করে প্রতিটিতে রেখার সংখ্যা হিসাব করে ক-তম অংক নির্ণয় করুন।

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

১. শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখন্ড সংখ্যাকে বলে-
   ক) পূর্ণ সংখ্যা খ) স্বাভাবিক সংখ্যা গ) মূলদ সংখ্যা ঘ) অমূলদ সংখ্যা।

২. বাস্তব সংখ্যার গাণিতিক আরোহ সংক্রান্ত স্বীকার্য কোন্‌টি-
   ক) প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n′-এর একটি অনন্য অনুগামী স্বাভাবিক সংখ্যা n আছে। যেমন, $1^{\circ}=2$, $2^{\circ}=3$, $3^{\circ}=4$ ইত্যাদি।
   খ) 1 কোন স্বাভাবিক সংখ্যার অনুগামী নয়
   গ) ধরি $S \subset N$, $1 \in S$ এবং $k \in N \rightarrow k^{\circ} \in S$ তবে $S = N$.
   ঘ) ভিন্ন ভিন্ন স্বাভাবিক সংখ্যার অনুগামী স্বাভাবিক সংখ্যাও ভিন্ন, গাণিতিকভাবে স্বাভাবিক সংখ্যা m, n যদি এমন হয় যে, $m' = n'$ তবে $m = n$

৩. $7.\dot{5}\dot{3}\dot{2}\ldots$ সংখ্যাটি কি ধরনের সংখ্যা?
   ক)সসীম আবৃত্ত দশমিক খ)অসীম আবৃত্ত দশমিক গ) অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ঘ) অনাবৃত্ত দশমিক।

৪. ১ থেকে ৫০ পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যা কয়টি?
   ক) ১২টি খ) ১৩টি গ) ১৪টি ঘ) ১৫টি

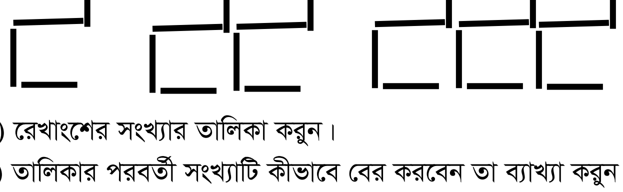
৫. ক স্বাভাবিক সংখ্যা হলে '৫ক+২' এর ৫ম সংখ্যাটি কত?
   ক) ১২ খ) ১৭ গ) ২৭ ঘ) ২২

সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন

১. বাস্তব সংখ্যা কাকে বলে?
২. স্বাভাবিক সংখ্যার স্বীকার্যগুলো লিখুন।
৩. প্যাটার্ন কী? প্যাটার্ন কয় প্রকার ও কি কি?

রচনামূলক প্রশ্ন

১. বাস্তব সংখ্যার স্বীকার্যগুলো ব্যাখ্যা করুন।
২. অমূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা লিখুন।
৩. বাস্তব সংখ্যার প্রকারভেদ উল্লেখপূর্বক এর প্রবাহচিত্র অংকন করুন।
৪. নিচের জ্যামিতিক চিত্রগুলো রেখাংশ দ্বারা গঠিত হলে-



(ক) রেখাংশের সংখ্যার তালিকা করুন।
(খ) তালিকার পরবর্তী সংখ্যাটি কীভাবে বের করবেন তা ব্যাখ্যা করুন।
(গ) কাঠি দিয়ে পরবর্তী চিত্রটি তৈরি করুন এবং উত্তর যাচাই করুন। শততম প্যাটার্ন তৈরিতে কতগুলো রেখার প্রয়োজন?

৫. প্রতিটি তালিকার পাশাপাশি দুইটি পদের সাধারণ পার্থক্য বের করুন এবং পরবর্তী দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করুন

(ক) ৭, ১২, ১৭, ২২, ২৭, ...

(খ) ৬, ১৭, ২৮, ৩৯, ৫০, ...

(গ) ২৪, ২০, ১৬, ১২, ৮, ...

৬.বীজগণিতীয় রাশির সাহায্যে সংখ্যা প্যাটার্নের সারণিটি পূরণ করুন

ক্রমিক নং	রাশি	পদ								
		১ম	২য়	৩য়	৪র্থ	৫ম	...	১০ম	...	১০০তম
১	২ক+১	৩	৫	৭	৯	১১				
২	৩ক+১				১৩					
৩	$ক^২$-১		৩							
৪	৪ক+৩					২৩				
৫	২ক-১	১								
৬	$ক^২$+১							১০১		

৬.২: সেট


জর্জ ক্যান্টর(১৮৪৫-১৯১৮) জার্মান

সেট তত্ত্ব (Set Theory)**:** সেট গণিতের একটি মৌলিক ধারণা। সেট গঠন, সংজ্ঞায়িতকরণ, নামকরণ, প্রতীকীকরণ, সেট প্রকাশ, সেট কার্যবিধি বা প্রক্রিয়া করণের নিয়ম কানুন ও সূত্রসমূহকে একত্রে কলা হয় সেটতত্ত্ব। সেটতত্ত্ব বর্তমানে গণিতের একটি অপরিহার্য শাখা। সেট তত্ত্বের দর্শন হল বস্তু মাত্রই কোন না কোন সেটের উপাদান। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর সেট তত্ত্বের জনক। ১৮৭৪ খ্রিস্টাব্দে তিনি এ তত্ব প্রকাশ করেন। সেট বহু বস্তুসত্তাকে একক সত্তায় পরিণত করে।

সেট গঠন ও নামকরণ: বিভিন্ন বস্তুর বিভিন্ন গুনাগুণ, ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য থাকে। কোন একটি সাধারণ বৈশিষ্ট্যের সূত্র ধরে বস্তু সংগ্রহ করে সেট গঠিত হয়। সেটভুক্ত বস্তুই তার উপাদান বা সদস্য। উপাদানের সাধারণ বৈশিষ্ট্য অনুসারে সেটের নামকরণ করা যায়:

সাধারণ বৈশিষ্ট্য	সেট	নামকরণ
ফল	{আম, কলা, তাল }	ফলের সেট
কলা	{শবরী কলা, কবরী কলা, চাপা কলা}	কলার সেট
সংখ্যা	{২, ৩, ৫, ৭}	সংখ্যার সেট

সংক্ষিপ্ততার জন্য ইংরেজি বর্ণমালার বড়হাতের বর্ণ দ্বারা সেটের নামকরণ করা হয়। সেট নির্দেশক বর্ণ বা লেটারকে বলা হয় সেট প্রতীক।

সেটের সীমা, উপাদান ও প্রতীক(Set boundary, element and symbol): প্রকৃত বস্তু নিয়ে সেট গঠন বিবেচনা করা যায়, কিন্তু লেখার সময় সেই বাস্তব বস্তুকে কাগজে কলমে আনা যায় না। সেট লিখে প্রকাশের জন্য সেটের সীমা (set boundary) হিসাবে দ্বিতীয় বন্ধনী '{ }' ব্যবহার করা হয় এবং উপাদান হিসাবে বস্তুর নাম বা প্রতীক ব্যবহার করা হয়। সেটের নামের প্রতীক হিসাবে সাধারণত ইংরেজি বড় হাতের বর্ণ A, B, C, ... X, Y, Z এবং উপাদানের প্রতীক বা উপাদান হিসাবে ছোট হাতের বর্ণ a,b,c, ... x,y,z বা সংখ্যা ব্যবহার করা হয়।

উপাদানের পুনরাবৃত্তি (Repetition of elements in a set): সেটে অভিন্ন উপাদান একাধিকবার থাকলে এদেরকে একটি উপাদান হিসেবেই গণ্য করা হয়:

যেমন, {আম, আম, আম} = { আম }; { b, b,}= { b }; {2, 2, 3}={2, 3}।

তবে একটি আমের থোকায় তিনটি আম আছে, তিনটি আমের অস্তিত্ব বজায় রেখে আমের থোকাটিকে সেটে প্রকাশ করতে হলে আম গুলোতে ভিন্নতা দেখাতে হবে। যেমন, { $আম_১$, $আম_২$, $আম_৩$}।

সেটে উপাদানের ক্রম(Order of elements in a set): উপাদানের অবস্থান ক্রমের পার্থক্যের জন্য সাধারণত সেটের কোন পার্থক্য হয় না। যেমন, $\{1, 2\}=\{2, 1\}$। তবে অধিক সংখ্যক উপাদান বিশিষ্ট সেটের ক্ষেত্রে কতিপয় উপাদানের উল্লেখ করে ডটের মাধ্যমে অনুল্লেখিত উপাদান বোঝানোর জন্য উল্লেখিত উপাদানের একটা ক্রম বজায় রাখা হয়। এরূপ সেটকে **অনুক্রমিক সেট** বলে। যেমন, $\{1, 3, 5, 7, ..., 99\}$।

উপাদানের অন্তর্ভুক্তিতা: কোন সেটে একটি উপাদান অন্তর্ভুক্ত অর্থে, উপাদান ও সেট প্রতীকের মাঝে $\in$ (epsilon) চিহ্নটি ব্যবহৃত হয়। যেমন, $x\in A$; পড়া হয়: x অন্তর্ভুক্ত A সেটে (x belongs to A or x is in A); কোন সেটে একটি উপাদান অন্তর্ভুক্ত নয় বোঝাতে কাটা ইপসিলন ব্যবহৃত হয়: $x\notin A$; পড়া হয়: x অন্তর্ভুক্ত নয় A সেটে (x does not belong to A or x is not in A).

সেটের সংজ্ঞা: সহজ কথায় বলা যায়, *সেট হল বস্তুর সংগ্রহ*। আলোচিত বৈশিষ্ট্যের সমন্বয়ে একটি সংজ্ঞা নির্ধারণ করা যায়; *কোন সীমানায় একটি সাধারণ বৈশিষ্ট্য সম্পন্ন ভিন্নতর বস্তুর ক্রমনিরপেক্ষ প্রতীকীয় সংগ্রহ বা সমাবেশকে সেট বলে। সেটভুক্ত বস্তুকে বলা হয় সেটের উপাদান বা সদস্য।*

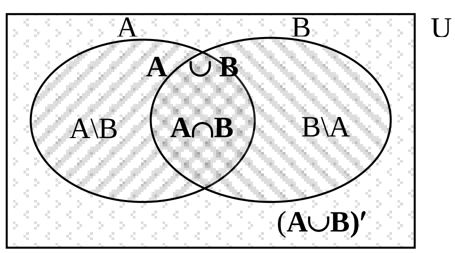
সেট প্রকাশের রীতি(Mode of expression of sets) : বিভিন্ন ভাবে সেট প্রকাশ করা যায়। এ পর্যায়ে প্রচলিত কয়েকটি নিয়ম এখানে উল্লেখ করা হল:

১. তালিকা পদ্ধতি(Roster method): এ পদ্ধতিতে সেটের উপাদান সুনির্দিষ্ট ভাবে উল্লেখ করে কমা দ্বারা পৃথক করে দ্বিতীয় বন্ধনীভুক্ত করে সেট প্রকাশ করা হয়। যেমন, $A=\{a, b, c\}$, $B = \{3, 5\}$, $N = \{1, 2, 3, ...\}$.

২. সূত্র / গঠন পদ্ধতি(Formula/Builder method): এ পদ্ধতিতে সেটভুক্ত সকল উপাদান উল্লেখ না করে উপাদান নির্ধারণের জন্য এক বা একাধিক শর্ত বা সূত্র উল্লেখ করা হয়:

যেমন, A={x **:** x হল এক অঙ্কের বিজোড় সংখ্যা}, $B = \{x\in N : 5< x \le 12\}$ ইত্যাদি।

৩. ভেনচিত্র(Venn diagram): সেটের চিত্রায়িত রূপ হল ভেন চিত্র। চিত্রদ্বারা সেট প্রকাশের উদ্ভাবক জন ভেন এর নামানুসারে সেটের চিত্রকে বলা হয় ভেন চিত্র। সেটের উপাদান সমূহকে আয়ত, বৃত্ত বা উপবৃত্তাকার আবদ্ধ রেখায় অন্তর্ভুক্ত করে যে চিত্র পাওয়া যায় তাই ভেনচিত্র। সাধারণত সার্বিক সেটকে আয়ত চিত্র এবং উপসেটকে সার্বিক সেটের অন্তর্ভুক্ত কোন বৃত্ত বা উপবৃত্ত দ্বারা নির্দেশ করা হয়।



৪. ভাষাগত বর্ণনা (Linguistic description) : $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$কে ভাষাগত ভাবে বিভিন্ন ভাবে বর্ণনা করা যায়: প্রথম পাঁচটি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট অথবা এক অঙ্কের বিজোড় সংখ্যার সেট ইত্যাদি।

৫. সেটের প্রতীকীয় রূপ (Symbolic set) : সেটের কোন উপদান নির্দিষ্ট করা না থাকলে প্রতীকীয় ভাবে সেট প্রকাশ করা হয়: $A=\{x : x\in A\}$, $A'=\{x : x\notin A,\}$, $A\cup A'= U$, $A\cap A' = \varnothing$ ইত্যাদি।

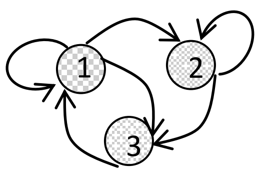
৬. বাস্তব সংখ্যার ব্যবধি (Real number interval): দুইটি সংখ্যার মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যা অবিচ্ছিন্ন ও অগণনযোগ্য। এদের সেটকে তালিকায় প্রকাশ করা যায় না; এদেরকে সূত্র পদ্ধতিতে বা অবিচ্ছিন্ন ব্যবধি আকারে প্রকাশ করা হয়: $2 \le x < 5 = [2, 5)$ বা $[2, 5[$; এটি একটি বদ্ধ-খোলা ব্যবধি-সেটের উদাহরণ।

৭. যৌক্তিক বিধেয়করণ (Logical predication) : আধুনিক সেট তত্ত্বে, উদ্দেশ্য তথা সেট ও উপাদানকে ইংরেজি ছোটহাতের বর্ণ এবং বিধেয় বা বৈশিষ্ট্যকে বড়হাতের বর্ণ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

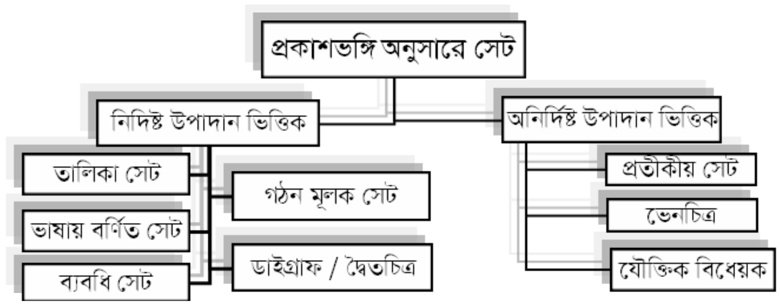
যেমন, Sy & Exy এর অর্থ : 'y একটি সেট এবং x হল y এর উপাদান '।

৮. দ্বৈতচিত্র (Digraph): সাধারণত ক্রমজোড় বা অন্বয় সেট তীর চিহ্নিত বক্ররেখার মাধ্যমে প্রকাশ করা হলে তাকে ডাইগ্রাফ বা দ্বৈতচিত্র বলে। ধরি $S = \{1, 2, 3\}$;

$S \to S$ একটি অন্বয় সেট $F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3)\}$; F এর ডাইগ্রাফ হবে:



ডাইগ্রাফ/দ্বৈতচিত্র



গঠন ভিত্তিক বিভিন্ন সেট (Different Sets based on construction) : কোনো সাধারণ বৈশিষ্ট্যের কিছু উপাদান নিয়ে একটি সেট গঠন করা হলে, সেটের বাইরে একই ধরনের কিছু সদস্য থেকে যায়। বাইরে থাকা সকল উপাদান দ্বিতীয় একটি সেট গঠন করে। প্রথম ও দ্বিতীয় সেটের সদস্য মিলেও একটি সেট হয়। এ থেকে দেখা যায়, যখনই আমরা কোন সেট গঠন করতে যাই তখনই অন্তত তিনটি সেট বিবেচনায় চলে আসে। আর তা হল সেট, পূরক সেট ও সার্বিক সেট।

সার্বিক সেট (Universal set) : একটি সমস্যায় বিবেচ্য সকল সেটের সকল উপাদান আছে এমন কোন সেট বা তার কোন অধিসেট সার্বিক সেট হিসাবে বিবেচিত হয়। ভিন্ন ভিন্ন সমস্যায় সার্বিক সেটও বিভিন্ন হতে পারে। সার্বিক সেটের প্রতীক হিসাবে সাধারণত U ব্যবহার করা হয়।

দশ ভিত্তিক সংখ্যার অঙ্কের সার্বিক সেট $U =\{0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9\}$,

সপ্তাহের বারের নামের সার্বিক সেট U ={ শুক্র, শনি, রবি, সোম, মঙ্গল, বুধ, বৃহস্পতি }।

উপসেট ও অধিসেট (Subset & super set) : একটি সেটের সকল উপাদান যখন অপর সেটে থাকে; প্রথমটিকে বলা হয় দ্বিতীয় সেটের উপসেট। উপসেটের সকল উপাদান সহ দ্বিতীয় সেটে যদি কিছু উপাদান বেশি থাকে, তাকে বলা হয় অধিসেট।

$A =\{a. b\}$, $B =\{a, b, c\}$হলে, A হল B এর উপসেট এবং B হল A এর অধিসেট। লেখা হয়: $A \subseteq B$ অথবা $B \supseteq A$;

উপসেট হওয়ার শর্ত: যদি $x \in A \Rightarrow x \in B$ তবে $A \subseteq B$ অথবা $(x \in A \Rightarrow x \in B) \to A \subseteq B$

উপসেট গঠন ও উপসেট সংখ্যা: বিভিন্ন সংখ্যক উপাদান বিশিষ্ট সেটের উপসেট গঠন এবং উপসেট সংখ্যা নির্ণয়ের ধারাবাহিক কৌশল দেখানো হল :

সেট	উপাদান সংখ্যা	সম্ভাব্য উপসেট	উপসেট সংখ্যা
{ }	0	{ }	$1=2^0$
{1}	1	{ }, {1}	$2=2^1$
{a,b}	2	{ },{a},{b},{a,b}	$4=2^2$
{1,2,3}	3	{ },{1},{2},{3},{1,2},{2,3},{1,3},{1,2,3}	$8 =2^3$
...	...	... ...	... .
{1,2,3, ..., n}	n	{ },{1},{2},{3},{1,2},{2,3},{1,3},{1,2,3}...{1,2,3,...n}	2^n

সেটের বিভিন্ন মাত্রিক উপসেট ও প্যাস্ক্যাল ত্রিভুজ :

একটি সেটের কত উপাদানের কয়টি উপসেট হবে তা প্যাস্ক্যাল ত্রিভুজ অনুক্রম মেনে চলে।

উপাদান সংখ্যা	প্যাস্ক্যাল ত্রিভুজ অনুসারে ক্রমিক মাত্রার উপসেট সংখ্যা	মোট উপসেট সংখ্যা
0	1	$1= 1= 2^0$
1	1 1	$1+1= 2= 2^1$
2	1 2 1	$1+2+1= 4= 2^2$
3	1 3 3 1	$1+3+3+1= 8= 2^3$
4	1 4 6 4 1	$1+4+6+4+1=16= 2^4$
5	1 5 10 10 5 1	$1+5+10+10+5+1=32=2^5$
	... ...	

মাঝের প্যাস্ক্যাল ত্রিভুজের সপ্তম সারির সংখ্যাগুলো কিভাবে নির্ণয় করব? প্রথম সংখ্যাটি সহজেই অনুমেয়। দ্বিতীয় সংখ্যাটি হবে ১+৫=৬, তৃতীয় সংখ্যা ৫+১০=১৫, চতুর্থ নংখ্যা ১০+১০=২০। আশা করি এবার বোঝতে বাকি নেই যে, উপরের সারির পরপর দুটি সংখ্যার সমষ্টি হল, এর নিচের লাইনের মাঝের সংখ্যা।


ব্লেইজ প্যাস্ক্যাল (১৬২৩-৬২) ফরাসী

মূল সেটের মাত্রা শূন্য থেকে এক এক করে ক্রমান্বয়ে বাড়াতে থাকলে, কোন মাত্রার কয়টি উপসেট হবে তা প্যাস্ক্যাল ত্রিভুজ দেখে নির্ণয় করা যায়। যেমন, পাঁচ উপাদান বিশিষ্ট সেটের উপসেট হবে প্যাস্ক্যাল ত্রিভুজের ৬ষ্ঠ লাইন অনুসারে: উপাদান বিহীন ১টি, এক উপাদানের ৫টি, দুই উপাদানের ১০টি, তিন উপাদানের ১০টি, চার উপাদানের ৫টি এবং পাঁচ উপাদানের ১টি নিয়ে মোট ৩২টি।

সেটের বিভিন্ন মাত্রিক উপসেট ও দ্বিপদী উপপাদ্যের সহগ:

একটি সেটের n মাত্রিক উপসেট সংখ্যা দ্বিপদী উপপাদ্যের সহগ নিয়ম মেনে চলে।

$(1+x)^n$; $n=0\Rightarrow(1+x)^0= 1$

$n=1\Rightarrow(1+x)^1= 1+x$

$n=2\Rightarrow(1+x)^2= 1+2x+x^2$

$n=3\Rightarrow(1+x)^3= 1+3x+3x^2+x^3$

$n=4\Rightarrow(1+x)^4= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$

দ্বিপদীর n মাত্রিক সূত্রে k মাত্রিক x এর সহগ ধরা হয় C(n,k) ; সেটের ক্ষেত্রে C(n,k) দ্বারা বোঝায় n মাত্রিক সেটের k মাত্রিক উপসেট সংখ্যা। দ্বিমাত্রিক সেটের, শূন্যমাত্রিক উপসেট ১টি, একমাত্রিক ২টি, দ্বিমাত্রিক ১টি। সহগ প্রতীকে:

C(2,0) = 1, C(2,1) = 2, C(2,2) =1;

C(3,0) =1, C(3,1) =3, C(3,2) =3, C(3,3) =1

C(4,0) =1, C(4,1) = 4, C(4,2) = 6, C(4,3) = 4, C(4,4) =1

C(5,0) =1, C(5,1) = 5, C(5,2) =10, C(5,3) =10, C(5,4) = 5, C(5,5) =1 ইত্যাদি।

পাওয়ার সেট(Power set): একটি সেটের সকল উপসেটের সেটকে পাওয়ার সেট বলে। A একটি সেট হলে, তার পাওয়ার সেটের প্রতীক P(A) অথবা 2^A ;

A={1, 2, 3} হলে,P(A)= {∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {1, 2, 3}};

P(∅)= { ∅ }; P({1, 2})= {∅, {1}, {2},{1, 2}};

সেট-পরিবার (Family of sets): পাওয়ার সেটের যে কোন অশূন্য উপসেটকে বলা হয় সেট পরিবার।

সেট পরিবারের প্রত্যেক সদস্যই সেট। মূলত সেটের সেটই সেট পরিবার। $F(A) \subseteq P(A)$;

বিভক্ত সেট(Partition Set): একটি সেটের উপসেট তালিকা থেকে ফাঁকা সেট ছাড়া অন্তত দুইটি নিশ্ছেদ উপসেট নিয়ে গঠিত সেটকে বিভক্ত সেট বলে। $A = \{2,3,5\}$ হলে, এর বিভক্ত সেটগুলো হবেঃ

$P_1(A) = \{\{2\},\{3,5\}\}$, $P_2(A) = \{\{2,3\},\{5\}\}$, এবং $P_3(A) = \{\{2\},\{3\},\{5\}\}$.

অপ্রকৃত উপসেট(Improper subset): যেকোন উপাদান বিশিষ্ট একটি সেটের একটি উপসেট সে নিজে, যে তার সকল সদস্যই ধারণ করে এবং অপর একটি ফাঁকা সেট যে তার কোন সদস্যই ধারণ করে না। এ উভয় সেটই অপ্রকৃত উপসেট।

প্রকৃত উপসেট(Proper subset): যদি A সেট B সেটের অন্তত একটি উপাদান ধারণ করে কিন্তু সকল উপাদান নয়, তখন A কে বলা হয় B এর প্রকৃত উপসেট। লেখা হয় $A \subsetneq B$

উপসেটের চিহ্নঃ সাধারণ উপসেটের চিহ্ন $\subset$, অপ্রকৃত উপসেটের চিহ্ন $\subseteq$ এবং প্রকৃত উপসেটের $\subsetneq$ চিহ্ন । কিন্তু বর্তমানে [ফাঁকা সেটকে প্রকৃত উপসেট ধরে] স্কুল পাঠ্যপুস্তকে সাধারণ উপসেটের চিহ্ন $\subseteq$ এবং প্রকৃত উপসেটের চিহ্ন $\subset$ ধরা হয়েছে।

পূরক সেট(Complementary set): সার্বিক সেট থেকে একটি সেট বিয়োগ করে তার পূরক সেট পাওয়া যায়। একটি সেটের মূল প্রতীকে বিভিন্ন চিহ্ন বসিয়ে তার পূরক সেট চিহ্নিত করা হয়। A এর পূরক সেট হিসাবে A', A^c, $\neg A$, $\sim A$, $\overline{A}$ ইত্যাদির যে কোন একটি প্রতীক ব্যবহার করা হয়। একটি সেটে যে উপাদান নেই, তা অবশ্যই থাকবে তার পূরক সেটে। প্রতীকীয় ভাবেঃ $A'=\{x : x \notin A\} =\{x \in U: x \notin A\} = U \setminus A$ ।

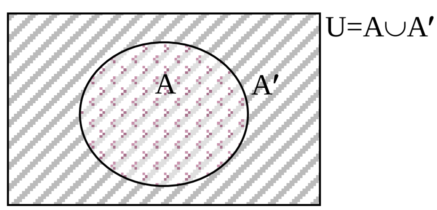
মহাদেশের সেটের উদাহরণে, যদি A = { এশিয়া, ইউরোপ, আফ্রিকা} হয়,

তবে A' = {উত্তর আমিরিকা, দক্ষিণ আমেরিকা, অস্ট্রেলিয়া, এন্টার্কটিকা }

একটি সেটের পূরকের পূরক সে নিজেঃ $(A')' = A$

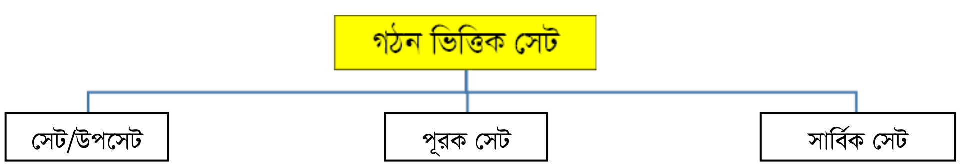
সেট, পূরক সেট ও সার্বিক সেট সম্পর্কঃ কোন উপাদানই সেট ও পূরক সেটে সাধারণ থাকবে না এবং কোন উপাদানই উভয় সেটের বাইরে থাকবে না । অর্থাৎ বিবেচ্য বৈশিষ্ট্যের প্রত্যেক উপাদান, হয় থাকবে বিবেচ্য সেটে অথবা থাকবে তার পূরক সেটে। সেট ও পূরক সেটের সংযোগে গঠিত হয় সার্বিক সেটঃ $A \cup A' = U$

একটি সেট ও তার পূরক সেটে সাধারণ উপাদান থাকে না; উহারা পরস্পর বিযুক্ত (Disjoint) সেট।

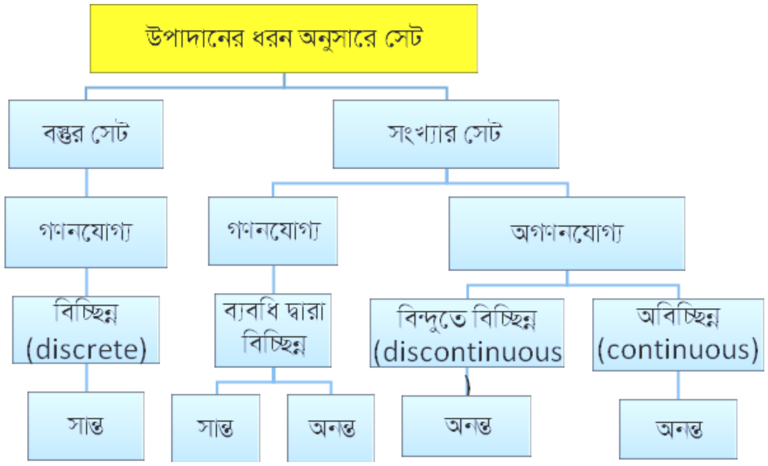


ভেনচিত্রঃ সেট, পূরক সেট ও সার্বিক সেট

মাঝের গোলাকার অংশকে চিহ্নিত করা হল সেট A দ্বারা, তার বাইরে আয়তের ভেতরের অংশ হল এর পূরক সেট A'এবং A ও A' মিলে পূর্ণ আয়ত চিত্রটি হল সার্বিক সেট U।



উপাদানের ধরন অনুসারে সেট: উপাদানের ধরনের প্রেক্ষিতে সেটকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়: বাস্তব বস্তুর সেট ও সংখ্যার সেট। বস্তুর সেট গণনযোগ্য। কিন্তু সংখ্যার সেট গণনযোগ্য বা অগণনযোগ্য দুই ধরনেরই হয়। স্বাভাবিক সংখ্যার সেট গণনযোগ্য এবং বাস্তব সংখ্যার সেট অগণনযোগ্য।



সান্ত সেট ও অনন্ত সেট: কোন সেটে যদি সীমিত সংখ্যক উপাদান থাকে যেন, গণনা করে শেষ করা যায় এবং গণনার মান হিসাবে একটি গণনাকারি বা গণক সংখ্যা পাওয়া যায় তখন তাকে বলা হয় সসীম/সান্ত সেট। যে সেটের উপাদান গণনা করে শেষ করা যায় না তাই অনন্ত সেট।

একটি সান্ত সেট $S = \{2, 4, 5\}$ এবং একটি অনন্ত সেট $P = \{2, 3, 5, 7 \ldots \}$

মাত্রাভিত্তিক সেট: সেটে যদি কেবল একটি উপাদান থাকে, তাকে বলা হয় একক সেট, দুইটি থাকলে দ্বিমাত্রিক, তিনটি থাকলে ত্রিমাত্রিক; এ ভাবে n সংখ্যক উপাদান বিশিষ্ট সেটকে বলা হয় n মাত্রিক সেট। এসব সেটের সদস্য সংখ্যা একটি গণক সংখ্যায় প্রকাশযোগ্য বলে, এ গুলো সান্ত সেট। ফাঁকা সেট হল শূন্য মাত্রিক সেট।

সান্ত সেটের মাত্রার প্রতীক(Symbol of the order of a finite set): A সেটের মাত্রা বা উপাদান সংখ্যা বোঝাতে $o(A)$, $n(A)$, $\#A$ বা $|A|$ প্রতীক ব্যবহৃত হয়। তবে এরমধ্যে $|A|$ আধুনিক প্রতীকটি ব্যবহার সুবিধাজনক। একটি সান্ত সেট A তে যদি m সংখ্যক উপাদান থাকে, তবে $|A| = m$.

সদস্য বিহীন সেট(Set wthout element)**: যে সেটে কোন সদস্য নাই তাকে ফাঁকা সেট বলে।** ফাঁকা সেট নির্দেশক প্রতীক $\{\ \}$ বা $\varnothing$; $\varnothing = \{ x : x \neq x \}$;

{x হল মহিলা | x, বাংলাদেশের প্রথম প্রেসিডেন্ট}$= \varnothing$; $\{x \in N : 3 < x < 4\} = \{\ \}$

ফাঁকা সেটের মাত্রা শূন্য: $|\{\ \}| = |\varnothing| = 0$; ফাঁকা সেট একটি অনন্য শূন্যমাত্রিক সান্ত সেট।

$\{0\}$ এটি ফাঁকা সেট নয়, বরং একটি একক সেট। $\{\varnothing\}$এটিও ফাঁকা সেট নয়, বরং ফাঁকা সেটের পাওয়ার সেট।

ফাঁকা সেটের পূরক সেট সার্বিক সেট এবং সার্বিক সেটের পূরক সেট ফাঁকা সেট: $\varnothing' = U$ এবং $U' = \varnothing$ ।

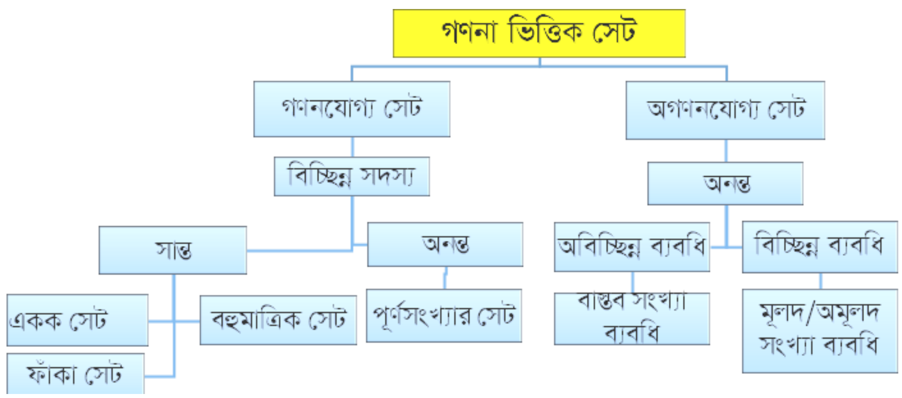
সমতুল সেট(Equivalent set): দুইটি সান্ত সেটের উপাদান সংখ্যা যদি সমান হয় অথবা দুইটি (সান্ত/অনন্ত) সেটের উপাদানগুলোকে যদি সম্পূর্ণ ভাবে এক-এক মিল দেখানো যায় তখন এদেরকে সমতুল সেট বলা হয়। সমমাত্রিক সান্ত সেট সর্বদাই সমতুল। $A=\{a, b, c\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $C = \{p, q, r, s\}$; সেটগুলোর পরস্পর এক-এক মিল দেখানো হল:

$$\begin{array}{llll} A =\{ a, & b, & c \}, & \\ \ \ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B =\{ 2, & 3, & 5 \}, & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} B = \{ 2, & 3, & 5 \}, & \\ \ \ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ C = \{ p, & q, & r, & s \}, \end{array} \qquad \begin{array}{llll} C =\{ p, & q, & r, & s \}, \\ \ \ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ A =\{ a, & b, & c \}; & \end{array}$$

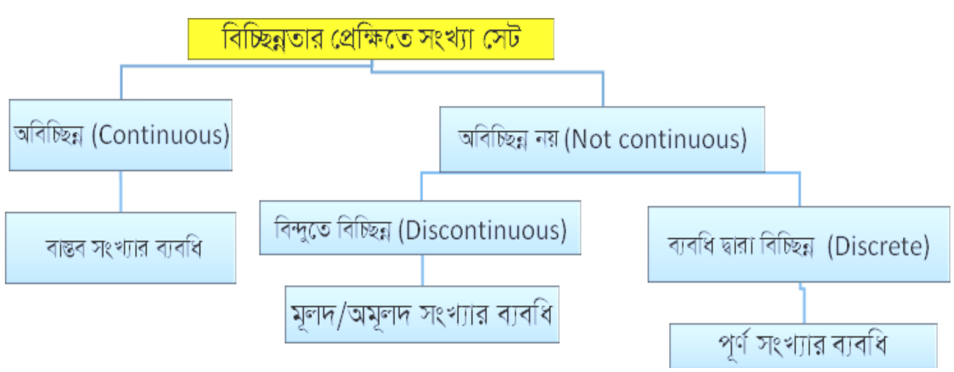
এখানে A ও B পরস্পর সমতুল সেট। কারণ, এই দুই সেটের উপাদানের এক-এক মিল করায় কোন উপাদান চিত্রণ থেকে বাদ পড়েনি। কিন্তু, A ও C বা B ও C সমতুল নয়।

সমান সেট (Equal set): দুইটি সেট যদি সমতুল হয় এবং উভয় সেটের উপাদান অভিন্ন হয় তখন সেটদ্বয়কে সমান সেট বলা হয়। যেমন, B = { 2, 3, 5 }, D = { 5, 2, 3 }; এখানে B ও D এর উপাদান সংখ্যা সমান, তাই উপাদানগুলো এক-এক মিল যোগ্য এবং উভয় সেটের উপাদান অভিন্ন। অতএব B = D.

গণনযোগ্য ও অগণনযোগ্য সেট(Countable & Uncountable sets): কোন সেটের উপাদানকে যদি অনুক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা সেট বা তার কোন উপসেটের সাথে পূর্ণভাবে এক-এক মিল করা যায়, তখন তাকে গণনযোগ্য সেট বলে। যেমন, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, জোড় বা বিজোড় সংখ্যার সেট। গণনযোগ্য সেট সান্ত ও অনন্ত উভয়ই হতে পারে। গণনযোগ্য না হলে তাকে অগণনযোগ্য সেট বলে। বাস্তব সংখ্যা বা তার কোন ব্যবধি সেট অগণনযোগ্য।



অবিচ্ছিন্ন, অবিচ্ছিন্ন নয় ও বিচ্ছিন্ন সেট: বাস্তব সংখ্যার ব্যবধিতে যেকোন দুটি সংখ্যার মাঝে কেবল বাস্তব সংখ্যাই আছে। বাস্তব সংখ্যার ব্যবধি অবিচ্ছিন্ন। মূলদ সংখ্যার ব্যবধিতে যেকোন দুটি সংখ্যার মাঝে অনেক অমূলদ সংখ্যা আছে। মূলদ সংখ্যার ব্যবধি অবিচ্ছিন্ন নয়; তদ্রূপ অমূলদ সংখ্যার ব্যবধি। পূর্ণসংখ্যার সেট বিচ্ছিন্ন।



সেট কার্যবিধি(Set Operation) :সংখ্যার যেমন কার্যবিধি রয়েছে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি; তেমনি সেটের কার্যবিধি হল সংযোগ, ছেদ, বিয়োগ, কার্তেসীয় গুণ ইত্যাদি। কার্যবিধি দুই বা ততোধিক সেটের মধ্যে সংঘঠিত হয়।

সেট সংযোগ(Union of sets): যে বিধি অনুসারে একাধিক সেটের সকল সদস্য একত্রে নিয়ে একটি নতুন সেট গঠিত হয় তাকে বলে সংযোগ বিধি এবং নবতর সেটটিকে বলা হয় সংযোগ সেটে। সংযোগ বিধি অনুসারে

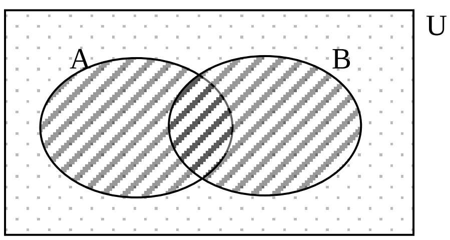
সহসেটগুলোর সকল উপাদানই সংযোগ সেটে অন্তর্ভুক্ত হয়, তবে অভিন্ন/সাধারণ উপাদান যদি থাকে তা একবারই

উল্লেখ করা হয়। যেমন, A={a, b, e}, B={b, e, f} হলে, $A\cup B$={a, b, e, f};

$A\cup B$ কে পড়া হয় 'A সংযোগ B' বা 'A union B' অথবা 'A cup B'। এখানে $\cup$ হল সংযোগ চিহ্ন। প্রতীকীয় ভাবে সংযোগ সূত্র হল: $A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$; এই '$\vee$' চিহ্নটি 'অথবা' অর্থে ব্যবহৃত হয়।

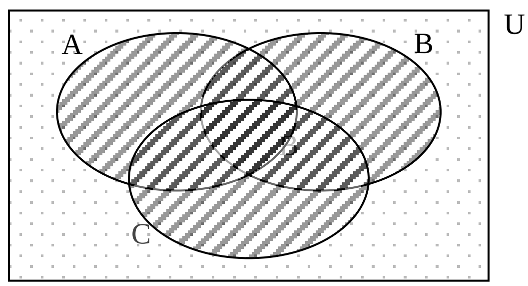
পড়া হয়, ' A union B = set of x such that x in A or x in B, set close.

বাংলায় পড়া হয়: A সংযোগ B = সেট বন্ধনীতে 'উপাদান x এরূপ যেন, x আছে A তে অথবা x আছে B তে' সেট বন্ধনী শেষ। সংযোগ সেটের ভেনচিত্র:



$A\cup B$

দুই সেটের সংযোগ চিত্র



$A\cup B\cup C$

তিন সেটের সংযোগ চিত্র

সেটের ছেদ (Intersection of sets): যে বিধি অনুসারে একাধিক সেটের কেবল সাধারণ সদস্য নিয়ে একটি নতুন সেট গঠিত হয় তাকে বলে ছেদ বিধি এবং নবতর সেটটিকে বলা হয় ছেদ সেটে। ছেদ বিধি অনুসারে সহসেটগুলোর কেবল সাধারণ উপাদানই ছেদ সেটে অন্তর্ভুক্ত হয়।

যেমন, A={a, b, e}, B={b, e, f, g}হলে, $A\cap B$={ b, e};

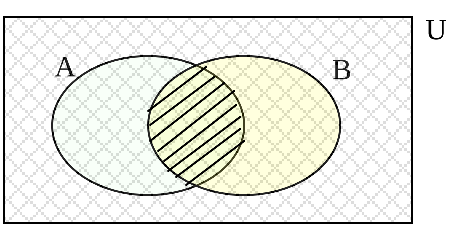
$A\cap B$ কে পড়া হয় 'A ছেদ B' বা 'A intersection B' অথবা 'A cap B'। এখানে $\cap$ হল ছেদ চিহ্ন।

প্রতীকীয় ভাবে ছেদ সূত্র হল $A\cap B=\{x : x\in A \wedge x\in B\}$; এই '$\wedge$' চিহ্নটি 'এবং' অর্থে ব্যবহৃত হয়।

পড়া হয়, ' A intersection B = set of x such that x in A and x in B, set close.'

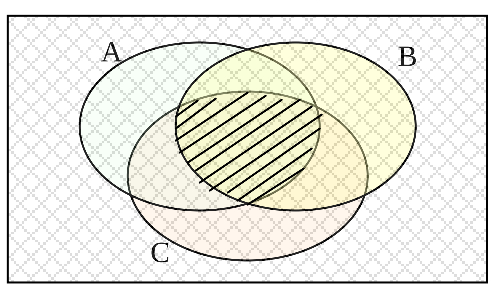
বাংলায় পড়া হয়: A ছেদ B = সেট সীমায়, উপাদান x যেন x আছে A তে এবং x আছে B তে, সেট শেষ।

ছেদ সেটের ভেনচিত্র:



$A\cap B$

দুই সেটের ছেদ চিত্র

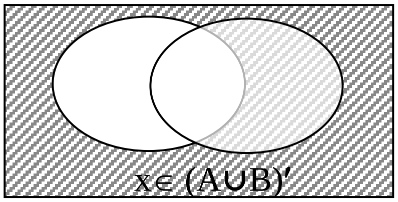


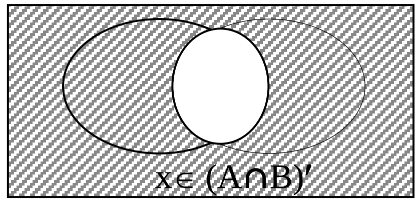
$A\cap B\cap C$

তিন সেটের ছেদ চিত্র

ডি মর্গেনের সূত্র: সংযোগ সেটের পূরক এবং ছেদ সেটের পূরক সেট নিয়ে এ সূত্রের দুইটি অংশ:

(i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)' = A'\cup B'$





প্রমাণ: (i) ধরি $x\in(A\cup B)'$

$\Rightarrow x\notin(A\cup B)$

$\Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in A' \wedge x\in B'$

$\Rightarrow x\in A'\cap B'$

পুনরায় ধরি $x\in A'\cap B'$

$\Rightarrow x\in A' \wedge x\in B'$

$\Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\notin(A\cup B)$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)'$

$\therefore (A\cup B)' = A'\cap B'$

(ii)ধরি $x\in(A\cap B)'$

$\Rightarrow x\notin(A\cap B)$

$\Rightarrow x\notin A \vee x\notin B$

$\Rightarrow x\in A' \vee x\in B'$

$\Rightarrow x\in A'\cup B'$

পুনরায় ধরি $x\in A'\cup B'$

$\Rightarrow x\in A' \vee x\in B'$

$\Rightarrow x\notin A \vee x\notin B$

$\Rightarrow x\notin(A\cap B)$

$\Rightarrow x \in (A\cap B)'$

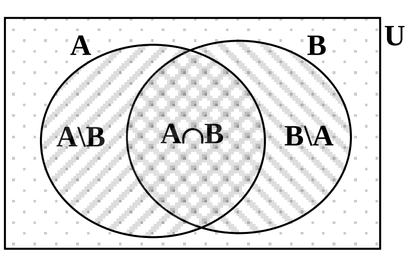
$\therefore (A\cap B)' = A'\cup B'$

যুক্ত ও বিযুক্ত সেট (Joint and disjoint sets)**:** দুইটি সেটের মধ্যে সাধারণ সদস্য থাকলে তাদেরকে যুক্ত সেট এবং সাধারণ সদস্য না থাকলে তাদেরকে বিযুক্ত বা নিশ্ছেদ সেট বলে। অন্য কথায় বলা যায় দুইটি সেটের ছেদ সেট ফাঁকা না হলে তারা যুক্ত এবং ফাঁকা হলে বিযুক্ত সেট হবে।

ধরি, $A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{4, 5, 6\}$, $C=\{5, 6, 7\}$; এখানে $A\cap B=\{ 4 \}\neq \emptyset$; অতএব A ও B পরস্পর যুক্ত সেট। কিন্তু $A\cap C = \emptyset$; অতএব A ও C পরস্পর বিযুক্ত বা নিশ্ছেদ সেট।

যুক্ত বা বিযুক্ত সেটের উপাদান সংখ্যার সূত্র:

সান্ত সেট A ও B এর জন্য $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$ [|A| দ্বারা A সেটের উপাদান সংখ্যা বোঝায়]



এখানে A\B, A∩B এবং B\A সেট তিনটি পরস্পর বিযুক্ত বা নিশ্ছেদ সেট নির্দেশ করে।

$A = (A\backslash B) \cup (A\cap B)$, $B = (B\backslash A) \cup (A\cap B)$

$A \cup B = (A\backslash B) \cup (A\cap B) \cup (B\backslash A)$

একটি সেটকে যে কয়টি নিশ্ছেদ সেটের সংযোগ রূপে দেখান যায়, তার উপাদান সংখ্যা সে নিশ্ছেদ উপসেটগুলোর উপাদানের সমষ্টির সমান;

$|A| = |A\backslash B| + |A\cap B|$ ... (i)

$|B| = |B\backslash A| + |A\cap B|$ ... (ii)

$|A\cup B| = |A\backslash B| + |A\cap B| + |B\backslash A|$ ... (iii)

$$\text{(iii)} \Rightarrow |A\cup B| = |A\backslash B| + |A\cap B| + |B\backslash A|$$

$$= (|A| - |A\cap B|) + |A\cap B| + (|B| - |A\cap B|)$$

$$= |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$\therefore \mathbf{|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|}$$

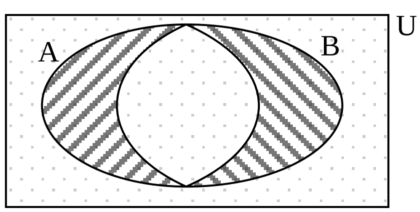
প্রতিসম বিয়োগ(Symmetric difference): দুই বা ততোধিক সেটের নিশ্ছেদ অংশ নিয়ে গঠিত সেটকে প্রতিসম বিয়োগ সেট বলে। মূলত দুইটি সেটের সাধারণ সদস্য বাদে অন্য সব উপাদান নিয়ে প্রতিসম বিয়োগ সেট গঠিত হয়। প্রতিসম বিয়োগের সেট প্রতীক $A\oplus B$ বা $A\odot B$ অথবা $A\Delta B$;

$A\oplus B = (A\cup B)\backslash(A\cap B) = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$;

সূত্র পদ্ধতিতে:$A\Delta B=\{ x\in A\cup B : x\notin A\cap B\}$ অথবা

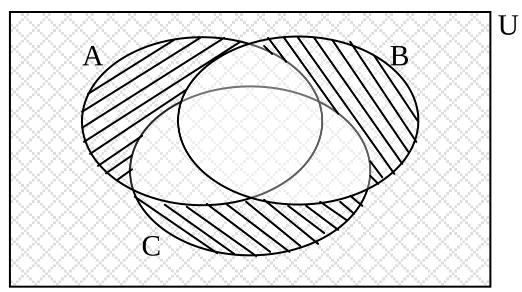
$A\odot B=\{x : x\in A, x\notin B\}\cup\{x : x\in B, x\notin A\}$.

ধরি $A = \{ 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; তাহলে, $A\odot B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$[কমন সদস্য বাদ]



A ⊕ B

দুই সেটের প্রতিসম বিয়োগ চিত্র



A ⊕ B ⊕ C

তিন সেটের প্রতিসম বিয়োগ চিত্র

সেট বিয়োগ: বিয়োজন ও বিয়োজ্য সেটের সাধারণ সদস্য বিয়োজন সেট থেকে বাদ দেওয়ার বিধিকে সেট বিয়োগ বিধি বলা হয়।

সেট বিয়োগ প্রক্রিয়ার চিহ্ন হিসাবে সাধারণ বিয়োগ চিহ্ন ' –' বা ব্যাক স্ল্যাশ ' \' ব্যবহৃত হয়।

যেমন, A থেকে B বিয়োগ বোঝাতে $A – B$ বা $A\backslash B$ লেখা হয়।

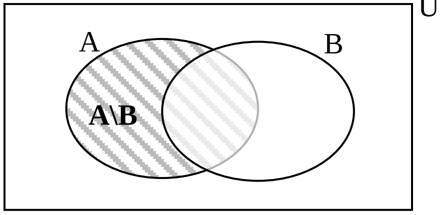
ধরি $A = \{ 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{ 2, 3, 5, 6, 7\}$;

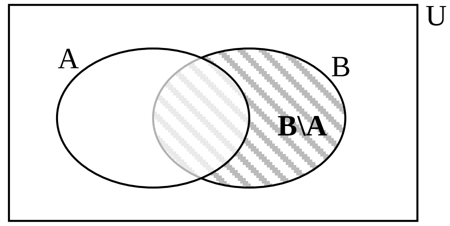
তাহলে $A\cap B =\{2, 3\}$; অতএব $A – B = A – A\cap B = \{ 1, 2, 3, 4\} –\{2, 3\} = \{1, 4\}$

এবং $B\backslash A = B\backslash(A\cap B) = \{ 2, 3, 5, 6, 7\}\backslash\{2, 3\} = \{ 5, 6, 7\}$

বিয়োগ সেটের প্রতীকীয় রূপ বা সূত্র: $A\backslash B = \{x : x\in A$ এবং $x\notin B\}$;

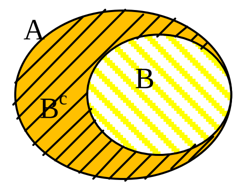
বিয়োগ সেটের ভেনচিত্র :





সাপেক্ষ পূরক সেট(Relatively complement set): দুইটি সেটের বিয়োগফল সেটই সাপেক্ষ পূরক সেট হবে, যদি বিয়োজ্য সেট বিয়োজনের উপসেট হয়। অর্থাৎ A\B, এই বিয়োগফল সেটে B যদি Aএর উপসেট হয়, তবে A\B কে বলা হয় A সাপেক্ষে B এর পূরক সেট। $B' = A\setminus B \Leftrightarrow B\subset A$

বিয়োজন সেটটি যদি সার্বিক সেট হিসাবে বিবেচিত হয়, তবে সাপেক্ষ পূরককেই পূরক সেট বলে।
প্রতীকীয় ভাবে $A\setminus B= \{x : x\in A,\ x\notin B\}$; এর সাথে যদি $A\supset B$ শর্তটি যুক্ত হয়, তবে A\B হবে, A সাপেক্ষে B এর পূরক সেট;
অর্থাৎ A সাপেক্ষে $B^c = \{x : x\in A,\ x\notin B\}$

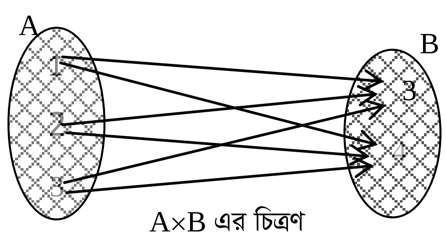


Aসাপেক্ষে B এর পূরক সেট B^c

গুণজ সেট(Cross set)**:** দুইটি সেটের গুণফল সেটকে গুণজ সেট বলে। একটি সেটের প্রত্যেক উপাদানের সাথে অপর সেটের একটি একটি করে সকল উপদানের ক্রমজোড় গঠনের নিয়ম বা বিধিকে গুণ বিধি বলা হয়। এরূপ সকল ক্রমজোড় নিয়ে গঠিত সেটকে গুণজ সেট বা গুণজ বলে।

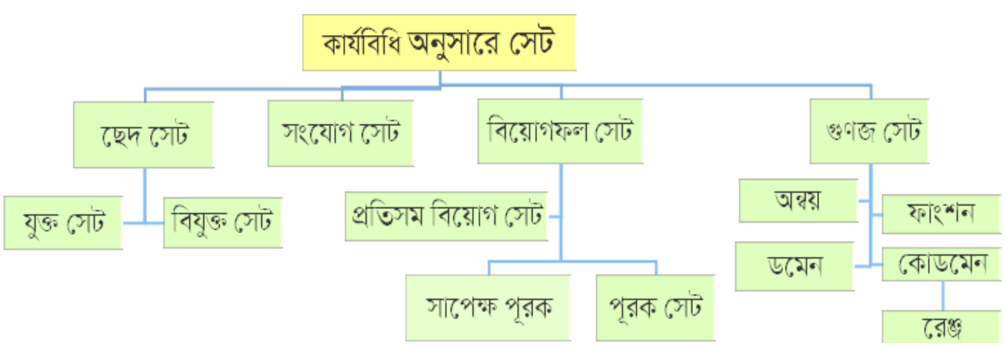
প্রতীকীয় ভাবে $A\times B = \{(x,y) : x\in A, y\in B\}$

ধরি $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{ 3, 4\}$; তাহলে $A\times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$



A×B এর চিত্রণ

ফাঁকা বা শূন্য সেটের সাথে অন্য একটি সেটের গুণফল পাওয়া যায়: $A\times+\varnothing = \varnothing$; কিন্তু এরূপ গুণফলকে কার্তেসীয় গুণজ বলা হয় না; কারণ এর ফলে কোন ক্রমজোড় বা কোন অন্বয় গঠিত হয় না ।



পর্যায় ভিত্তিক সেট (Periodic set): সরল উপাদানের সেটকে বলা হয় প্রাথমিক (Primary) সেট। সেটের সেট, অর্থাৎ যে সেটের উপাদান প্রাথমিক পর্যায়ের সেট, তাকে বলা হয় দ্বিতীয় পর্যায় (Secondary) সেট। পাওয়ার সেট, ফেমিলি সেট, বিভক্ত সেট হল দ্বিতীয় পর্যায়ের সেট। যে সেটের উপাদান কোন দ্বিতীয় পর্যায়ের সেট তাকে বলা হয় তৃতীয় পর্যায়ের সেট; ইত্যাদি।

উদাহরণ– ১: একটি সেট A কে সূত্র পদ্ধতিতে দেওয়া হল : $A =\{ x : x \in N$ এবং $x^2\leq 9\}$

ক) সেটটিকে কথায় প্রকাশ কর।

খ) সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

গ) দৃশ্যপটে A এর স্থলে B এবং N এর স্থলে Z হলে, B এর তালিকা সেট কী এবং A ও B এর সম্পর্ক কী হবে?

সমাধানঃ

ক) সেটটিকে কথায় প্রকাশ: A হল x এর সেট যেন, x স্বাভাবিক সংখ্যা এবং x এর বর্গ 9 বা তার ছোট।

খ) A এর তালিকা সেট নির্ণয়:

$A = \{ x : x \in N$ এবং $x^2 \leq 9\}$

$= \{ x : x \in N\} \cap \{ x \in N: x^2 \leq 9\}$

$= \{ 1, 2, 3, \ldots \ldots\} \cap \{1, 2, 3\}$

$= \{1, 2, 3\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট : $A = \{1, 2, 3\}$

গ) A এর স্থলে B এবং N এর স্থলে Z হলে, B এর রূপ হবে, $B = \{ x : x \in Z$ এবং $x^2 \leq 9\}$

$= \{ x : x \in Z \} \cap \{ x \in Z : x^2 \leq 9\}$

$= \{ 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \} \cap \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$

$= \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$

$B = \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$ এবং A, B এর প্রকৃত উপসেট।

উদাহরণ-২: যে যে স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 305 ও 413 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 17 অবশিষ্ট থাকে, তাদের সেট ধরা হল A;

ক) সেট A কে গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ) A এর তালিকা সেট নির্ণয় কর।

গ) দৃশ্যপটে প্রদত্ত সকল সংখ্যা 6 করে বাড়িয়ে নির্ণেয় সেটকে B ধরা হলে, এর গঠনরূপ ও তালিকারূপ কী?

সমাধানঃ

ক) সেট A কে গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ: মনে করি A সেটের সদস্য x, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x \in N$, $x|(305-17)$ এবং $x|(413-17)$

ভাজক অবশিষ্টের বড় হয় $\Rightarrow x > 17$

$\therefore A = \{ x \in N : x > 17, x \mid 288$ এবং $x \mid 396\}$

এই '|' চিহ্নটিকে পড়া হয়: 'দ্বারা বিভাজ্য' বা (divides)

খ) A এর তালিকা সেট নির্ণয়:

$A = \{ x \in N : x > 17, x \mid 288$ এবং $x \mid 396\}$

$= \{ x \in N: x > 17$ এবং $x \mid$ গসাউ$(288, 396) \}$

$= \{ x \in N: x > 17$ এবং $x \mid 36 \}$

$= \{ x \in N : x > 17\} \cap \{x \in N : x \mid 36\}$

$= \{18, 19, 20, \ldots\ldots., 36, 37, \ldots\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$= \{18, 36\}$

```
288)396(1
    288
    108)288(2
        216
         72)108(1
             72
             36)72(2
```

গ) এখানে প্রদত্ত নির্দেশনা অনুসারে, সংখ্যার প্রত্যেকটিকে 6 করে বাড়ান হলে B সেটের গঠনরূপ হবে:

$B = \{x \in N : x > 23, x|(311 - 23)$ এবং $x|(419 - 23)\} = \{ x \in N : x > 23, x \mid 288$ এবং $x \mid 396\}$

B এর তালিকারূপ নির্ণয়:

$B = \{ x \in N : x > 23, x \mid 288$ এবং $x \mid 396\}$

$= \{ x \in N: x > 23$ এবং $x \mid$ গসাউ$(288, 396) \}$

$= \{ x \in N: x > 23$ এবং $x \mid 36 \}$

$= \{ x \in N: x > 23\} \cap \{ x \in N: x \mid 36 \}$

$= \{24, 25, 26, \ldots\ldots., 36, 37, \ldots\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$= \{ 36 \}$

উদাহরণ-৪: $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{3, a, b\}$ হলে, $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, a, b\}$ দেওয়া আছে,

তাহলে, $A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{3, a, b\} = \{1, 2, 3, a, b\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট: $\{1, 2, 3, a, b\}$

উদাহরণ-৫: সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর : $\{\pm 4, \pm 5, \pm 6\}$

[প্রদত্ত সেটের উপাদানগুলোকে চলক x দ্বারা নির্দেশ করে এর উপর শর্ত নির্ধারণ করি]

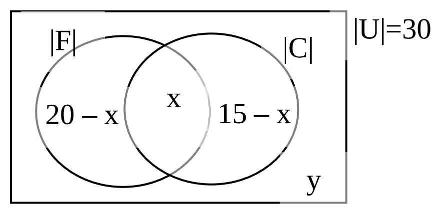
উপাদানগুলো পূর্ণসংখ্যা $\Rightarrow x \in Z$, [সার্বিক শর্ত]

উপাদানগুলোর পরমমানের নিম্ন আবদ্ধ সীমা 4 এবং উচ্চ আবদ্ধ সীমা 6 $\Rightarrow 4 \le |x| \le 6$

$\therefore \{\pm 4, \pm 5, \pm 6\} = \{x \in Z: 4 \le |x| \le 6\}$ Ans.

উদাহরণ-৬: কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে। দুইটি যে কোনো একটি খেলা পছন্দ করে তদ্রূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 15; কতজন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে না তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান: ফুটবল খেলা পছন্দকারির সেট F, ক্রিকেট পছন্দকারির সেট C, উভয় খেলা পছন্দকারির সংখ্যা x, অপছন্দকারির সংখ্যা y এবং সার্বিক সেটকে U ধরে প্রদত্ত তথ্য ভেনচিত্রে নির্দেশ করা হল:



প্রশ্ন মতে, $20 - x + 15 - x = 15 \Rightarrow x = 10$

অন্তত একটি খেলা পছন্দকারির সেট = $F \cup C$

$\therefore$ অন্তত একটি খেলা পছন্দকারির সংখ্যা

$|F \cup C| = (20 - 10) + 10 + (15 - 10) = 25$

$\therefore$ দুইটি খেলাই পছন্দ করে না, এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা,

$y = 30 - 25 = 5$

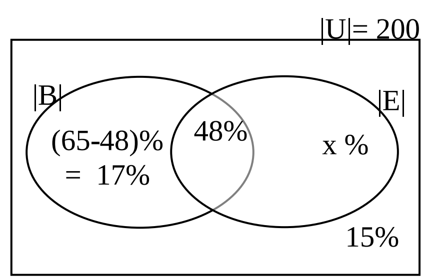
$\therefore$ 5 জন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে না।

উদাহরণ-৭: 200 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 65% শিক্ষার্থী বাংলায়, 48% শিক্ষার্থী বাংলা ও ইংরেজি উভয় বিষয়ে পাশ এবং 15% শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে।

(ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ কর।

(খ) শুধু বাংলায় ও ইংরেজিতে পাশ করেছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান:



(ক) বাংলায় পাশ শিক্ষার্থীর সেট B, ইংরেজিতে পাশ শিক্ষার্থীর সেট E এবং কেবল ইংরেজিতে পাশ $x\%$, এবং সার্বিক সেটকে U ধরে প্রদত্ত তথ্য ভেনচিত্রে নির্দেশ করা হল:

(খ) শুধু বাংলায় পাশ = বাংলায় পাশ – উভয় বিষয়ে পাশ = $65\% - 48\% = 17\%$

শুধু বাংলায় পাশের সংখ্যা = 200 **এর** $17\% = 34$

অপর দিকে $17\% + 48\% + x\% + 15\% = 100\%$

$\Rightarrow x\% = 100\% - 80\% = 20\%$;

$\therefore$ ইংরেজিতে পাশ $= x\% + 48\% = 20\% + 48\% = 68\%$

ইংরেজিতে পাশের সংখ্যা = 200 **এর** $68\% = 136$

উদাহরণ ৮: দেখাও যে, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A$ এবং $x \in (B \cup C)\} = \{x : x \in A$ এবং $(x \in B$ অথবা $x \in C)\}$

$= \{x : (x \in A$ এবং $x \in B)$ অথবা $(x \in A$ এবং $x \in C)\}$

$= \{x : x \in (A \cap B)$ অথবা $x \in (A \cap C)\}$

$= \{x : x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

উদাহরণ-৯: দেখাও যে, $A \subset B$ হবে যদি এবং কেবল যদি $A \cap B = A$ সত্য হয়।

$A \cap B = A$

$\Rightarrow A \cap B \subseteq A$ এবং $A \subseteq A \cap B$;

এখন, $A \subseteq A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \rightarrow x \in B$

$\Rightarrow A \subseteq B$;

বিপরীতক্রমে, $A \subseteq B$

$\Rightarrow x \in A \rightarrow x \in B$

$\Rightarrow x \in A \rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow A \subseteq A \cap B$; অপর দিকে $A \cap B \subseteq A$ একটি স্বতঃসিদ্ধ

$\Rightarrow A \cap B = A$; সুতরাং $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

যদি ও কেবল যদি অর্থে উভয় মুখি প্রমাণ আবশ্যক।
'যদি ও কেবল যদি' এর যৌক্তিক চিহ্ন '$\Leftrightarrow$';
'$\Rightarrow$' এবং '$\rightarrow$' দ্বারা একই অর্থ বোঝায়: 'যদি তবে';
'যদি (আগের উক্তি সত্য) তবে (পরের উক্তি সত্য)'

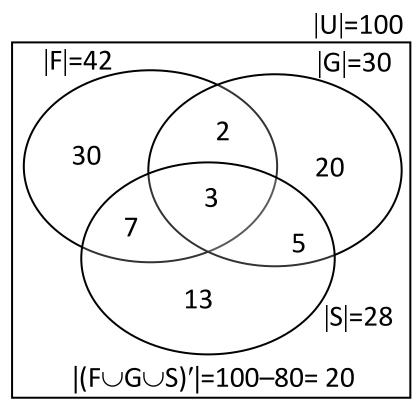
যুক্তিসহ লাইন থেকে লাইন আলাদা বোঝাতে '$\Rightarrow$' চিহ্ন এবং দুইটি উক্তিকে একই লাইনে যুক্ত রাখতে '$\rightarrow$' চিহ্ন ব্যবহৃত হয়।

উদাহরণ-১০: আধুনিক ভাষা ইনস্টিটিউটের 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 42 জন ফ্রেঞ্চ, 30 জন জার্মান, 28 জন স্প্যানিশ নিয়েছে। 10 জন নিয়েছে ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ, 8 জন নিয়েছে জার্মান ও স্প্যানিশ, 5 জন নিয়েছে জার্মান ও ফ্রেঞ্চ, 3 জন তিনটি ভাষাই নিয়েছে।

(i) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি ?

(ii) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে ?

(iii) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে?



সার্বিক সেট U; ফ্রেঞ্চ , জার্মান ও স্পেনিশ ভাষা নেওয়া শিক্ষার্থীর সেটকে যথাক্রমে F, G, S ধরে, তিনটি, দুইটি ও একটি ভাষা নেওয়া এবং কোন ভাষা না নেওয়া শিক্ষার্থীর সংখ্যা প্রদত্ত তথ্য অনুসারে ভেনচিত্রে দেখান হল:

[নির্দেশনা: প্রথমে তিন সেটের সাধারণ অংশের সংখ্যা 3 বসবে,
দ্বিতীয় ধাপে দুই সেটের সাধারণ সংখ্যার প্রতিটি থেকে 3 বাদ দিয়ে কেবল দুই সেটের সাধারণ অংশে বসবে।
তৃতীয় ধাপে কেবল এক সেটের অংশের সংখ্যা হিসাব করে নিয়ে বসবে যেন, প্রত্যেক সেটের চারটি করে নিশ্ছেদ এলাকার সমষ্টি নিজ নিজ সেটমাত্রার সমান হয়। অবশেষে সার্বিক সেটের সংখ্যা থেকে তিনটি সেটের ৭টি নিশ্ছেদ এলাকার সংখ্যার সমষ্টি বাদ দিয়ে সার্বিক সেটের নিশ্ছেদ এলাকায় বসবে।]

ভেনচিত্র থেকে দেখা যায়:

(i) তিনটির একটি ভাষাও নেয়নি 20 জন

(ii) কেবল একটি ভাষা নিয়েছে (30+20+13) = 63 জন

(iii) তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে (7+5+2) = 14 জন।

উদাহরণ-১১: যদি $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হয়, তবে দেখাও যে, $(A \times C) \subset (B \times D)$

প্রমাণ: যদি $A \subset B$ তবে $x \in A \Rightarrow x \in B$ এবং যদি $C \subset D$ তবে $y \in C \Rightarrow y \in D$;

ধরি, $(x,y) \in A \times C \Rightarrow x \in A$ এবং $y \in C \Rightarrow x \in B$ এবং $y \in D \Rightarrow (x,y) \in B \times D$;

$\therefore (A \times C) \subset (B \times D)$

উদাহরণ-১২:দেখাও যে, $A = \{1,2,3, ...,n\}$ এবং $B = \{1,2,2^2, ...,2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

$|A| = n$ এবং $|B| = |\{1,2, 2^2, ... 2^{n-1}\}| = |\{2^0, 2^1, 2^2, ... ,2^{n-1}\}| = n$; অর্থাৎ $|A| = n = |B|$

$\therefore$ A এবং B সমতুল।

উদাহরণ-১৩: দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সেট যদি S হয় তবে তা একটি অনন্ত সেট।

এখানে S এর উপাদানগুলো স্বাভাবিক সংখ্যা সেট N এর উপাদানের সাথে এক এক মিল হয়:

$S = \{1, 4, 9, 16, ... , n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, ...\}$

$\updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

$N = \{1, 2, 3, 4, ..., n, (n+1), (n+2), ...\}$

$\therefore S \leftrightarrow N$; আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N একটি অনন্ত সেট;

সুতরাং স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সেট $S = \{1, 4, 9, ... \}$ একটি অনন্ত সেট।

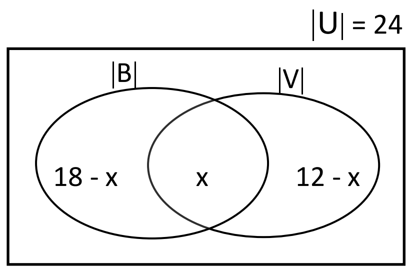
উদাহরণ ১৪: একটি শ্রেণিতে 24 জন ছাত্রী আছে। এদের মধ্যে 18 জন বাস্কেটবল এবং 12 জন ভলিবল খেলা পছন্দ করে। বাস্কেট বল খেলা পছন্দ কারির সেট B, ভলিবল খেলা পছন্দ কারির সেট V এবং উভয় খেলা পছন্দকারির সংখ্যা x হলে:

(a) ভেনচিত্রের মাধ্যমে প্রদত্ত তথ্য প্রকাশ কর এবং এ থেকে $|B\cup V|$ এর সাথে x এর সম্পর্ক দেখাও।

(b) x এর মান ন্যূনতম হওয়ার শর্ত কী? সম্ভাব্য ন্যূনতম মানটি নির্ণয় কর।

(c) x এর মান বৃহত্তম হওয়ার শর্ত কী? সম্ভাব্য বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর।

সমাধান:



(a) প্রদত্ত তথ্য ভেনচিত্রে প্রবাশ করা হল:

চিত্র থেকে $|B\cup V| = (18 - x) + x + (12 - x)$

$\Rightarrow |B\cup V| = 30 - x$

(b) x এর মান ন্যূনতম হওয়ার শর্ত হল: $B\cup V$ সেটের বাইরে কোন সদস্য না থাকা। অর্থাৎ $B\cup V = U$;

$B\cup V = U$

$\Rightarrow |B\cup V| = |U|$

$\Rightarrow (18 - x) + x + (12 - x) = 24$ [যেহেতু $|U| = 24$]

$\Rightarrow 30 - x = 24$

$\Rightarrow x = 6$

$\therefore$ সম্ভাব্য ন্যূনতম মান $x = 6$

(c) $|B\cap V| = x$ বৃহত্তম হয়, যখন ছোট মানের সেটটি বড় মানের সেটের উপসেট হয়; অর্থাৎ $V \subseteq B$ হয়,

তখন, $|B\cap V| = |V|$

$\Rightarrow x = 12$

$\therefore$ সম্ভাব্য বৃহত্তম মান $x = 12$

কর্মপত্র-১: প্রদত্ত সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

(i) $\{x \in N: x^2 > 9$ এবং $x^3 \leq 125\}$

(ii) $\{x \in N : x < 16$ এবং জোড় সংখ্যা$\}$

(iii) $\{x \in N: x > 19$ এবং x, 5 এর গুণিতক$\}$

কর্মপত্র-২

ক) যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 105 এবং 147 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 35 অবশিষ্ট থাকে, তাদের সেট নির্ণয় কর।

খ) $A = \{1, 2, 3\}, B = \emptyset$ হলে, $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় কর।

গ) $X = \{1,2, 3\}, \quad Y = \{4, 5, 6\}$ হলে, $X \cap Y$ নির্ণয় কর।

কর্মপত্র-৩

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, কে সার্বিক সেট বিবেচনা করে $B = \{a, c, e\}, \; C = \{b, d, f\}$ এবং $D = \{b, c, d, e\}$ এর জন্য নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর এবং (iii) নং সমতাটি প্রমাণ কর :

(i) $A - B$, (ii) $C - B$, (iii) $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$

কর্মপত্র-৪

(i) যদি $C = \{a, b, c\}$ হয়, তবে $P(C)$ নির্ণয় কর।

(ii) যদি $A = \{ a \}$ এবং $B = \{ 0 \}$ হয়, তবে $A \times B$ এবং $B \times A$ নির্ণয় কর।

(iii) যদি $A = \{a, b, c\}$ এবং $B = \{p, q \}$ হয়, তবে $A \times B$ এবং $B \times A$ নির্ণয় কর।

কর্মপত্র-৫ঃ বহু নির্বাচনী প্রশ্নঃ [সর্বাধিক প্রযোজ্য উত্তরের ক্রমিক বর্ণটিতে টিক চিহ্ন দাও।]

১) কোনটি ফাঁকা সেট?

(ক) $\{0\}$ (খ) $\{\emptyset\}$ (গ) $\{x \in N : 7 < x < 8\}$ (ঘ) $\{x \in N : 7 \leq x < 8\}$

২) যদি A^c পূরক সেট হয়, তবে এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $A \setminus C$ (খ) $C \setminus A$ (গ) $U \setminus A$ (ঘ) $A \setminus U$

৩) নিচের কোনটি অন্যগুলো থেকে ভিন্ন প্রকৃতির সেট?

(ক) শক্তি সেট (খ) সেট পরিবার (গ) বিভক্ত সেট (ঘ) যুক্ত সেট

৪) নিচের উক্তিসমূহ লক্ষ্য করঃ

i. স্বাভাবিক সংখ্যা সেট N একটি সসীম সেট।

ii. জোড় সংখ্যার সেট E একটি অসীম সেট।

iii. বিজোড় সংখ্যা সেট O একটি অসীম সেট।

উপরের উক্তিসমূহের সত্য-মিথ্যার আলোকে নিচের কোনটি সত্য?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

কর্ম পত্র-৬ঃ দেখাও যে, $A \subseteq B$ হবে, যদি এবং কেবল যদি, $A \cup B = B$ সত্য হয়। :

কর্মপত্র-৭ঃ (সৃজনশীল প্রশ্ন)ঃ

A সেটের উপাদান x দ্বারা 346 ও 454 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 22 অবশিষ্ট থাকে।

(ক) প্রদত্ত সংখ্যাদ্বয়ের নিকটতম কোন্ কোন্ সংখ্যাকে x দ্বারা ভাগ করলে অবশিষ্ট থাকবে না?

(খ) প্রদত্ত শর্তগুলোর গাণিতিক রূপ কী? এগুলো সমন্বয় করে A কে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

(গ) A সেটের তালিকা রূপ নির্ণয় কর ।

Ref: মাধ্যমিক গণিত, ৯ম-১০ম শ্রেণি, এনসিটিবি; ২. মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত, ৯ম-১০ম শ্রেণি, এনসিটিবি

৬.৩: অন্বয় ও ফাংশন

কার্তেসীয় গুণজ ও অন্বয় (Cartesian product and Relation):

ফরাসী গণিতবিদ রেনে দেকার্তে (Rene DesCarte) একটি তলকে পরস্পর লম্ব x-অক্ষ ও y-অক্ষ দ্বারা চিহ্নিত করে ঐ তলের যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করার জন্য সাধারণ ক্রমজোড় (x,y) ব্যবহার করেন, যার মাধ্যমে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি সৃষ্টি হয়। তাঁর নামানুসারে এরূপ ক্রমজোড়কে বলা হয় কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক। দুইটি সেটের গুণের মাধ্যমে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ন্যায় ক্রমজোড় পাওয়া যায়। তাই দুইটি সেটের এরূপ গুণফলকে কার্তেসীয় গুণজ বলা হয়। কার্তেসীয় ক্রমজোড় পেতে দুইটি অশূন্য সেটের মধ্যে গুণ প্রক্রিয়া সংঘটিত হতে হয়।

দুইটি সেটের গুণ হল প্রথম সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে দ্বিতীয় সেটের সকল উপাদানের সম্পর্ক গঠন। অতএব অন্বয় বা সম্পর্ক গঠিত হয় সেট থেকে সেটে। দুই বা ততোধিক সেটের কার্তেসীয় গুণজের যে কোন অশূন্য উপসেটকে অন্বয় বলা হয়।

A থেকে B তে কোন অন্বয়কে যদি R_r দ্বারা নির্দেশ করা হয় তবে, $R_r \subseteq A\times B$ এবং $R_r \neq \emptyset$; $A\times B$ নিজেও একটি অন্বয়; তবে এটি শর্তহীন অন্বয়।

কোন শর্ত আরোপ করে যদি গুণজ সেটের অশূন্য উপসেট গঠন করা হয়, তা হবে শর্ত সাপেক্ষ অন্বয়। শর্ত দেওয়া থাকলে, শর্ত জুড়ে দিয়ে সূত্র পদ্ধতিতে সেট প্রকাশ করা যায় অথবা শর্তানুসারে ক্রমজোড় নির্ণয করে তালিকা আকারেও সেট প্রকাশ করা হয়। আবার কখনো কোন শর্ত বিবেচনা না করে স্বাধীন ভাবে একটি অশূন্য উপসেট দেওয়া হতে পারে, তাও একটি অন্বয় বলে বিবেচিত হবে। ছক, তালিকা, গ্রাফ, সূত্র ইত্যাদি বিভিন্ন রূপে অন্বয় প্রকাশ করা যায়।

ধরি A থেকে B সেটে একটি অন্বয়ের প্রদত্ত শর্ত: $y = x$;

এর সূত্ররূপী অন্বয় হবে $R_1: A\to B,\ y = x$; এবং গঠন রূপী অন্বয় সেট হবে,

$R_1=\{(x,y) : x\in A,\ y\in B,\ y=x\}$ বা $\{(x,y) : (x,y)\in A\times B,\ y=x\}$ অথবা

$\{(x,y)\in A\times B :\ y=x\}$; এর যে কোন একটি রূপকে অন্বয় হিসাবে ব্যবহার করা যেতে পারে।

কতিপয় শর্ত সাপেক্ষে অন্বয়ের সূত্ররূপ, গঠনরূপ এবং তালিকা রূপ দেওয়া হল:

$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{3, 4\}$

সূত্র রূপী অন্বয়	সেট গঠন রূপী অন্বয়	তালিকা রূপী অন্বয়
$R_1: A\to B,\ y=x$	$\Rightarrow R_1=\{(x,y) : x\in A,\ y\in B,\ y=x\}$	$= \{(3,3)\}$
$R_2: A\to B,\ y=2x$	$\Rightarrow R_2=\{(x,y) : (x,y)\in A\times B,\ y=2x\}$	$= \{(2,4)\}$
$R_3: A\to B,\ y>x$	$\Rightarrow R_3=\{(x,y)\in A\times B :\ y>x\}$	$= \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$
$R_4: A\to B,\ y<x$	$\Rightarrow R_4=\{(x,y)\in A\times B :\ y<x\}$	$= \{\ \}$ [ফাঁকা সেট কোন অন্বয় নয়]
$R_5: A\to B,\ y\neq x$	$\Rightarrow R_5=\{(x,y)\in A\times B :\ y\neq x\}$	$= \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$
$R_6: A\to B,\ y=x^2$	$\Rightarrow R_6=\{(x,y)\in A\times B :\ y=x^2\}$	$= \{(2,4)\}$
$R_7: B\to A,\ y=x$	$\Rightarrow R_7=\{(x,y)\in B\times A :\ y=x\}$	$= \{(3,3)\}$
$R_8: B\to A,\ y=x-1$	$\Rightarrow R_8=\{(x,y) : x\in B,\ y\in A,\ y=x-1\}$	$= \{(3,2), (4,3)\}$
$R_9: B\to A,\ y=\frac{1}{2}x$	$\Rightarrow R_9=\{(x,y) : x\in B,\ y\in A,\ y=\frac{1}{2}x\}$	$= \{(4,2)\}$
$R_{10}: A\to B,\ y=x+2$	$\Rightarrow R_{10}=\{(x,y) : x\in A,\ y\in B,\ y=x+2\}$	$= \{(1,3), (2,4)\}$

এভাবে A ও B থেকে কয়টি অন্বয় গঠন করা যাবে? এখানে $A\times B$ এর উপাদান সংখ্যা $|A\times B| = |A| \times |B| = 3\times 2=6$, উপসেট সংখ্যা হবে $2^6=64$; অশূন্য উপসেট হবে 63টি। সুতরাং $A\to B$ অন্বয় হবে 63 টি এবং $B\to A$ হবে 63টি। অতএব এ দুটি সেট থেকে অন্বয় এবং বিপরীত অন্বয় মিলে মোট অন্বয় হবে 126টি।

ডমেন (Domain)**:** অন্বয় সেটের উপাদান বা ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে বলা হয় অন্বয়ের ডমেন। ডমেন সেটের উপাদানগুলো আসে কার্তেসীয় গুণজের প্রথম সেট থেকে। প্রথম সেটের যে কোন অশূন্য উপসেটই কোন না কোন অন্বয়ের ডমেন। উপরের অন্বয় গুলোতে,

ডমR_1 $=\{3\}$,ডমR_2 $=\{2\}$, ডমR_3 $=\{1, 2. 3\}$ইত্যাদি।

$A\times B$ এর কোন অশূন্য উপসেটকে যদি অন্বয় ধরা হয়, তবে ডমেন হবে A এর একটি অশূন্য উপসেট।

কোডমেন (Codomain)**:** অন্বয় সেটের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদান যে সেট থেকে আসে সে সেটকে বলা হয় কোডমেন। কার্তেসীয় গুণজের যে কোন উপসেট হতে পারে একটি অন্বয় এবং অন্বয়ের কোডমেন হল, সে গুণজের দ্বিতীয় সেট। $A\times B$ এর একটি উপসেট কে যদি অন্বয় ধরা হয় তবে কোডমেন হবে B; এবং $B\times A$ এর উপসেটকে যদি অন্বয় ধরা হয় তবে কোডমেন হবে A সেট।

অন্বয় $A\rightarrow B$ হলে, সে অন্বয়ের ডমেন হবে A এর উপসেট এবং কোডমেন হবে B সেট। অন্বয় $B\rightarrow A$ হলে ডমেন হবে B এর উপসেট এবং কোডমেন হবে A সেট।

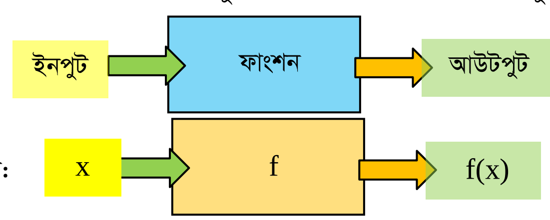
রেঞ্জ(Range)**:** অন্বয় সেটের ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদানের সেটকে বলা হয় রেঞ্জ। রেঞ্জের উপাদানকে বলা হয় ডমেনের সংশ্লিষ্ট উপাদানের ছবি। অতএব অন্বয়ের সকল ছবির সেটই হল রেঞ্জ। অন্বয়ের শর্ত অনুসারে সম্পূর্ণ কোডমেনও রেঞ্জ হতে পারে অথবা তার কোন অশূন্য উপসেট। উপরে প্রদত্ত অন্বয় সমূহে

রেঞ্জR_{10} $=\{3, 4\}\subset$ কোডমেন B, রেঞ্জR_6 $=\{\ 4\ \}\subset$ কোডমেন B

রেঞ্জR_9 $=\{\ 2\ \}\subset$ কোডমেন A ইত্যাদি। সাধারণ ভাবে রেঞ্জ $\subseteq$ কোডমেন।

অন্বয় ও ফাংশন: অন্বয়ের একটি বিশেষ রূপ হল ফাংশন। ফাংশনকে একটি মেশিনের সাথে তুলনা করা যায়, যার মধ্যে একটি ইনপুট এর জন্য একটিমাত্র আউটপুট পাওয়া যায়। একাধিক আউটপুট আসলে তা হবে অন্বয়।

প্রতীকীয় ভাবে:



- ক্রমজোড়ের সেটে কোন ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানটি যদি অন্য কোন ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হিসাবে না থাকে তবে এ অন্বয়টি হবে ফাংশন। একটি মাত্র ক্রমজোড় বিশিষ্ট সেট সর্বদাই ফাংশন।
- x ও y সংবলিত সূত্রে যদি x এর একটি মানের জন্য y এর একাধিক মান না আসে তবে এ সম্পর্কটি ফাংশন। কোন সমতায় y কে যদি একমাত্রিক রূপে নিয়ে x ও/বা ধ্রুব পদ সংবলিত একমানীয় (single valued) রাশিমালায় প্রকাশ করা যায় তবে এটি ফাংশন।
- একটি সেট থেকে অপর সেটে তীরচিহ্ন দ্বারা সম্পর্ক চিত্রণে প্রত্যেক প্রথম উপাদান থেকে যদি, কেবল একটি রেখা বের হয় তবে এ সম্পর্কটি একটি ফাংশন।
- কার্তেসীয় গ্রাফের ক্ষেত্রে যদি y অক্ষ বা তার কোন সমান্তরাল (অথবা x-অক্ষের উপর কোন লম্ব) রেখা গ্রাফটিকে কেবল মাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে তবে এটি ফাংশন।
- ক্রমিক সংখ্যা দ্বারা যদি কোন তালিকা প্রকাশ করা হয় তবে এটি ফাংশন। কারণ প্রথম উপাদান হিসাবে একটি ক্রমিক সংখ্যা একাধিকবার আসে না।
- ব্যক্তি-ব্যক্তি সম্পর্কে প্রথম ব্যক্তির সাথে কেবল একমাত্র ব্যক্তির সম্পর্ক নিশ্চিত হলে এটি ফাংশন।

[**বি : দ্র :** (১) কোনো ভগ্নাংশ ফাংশনের হর শূন্য হলে

(২) $\sqrt{ax-b}$ এরূপ বর্গমূলীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে $ax-b<0$ হলে, অথবা

(৩) $\log x$ বা $\ln x$ এর ক্ষেত্রে $x\le 0$ হলে, ফাংশনের বাস্তব মান পাওয়া যায় না।]

অন্বয়, ফাংশন ও গ্রাফ (Relation, function & graph):

অন্বয় অর্থ সম্পর্ক। গণিতে দুইটি চলের যেকোন রূপ সম্পর্ককে বলা হয় অন্বয়। সেট তত্ত্বে দুইটি সেটের কার্তেসীয় গুণজের যে কোন অশূন্য উপসেটকে বলা হয় অন্বয়। ক্রমজোড়ের যে কোন সেটই অন্বয়। অন্বয়ের একটি বিশেষ রূপ হল ফাংশন। ক্রমজোড়ের একটি প্রথম উপাদান যদি একটি মাত্র দ্বিতীয় উপাদানের সাথে সম্পর্কিত হয়, এরূপ সম্পর্ককে বলা হয় ফাংশন। ‘সকল ফাংশনই অন্বয়; কিন্তু সকল অন্বয় ফাংশন নয়’।

দ্বিচল সমীকরণ রূপী অন্বয় ও ফাংশন: সাধারণত x ও y কে যথাক্রমে স্বাধীন ও অধীন চল হিসাবে ধরা হয়। দুই চল বিশিষ্ট যেকোন সমীকরণই একটি অন্বয় প্রকাশ করে। নিঃসঙ্গ (সহগ এক এবং সূচক এক) অধীন চলকে যদি স্বাধীন চলের যেকোন মাত্রিক বহুপদী রূপে প্রকাশ করা যায় তবে অধীন চলটিকে বলা হয় স্বাধীন চলের ফাংশন।

$2x + 3y = 7$ একটি অন্বয় এবং $y = (7 – 2x)/3$ একটি ফাংশন। সাধারণভাবে, $y = f(x)$ ফাংশন নির্দেশ করে। যেমন, $y = 2x^2 +3x – 4$, একটি ফাংশন। $y^2 = 2x^2 +3x – 4$, কোন ফাংশন নয়, তবে অন্বয়। $x = 3$, একটি অন্বয়, কিন্তু ফাংশন নয়। $y = 3$ একটি অন্বয় এবং ফাংশন।

অব্যাক্ত ও ব্যাক্ত ফাংশন (Implicit and Explicit Function): x ও y এর সমন্বয়ে গঠিত সমীকরণ একটি অব্যাক্ত ফাংশন নির্দেশ করেঃ $2x + 3y = 7$

এক মাত্রিক ও একক সহগ বিশিষ্ট নিসঙ্গ y কে x এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হলে, তা হয় ব্যক্ত ফাংশন :

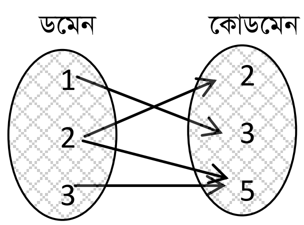
$y = (7 – 2x)/3$ বা $f(x) = (7 – 2x)/3$

ক্রমজোড় রূপী অন্বয় ও ফাংশন : একটি সেটের সকল উপাদান ক্রমজোড় হলে একটি অন্বয় নির্দেশ করে। কোন ক্রমজোড়েরর প্রথম উপাদান অন্য কোন ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান না হলে এ অন্বয়টি হবে ফাংশন। একই কারণে একটি মাত্র ক্রমজোড়ের সেট সর্বদাই ফাংশন।

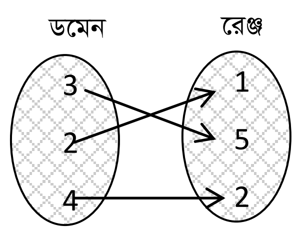
$\{(2,3), (2,5), (3,4)\}$ এ সেটটি একটি অন্বয় কিন্তু ফাংশন নয়। কারণ, একটি প্রথম উপাদান 2 একাধিক ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হিসাবে আছে।

$\{(2,3), (5,2), (3,4)\}$ এটি ফাংশন; এর কোন প্রথম উপাদান একাধিক ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান নয়।

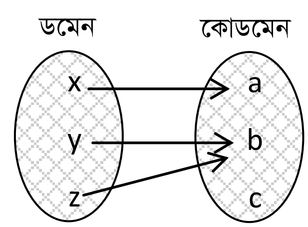
চিত্রণ রূপী অন্বয় ও ফাংশন : ডমেনের কোন উপাদানে একাধিক দাগ পড়লে ফাংশন নয়; কেবল অন্বয়। ডমেনের প্রত্যেক উপাদানে কেবল একটি করে দাগ পড়লে সে অন্বয়টি হয় ফাংশন।



অন্বয়



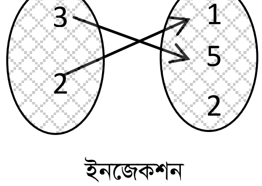
এক-এক অন্টু ফাংশন



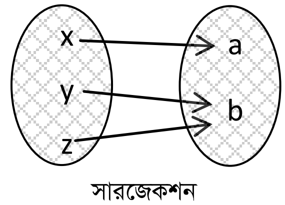
বহু-এক ইন্টু ফাংশন

কোডমেনের কোন উপাদান চিত্রণ থেকে বাদ পড়তে পারে বা একই উপাদানে একাধিক দাগ পড়তে পারে। কোন ফাংশনে কোডমেনের সকল উপাদান চিত্রণভুক্ত হলে তাকে অন্টু বা উপর ফাংশন এবং কোন উপাদান বাদ পড়লে তাকে ইন্টু বা ভেতর ফাংশন বলে। কোডমেনের চিত্রণভুক্ত উপাদানের সেটকে রেঞ্জ বলে। ডমেনের প্রত্যেক উপাদানের সাথে কোডমেনের কেবল একটি করে উপাদান চিত্রণভুক্ত হলে তাকে এক-এক ফাংশন বলে।

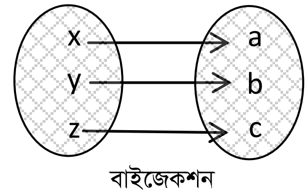
ইনজেক্টিভ, সার্জেক্টিভ ও বাইজেক্টিভ ফাংশন : ডমেনের প্রত্যেক উপাদানের জন্য কোডমেনে কেবল একটি করে ছবি থাকলে তা ইনজেকটিভ ফাংশন। ইনজেকটিভ ফাংশনের অপর নাম এক-এক ফাংশন। কোডমেনের সকল উপাদান ছবি হলে তা সারজেকটিভ ফাংশন। অন্টু ফাংশনই সার্জেকটিভ ফাংশন বা সার্বিক ফাংশন। যে ফাংশন এক-এক এবং অন্টু তাকেই বলে বাইজেকটিভ ফাংশন। বাইজেকটিভ ফাংশনকে সংক্ষেপে বলা হয় বাইজেকশন। তদ্রূপ ইনজেকশন ও সারজেকশন।



ইনজেকশন

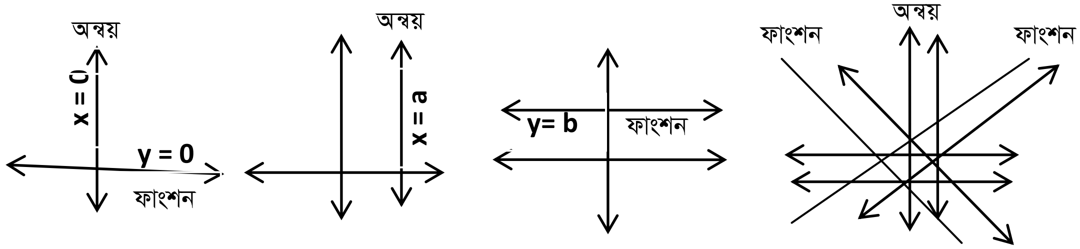


সারজেকশন

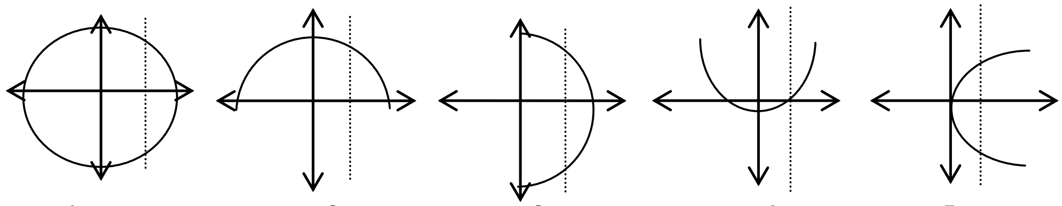


বাইজেকশন

লেখরূপী অন্বয় ও ফাংশন: x-অক্ষ বা তার সমান্তরাল যে কোন রেখা বা রেখাংশই ফাংশন। y-অক্ষ বা তার সমান্তরাল কোন রেখা বা রেখাংশই অফাংশন অন্বয়। কার্তেসীয় তলে, y-অক্ষ বা তার সমান্তরাল রেখা ব্যতীত সকল সরল রেখা বা রেখাংশই ফাংশন।



একটি অন্বয় সমীকরণের লেখ বা গ্রাফ সরল বা বক্র হতে পারে। দুই চল বিশিষ্ট একমাত্রিক সমীকরণের রেখা সরল হয় এবং চলের একাধিক মাত্রার সমীকরণের রেখা সাধারণত বক্র হয়। রেখা সরল বক্র যাই হোক, x-অক্ষের উপর লম্ব কোন রেখা যদি অন্বয়ের গ্রাফকে একমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে সে গ্রাফ একটি ফাংশন। কিন্তু, একাধিক বিন্দুতে ছেদ করলে তা ফাংশন নয়; কেবলই অন্বয়। এই একই কারণে বৃত্ত, উপবৃত্ত ইত্যাদি আবদ্ধ বক্ররেখা সর্বদাই কেবল অন্বয়, ফাংশন নয়। নিচের গ্রাফ সমূহের মধ্যে অন্বয় ও ফাংশন সনাক্ত করতে পারি:



1 2 3 4 5

এখানে পাঁচটি চিত্রই অন্বয় নির্দেশ করে; এর মধ্যে 2 ও 4 নং চিত্রে **y** অক্ষ বা তার সমান্তরাল (অথবা x-অক্ষের উপর লম্ব) কোন রেখা গ্রাফ রেখাকে কেবল এক বিন্দুতে ছেদ করে। তাই এ দুটো ফাংশন।

বিদ্যালয় ভিত্তিক অন্বয় ও ফাংশন: বিদ্যালয়-প্রধান শিক্ষক সম্পর্কটি একটি ফাংশন। কারণ একটি বিদ্যালয়ের একাধিক প্রধান শিক্ষক থাকেন না। কিন্তু বিদ্যালয়-শিক্ষক সম্পর্কটি একটি অন্বয়। কারণ, একটি বিদ্যালয়ের একাধিক শিক্ষক থাকেন।

একটি শ্রেণিকক্ষে যখন একজন শিক্ষক থাকেন তখন শিক্ষার্থী-শিক্ষক সম্পর্কটি ফাংশন কিন্তু, শিক্ষক-শিক্ষার্থী সম্পর্কটি ফাংশন নয়। তবে হ্যাঁ, শিক্ষক-শিক্ষার্থী সম্পর্কটি ফাংশন হতে পারে যদি শ্রেণিতে একজনমাত্র শিক্ষার্থী থাকে।

শ্রেণীতে রোল নম্বর–শিক্ষার্থী সম্পর্কটি ফাংশন। কারণ একটি রোল নম্বর ধরে ডাকা হলে, কেবল সে রোল নম্বর ধারী শিক্ষার্থীই জবাব দেবে অন্য কেউ নয়। অর্থাৎ একটি রোল নম্বরে কেবল একজন শিক্ষার্থীই থাকে।

বন্ধু বা সহপাঠী সম্পর্ক সাধারণত ফাংশন হয় না। তার কারণ পাঠক নিজেই ব্যাখ্যা করতে পারেন।

পরিবার বা আত্মীয়তা ভিত্তিক অন্বয় ও ফাংশন: মা সম্পর্কটি ফাংশন, বাবা সম্পর্কটি ফাংশন। কারণ সন্তান সংখ্যা যতই হোক, মা অথবা বাবা অনন্য হয়। কিন্তু মাতা-সন্তান অথবা পিতা-সন্তান অর্থাৎ সন্তান সম্পর্কটি সাধারণ ভাবে ফাংশন নয়; তবে শর্ত সাপেক্ষে ফাংশন হতে পারে। যদি মায়ের বা বাবার একমাত্র সন্তান থাকে, সে ক্ষেত্রে মা-সন্তান সম্পর্কটি অথবা বাবা-সন্তান সম্পর্কটি ফাংশন হবে।

সমতা বা অসমতা দেখে অন্বয় ও ফাংশন চেনার উপায়: দুই চল বিশিষ্ট সমতা বা অসমতা অন্বয় নির্দেশ করে। অধীন চল y কে একমাত্রিক আকারে নিয়ে স্বাধীন চল x এর এক বা একাধিক মাত্রার বহুপদীর সমান হিসাবে প্রকাশ করা গেলে, তা হবে ফাংশন। দুই চল বিশিষ্ট অসমতা সর্বদাই অফাংশন অন্বয়।

লেখ দেখে অন্বয় ও ফাংশন চেনার উপায়: y-অক্ষ বা তার কোন সমান্তরাল রেখা অঙ্কিত গ্রাফকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করলে এটি অফাংশন অন্বয়। y-অক্ষ বা তার কোন সমান্তরাল রেখা আবদ্ধ বক্রকে কমপক্ষে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। তাই আবদ্ধ বক্ররেখা ফাংশন নয়। একই কারণে বৃত্ত এবং উপবৃত্তও অন্বয় । ফাংশন ও অন্বয়ের পার্থক্য নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অন্বয় বলতে আমরা অফাংশন অন্বয়ই বুঝব।

পরাবলয়(parabola) আবদ্ধ বক্র নয়। তাই পরাবলয় অন্বয়টি শর্ত সাপেক্ষে ফাংশন হতে পারে। x-অক্ষের উপর লম্ব কোন রেখা পরাবলয়ের প্রতিসাম্য অক্ষ হলে তা হবে ফাংশন। এ ছাড়া অন্য সকল পরাবলয়ই অন্বয়।

উদাহরণ-১ একটি দ্বিচল দ্বিঘাত সমীকরণ: $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$

ক) সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ আকারে প্রকাশ কর এবং a ও b এর মান নির্ধারণ কর।

খ) এটি কী ধরনের চিত্র নির্দেশ করে? এর কেন্দ্র এবং অক্ষ সম্পর্কিত তথ্য সনাক্ত কর। এটি কি ফাংশন?

গ) সমীকরণ থেকে (a,0), (-a,0), (0,b), (0,-b) বিন্দুসমূহ নির্ধারণ কর এবং মুক্ত হস্তে গ্রাফ অঙ্কন কর।

সমাধান: ক) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12$

$$\Rightarrow \frac{3x^2}{12} + \frac{4y^2}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1; \qquad \text{এখানে, } a = 4 \text{ এবং } b = 3$$

খ) দ্বিচল দ্বিঘাত সমীকরণে x^2 ও y^2এর সহগ অসমান হলে এবং xy বিশিষ্ট পদ না থাকলে তা উপবৃত্তের সমীকরণ। অতএব এটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

সমীকরণটিতে একমাত্রিক x বা y বিশিষ্ট পদ না থাকায় উপবৃত্তটির কেন্দ্র হবে মূলবিন্দু O(0,0)।

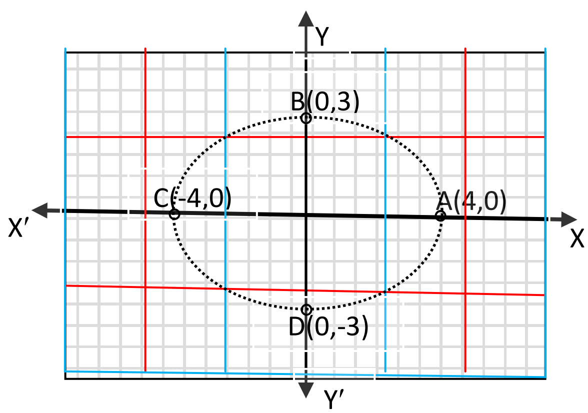
- গ্রাফের x-অক্ষ বরাবর উপবৃত্তটির বড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 2a = 2.4 = 8 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট অক্ষের দৈর্ঘ্য 2b = 2.3 = 6 একক।
- দুই চল বিশিষ্ট সমীকরণ সর্বদাই একটি অন্বয় নির্দেশ করে। এখানে অধীন চল দ্বিমাত্রিক y^2 আকারে আছে। সমীকরণটিকে y এর মান পাওয়ার জন্য সরল করা হলে, বর্গমূল হিসাবে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুইটি মান আসবে। x এর একটি মানের জন্য y এর একাধিক মান পাওয়া গেলে তা ফাংশন নয়। অতএব প্রদত্ত সমীকরণ একটি অফাংশন অন্বয় (nonfunctional relation)।

গ) ক এ গঠিত ছেদাংশ

সমীকরণ থেকে a ও b এর মান নির্ণীত হয়েছে: a = 4, b = 3

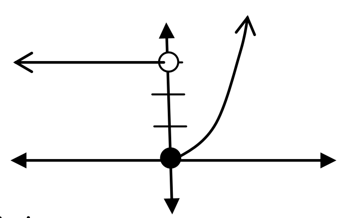
অতএব (a,0), (-a,0), (0,b), (0,-b) বিন্দু সমূহ যথাক্রমে (4,0), (-4,0), (0,3), (0,-3);

ছোট বর্গের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য সমান একক নিয়ে বিন্দু সমূহ স্থাপন করে মুক্ত হস্তে ABCDA উপবৃত্তটি অঙ্কিত হল।



খন্ড ফাংশন (Piecewise function): একটি ত্রিখন্ড ফাংশনের সূত্র ও তার গ্রাফ দেওয়া হল

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$



ফ্লোর ফাংশন ও রুফ ফাংশন: কোন ভগ্নাংশের ঠিক নিচের পূর্ণসংখ্যা গ্রহণ করা হল ফ্লোর ফাংশন এবং কোন ভগ্নাংশের ঠিক উপরের পূর্ণসংখ্যা লওয়া হল রুফ ফাংশন:

$\lfloor 2.64 \rfloor = 2$ একটি ফ্লোর ফাংশন এবং $\lceil 3.2 \rceil = 4$ একটি রুফ পাংশন।

উৎপাদকীয় বা ফ্যাক্টরিয়েল ফাংশন: $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

সাধারণ ভাবে $n! = n(n - 1)(n - 2) \ldots 3\times2\times1$

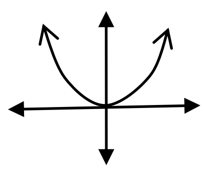
পরমমান ফাংশন: কোন রাশির ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত মানের মধ্যে বৃহত্তর মান লওয়াই পরমমান ফাংশন:

$|\pm 3| = 3, |-4| = 4, |5| = 5;$

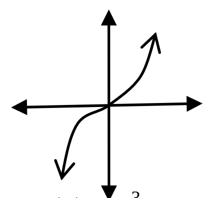
কোন চল রাশির বর্গের বর্গমূলই পরমমান: $\sqrt{x^2} = |x|$

পরমমান ফাংশনের সাধারণ সূত্র: $|x| = x$, যখন $x \geq 0$; এবং $|x| = -x$, যখন $x < 0$

বর্গ ফাংশন ও ঘন ফাংশন : বর্গ বা ঘন ফাংশনের গ্রাফ হয় বক্ররেখা:



$f(x) = x^2$



$g(x) = x^3$

এখানে , $f : R \to R^+ \Rightarrow$ ডম $f = R = \{x : x \in R\}$ এবং রেঞ্জ $f = R^+ = \{x \in R : x \geq 0\}$

এবং $g : R \to R \Rightarrow$ ডম $g =$ কোডম $g =$ রেঞ্জ $g = R$

কম্পোজিট ফাংশন বা ফাংশনের ফাংশন

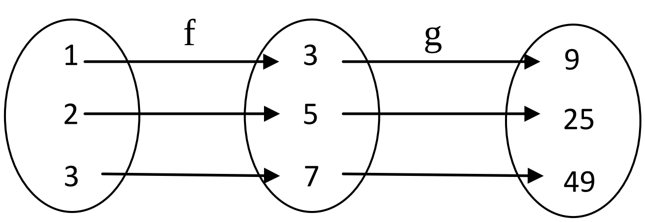
একটি ফাংশনের ইনপুট বা আর্গুমেন্ট হিসাবে যখন x এর বদলে অপর একটি ফাংশন ব্যবহৃত হয়, তখন তাকে কম্পোজিট ফাংশন বা ফাংশনের ফাংশন বলে। কম্পোজিট ফাংশনের ক্রমের পার্থক্যের কারণে সাধারণত ফলের পার্থক্য হয়। কম্পোজিট ফাংশনকে গুণ ফাংশনও বলা হয়।

$f(x) = 2x + 1$ এবং $g(x) = x^2$ হলে, এ দুই ফাংশনের ক্রমিক গুণ বা যৌথ অপারেশন

$(f \circ g)(x) \Rightarrow f(g(x)) = f(x^2) = 2(x^2) + 1 = 2x^2 + 1;$

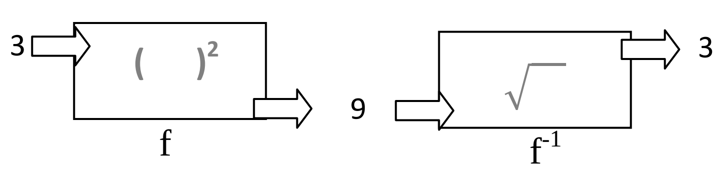
$(g \circ f)(x) \Rightarrow g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1;$

$f(g(x)) = x = g(f(x))$ হলে, $f(x)$ এবং $g(x)$ পরস্পর বিপরীত ফাংশন।



f o g

বিপরীত ফাংশন (Inverse function): মূল ফাংশনের আউটপুটকে ইনপুট হিসাবে নিয়ে অপর কোন ফাংশন যদি তার আউটপুট হিসাবে মূল ইনপুটটি ফিরিয়ে দেয়, তখন তারা পরস্পর বিপরীত ফাংশন। মূল ফাংশনের রেঞ্জ হয় বিপরীত ফাংশনের ডমেন এবং ডমেন হয় রেঞ্জ। বাইজেকটিভ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন হয়।



$f(x)$ দ্বারা চিহ্নিত ফাংশনের বিপরীত ফাংশনের চিহ্ন $f^{-1}(x)$;

ক্রমজোড়ের ফাংশনে ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানকে দ্বিতীয় স্থানে এবং দ্বিতীয় উপাদানকে প্রথম স্থানে নিয়ে বিপরীত ফাংশন পাওয়া যায়। $G = \{(2,3),(4,5),(1,1)\} \Rightarrow G^{-1} = \{(3,2),(5,4),(1,1)\}$

সূত্রদ্বারা নির্দেশিত ফাংশনের কার্যবিধি ক্রমের বিপরীতায়ন করে বিপরীত ফাংশন পাওয়া যায়:

$f(x) = 2x + 1$; এ ফাংশনে কার্যবিধির ক্রম হল: x কে 2 দ্বারা গুণ করে 1 যোগ।

$\therefore$ বিপরীত ফাংশনে কার্যবিধিক্রম হবে : x থেকে 1 বিয়োগ করে 2 দ্বারা ভাগ $\Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)/2$

সূত্রগঠিত ফাংশনে সাধারণভাবে $f(x)$ এর স্থলে x এবং x এর স্থলে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে বিপরীত ফাংশন পাওয়া যায়:

$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow x = 2f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)/2$

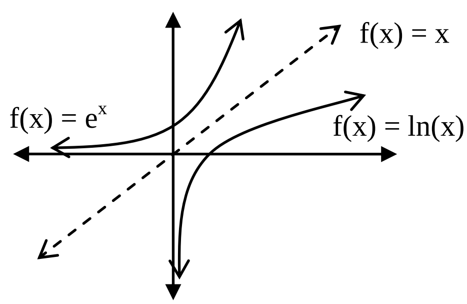
তাপমাত্রার সেলসিয়াস ও ফারেনহাইট স্কেল সম্পর্কিত ফাংশন :

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ এবং $F = \frac{9}{5}C + 32$; এ দুটি ফাংশন পরস্পর বিপরীত ফাংশন।

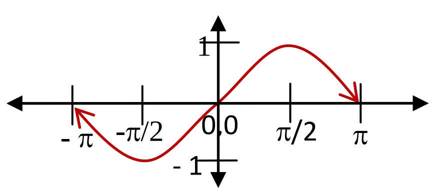
সূচকীয় ফাংশন ও লগ ফাংশন: $f(x) = a^x$, $a > 0$ একটি সাধারণ ভিত্তি বিশিষ্ট সূচকীয় ফাংশন। 2^x, 10^x , e^x ইত্যাদি বিশেষ বিশেষ সূচকীয় ফাংশন। সূচকীয় ফাংশনের বিপরীত ফাংশন হল লগ ফাংশন। দুইটি পরস্পর বিপরীত ফাংশন, $f(x) = x$ রেখার উভয় পাশে প্রতিসম হয়। সচরাচর ব্যবহৃত লগ ফাংশন হল e ভিত্তিক $\ln(x)$ এবং দশ ভিত্তিক $\log(x)$

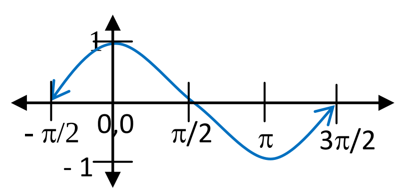
সাধারণ সূচকীয় ফাংশনের ডমেন $= R$ এবং রেঞ্জ $= R_+ = \{x \in R : x > 0\}$

সাধারণ লগ ফাংশনের ডমেন $= R_+$ এবং রেঞ্জ $= R$



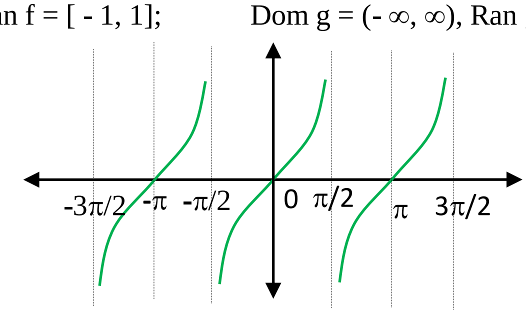
ত্রিকোণমিতিক ফাংশন: ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের কয়েকটি গ্রাফ দেওয়া হল:





$f(x) = \sin x$ $\qquad$ $g(x) = \cos x$

Dom $f = (-\infty, \infty)$, Ran $f = [-1, 1]$; $\qquad$ Dom $g = (-\infty, \infty)$, Ran $g = [-1, 1]$;



$h(x) = \tan x$

Dom $h = \{x \in R: x \neq n\pi/2, n \in O \text{ (odd)}\}$, $\quad$ Ran $h = (-\infty, \infty)$;

এগুলো পিরিওডিক বা পর্যায়ভিত্তিক ফাংশন। এখানে প্রথম দুইটি ফাংশন ঢেউ এর আকারে অবিচ্ছিন্নভাবে (continuous) উভয় দিকে চলমান; তবে পার্থক্য হল, সাইন ফাংশন মূলবিন্দুগামী এবং কোসাইন ফাংশন মূলবিন্দুর এক একক উপরদিয়ে প্রবাহিত। (phase difference $\pi/2$)। ট্যান ফাংশনের গ্রাফ বক্ররেখা যা পর্যায়েক্রমে বিচ্ছিন্ন বা খন্ডিত; একটা পর্যায় পর পর অধীন চলের বাস্তব মান পাওয়া যায় না।

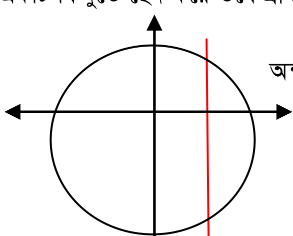
ফাংশন ও অন্বয় চেনার উপায়

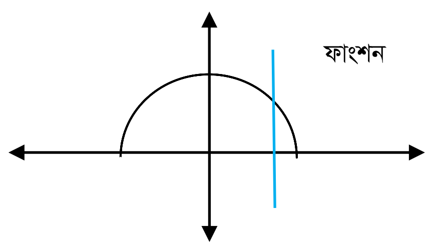
ক্রমজোড়ের মাধ্যমে: ক্রমজোড়ের সেটের কোন প্রথম উপাদান যদি একাধিকবার না থাকে সেই ক্রমজোড়ের সেট একটি ফাংশন। অন্যথায় ক্রমজোড়ের সেটটি হবে অন্বয়। তবে সকল ফাংশনই অন্বয় কিন্তু সকল অন্বয় ফাংশন নয়। প্রথম উপাদানের সেট ডমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানের সেট হল রেঞ্জ।

চিত্রণের মাধ্যমে: একটি সেটের ভেন চিত্রের প্রত্যেক উপাদান থেকে যদি কেবল একটি করে তীর চিহ্নিত রেখা অপর সেটের কোন না কোন উপাদানের সাথে সম্পর্কিত হয়, তবে সে চিত্রণ একটি ফাংশন। তবে কোন উপাদান থেকে যদি একাধিক রেখা বের হয়ে অপর সেটের কোন উপাদানের সাথে সম্পর্কিত হয় সেই চিত্রণ ফাংশন নয়; কেবলই অন্বয়।

সূত্রের মাধ্যমে: কোন সম্পর্ক F(x) যদি এমনভাবে দেওয়া থাকে যে, ডমেনভুক্ত x এর প্রতিটি মানের জন্য F(x) এর একটি এবং কেবল একটি করেই মান পাওয়া যায়, তখন ঐ সূত্র একটি ফাংশন। যেমন: F(x)=2x-1 একটি ফাংশন; কিন্তু F(x)= $\pm\sqrt{2x-1}$ একটি অন্বয়।

গ্রাফের সাহায্যে: x-অক্ষ ও y-অক্ষ বিশিষ্ট কার্তেসীয় গ্রাফ যদি এমন হয় যে, x-অক্ষের উপর লম্ব কোন রেখা গ্রাফটিকে কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে তবে গ্রাফটি একটি ফাংশন; আর একাধিক বিন্দুতে ছেদ করলে গ্রাফটি একটি অন্বয়। যেমন:





ডমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: ক্রমজোড় দিয়ে যদি অন্বয়/ফাংশন দেওয়া থাকে আমরা পর্যবেক্ষণের মাধ্যমেই ডমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারি ।

সূত্রগঠিত অন্বয় বা ফাংশনের ডমেন সেটের তালিকারূপ বা ব্যবধিরূপ দেওয়া থাকলে এ থেকে চলের এক একটি মান সূত্রে বসিয়ে F(x) বা y এর মান নির্ধারণ করে রেঞ্জ সেট নির্ধারণ করা যায়।

উদাহরণ-১

i) F(x) = 2x-1, ডম F = {-1,0,1,2} হলে, ডমেনের প্রত্যেক উপাদানের ছবি হবে

F(-1)=2(-1) -1= -3, F(0) = 2.0 -1= -1, F(1) = 2.1-1= 1, F(2) = 2.2-1= 3

$\therefore$ রেঞ্জ F = {-3,-1,1,3} হবে।

ii) F(x) = $\frac{1}{x-2}$, যখন ডম F = $\{x \in Z : -1 \leq x < 2\}$

এখানে ডমেন সেটের তালিকা রূপ হবে {-1,0,1} ।

রেঞ্জ F এর উপাদান হবে ডমেনের উপাদান গুলোর ছবি যা প্রদত্ত সূত্রে বসিয়ে পাওয়া যাবে:

F (-1) = $\frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$, F (0) = $\frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$, F (1) = $\frac{1}{1-2}$ = -1

$\therefore$ রেঞ্জ F = { $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, -1}

অনুল্লেখিত ডমেন : সূত্রের মাধ্যমে প্রদত্ত অন্বয় বা ফাংশনে যদি নির্দিষ্ট ডমেন উল্লেখ করা না থাকে, তবে বাস্তব সংখ্যা সেট R কে ডমেন ধরা হয়, R এর যে যে সদস্যের জন্য অন্বয়ের কোন ছবি পাওয়া যাবে না, সেসব বাস্তব সংখ্যা ডমেন থেকে বাদ যাবে।

উদাহরণ-২ প্রদত্ত ফাংশনের ডমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর:

i) $F(x)= \frac{1}{x-2}$,

$F(x) \in R \Rightarrow \frac{1}{x-2} \in R \Rightarrow x\in R : x \neq 2;$ $\therefore$ Dom $F=\{x\in R: x \neq 2\}$ বা $R\backslash\{2\}$

রেঞ্জ নির্ণয়: $F(x) = y$ ধরে; $y = \frac{1}{x-2} \Rightarrow x-2 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = 2+\frac{1}{y}$

$\therefore x\in R \Rightarrow y\in R: y \neq 0$; $\therefore$ Ran $F=\{y\in R: y \neq 0\} \Rightarrow \{x\in R: x \neq 0\}$ বা $R\backslash\{0\}$

ii) $F(x)=\sqrt{x-1}$

x এর উপর প্রদত্ত বা প্রাপ্ত শর্ত প্রয়োগ করে y এর শর্ত নির্ণয় হয়, পরে y কে x এ প্রকাশ করা হয়।

$F(x) \in R \Rightarrow \sqrt{x-1} \in R \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$\therefore$ Dom $F= \{x\in R: x \geq 1\}$;

যখন $x >1$, $F(x) > 0$; যখন $x =1$, $y = F(x) = 0$,

$\therefore$ Ran $F = \{ y\in R : y \geq 0\}$ অর্থাৎ $\{x\in R : x \geq 0\}$ বা R^+

iii) $F(x) = ln(1- x)$

$F(x) = ln(1 - x) = \log_e(1 - x)$

$F(x)\in R \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow 1> x \Rightarrow x < 1$

$\therefore$ Dom $F= \{x\in R : x < 1\}$

$x < 1 \Rightarrow 1> x \Rightarrow 1- x > 0 \Rightarrow \log_e (1-x) \in R \Rightarrow F(x) \in R$

$\therefore$ Ran $F = R$

এক-এক ফাংশন: যদি A সেটের একটি উপাদানের সাথে B সেটের একটি এবং কেবল একটি উপাদানের মিল থাকে তাকে এক এক ফাংশন বলে। **অথবা**

x এর একটি মানের জন্য যদি f(x) এর কেবল একটি মান পাওয়া যায় তবে তাকে এক-এক ফাংশন বলে।

ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন হলে, সম্পর্কটি হয় ফাংশন এবং ফাংশনের ক্রমজোড়ে দ্বিতীয় উপাদান ভিন্ন ভিন্ন হলে, ফাংশনটি হয় এক-এক ফাংশন বা ইনজেকটিভ ফাংশন।

ফাংশনের এক-এক মিল যাচাই:

f(x)ফাংশনটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণের জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ ধরে, কেবল যদি $x_1 = x_2$ পাওয়া যায়, তবেই ফাংশনটি এক-এক হবে। :

উদাহরণ-৩ $f(x) =|x-3|$ এর এক এক সম্পর্ক যাচাই কর:

ধরি, $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow |x_1-3| = |x_2-3|$

$\Rightarrow \sqrt{(x_1-3)^2} = \sqrt{(x_2-3)^2}$ [পরমমানের বর্গমূলীয় রূপ]

$\Rightarrow (x_1-3)^2 = (x_2-3)^2$

$\Rightarrow x_1-3 = \pm(x_2-3) \Rightarrow x_1 = 3 \pm (x_2-3)$;

$\therefore$ f এক এক নয়।

বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

x কে y এর মাধ্যমে প্রকাশ করে x এর স্থলে $f^{-1}(x)$ এবং y স্থলে x বসালে বিপরীত ফাংশন নির্ণীত হয়।

উদাহরণ-৪: (ক) $f(x) = 2x-1$

ধরি $f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$f(x) = y$

$\Rightarrow$ 2x-1= y

$\Rightarrow 2x = y+1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

(খ) $f(x) = \frac{3}{x-1}, x \neq 1 \Rightarrow x - 1 = \frac{3}{f(x)} \Rightarrow x = 1+ \frac{3}{f(x)} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{x} +1, x \neq 0$

(গ) $f : x \rightarrow \frac{2x-3}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy - y = 2x - 3 \Rightarrow 2x(y - 1) = y - 3$

$\Rightarrow x = \frac{y-3}{2(y-1)} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2(x-1)}, x \neq 1 \Rightarrow f^{-1} : x \rightarrow \frac{x-3}{2(x-1)}, x \neq 1$

উদাহরণ-৫ নিচের ফাংশনের বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর:

(ক) $f(x) = \frac{3}{x-1}, x \neq 1 \Rightarrow y = \frac{3}{x-1} \Rightarrow x - 1= \frac{3}{y} \Rightarrow x = 1+ \frac{3}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{x} +1, x \neq 0$

(খ) $f : x \rightarrow \frac{2x-3}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy - y = 2x - 3 \Rightarrow 2x(y - 1) = y - 3$

$\Rightarrow x = \frac{y-3}{2(y-1)} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2(x-1)}, x \neq 1 \Rightarrow f^{-1} : x \rightarrow \frac{x-3}{2(x-1)}, x \neq 1$

উদাহরণ-৬ $f(x) = \frac{4x-9}{x-2}$, একটি ফাংশন: (সৃজনশীল প্রশ্ন)

(ক) ফাংশনের বিপরীত ফাংশন থাকার শর্ত কী এবং প্রদত্ত ফাংশনের ডমেন কী হবে?

(খ) প্রদত্ত ফাংশন থেকে বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর এবং $f^{-1}(-1)$ ও $f^{-1}(1)$ নির্ণয় কর।

(গ) $f^{-1}(x) = x$ হলে, ডম f^{-1} এবং রেঞ্জ f^{-1} নির্ণয় কর।

সমাধান :

(ক) কোন ফাংশন এক-এক এবং অন্টু হলে তার বিপরীত ফাংশন থাকবে।

ফাংশনটি x = 2 ছাড়া সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত $\Rightarrow$ ডম $f = \{x \in R : x \neq 2\}$ বা $R \backslash \{2\}$

(খ) ধরি, $y = f(x) \Rightarrow y = \frac{4x-9}{x-2}$

$\Rightarrow xy - 4x = 2y - 9 \Rightarrow x(y - 4) = 2y - 9 \Rightarrow x = (2y - 9)/(y - 4)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = (2x - 9)/(x - 4), \ x \neq 4;$

এবং $f^{-1}(-1) = (-2 - 9)/(-1 - 4) = 11/5$ এবং $f^{-1}(1) = (2 - 9)/(1 - 4) = 7/3$

(গ) $f^{-1}(x) = x$

$\Rightarrow (2x - 9)/(x - 4) = x$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 2x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 3;$ এবং যেহেতু $f^{-1}(x) = x \Rightarrow f^{-1}(x) = 3$; $\therefore$ ডম $f^{-1} = \{ 3 \}$ এবং রেঞ্জ$f^{-1} = \{ 3 \}$

উদাহরণ-৭ (a) $f : \{-2, -1,0,1,2\} \rightarrow \{-8, -1,0,1,8\}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, দেখাও যে, f এক-এক অন্টু ফাংশন ।

এখানে, $f(-2) = (-2)^3= -8,$ $f(-1) = (-1)^3= -1,$ $f(0) = (0)^3= 0,$
$f(1) = (1)^3= 1,$ $f(2) = (2)^3= 8,$

ডমেনের প্রত্যেক উপাদানের জন্য কোডমেনে কেবল একটি করে ইমেজ আছে (এক-এক হওয়ার শর্ত) এবং কোডমেনের প্রত্যেক উপাদনের জন্য ডমেনে একটি করে উপাদান আছে (অন্টু হওয়ার শর্ত)।

সুতরাং f এক-এক অন্টু ফাংশন ।

b) $f : \{1,2,3,4\} \rightarrow R$ এবং $f(x) = 2x + 1;$ দেখাও যে, f একএক ফাংশন, কিন্তু অন্টু ফাংশন নয়।

এখানে, $f(1) = 2.1 + 1= 3 \in R,$ $f(2) = 2.2 + 1= 5 \in R,$ $f(3) = 2.3 + 1= 7 \in R,$
$f(4) = 2.4 + 1= 9 \in R,$

ডমেনের প্রত্যেকটি উপাদানের জন্য কোডমেনে একটি করে ইমেজ আছে, কিন্তু কোডমেনে 3, 5, 7, 9 ছাড়াও অসংখ্য উপাদান রয়েছে যা ডমেনের কোন উপাদানের ইমেজ নয়।
সুতরাং f একএক ফাংশন, কিন্তু অন্টু নয়।

উদাহরণ-৮ (সৃজনশীল প্রশ্ন): একটি বর্ণিত ফাংশন, $F : R \to R$, $F(x) = x^2$

(ক) F এক-এক ফাংশন কি না যাচাই কর

(খ) ডোম Fএবং রেঞ্জ F নির্ণয় কর

(গ) F^{-1} নির্ণয় কর এবং যুক্তি দাও যে, F^{-1} ফাংশন অথবা অফাংশন অন্বয়।

সমাধান:

(ক) ধরি, $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow$ F ফাংশনটি এক-এক নয়।

(খ) $x \in R \Rightarrow x^2 \in R^+ \Rightarrow F(x) \in R^+$; বিপরীতক্রমে, $F(x) \in R^+ \Rightarrow x^2 \in R^+ \Rightarrow x \in R$;

- x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য F(x) এর মান বাস্তব ও অঋণাত্মক এবং বিপরীতক্রমে F(x) এর যে কোন বাস্তব ও অঋণাত্মক মানের জন্য x এর মান বাস্তব।
- R^+ শূন্যসহ ধনাত্মক (অঋণাত্মক) এবং R_+ শূন্য ছাড়া ধনাত্মক বাস্তব মান বোঝায়।

$\therefore$ ডম F = R এবং রেঞ্জ $F = \{x \in R : x \geq 0\} = R^+$

(গ) ধরি, $y = F(x) \Rightarrow x = F^{-1}(y)$;

এখন, $F(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}, y \geq 0 \Rightarrow F^{-1}(x) = \pm\sqrt{x},\ x \geq 0$

এখানে x এর একটি ধনাত্মক মানের জন্য $F^{-1}(x)$ এর দুইটি গ্রহণযোগ্য মান আছে।
সুতরাং এখানে, F^{-1}একটি অফাংশন অন্বয়।

উদাহরণ-৯(সৃজনশীল প্রশ্ন): $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ একটি ফাংশন:

(ক) প্রদত্ত ফাংশন সংশ্লিষ্ট গ্রাফের দুইটি বৈশিষ্ট্য উল্লেখ কর

(খ) f^{-1}নির্ণয় কর, যখন ডোম f = $0 \leq x \leq 3$

(গ) ডোম f নির্ণয় কর, যখন রেঞ্জ f = $3 \leq x \leq 5$

সমাধান:

(ক) ফাংশনটি x চলের দ্বিঘাত বহুপদী $\Rightarrow$ এর গ্রাফের ধরন হবে পরাবৃত্ত;
x^2 এর সহগ ধনাত্মক $\Rightarrow$ পরাবৃত্তটি উর্ধ্বমুখী হবে।

(খ) $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 \Rightarrow y = 2(x-1)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{y-1}{2}$

$\Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(y) = 1 \pm \sqrt{\frac{y-1}{2}}$;

ব্যবধির নিম্ন আবদ্ধ সীমা $x = 0 \Rightarrow y = 3$; এবং উচ্চ আবদ্ধ সীমা $x = 3 \Rightarrow y = 9$;

$\therefore 0 \leq x \leq 3 \Rightarrow 3 \leq y \leq 9$

চল বদল করে, $f^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{\frac{x-1}{2}},\ 3 \leq x \leq 9$

$\Rightarrow f^{-1} : [3,9] \to [0,3],\ f^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{\frac{x-1}{2}}.$

(গ) $f(x) = 2(x-1)^2 + 1$;

$3 = 2(x-1)^2 + 1 \Rightarrow 2 = 2(x-1)^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0 \text{ or } 2$

$5 = 2(x-1)^2 + 1 \Rightarrow 4 = 2(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

প্রদত্ত রেঞ্জ অনুসারে ডোম f = $\{ x \in R : 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 0 \vee 2 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}\}$

উদাহরণ-১০: R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f : R \to R, f(x) = x^2 - x - 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত;
$f^{-1}([-2, 0])$ এবং $f^{-1}(\{4\})$ নির্ণয় কর।

* দুইটি উৎপাদকের গুণফল ধনাত্মক হয়, যখন উভয়ই ঋণাত্মক **অথবা** উভয়ই ধনাত্মক। উভয়ই ঋণাত্মক হওয়ার শর্ত, বড়টি ঋণাত্মক; উভয় ধনাত্মক হওয়ার শর্ত, ছোটটি ধনাত্মক।
দুইটি উৎপাদকের গুণফল ঋণাত্মক হয় যখন, বড়টি ধনাত্মক **এবং ছোটটি ঋণাত্মক হয়।

সমাধান: ধরি $f^{-1}([-2, 0]) = x$

$\Rightarrow f(x) = [-2, 0]$

$\Rightarrow f(x) \geq -2$ এবং $f(x) \leq 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 \geq -2$ এবং $x^2 - x - 2 \leq 0$

$\Rightarrow x^2 - x \geq 0$ এবং $(x + 1)(x - 2) \leq 0$

$\Rightarrow x(x - 1) \geq 0$ * এবং $(x + 1)(x - 2) \leq 0$ **

$\Rightarrow$ ($x \leq 0$ অথবা $x - 1 \geq 0$) এবং ($x + 1 \geq 0$ এবং $x - 2 \leq 0$)

$\Rightarrow$ ($x \leq 0$ অথবা $x \geq 1$) এবং ($x \geq -1$ এবং $x \leq 2$)

$\Rightarrow$ ($x \geq -1$ এবং $x \leq 0$) অথবা ($x \geq 1$ এবং $x \leq 2$)***

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 0$ অথবা $1 \leq x \leq 2$

$\therefore f^{-1}([-2, 0]) = [-1, 0] \cup [1, 2]$

$$***(A\cap B)\cup(C\cap D) = (A\cap C)\cup(B\cap D)$$

বিকল্প সমাধান

ধরি $f^{-1}([-2, 0]) = x \Rightarrow f(x) = [-2, 0]$;
ফাংশন ব্যবধির নিম্ন আবদ্ধ সীমা -2 এবং উচ্চ আবদ্ধ সীমা 0 এর সাথে সমীকৃত করে x এর মান নির্ণয় করি-

$f(x) = -2$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = -2$

$\Rightarrow x^2 - x = 0$

$\Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

$f(x) = 0$

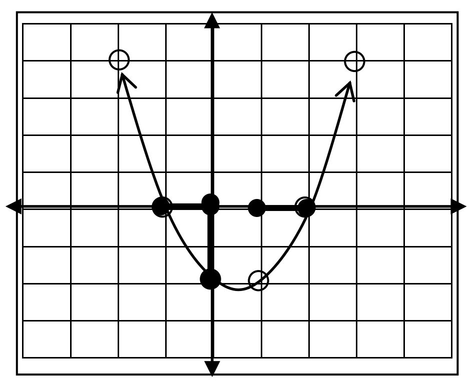
$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x + 1(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = -1, 2$

$\therefore f^{-1}([-2, 0]) = [-1, 0] \cup [1, 2]$



দ্বিতীয় অংশ

ধরি $f^{-1}(\{4\}) = x \Rightarrow f(x) = \{4\}$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 3, -2$; $\therefore f^{-1}(\{4\}) = \{3, -2\}$

উদাহরণ-১১: একটি ফাংশন এভাবে সংজ্ঞায়িত, $f(x) = 2x + 1, \ 0 \leq x \leq 2$

(ক) দেখাও যে, f এক-এক ফাংশন:

(খ) f এর গ্রাফ আঁক এবং রেঞ্জ দেখাও:

(গ) f^{-1}নির্ণয় কর এবং এর গ্রাফ আঁক:

সমাধান:

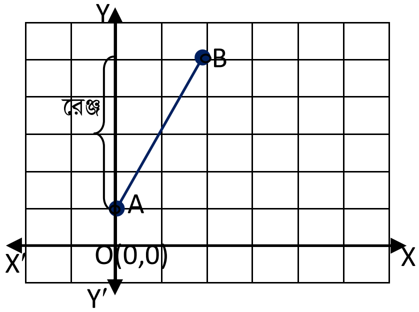
(ক) ধরি, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ এক-এক ফাংশন।

(খ) মনে করি $f(x) = y \Rightarrow y = 2x + 1, \ 0 \leq x \leq 2$

ডমেনের নিম্ন সীমা, $x = 0 \Rightarrow y = 2.0 + 1 = 1 \Rightarrow (x,y) = (0,1)$

এবং উচ্চ সীমা, $x = 2 \Rightarrow y = 2.2 + 1 = 5 \Rightarrow (x,y) = (2,5)$

প্রদত্ত ফাংশন একটি সরলরেখার অংশ নির্দেশ করে, যার প্রান্ত বিন্দু দুইটি (0,1) ও (2,5):



অক্ষ : $YOY' \perp X'OX$;
মূলবিন্দু : O(0,0)
একক : ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহু।
f এর গ্রাফ AB রেখাংশ।

রেঞ্জ f $= \{ y \in R : 1 \le y \le 5\}$

(গ) f^{-1} নির্ণয় এবং গ্রাফ অঙ্কন :

ধরি, $f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

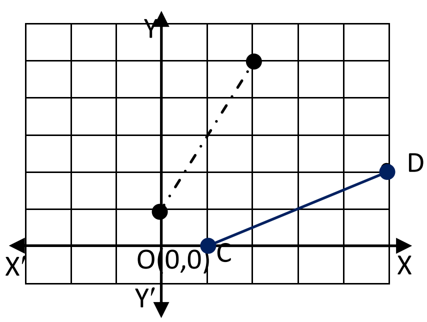
$\therefore\ 2x + 1 = y \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y-1)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y-1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1),\ 1 \le x \le 5;$

ডমেনের ক্ষুদ্রতম মান, $x = 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1-1) = 0 \Rightarrow (x,y) = (1,0)$

ডমেনের বৃহত্তম মান, $x = 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(5-1) = 2 \Rightarrow (x,y) = (5,2)$

f^{-1}একটি সরলরেখার অংশ নির্দেশ করে, যার বদ্ধ প্রান্ত বিন্দু (1,0) ও (5,2);

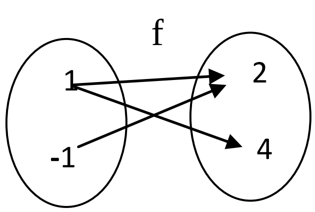


অক্ষ : $YOY' \perp X'OX$;
মূলবিন্দু : O(0,0)
একক : ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহু।
f^{-1} এর গ্রাফ CD রেখাংশ।

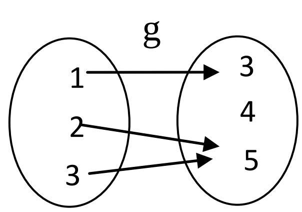
কর্মপত্র-১

নিচের অন্বয়ের যেগুলো ফাংশন, সনাক্ত কর এবং এদের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর:

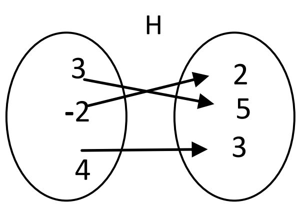
(ক)



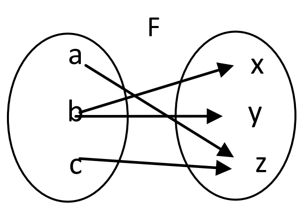
(খ)



(গ)



(ঘ)



(ঙ) S = {(1, 5,), (5,15), (2,10), (15,75)}

(চ) T = {(1, 5,), (1,6), (2,5), (3,6)}

কর্মপত্র-২

নিম্নলিখিত ফাংশনে x এর কোন্ কোন্ বাস্তব মানের জন্য F(x) এর বাস্তব মান নেই?এগুলোর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর:

(ক) $F(x)=\frac{1}{2x-1}$ (খ) $F(x)=(2x-3)^2$ (গ) F(x)= $\log(x-3)$

কর্মপত্র-৩

A= {-3,-2,2,3}, S ={(x,y) : x∈A, y∈A এবং y^2=x} হলে, তালিকা পদ্ধতিতে S এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। S অন্বয়টি ফাংশন কি না যাচাই কর।

কর্মপত্র-৪

(ক) ছক কাগজে X′OXএবং YOY′ অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর।

(খ) (0,5) , (-1,3)এবং (2,9) বিন্দু তিনটি ছক কাগজে স্থাপন কর এবং দেখাও যে, এরা সমরেখ।

কর্মপত্র-৫

(ক) S ={(x,y) : 3x+y = 4} অন্বয়টির কমপক্ষে দুইটি ক্রমজোড় নির্ণয় কর।

(খ) S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

(গ) S অন্বয়টি ফাংশন কি না, লেখচিত্র থেকে ব্যাখ্যা কর।

কর্মপত্র-৬

S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর।

$S = \{(x,y) : y^2 = 9x\}$

কর্মপত্র-৭ (বহুনির্বাচনী প্রশ্ন)

১। (2, 2), (4, 2), (2, 10), (5, 7), (1, 1) অন্বয়ের ডোমেন কোনটি ?

(ক) {2, 4, 2, 5, 1 } (খ) {2, 2, 10, 7, 1}

(গ) {2, 4, 5, 1} (ঘ) {2, 4, 10, 5}

২। $f : A\rightarrow B,\ x = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, নিচের কোনটি সত্য হবে?

(ক) A= { - 1, 0, 1 } (খ) B = { - 1, 0, 1 }

(গ) A= { 0, 1 } (ঘ) B = { - 1, 0 }

নিচে বর্ণিত ফাংশনের আলোকে ৩-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

F(x) = $\sqrt{x-2}$

৩। F(11) = কত ?

(ক) 9 (খ) 3 (গ) -3 (ঘ) $\sqrt{11}$

৪। F(x) = 5 হলে, x এর মান কত ?

(ক) $\sqrt{3}$ (খ) 23 (গ) 25 (ঘ)27

৫। ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি ?

(ক) ডোম F = {x ∈R | x ≠ 2 } (খ) ডোম F = {x ∈R | x ≥ 2 }

(গ) ডোম F = {x ∈R | x ≤ 2 } (ঘ) ডোমF = {x ∈R | x > 2 }

৬। **একটি ফাংশন** $F : R^+\rightarrow R,\ F(x) = (x-1)^2$, এভাবে সংজ্ঞায়িত:

(ক) F এক-এক ফাংশন কি না যাচাই কর

(খ) ডোম F এবং রেঞ্জ F নির্ণয় কর এবং সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর

(গ) F^{-1} নির্ণয় কর এবং যুক্তি দাও যে, F^{-1} ফাংশন অথবা অফাংশন অন্বয়।

Ref: মাধ্যমিক গণিত, ৯ম-১০ম শ্রেণি, এনসিটিবি; ২. মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত, ৯ম-১০ম শ্রেণি, এনসিটিবি

৬.৪ সূচক ও লগারিদম (Exponents and Logarithms)

অনেক ক্ষেত্রে একই সংখ্যাকে বার বার গুণ করার প্রয়োজন হয় অথবা একই সংখ্যার বহু গুণিতক প্রয়োজন হয়। এ সকল গাণিতিক সমস্যা সূচকের সাহায্যে লিখে অতি সহজেই সমাধান করা সহজ হয়। সূচকের মাধ্যমেই সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শরূপ প্রকাশ করা হয়। এজন্য প্রত্যেক শিক্ষার্থীর সূচকের ধারণা ও এর প্রতীক এবং এর প্রয়োগ সম্পর্কে বিশেষ জ্ঞান থাকা প্রয়োজন।

সূচক থেকেই লগারিদমের সৃষ্টি। আর এই লগারিদমের সাহায্যেই বড় বড় সংখ্যার গুণফল, ভাগফল বা মূলদ সূচকযুক্ত ঘাতের মান নির্ণয় করার কাজ সহজতর হয়েছে। পূর্বে বৈজ্ঞানিক হিসাব গণনায় লগারিদমের ব্যবহার ছিল একমাত্র উপায়। তবে বর্তমানে ক্যালকুলেটর ও কম্পিউটার এর ব্যবহার প্রচলিত হলেও বিকল্প হিসেবে লগারিদমের ব্যবহার গুরুত্বপূর্ণ। এই ইউনিটের বিষয়বস্তুতে সূচক ও লগারিদম সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

সূচক (Exponents or Indices)

$2 \times 2 \times 2 \times 2$ হচ্ছে একই সংখ্যার বা রাশির ক্রমিক গুণ। একে 2^4 আকারেও লেখা যায়। a যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে, n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণ হবে $a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a$(n সংখ্যক a)। একে a^n আকারে লেখা হয়, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। অথাৎ, $a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a$(nসংখ্যক a) $= a^n$, এখানে n হলো সূচক বা ঘাত (power) এবং a কে ভিত্তি (base)বলা হয়।

আবার বিপরীতভাবে, $a^n = a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots . \times a$(n সংখ্যক a)। সূচক শুধু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাই নয়, সকল পূর্ণসংখ্যা, ধনাত্মক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক ভগ্নাংশও হতে পারে। অর্থাৎ, ভিত্তি $a \in R$(বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং সূচক $n \in Q$(মূলদ সংখ্যার সেট) এর জন্য a^n সংজ্ঞায়িত। তবে n অমূলদ হলে, অমূলদের আসন্ন মূলদ মান নিয়ে সূচকীয় রাশির আসন্ন মান পাওয়া যায়। কিন্তু, ভিত্তি $a = 0$ এর জন্য সূচক $n > 0$ হতে হবে। কারণ, কোন বাস্তব সংখ্যার হর শূন্য হতে পারে না বলে, ঋণাত্মক n এর জন্য 0^n সংজ্ঞায়িত নয়।

$n > 0$ হলে, 0^n সংজ্ঞায়িত এবং $0^n = 0$; তবে $n = 0$ হলে, $0^0 = 0$, 1 বা অসংজ্ঞায়িত, −এ নিয়ে বিতর্ক আছে। বিশেষ ক্ষেত্রে, $n \in N$ ধরা হয়।

সূচকের সূত্রাবলি (Formulae for exponents) :

মনে করুন, $a \in R$ এবং $m, n \in N$

সূত্র ১। একই ভিত্তির শক্তির গুণ: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

প্রমাণ : সংখ্যার সাহায্যে, $3^2 \times 3^5 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7 = 3^{2+5}\ 3^7$$

সাধারণভাবে, $a^m \times a^n$

$$= \underbrace{(a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a)}_{\text{m সংখ্যক a}} \times \underbrace{(a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a)}_{\text{n সংখ্যক a}}$$

$= a^{m+n}$ (প্রমাণিত)

সূত্র ২। একই ভিত্তির শক্তির ভাগ : $(a \neq 0,\ m \neq n)$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}\ , \text{যখন } m>n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}\ , \text{যখন } n>m \end{cases}$$

প্রমাণ: সংখ্যার সাহায্যে, $\frac{5^6}{5^4} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$

$= 5 \times 5 = 5^2 = 5^{6-4}$

সাধারণভাবে, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a \text{ (m সংখ্যক a)}}{a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a \text{ (n সংখ্যক a)}} = a^{m-n}$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৩। ভিন্ন ভিত্তির গুণফলের শক্তি : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

প্রমাণ : সংখ্যার সাহায্যে, $(3 \times 2)^4$

$= (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2)$

$= (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= 3^4 \times 2^4$

সাধারণভাবে,$(ab)^n = ab \times ab \times \ldots \ldots \ldots \times ab$ (n সংখ্যক ab এর ক্রমিক গুণ)

$(a \times a \times \ldots \ldots \ldots \times a) \times (b \times b \times \ldots \ldots \ldots \times b) = a^n b^n$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৪। ভিন্ন ভিত্তির ভাগফলের শক্তি: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$,$b \neq 0$

প্রমাণ : সংখ্যার সাহায্যে, $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{3^4}{2^4}$

সাধারণভাবে, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \ldots \ldots \times \frac{a}{b}$, (n সংখ্যক $\frac{a}{b}$ এর ক্রমিক গুণ)

$= \frac{a \times a \times a \times \ldots \ldots \ldots \times a}{b \times b \times b \times \ldots \ldots \ldots \times b} = \frac{a^n}{b^n}$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৫। শূন্য শক্তি: $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

প্রমাণ: $1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

আবার, $\frac{a^n}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \ldots \times a}{a \times a \times a \times \ldots \times a} = 1$ [লব ও হর উভয় ক্ষেত্রে n সংখ্যক a এর গুণ]

$\therefore a^{n-n} = a^0 = 1$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৬। ঋণাত্মক শক্তি: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $(a \neq 0)$

প্রমাণ: $a^{-n} = \frac{a^{-n} \times a^n}{1 \times a^n}$ [লব ও হরকে a^n দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{a^{-n+n}}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

$\therefore a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

আবার, $\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$(প্রমাণিত)

সূত্র ৭। সূচকীয় রাশির শক্তি : $(a^m)^n = a^{mn}$

প্রমাণ:$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \times a^m$; (n সংখ্যক a^mএর ক্রমিক গুণ)

$= a^{m+m+m+ \ldots\ldots\ldots +m}$ (সূচকে n সংখ্যক m এর যোগফল)

$= a^{m \times n} = a^{mn}$; $\therefore (a^m)^n = a^{mn}$ (প্রমাণিত)

সূচকের ধর্মাবলি (Rules for exponents) :

$a \in R$ এবং $x, y \in N$ এর জন্য

১। যদি $x = y$ হয়, তবে $a^x = a^y$ হবে। [দুইটি সমান ভিত্তিকে সমান সূচকে উন্নীত করলে মান সমান হবে]

বিপরীতক্রমে, $a^y = a^x$ হলে, $x = y$ হবে; যখন, $a \neq 0, 1$;

[0 ও 1 ব্যতীত সমান ভিত্তি বিশিষ্ট দুইটি সূচকীয় রাশি সমান হলে, সূচকদ্বয়ও সমান হবে]

২। যদি $a = b$ হয়, তবে $a^x = b^x$ হবে। [দুইটি সমান ভিত্তিকে একই সূচকে উন্নীত করলে মান সমান হবে]

বিপরীতক্রমে, $a^x = b^x$ হলে, $a = b$ হবে যখন, $x \neq 0$

[দুইটি ভিত্তির একই সূচকীয় মান সমান হলে, ভিত্তি দুটি সমান হবে যদি, সুচক শূন্য না হয়]

সূচকীয় রাশির সাধারণ রূপ a^x ;

এখানে ভিত্তি a ঋণাত্নক হলে, তার সূচক x এর জোড় হর বিশিষ্ট ভগ্নাংশ মানের জন্য a^x বাস্তব সংখ্যা নয়:

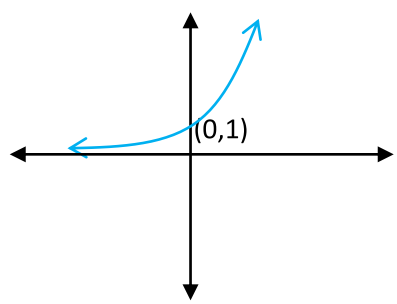
$(-2)^{1/2}$, $(-2)^{1/4}$, $(-2)^{1/6}$... ইত্যাদি বাস্তব সংখ্যা নয়,

$a = 0$ এবং $x = 0$ হলে, 0^0 কোন অর্থপূর্ণ গ্রহণযোগ্য মান নয়,

$a = 1$ হলে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য a^x এর মান সর্বদা 1 হয়; কোন পরিবর্তন হয় না।

তাই a^x এর মান বাস্তব ও অর্থপূর্ণ রাখার জন্য সূচকীয় সংখ্যায় ভিত্তির মান ঋণাত্মক, শূন্য বা 1 লওয়া হয় না। সূচকীয় রাশির সাধারণ ভিত্তি a এর উপর $a > 0, a \neq 1$ শর্ত আরোপ করা হয়।

a^x এর গ্রাফ: (a>1)



x এর মান শূন্য হলে, গ্রাফটি a এর উপর আরোপিত শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য যে কোন মানের জন্য y অক্ষকে (0,1) বিন্দুতে ছেদ করে। ডান দিকে x এর ধনাত্মক মানের জন্য বেঁকে গিয়ে দ্রুত লয়ে উপরের দিকে উঠতে থাকে। y অক্ষের বাঁ দিকে x এর ঋণাত্মক বাস্তব মানের জন্য ধীরলয়ে নিচে নামতে থাকে এবং x অক্ষের সাথে প্রায় মিশে গিয়ে চলতে থাকে; কিন্তু কখনই ছেদ করে না।

বাস্তব সংখ্যার সূচকীয় গ্রাফ সর্বদা x-অক্ষের উপরে এবং y-অক্ষের উভয় পাশে থাকে।

অতএব সূচকীয় ফাংশনের ডমেন = R এবং রেঞ্জ = $\{y \in R : y > 0\}$; তাই $\mathbf{a^x}$ এর মান সর্বদা ধনাত্মক হয়।

n তম মূল (n th root)

যদি $x^n = a$ হয়, তবে x এর মানই হল a এর nতম মূল। এখানে nতম মূল বলতে nতম বাস্তব মূলই বোঝায়। এ মূল এর মান n ও a এর বিভিন্ন শর্তের উপর নির্ভর করে নির্ণীত হয়।

n মাত্রিক বহুপদী বিশিষ্ট সমীকরণের মূলের সংখ্যা n; তবে সকল মূল বাস্তব নাও হতে পারে। বহুপদীকে উৎপাদক করলে, উৎপাদক একমাত্রিক হবে অথবা দ্বিমাত্রিক (যা একমাত্রিকে প্রকাশযোগ্য নয়)। n জোড় হলে সকল উৎপাদকই একমাত্রিক অথবা সকলই দ্বিমাত্রিক হতে পারে। কিন্তু n বিজোড় হলে অন্তত একটি উৎপাদক অবশ্যই একমাত্রিক হবে। এসব উৎপাদককে শূন্যের সাথে সমীকৃত করে বহুপদীয় সমীকরণের মূল বা বীজ পাওয়া যায়। যে দ্বিমাত্রিক উৎপাদক এক মাত্রিকে প্রকাশযোগ্য নয়, তা থেকে কোন বাস্তব মূল পাওয়া যায় না। এ ধারণা প্রয়োগ করেই কোন সংখ্যার nতম মূল (বাস্তব) নির্ধারিত হয়।

কয়েকটি উদাহরণ থেকে বিষয়টি লক্ষ্য করা যায়:

১. $x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

২. $x^2 \neq -4 \Rightarrow$ কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক নয়। তাই - 4 কে কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গ হিসাবে লেখা যায় না।

৩. $x^3 = 8 \Rightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow x^3 - 2^3 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \Rightarrow x = 2$

৪. $x^3 = -8 \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x^3 + 2^3 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Rightarrow x = -2$

এখানে দেখা যায় জোড় সূচকের জন্য ধনাত্মক সংখ্যার মূল হিসাবে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান আসে; কিন্তু ঋণাত্মক সংখ্যার কোন বাস্তব মূল নাই।

বিজোড় সূচকের জন্য ধনাত্মক সংখ্যার মূল হিসাবে কেবল ধনাত্মক মান আসে; এবং ঋণাত্মক সংখ্যার মূল হিসাবে কেবল ঋণাত্মক মান আসে।

এখানে পরের দুইটি ত্রিমাত্রিক সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত দুইটি উৎপাদকের মধ্যে একটি উৎপাদক একমাত্রিক এবং একটি দ্বিমাত্রিক। একমাত্রিক উৎপাদক থেকে একটি বাস্তব বীজ পাওয়া যায়। কিন্তু, দ্বিমাত্রিক উৎপাদক থেকে কোন বাস্তব মান পাওয়া যায় না, কারণ এর নিশ্চায়ক 2^2- 4.1.4 = -12, ঋণাত্মক বলে অন্য দুইটি বীজ বাস্তব নয়। তাই x^3= 8 এর বাস্তব সমাধান, x = 2; এবং x^3= -8 এর বাস্তব সমাধান, x= -2;

বহুপদীর সংজ্ঞানুসারে, n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, তা হতে পারে জোড় বা বিজোড়। a জোড় বা বিজোড় হলে কিছু যায় আসে না; মূলের একটা বাস্তব মান আসবেই। কিন্তু a ঋণাত্মক হলে n এর জোড় মানের জন্য কোন বাস্তব মান আসবে না । তবে n বিজোড় হলে a এর ঋণাত্মক মানের জন্যও nতম মূল হিসাবে একটি ঋণাত্মক মান আসবে। মূলত এখানে শর্ত চারটি:

(i) n জোড় এবং a ধনাত্মক: $x^n = a \Rightarrow x^n = (\pm\sqrt[n]{a})n \Rightarrow x = \pm(\sqrt[n]{a})$ বা $\pm a^{\frac{1}{n}}$

(ii) n জোড় এবং a ঋণাত্মক : $x^n = a \Rightarrow x^n = -|a|$; কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গ (বা জোড়তম শক্তি) ঋণাত্মক নয় $\Rightarrow$ x বাস্তব নয়।

(iii) n বিজোড় এবং a ধনাত্মক: $x^n = a \Rightarrow x^n = (\sqrt[n]{a})n \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ বা $a^{\frac{1}{n}}$

(iv) n বিজোড় এবং a ঋণাত্মক: $x^n = a \Rightarrow x^n = (-\sqrt[n]{|a|})n \Rightarrow x = -\sqrt[n]{|a|}$

সুতরাং n স্বাভাবিক সংখ্যা এবং a কোন বাস্তব সংখ্যা হলে,

a এর nতম মূল = $\pm(\sqrt[n]{a})$ বা $\pm a^{\frac{1}{n}}$ যখন, n জোড় এবং a অঋণাত্মক;

a এর nতম মূল = $\sqrt[n]{a}$ বা $a^{\frac{1}{n}}$ যখন, n বিজোড় এবং a অঋণাত্মক।

a এর nতম মূল = $-\sqrt[n]{|a|}$ যখন, n বিজোড় এবং a ঋণাত্মক।

-8 এর ঘনমূল = $-\sqrt[3]{|-8|} = -\sqrt[3]{8}$ = -(2) = - 2

-32 এর পঞ্চম মূল = $-\sqrt[5]{|-32|} = -\sqrt[5]{32}$ = -2

উদাহরণ ১। মান নির্ণয় করুন : (ক) $\frac{5^4\times 8\times 16}{2^5\times 125}$ (খ) $(27)^{\frac{2}{3}} + (64)^{\frac{2}{3}}$

সমাধান :

(ক) $\frac{5^4\times 8\times 16}{2^5\times 125}$

$= \frac{5^4\times 2^3\times 2^4}{2^5\times 5^3} = \frac{5^4\times 2^{3+4}}{2^5\times 5^3} = \frac{5^4}{5^3}\times\frac{2^7}{2^5}$

$= 5^{4-3}\times 2^{7-5} = 5^1\times 2^2 = 5\times 4 = 20$

(খ) $(27)^{\frac{2}{3}} + (64)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} + (4^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3.\frac{2}{3}} + 4^{3.\frac{2}{3}} = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

অথবা $(27)^{\frac{2}{3}} + (64)^{\frac{2}{3}} = (3.3.3)^{\frac{2}{3}} + (4.4.4)^{\frac{2}{3}}$ = 3.3 + 4.4 = 9 + 16 = 25

উদাহরণ ২। সরল করুন :

(ক) $(16)^{\frac{3}{4}} \div (16)^{\frac{1}{2}}$

(খ) $\sqrt{7}(\sqrt{28} - \sqrt{7})$ (গ) $\left(\frac{a^x}{a^y}\right)\times\left(\frac{a^y}{a^z}\right)\times\left(\frac{a^z}{a^x}\right)$

সমাধান :

(ক) $(16)^{\frac{3}{4}} \div (16)^{\frac{1}{2}} = (2.2.2.2)^{\frac{3}{4}} \div (4.4)^{\frac{1}{2}}$ = (2.2.2)÷ 4 = 8 ÷4 = 2

(খ) $\sqrt{7}(\sqrt{28}-\sqrt{7})$

$= \sqrt{7}(\sqrt{4\times 7}-\sqrt{7}) = \sqrt{7}(2\sqrt{7}-\sqrt{7}) = \sqrt{7}.\sqrt{7}(2-1) = 7\times 1 = 7$

(গ) $\left(\frac{a^x}{a^y}\right)\times\left(\frac{a^y}{a^z}\right)\times\left(\frac{a^z}{a^x}\right)$

$= a^{x-y}.a^{y-z}.a^{z-x} = a^{x-y+y-z+z-x} = a^0 = 1$

উদাহরণ ৩। সমাধান করুন : (ক) $4^{x+1} = 32$ (খ) $9.3^{x-1} = 27^x$

সমাধান:

(ক) $4^{x+1} = 32$

$\Rightarrow (2^2)^{x+1} = 32$

$\Rightarrow (2)^{2x+2} = 2^5$

$\Rightarrow 2x+2 = 5$ $[a^x = a^y \Rightarrow x = y$, যখন $a \neq 0$, 1]

$\therefore x = \frac{3}{2}$

(খ) $9.3^{x-1} = 27^x$

$\Rightarrow 3^2.3^{x-1} = (3^3)^x$

$\Rightarrow 3^{2+x-1} = 3^{3x}$

$\Rightarrow 2+x-1 = 3x$

$\Rightarrow 2x = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

লগারিদম ও লগারিদমের সূত্রাবলি

লগারিদম (Logarithm) : হিসাব নিকাশের সময় বড় বড় সংখ্যা বা রাশির গুণফল, ভাগফল বা মূলদ সূচকযুক্ত ঘাতের মান নির্ণয় করার জন্য লগারিদমের ব্যবহার করা হয়। অর্থাৎ, সূচকীয় রাশির মান বের করতে লগারিদম ব্যবহার করা হয়। লগারিদমকে সংক্ষেপে লগ (log) লেখা হয়।

আমারা জানি, $2^4 = 16$

এই গাণিতিক উক্তিটিকে লগের মাধ্যমে লেখা হয় $log_2 16 = 4$।

আবার বিপরীতক্রমে, $log_2 16 = 4$ হলে সূচকের মাধ্যমে লেখা যাবে $2^4 = 16$;

অর্থাৎ, $2^4 = 16$ হলে, $log_2 16 = 4$

এবং বিপরীতক্রমে, $log_2 16 = 4$ হলে, $2^4 = 16$।

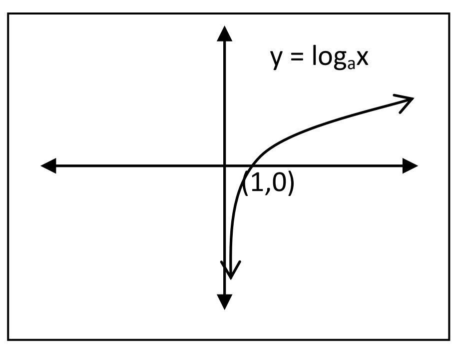
একইভাবে, $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ কে লগের মাধ্যমে লেখা যায়, $log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$

$a^x = N, (a > 0,\ a \neq 1)$ হলে, $x = log_a N$ কে N *এর* a *ভিত্তিক লগ* বলা হয়।

অর্থাৎ, $a^x = N$ সূচকীয় পদ্ধতি হলে, লগারিদম পদ্ধতি হবে $x = log_a N$।

$\log_a x$ এর গ্রাফ: (a>1)

লগারিদম হল সূচক ফাংশনের বিপরীত ফাংশন। x ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন, a^x সর্বদা ধনাত্মক । তাই শুধু ধনাত্মক সংখ্যার লগের মান আছে যা বাস্তব। a এর উপর আরোপিত শর্তে শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগের বাস্তব মান নেই।



y এর মান শূন্য হলে, গ্রাফটি a এর উপর আরোপিত শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য যে কোন মানের জন্য x অক্ষকে (1,0) বিন্দুতে ছেদ করে। এক এর বড় x এর মানের জন্য x অক্ষের উপরে দ্রুত লয়ে ডানে বেঁকে গিয়ে ধীর লয়ে উপরে উঠতে থাকে।

x অক্ষের নিচের দিকে x এর এক এর চেয়ে ছোট (প্রকৃত ভগ্নাশ) ধনাত্মক মানের জন্য লগ মান ঋণাত্মক হয়। তাই গ্রাফ ধীরলয়ে বেঁকে গিয়ে নিচে নামতে থাকে এবং yঅক্ষের সাথে ক্রমান্বয়ে প্রায় মিশে গিয়ে চলতে থাকে; কিন্তু কখনই ছেদ করে না।

বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদম গ্রাফ y অক্ষের ডানে এবং x অক্ষের উভয় পাশে থাকে।

লগ ফাংশনের ডমেন $=\{x\in R : x > 0\} = R_+$ এবং রেঞ্জ $= R$ ।

লগারিদমের সূত্রাবলি (Formulae of Logarithms) :

মনে করুন, $a > 0,\ a \neq 1;\ b > 0,\ b \neq 1$ এবং $M > 0,\ N > 0$

সূত্র ১। (ক) $log_a 1 = 0,\ (a > 0,\ a \neq 1)$ (খ) $log_a a = 1,\ (a > 0,\ a \neq 1)$

প্রমাণ : (ক) সূচকের সূত্র হতে জানি, $a^0 = 1$

$\therefore$ লগের সংজ্ঞা হতে পাওয়া যায়, $log_a 1 = 0$ (প্রমাণিত)

(খ) সূচকের সূত্র হতে জানি, $a^1 = a$

$\therefore$ লগের সংজ্ঞা হতে পাওয়া যায়,$log_a a = 1$ (প্রমাণিত)

সূত্র ২। $log_a(MN) = log_a M + log_a N$

প্রমাণ: মনে করুন, $log\ _a M = x,\ log_a N = y \Rightarrow M = a^x,\ N = a^y$

এখন, $MN = a^x.a^y = a^{x+y} \Rightarrow\ log_a(MN) = x + y$

$\Rightarrow log_a(MN) = log_a M + log_a N$ [x, y এর মান বসিয়ে]

$\therefore\ log_a(MN) = log_a M + log_a N$ (প্রমাণিত)

মনে রাখতে হবে, $log_a(MNP \ldots\ldots) = log_a M + log_a N + log_a P +\ \ldots\ldots$ কিন্তু $log_a(M \pm N) \neq log_a M \pm log_a N$

সূত্র ৩। $log_a\left(\frac{M}{N}\right) = log_a M - log_a N$

প্রমাণ : মনে করুন, $log_a M = x$ এবং $log_a N = y$

$\therefore M = a^x$এবং $N = a^y$

এখন, $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow log_a\left(\frac{M}{N}\right) = x - y$

$\therefore\ log_a\left(\frac{M}{N}\right) = log_a M - log_a N$ [x, y এর মান বসিয়ে](প্রমাণিত)

সূত্র ৪। $log_a M^r = r\ log_a M$

প্রমাণ : মনে করুন, $log_a M = x\ \ \therefore M = a^x$

বা,$(M)^r = (a^x)^r$বা,$M^r = a^{rx}$

$\therefore log_a M^r = rx$ বা,$log_a M^r = r\ log_a M$ [x এর মান বসিয়ে]

$\therefore\ log_a M^r = r\ log_a M$ (প্রমাণিত)

মনে রাখতে হবে, $(log_a M)^r \neq r\ log_a M$

সূত্র ৫। $log_a M = log_b M \times log_a b$ (ভিত্তিপরিবর্তন)

প্রমাণ: মনে করুন, $log_a M = x,\ log_b M = y$

$\therefore\ a^x = M,\ b^y = M$

$\therefore\ a^x = b^y$বা,$(a^x)^{\frac{1}{y}} = (b^y)^{\frac{1}{y}}$

বা, $\mathrm{b} = a^{\frac{x}{y}}$

$\therefore\ \frac{x}{y} = log_a b$ বা, $\mathrm{x} = y\ log_a b$

বা, $log_a M = log_b M \times log_a b$ (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্তঃ $log_a b = \frac{1}{log_b a}$ অথবা, $log_b a = \frac{1}{log_a b}$

প্রমাণঃ আমারা জানি, $log_a M = log_b M \times log_a b$ [সূত্র ৫]

$\Rightarrow \log_a b = \frac{\log_a M}{\log_b M}$ ... (i)

অনুরূপে, $\log_b M = \log_a M \times \log_b a$

$\Rightarrow \log_b a = \frac{\log_b M}{\log_a M}$ ... (ii)

(i)×(ii) $\Rightarrow \log_a b \times \log_b a = \frac{\log_a M}{\log_b M} \times \frac{\log_b M}{\log_a M} = 1$

$\Rightarrow \log_a b = 1/\log_b a$

$\therefore \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ অথবা, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৫। মান নির্ণয় করুন :

(ক) $log_3 75 - log_3 25$ (খ) $log_2 \frac{1}{8}$ (গ) $log_{\sqrt{3}} 81$

সমাধান :

(ক) $\log_3 75 - \log_3 25$

$= \log_3 \frac{75}{25} = \log_3 \frac{25 \times 3}{25} = \log_3 3 = 1$ [$\because \log_a a = 1$]

(খ) $\log_2 \frac{1}{8}$

$= \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3 \log_2 2$ [$\because \log_a M^r = r \log_a M$]

$= -3 \times 1 = -3$ [$\because log_a a = 1$]

(গ) $log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{\sqrt{3}} 3^4 = \log_{\sqrt{3}} \left\{\left(\sqrt{3}\right)^2\right\}^4$

$= \log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\right)^8 = 8 \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}$ [$\because \log_a M^r = r \log_a M$]

$= 8 \times 1$ [$\because log_a a = 1$]

$= 8$

উদাহরণ ৬। x এর মান নির্ণয় করুন:

(ক) $log_5 x = 3$ (খ) $log_{2\sqrt{5}} 400 = x$

সমাধানঃ (ক) $log_5 x = 3 \Rightarrow x = 5^3 = 5 \times 5 \times 5$

$\therefore x = 125$

(খ) $log_{2\sqrt{5}} 400 = x$

$\Rightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^x = 400 = 16 \times 25 = 2^4 \times 5^2 = 2^4 . \left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(2\sqrt{5}\right)^4$

$\Rightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^x = \left(2\sqrt{5}\right)^4$

$\therefore x = 4$

উদাহরণ ৭। সরল করুন : $2\ log\frac{16}{9} + 3\ log\frac{27}{4} - log\frac{243}{4}$

সমাধান : $2\ log\frac{16}{9} + 3\ log\frac{27}{4} - log\frac{243}{4}$

$= log\left(\frac{16}{9}\right)^2 + log\left(\frac{27}{4}\right)^3 - log\frac{243}{4}\ = log\left\{\left(\frac{16}{9}\right)^2 \times \left(\frac{27}{4}\right)^3 \div \frac{243}{4}\right\}$

$= log\left\{\left(\frac{2^4}{3^2}\right)^2 \times \left(\frac{3^3}{2^2}\right)^3 \div \frac{3^5}{2^2}\right\} = log\left(\frac{2^8 \times 3^9 \times 2^2}{3^4 \times 2^6 \times 3^5}\right) = log(2^{8+2-6} \times 3^{9-4-5})$

$= \log(2^4 \times 3^0) = \log(16 \times 1) = \log16 = \log 2^4 = 4\log2$

[**বি.দ্র. :** লগের ভিত্তি দেওয়া না থাকলে, সর্বত্র যেকোন একই ভিত্তি বিবেচ্য।]

সংখ্যার আদর্শরূপ ও লগারিদম পদ্ধতি

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শরূপ (Scientific or Standard form of Numbers) :

বিজ্ঞান জগতে এমন কিছু সংখ্যা আছে যেগুলো অনেক বড় বা অনেক ছোট। যেমন, সূর্য থেকে নেপচুনের দূরত্ব 4500000000 কিমি। আবার, অক্সিজেনের পারমাণবিক ব্যাসার্ধ 0.000000000048 মিটার। ব্যবহারের সুবিধার জন্য অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়,

যেখানে, $1 \leq a < 10$ (অর্থাৎ, a, 1 বা 1 এর চেয়ে বড় কিন্তু 10 এর চেয়ে ছোট) এবং n পূর্ণসংখ্যা (ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য) অর্থাৎ, $n \in Z$। কোনো ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার $a \times 10^n$ রূপকে বলা হয় সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক বা আদর্শরূপ। যেমন, 60000000 এর আদর্শরূপ 6×10^7; 0.000009 এর আদর্শরূপ 9×10^{-6}; কোনো ঋণাত্মক সংখ্যাকে আদর্শরূপে প্রকাশ করতে হলে তার পরম মানের আদর্শরূপের আগে '−' চিহ্ন দিতে হবে।

উদাহরণ ৯। সূর্য থেকে নেপচুনের দূরত্ব 4500000000 কিমি । একে আদর্শরূপে প্রকাশ করুন।

সমাধান: 4500000000 কিমি $= 45 \times 100000000$ কিমি

$= 45 \times 10^8$ কিমি $= \frac{45}{10} \times 10 \times 10^8$ কিমি

$= 4.5 \times 10^9$ কিমি; $\quad \therefore$ সূর্য থেকে নেপচুনের দূরত্ব 4.5×10^9 কিলোমিটার।

উদাহরণ ১০। অক্সিজেনের পারমাণবিক ব্যাসার্ধ 0.000000000048 মিটার। একে আদর্শরূপে প্রকাশ করুন (সেন্টিমিটার এককে)।

সমাধান: 0.000000000048 মিটার $= \frac{48}{1000000000000}$ মিটার

$= \frac{48}{10^{12}}$ মিটার $= 48 \times 10^{-12}$মিটার $= \frac{48}{10} \times 10 \times 10^{-12}$মিটার $= 4.8 \times 10^{-11}$মিটার

আমরা জানি, 1 মিটার = 100 সেন্টিমিটার।

$\therefore 4.8 \times 10^{-11}$মিটার $= 4.8 \times 10^{-11} \times 100$ সেন্টিমিটার $= 4.8 \times 10^{-9}$ সেমি

$\therefore$ অক্সিজেনের পারমাণবিক ব্যাসার্ধ $= 4.8 \times 10^{-9}$ সেন্টিমিটার।

উদাহরণ ১১। একটি হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যাসার্ধ 3.7×10^{-9} সেমি সংখ্যার এই আদর্শরূপকে স্বাভাবিক আকারে প্রকাশ করুন।

সমাধান: 3.7×10^{-9} সেন্টিমিটার $= 3.7 \times \frac{1}{10^9}$ সেমি $= \frac{37}{10} \times \frac{1}{10^9}$ সেমি $= \frac{37}{10^{10}}$ সেমি

$= \frac{37}{10000000000}$ সেমি$= 0.0000000037$ সেমি।

লগারিদম পদ্ধতি (Logarithmic Systems):

বিভিন্ন ভিত্তিতে লগারিদম হলেও দুইটি ভিত্তির লরগারিদম ব্যবহৃত হয়: (ক) স্বাভাবিক লগারিদম, (খ) সাধারণ লগারিদম।

(ক) স্বাভাবিক লগারিদম (Natural Logarithm):

জন নেপিয়ার (১৫৫০-১৬১৭) স্কটিশ

e ভিত্তিক লগারিদমকে স্বাভাবিক লগারিদম বলা হয়। স্কটল্যাণ্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার (John Napier : (1550-1617) ১৬১৪ সালে e কে ভিত্তি ধরে প্রথম লগারিদম সম্পর্কিত বই প্রকাশ করেন। e স্বাভাবিক সূচকীয় ধারার মান, যা একটি অমূলদ সংখ্যা এবং $e = 2.71828...$ । তাঁর নামানুসারে এই লগারিদমকে নেপিয়ার লগারিদম বা e ভিত্তিক লগারিদম বা স্বাভাবিক লগারিদমও বলা হয়। $log_e x$ কে $l\,n\,x$ আকারেও লেখা হয়।

e পরিচিতি: দ্বিপদী উপপাদ্যের চল নিরসন করে যে সূচকীয় ধারা পাওয়া যায় তাকেই e দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

লিওনার্ড অয়লার (১৭০৭-১৭৮৩) সুইস

দ্বিপদী উপপাদ্য $\Rightarrow (1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots \quad [x = \frac{1}{n} \text{ বসিয়ে}]$$

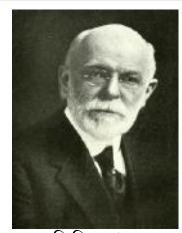
$$= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n} + \cdots$$

$$[n \to \infty \Rightarrow \frac{n-1}{n} = \frac{n-2}{n} = \ldots = 1]$$

$$\therefore e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.71828 \ldots$$

= একটি অমূলদ ধ্রুব সংখ্যা। এটি কোন বহুপদীর মূল নয়। অতএব এটি বীজগণিতীয় সংখ্যা নয়; একে বলা হয় তুরীয়(Transcendental) সংখ্যা। অয়লার (Euler) e নিয়ে অনেক গবেষণা করেন। তিনি বৈচিত্রময় পঞ্চসংখ্যা 0, 1, π, e, i সমন্বয়ে তার বিখ্যাত সমীকরণ $e^{i\pi}+1= 0$ প্রতিষ্ঠা করেন। তাই e কে তার নামের সম্মানে অয়লার সংখ্যাও বলা হয়।

(খ) সাধারণ লারিদম (Common Logarithm):



হেনরি ব্রিগস (১৫৬১-১৬৩০) ইংলিশ

10 ভিত্তিক লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম বলা হয়। ইংরেজ গণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs : (1561 - 1630) ১৬২৪ সালে 10কে ভিত্তি ধরে লগ-টেবিল বা লগ-সারণি তৈরি করেন। তাঁর এই লগারিদমকে ব্রিগস লগারিদম, 10 ভিত্তিক লগারিদম, ব্যবহারিক লগারিদম বা সাধারণ লগারিদম বলা হয়।

লগারিদমের ভিত্তি উল্লেখ না থাকলে দশভিত্তিক সংখ্যার ক্ষেত্রে10 কে এবং উচ্চতর হিসাবের ক্ষেত্রে e কে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয় । ব্রিগস এর লগ সারণি 10 ভিত্তিক এবং নেপিয়ারের লগ সারণি e ভিত্তিক।

স্বাভাবিক লগারিদম ও সাধারণ লগারিদমের মধ্যে একটি সম্পর্ক বিদ্যমান। সম্পর্কটি হলো-

$$0.4343\, lnx = log_{10}x$$

$log_{10}x = log_{10}e \times log_e x = log_{10}(2.71828) \times \ln(x) = 0.4343 \ln x$

সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক

(ক) পূর্ণক (Characteristic) :

মনে করুন, একটি সংখ্যা N কে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ করে পাওয়া যায়,

$N = a \times 10^n$, যেখানে $N > 0, 1 \le a < 10$ এবং $n \in Z$।

উভয়পক্ষে, 10 ভিত্তিতে লগ নিয়ে পাওয়া যায়,

$$log_{10}N = log_{10}(a \times 10^n) = log_{10}a + log_{10}10^n$$

$$= log_{10}a + n\, log_{10}10 = n + log_{10}a \quad [\because log_{10}10 = 1]$$

$\therefore\ log_{10}N = n + log_{10}a$

ভিত্তি 10 উহ্য রেখে পাওয়া যায়, $logN = n + loga,$ এখানে n কে বলা হয় $logN$ এর পূর্ণক।

নিচে ছকের মাধ্যমে পূর্ণক নির্ণয় করা দেখানো হলো :

N	N এর $a \times 10^n$ আকার	সূচক	দশমিক বিন্দুর বামের অংশের অঙ্ক সংখ্যা	পূর্ণক
6358 635.8 63.58 6.358 0.6358	6.358×10^3 6.358×10^2 6.358×10^1 6.358×10^0 6.358×10^{-1}	3 2 1 0 -1	4 3 2 1 0	$4 - 1 = 3$ $3 - 1 = 2$ $2 - 1 = 1$ $1 - 1 = 0$ $0 - 1 = -1 = \bar{1}$

প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশে যতগুলো অঙ্ক থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে সেই অঙ্ক সংখ্যার চেয়ে 1 কম।

লক্ষ্য করুন,

N	N এর $a \times 10^n$ আকার	সূচক	দশমিক ও এর পরবর্তী সার্থক অঙ্কের মাঝে 0 এর সংখ্যা	পূর্ণক
0.6358 0.06358 0.006358	6.358×10^{-1} 6.358×10^{-2} 6.358×10^{-3}	-1 -2 -3	0 1 2	$-(0 + 1) = -1$ $-(1 + 1) = -2$ $-(2 + 1) = -3$

প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশ না থাকলে দশমিক বিন্দু ও এর পরের প্রথম সার্থক অঙ্কের মাঝে যত 0 (শূন্য) থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে শূন্যের সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি এবং তা হবে ঋণাত্মক।

উদাহরণ ১২। নিচের সংখ্যাগুলোর লগের পূর্ণক নির্ণয় করুন:

(i) 2345 (ii) 24.28 (iii) 0.00129

সমাধান : (i) $2345 = 2.345 \times 1000 = 2.345 \times 10^3$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 3 .

অন্যভাবে, 2345 সংখ্যাটিতে অঙ্কের সংখ্যা 4 টি; $\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক$= 4 - 1 = 3$

$\therefore$ 2345 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 3

(ii) $24.28 = 2.428 \times 10^1$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 1

অন্যভাবে, 24.28 সংখ্যাটির দশমিকের বামে, অর্থাৎ পূর্ণ অংশে 2 টি অঙ্ক আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= 2 - 1 = 1$

$\therefore$ 24.28 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 1

(iii) $0.00129 = 1.29 \times 10^{-3}$; $\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক -3 বা $\bar{3}$

অন্যভাবে, সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী প্রথম সার্থক অঙ্ক 1 এর মাঝে 2 টি 0 (শূন্য) আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= -(2 + 1) = -3 = \bar{3}$

$\therefore$ 0.00129 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $\bar{3}$

(খ) অংশক (Mantissa) : কোনো সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক 1 অপেক্ষা ছোট একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। এটি মূলত অমূলদ সংখ্যা। তবে একটি নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত অংশকের মান নির্ণয় করা হয়।

কোনো সংখ্যার লগের অংশক লগ তালিকা থেকে বের করা যায়। আবার তা ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও নির্ণয় করা যায়। এখানে ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সংখ্যার লগের অংশক নির্ণয় করা হয়েছে।

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সংখ্যার সাধারণ লগ নির্ণয় :

উদাহরণ ১৩।(i) $log3213$ ও(ii) $log43.517$ এর পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ (i) ক্যালকুলেটর ব্যবহার করুন,

AC	log	3213	=	3.50691

$\therefore log3213$ এর পূর্ণক 3 এবং অংশক .50691

(ii) ক্যালকুলেটর ব্যবহার করুন,

AC	log	43.517	=	1.63866

$\therefore log43.517$ এর পূর্ণক 1 এবং অংশক .63866

উদাহরণ ১৪। 0.00625 এর লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ ক্যালকুলেটর ব্যবহার করুন,

AC	log	0.00625	=	-2.20412

$\therefore log0.00625$ এর পূর্ণক -3 বা $\overline{3}$ এবং অংশক (1 - 0.20412) = 0.79588

AC	log	0.00625	=	$\overline{3}.79588$

অনুশীলনী-৬.৪

সঠিক উত্তরের পাশে টিক $(\surd)$ চিহ্ন দিন (১-১২) :

১। সূচকের নিয়ম অনুযায়ী, $a^n.a^0 =$ কত?

(ক) a^{n+0} (খ) a^1 (গ) a^n (ঘ) 0

২। কোন শর্তে $a^0 = 1$?

(ক) $a = 0$ (খ) $a \neq 0$ (গ) $a > 0$ (ঘ) $a \neq 1$

৩। $a \neq 0$ এবং m, n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে,

(i) $a^m.a^n = a^{m+n}$

(ii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = (a^m)^n$

উপরের তথ্যানুসারে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৪। $a \neq 0$ হলে,$(a^{-1})^{-1}$ এর সঠিক মান কোনটি?

(ক) a (খ) a^{-1} (গ) a^{-2} (ঘ) a^2

৫। $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{5}$ এর মান নিচের কোনটি?

(ক) $\sqrt[6]{5}$ (খ) $(\sqrt{5})^3$ (গ) $(\sqrt[3]{5})^3$ (ঘ) $\sqrt[3]{25}$

৬। নিচের কোনটি $log_4 64$ এর সঠিক মান?

(ক) 16 (খ) 4 (গ) 3 (ঘ) 2

৭। একটি সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে লেখার জন্য শর্ত কোনটি?

(ক) $1 < a < 10$ (খ) $1 \leq a \leq 10$ (গ) $1 \leq a < 10$ (ঘ) $1 < a \leq 10$

৮। নিচের গাণিতিক বাক্যগুলো লক্ষ করুন :

(i) $x \neq 0,\ a > 0,\ b > 0$ এবং $a^x = b^x$ হলে, $a = b$ হয়

(ii) $log_a(m+n) = log_a m + log_a n$

(iii) $a > 0,\ b > 0$ এবং $a \neq 1,\ b \neq 1$ হলে, $log_a b \times log_b a = 1$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

0.000625 সংখ্যাটি বিবেচনা করে নিচের ৯ নং - **১১** নং প্রশ্নগুলোর উত্তর দিন :

৯। সংখ্যাটির a^nআকার নিচের কোনটি?

(ক) $(2.5)^2$ (খ) $(.25)^2$ (গ) $(0.025)^2$ (ঘ) $(0.0025)^2$

১০। সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক রূপ নিচের কোনটি?

(ক) 6.25×10^{-4} (খ) 625×10^{-4} (গ) 62.5×10^{-3} (ঘ) 6.25×10^{-3}

১১। সংখ্যাটির সাধারণ লগের পূর্ণক কত?

(ক) $\bar{4}$ (খ) $\bar{3}$ (গ) $\bar{2}$ (ঘ) $\bar{1}$

১২। সরল করুন: $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}}.\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}}.\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}, [x > 0$ এবং $a, b, c > 0]$

৬.৫ ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ অঙ্কনের শর্তাবলি

স্কেল ও পেন্সিল কম্পাস ব্যবহার করে নির্দিষ্ট দেওয়া শর্ত অনুযায়ী যে চিত্র অঙ্কন করা হয়, তাহলো জ্যামিতিক অঙ্কন। ব্যবহারিক জীবনে কখনো কখনো জ্যামিতিক চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। যেমন, একজন প্রকৌশলী যখন যন্ত্রের বিভিন্ন অংশের চিত্র আঁকেন অথবা একজন স্থপতি যখন কোনো বাড়ি বা প্রতিষ্ঠানের নকশা করেন, তখন জ্যামিতিক অঙ্কনে শুধু স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্য নেওয়া হয়। শুধু স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনের ফলে বুদ্ধি বৃত্তীয় বিকাশের সাথে সাথে মনোপেশিজ স্তরের বিকাশও ঘটে। এই ইউনিটের বিষয়বস্তুতে নির্দিষ্ট শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ অঙ্কন সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

ত্রিভুজ অঙ্কন

তিনটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি ত্রিভুজ এবং রেখাংশগুলোকে ত্রিভুজের বাহু বলে। যেকোনো দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে এবং দুইটি বাহু শীর্ষবিন্দুতে যে কোণ সূক্ষ্ম/স্থূল উৎপন্ন করে তা ত্রিভুজের একটি কোণ। প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ রয়েছে, তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ। তবে কোনো ত্রিভুজের আকার ও আকৃতি নির্দিষ্ট করার জন্য সবগুলো বাহু ও

কোণের আকার জানার প্রয়োজন হয় না। ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গের মধ্যে কেবল তিনটি অঙ্গ জানা থাকলেই নির্দিষ্ট আকারের অনন্য ত্রিভুজ আঁকা যায়। নিচের উপাত্তগুলো জানা থাকলে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ সহজেই আঁকা যায়:

(১) তিনটি বাহু

(২) দুইটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ

(৩) একটি বাহু ও এর সংলগ্ন দুইটি কোণ

(৪) দুইটি বাহু ও এদের একটির বিপরীত কোণ

(৫) দুইটি কোণ ও এদের একটির বিপরীত বাহু

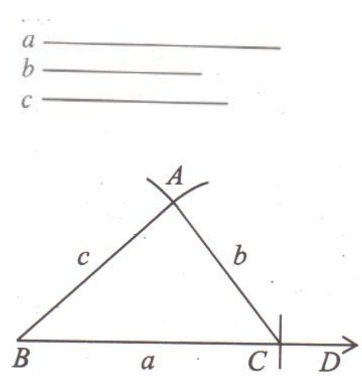
(৬) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু

(৭) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি সূক্ষ্মকোণ।

অঙ্কন প্রণালি

(১) কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করুন, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC কেটে নিন। B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c এবং b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A, B এবং A, C যোগ করুন। তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

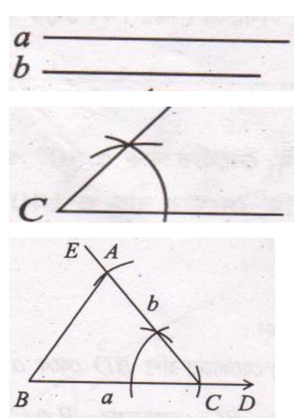
প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, Δ ABC এ BC = a, AC = b এবং AB = c.

$\therefore \Delta$ ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

মন্তব্য: ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি এর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। তাই প্রদত্ত বাহুগুলো এমন হতে হবে যেন, যেকোনো দুইটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয়টির দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। তবেই ত্রিভুজটি আঁকা সম্ভব হবে।

(২) কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করুন, একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু a ও b এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ$\angle$C দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



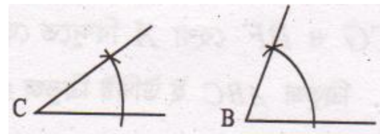
অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC নিন। BC রেখাংশের C বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle$C এর সমান করে $\angle$BCE আঁকুন। CE রশ্মি থেকে b এর সমান করে CA নিন। A, B যোগ করুন।

তাহলে, Δ ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, ΔABC এ BC=a, CA=b এবং $\angle$ACB=$\angle$C

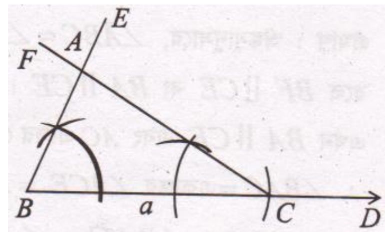
$\therefore \Delta$ ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(৩) কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু ও এর সংলগ্ন দুইটি কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করুন, একটি ত্রিভুজের একটি বাহু a এবং এর সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle B$ ও $\angle C$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো একটি রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC নিন। BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমান করে $\angle CBE$ এবং $\angle BCF$ আঁকুন। BE ও CF পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।



তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, ΔABC এ $BC = a$, $\angle ABC = \angle B$

এবং $\angle ACB = \angle C$.

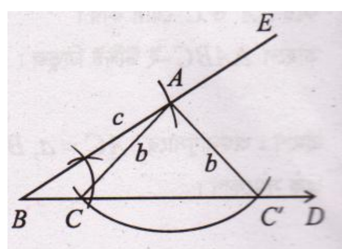
$\therefore \Delta ABC$ ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

মন্তব্য : ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান, তাই প্রদত্ত কোণ দুইটি এমন হতে হবে যেন এদের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট হয়। এই শর্ত পালন করা না হলে কোনো ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হবে না।

(৪) কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং এদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করুন, একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু b ও c এবং b বাহুর বিপরীত কোণ $\angle B$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BD এর B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle B$ এর সমান করে $\angle DBE$ আঁকুন। BE থেকে c এর সমান করে BA অংশ কেটে নিন। এখন A বিন্দুকে কেন্দ্র করে b এর দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকুন। বৃত্তচাপটি BD রেখাকে C ও C' বিন্দুতে ছেদ করে। A, C এবং A, C' যোগ করুন।

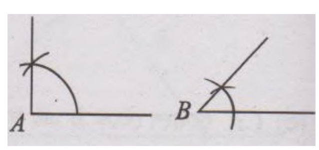


তাহলে, ΔABC এবং $\Delta ABC'$ উভয়েই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, ΔABC এ $BA = c$, $AC = b$ এবং $\angle ABC = \angle B$ এবং $\Delta ABC'$ এ $BA = c$, $AC' = b$ এবং $\angle ABC' = \angle B$

$\therefore \Delta ABC$ এবং $\Delta ABC'$ উভয়েই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(৫) কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং এদের একটির বিপরীত বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করুন, একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ $\angle A$ ও $\angle B$ এবং $\angle A$ এর বিপরীত বাহু a দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো একটি রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC নিন। BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle B$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle CBF$ ও $\angle DCE$ আঁকুন। আবার, CE রেখার C বিন্দুতে $\angle A$ এর সমান করে $\angle ECG$ আঁকুন। CG রেখা BF রেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, $\angle ABC = \angle ECD$. এই কোণ দুইটি অনুরূপ বলে, $BA || CE$

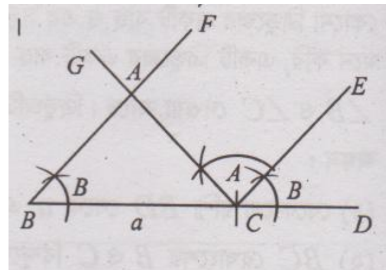
এখন BA||CE এবং AC এদের ছেদক।

$\therefore \angle BAC$ = একান্তর $\angle ACE = \angle A$

অতএব, Δ ABC এ $\angle BAC = \angle A$, $\angle ABC = \angle B$

এবং BC = a

সুতরাং, Δ ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

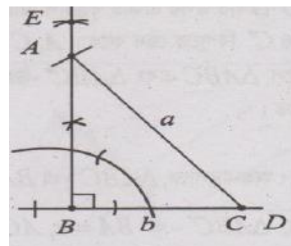


(৬) কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করুন, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং অপর এক বাহু b দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BD থেকে b এর সমান করে BC নিন। B বিন্দুতে BE লম্ব আঁকুন। C কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BE রেখার উপর একটি বৃত্তচাপ আঁকুন, যেন এটি BE কে A বিন্দুতে ছেদ করে। এখন A, C যোগ করুন।

তাহলে, Δ ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

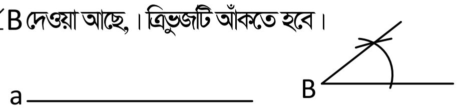


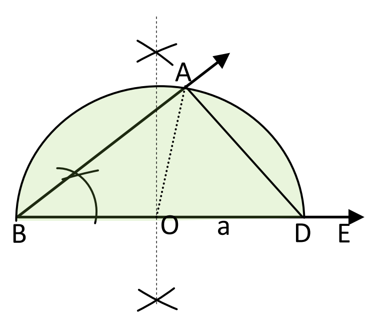
প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, অতিভুজ AC =a, BC =b এবং$\angle ABC$ = এক সমকোণ।

$\therefore \Delta$ ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(৭) কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি সূক্ষ্মকোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করুন, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং একটি সূক্ষ্মকোণ $\angle B$ দেওয়া আছে, । ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।





অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BE থেকে BD = a কেটে নিন। BD এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করুন। এখন O কে কেন্দ্র করে OB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত আঁকুন। B বিন্দুতে $\angle DBA = \angle B$ আঁকুন, যেন BA রশ্মি অর্ধবৃত্তটিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। AD আঁকুন।

তাহলে, Δ ABD ই উদ্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রমাণ: A ও O যোগ করুন। OB = OA [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] $\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$

আবার, OA = OD $\Rightarrow \angle OAD = \angle ODA$

অতএব, $\angle OAB + \angle OAD = \angle OBA + \angle ODA \Rightarrow \angle BAD = \angle ABD + \angle BDA$ = এক সমকোণ।

এখন BD = অতিভুজ a, $\angle ABD = \angle B$ এবং $\angle BAD$ = এক সমকোণ।

সুতরাং, Δ BAD ই নির্ণেয় সমকোণী ত্রিভুজ।

চতুর্ভুজ অঙ্কন

চারটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি চতুর্ভুজ। চিত্র দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটি হলো একটি চতুর্ভুজ ক্ষেত্র। যে চারটি রেখাংশ দ্বারা চতুর্ভুজ ক্ষেত্রটি আবদ্ধ হয়, সে চারটি রেখাংশকে ঐ চতুর্ভুজের বাহু বলে। তাই চতুর্ভুজের চারটি বাহু আছে।

চতুর্ভুজের চারটি বাহু, চারটি কোণ, চারটি শীর্ষবিন্দু এবং দুইটি কর্ণ রয়েছে। ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া থাকলে নির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকা যায়। কিন্তু চতুর্ভুজের চারটি বাহু দেওয়া থাকলে নির্দিষ্ট কোনো চতুর্ভুজ আঁকা যায় না। চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য আরও উপাত্তের প্রয়োজন। একটি চতুর্ভুজ আঁকতে কমপক্ষে পাঁচটি অনন্য নিরপেক্ষ উপাত্তের প্রয়োজন। যেমন, কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া থাকলে, নির্দিষ্ট চতুর্ভুজটি আঁকা যায়।

নিম্নোক্ত পাঁচটি উপাত্ত জানা থাকলে, নির্দিষ্ট আকার আকৃতির চতুর্ভুজ আঁকা যায়:

(১) চারটি বাহু ও একটি কোণ (২) চারটি বাহু ও একটি কর্ণ

(৩) তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ (৪) তিনটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

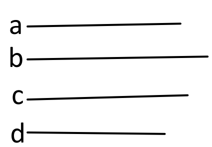
(৫) দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ।

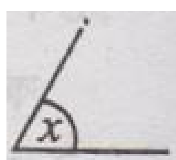
কোনো কোনো ক্ষেত্রে সম্পূর্ণ উপাত্ত দেওয়া না থাকলেও যদি যুক্তি দ্বারা পাঁচটি উপাত্ত পাওয়া যায়, তবে বিশেষ চতুর্ভুজ আঁকা যায়।

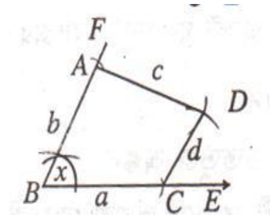
- একটি বাহু দেওয়া থাকলে, বর্গ আঁকা যায়। এক্ষেত্রে চারটি বাহুই সমান এবং একটি কোণ সমকোণ।
- দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া থাকলে, আয়ত আঁকা যায়। এক্ষেত্রে বিপরীত বাহু দুইটি পরস্পর সমান এবং একটি কোণ সমকোণ।
- একটি বাহু এবং একটি কোণ দেওয়া থাকলে, রম্বস আঁকা যায়। কারণ রম্বসের চারটি বাহু পরস্পর সমান।
- দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকলে, সামান্তরিক আঁকা যায়। কারণ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

অঙ্কন প্রণালি

(১) কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও একটি কোণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।







মনে করুন, একটি চতুর্ভুজের চার বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং a ও b বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ x দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নিন। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ আঁকুন। BF থেকে BA = b নিন। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। চাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। A ও D এবং C ও D যোগ করুন।

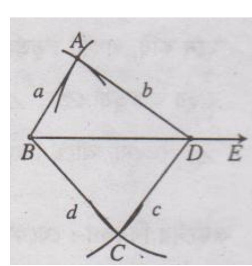
তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, AB = b, BC = a, AD = c, DC = d এবং $\angle ABC = \angle x$.

$\therefore$ ABCD ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

(২) কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

p



মনে করুন, একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য p দেওয়া আছে, যেখানে $a + b > p$ এবং $c + d > p$। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BE থেকে BD = p নিন। B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। বৃত্তচাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে।

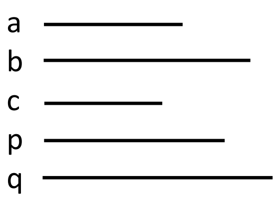
আবার, B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে d ও c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যেদিকে A আছে তার বিপরীত দিকে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। A ও B, A ও D, B ও C এবং C ও D যোগ করুন।

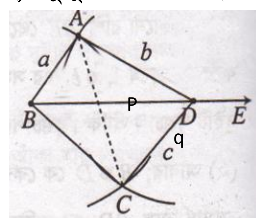
তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, AB = a, AD = b, BC = d, CD = c এবং কর্ণ BD = p.

সুতরাং, ABCD ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

(৩) কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।





মনে করুন, একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য p, q দেওয়া আছে, যেখানে $a + b > q$; চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

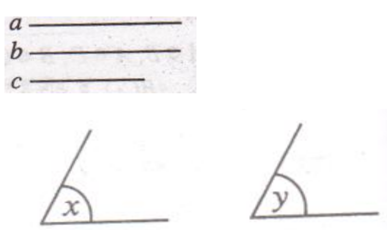
অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BE থেকে BD = q নিন। B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

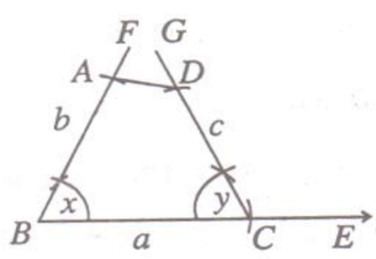
আবার, D ও A কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও p এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যেদিকে A আছে তার বিপরীত দিকে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে। A ও B, A ও D, B ও C এবং C ও D যোগ করুন। তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, AB = a, AD = b, CD = c এবং কর্ণ BD = q ও AC = p.

সুতরাং, ABCD ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

(৪) কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও দুইটি অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।





মনে করুন, একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহু a, b, c এবং a ও b বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ এবং a ও c বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y$ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

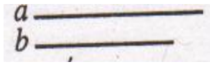
অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নিন। B ও C বিন্দুতে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle CBF$ ও $\angle BCG$ আঁকুন। BF থেকে BA = b এবং CG থেকে CD = c নিন।

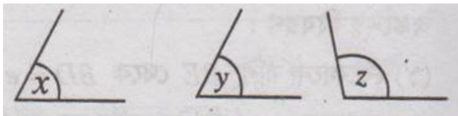
A, D যোগ করুন। তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

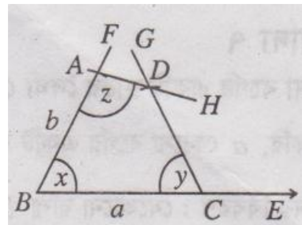
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, BC = a, AB = b, CD = c এবং $\angle ABC = \angle x$ ও $\angle BCD = \angle y$.

সুতরাং, ABCD ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

(৫) কোনো চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।







মনে করুন, একটি চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু a, b এবং তিনটি কোণ $\angle x, \angle y$, $\angle z$ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

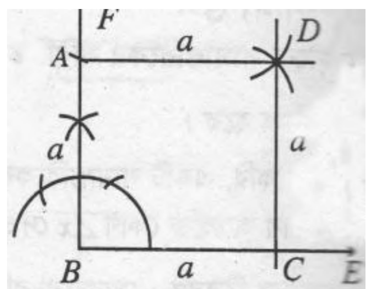
অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নিন। B ও C বিন্দুতে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle CBF$ ও $\angle BCG$ আঁকুন। BF থেকে BA = b নিন। A বিন্দুতে $\angle z$ এর সমান করে $\angle BAH$ অঙ্কন করুন। AH ও CG পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, ABCD চতুর্ভুজে AB = b, BC = a , $\angle ABC = \angle x$, $\angle DCB = \angle y$ ও $\angle BAD = \angle z$.

সুতরাং, ABCD ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

লক্ষ্য করুন, বর্গের মাত্র একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলেই বর্গ আঁকা সম্ভব। বর্গের বাহুগুলো সমান আর কোণগুলো প্রত্যেকটি সমকোণ। তাই বর্গ অঙ্কনের জন্য প্রয়োজনীয় পাঁচটি শর্ত সহজেই পূরণ করা যায়।

(৬) কোনো বর্গের একটি বাহু দেওয়া আছে, বর্গটি আঁকতে হবে।



মনে করুন, কোনো বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a দেওয়া আছে, বর্গটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নিন। B বিন্দুতে $BF \perp BC$ আঁকুন।

BF থেকে BA = a নিন। A ও C কেকেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে$\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A ও D এবং C ও D যোগ করুন।

তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট বর্গ।

প্রমাণ : ABCD চতুর্ভুজের AB = BC = CD = DA = a এবং$\angle ABC$ = এক সমকোণ।

সুতরাং, এটি একটি বর্গ। $\therefore$ ABCD ই নির্ণেয় বর্গ।

অনুশীলনী-৬.৫

১। একটি ত্রিভুজ আঁকতে কয়টি উপাত্তের প্রয়োজন?

২। একটি চতুর্ভুজ আঁকতে কয়টি অনন্য নিরপেক্ষ উপাত্তের প্রয়োজন?

৩। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2.8 সেমি, 3.2 সেমি এবং 5 সেমি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকুন।

৪। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 3.8 সেমি ও 4 সেমি এবং অন্তর্ভুক্ত 45° কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকুন।

৫। একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু 5 সেমি এবং একটি সূক্ষ্মকোণ 45° দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকুন।

৬। চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি, 3.5 সেমি, 3 সেমি ও 3.6 সেমি এবং একটি কোণ 60° দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করুন।

৭। তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি, 2.5 সেমি ও 3 সেমি এবং দুইটি কোণ 50° ও 55° দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকুন।

৮। একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি। বর্গটি আঁকুন।

৯। একটি আয়তের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সেমি ও 4 সেমি। আয়তটি আঁকুন।

১০। একটি রম্বসের বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি ও কোণ 70° দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকুন।

ইউনিট ৬.৬ : পরিমিতি এবং দূরত্ব ও উচ্চতা

যে সমস্ত বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে অর্থাৎ বিভিন্ন প্রকার এক বা একাধিক মাত্রা আছে এবং যা পরিমাপযোগ্য, সেই সমস্ত রাশির পরিমাপ পরিমিতির অন্তর্গত। প্রাত্যহিক জীবনে ব্যবহারিক প্রয়োজনে রেখার দৈর্ঘ্য, তলের ক্ষেত্রফল, ঘনবস্তুর আয়তন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়। আবার শিক্ষার্থীরা যেন যথাযথভাবে পরিমাপক ব্যবহার করে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত, আয়তাকার ঘনবস্তু, ঘনক, কোনক, বেলন ও বৃত্তাকৃতি বস্তুর ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারে সেদিকেও বিশেষ খেয়াল রাখা হয়েছে। এরকম যেকোনো রাশি পরিমাপের ক্ষেত্রে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাণের একটি রাশিকে একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। কাজেই পরিমাপকৃত রাশি এবং নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে। নির্ধারিত একক সম্পর্কে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটি একক রাশির কতগুণ তা নির্দেশ করে।

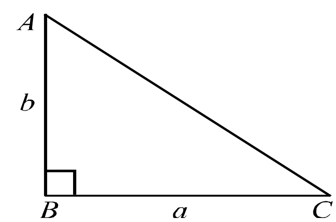
গাছ, খুঁটি, টাওয়ার, মিনার, ভবন ইত্যাদি সাধারণত ভূ-তলে লম্বভাবে থাকে। এ সকল জিনিসের উচ্চতা, যেকোনো বিন্দুতে চূড়ায় উন্নতি কোণ বা চূড়া থেকে যেকোনো বিন্দুর অবণতি কোণ, গাছ বা খুঁটি ভেঙে ভূ-রেখার সাথে ত্রিভুজ আকৃতি সৃষ্টি করে, গোড়া থেকে কত উঁচুতে ভেঙে কত দূরে মাথা ঠেকালো ইত্যাদির দূরত্ব বা উচ্চতা বিষয়ক সমস্যা সমাধানের ধারণা গঠনই এখানে প্রতিপাদ্য বিষয়। এ ইউনিটের বিষয়বস্তুতে পরিমিতি অংশে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত, আয়তাকার ঘনবস্তু, ঘনক, কোনক, বেলন, গোলক সম্পর্কিত পরিমাপ এবং দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক গাণিতিক সমস্যা সমাধান নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

পরিমিতি

পরিমিতির প্রাথমিক বিবেচ্য আকৃতি হল ত্রিভুজ। ত্রিভুজের বিভিন্ন পরিমাপ থেকে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা জানা থাকলে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

(১) সমকোণী ত্রিভুজঃ ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় $BC = a$ এবং $AB = b$.

BC কে ভূমি এবং AB কে উচ্চতা বিবেচনা করলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল



$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

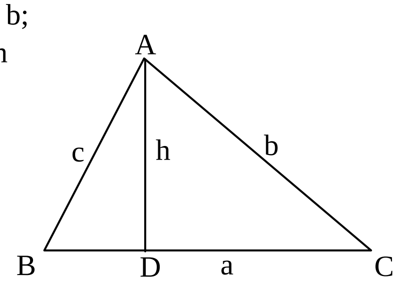
$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$

$= \frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2} ab$

(২) ত্রিভুজের দুই বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকলে ক্ষেত্রফল :

মনে করুন, ABC ত্রিভুজের বাহু $BC = a$, $BA = c$ এবং $CA = b$;

A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব আঁকুন। ধরুন, উচ্চতা $AD = h$



কোণ C বিবেচনা করলে পাওয়া যায়, $\frac{AD}{CA} = \sin C$

$\Rightarrow \frac{h}{b} = \sin C \Rightarrow h = b \sin C$

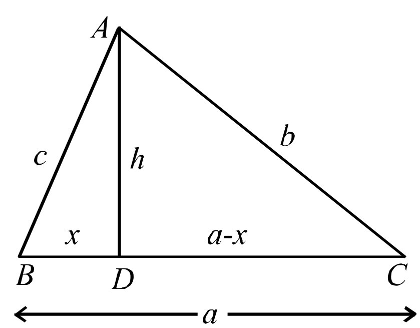
$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times \mathbf{BC} \times \mathbf{AD} = \frac{1}{2} \times a \times \mathbf{b \sin C} = \frac{1}{2} a\mathbf{b \sin C}$

অনুরূপভাবে, $\Delta ABC = \frac{1}{2}\ \mathbf{bc \sin A} = \frac{1}{2}\ \mathbf{ca \sin B}$

(৩) ত্রিভুজের তিনবাহু দেওয়া থাকলে ক্ষেত্রফল :

মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির বাহু তিনটি হচ্ছে

$BC = a$, $AC = b$ এবং $AB = c$



অতএব এর পরিসীমা $2s = a + b + c$; $AD \perp BC$ আঁকুন।

ধরুন, $BD = x$ তাহলে $CD = a - x$;

ΔABD এবং ΔACD সমকোণী।

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$ এবং $AD^2 = AC^2 - CD^2$

$\Rightarrow AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$

$\Rightarrow c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$

$\Rightarrow c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

$\Rightarrow 2ax = c^2 + a^2 - b^2$

$\therefore x = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$

এখন, $AD^2 = AB^2 - BD^2$

$$= c^2 - x^2 = c^2 - \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2 = \left(c + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{2ca+c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ca-c^2-a^2+b^2}{2a}\right) = \frac{\{(c+a)^2-b^2\}\{b^2-(c-a)^2\}}{4a^2}$$

$$= \frac{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)}{4a^2}$$

$$= \frac{2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)}{4a^2}$$

$$= \frac{2\times 2\times 2\times 2\times s(s-a)(s-b)(s-c)}{4a^2}$$

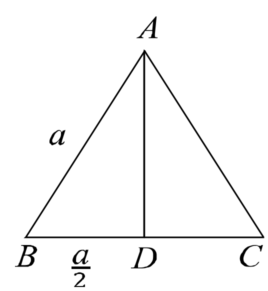
$$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

$$\therefore AD = \sqrt{\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}BC.AD = \frac{1}{2}a.\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(৪) সমবাহু ত্রিভুজঃ মনে করুন, ABC সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a এখন BC বাহুর উপর AD লম্ব আঁকুন।



অতএব, $BD = CD = \dfrac{a}{2}$

ΔABD সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore BD^2 + AD^2 = AB^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$= a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

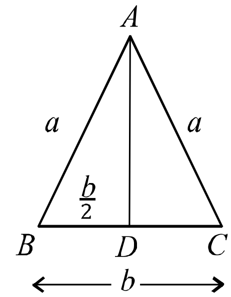
$$= \frac{1}{2}\times BC \times AD = \frac{1}{2}\times a \times \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

(৫) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ : মনে করুন, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = BC = a$ এবং $BC = b.$

এখন BC বাহুর উপর AD লম্ব আঁকুন। অতএব,

$BD = CD = \frac{b}{2}$.

ABD সমকোণী ত্রিভুজ, যার অতিভুজ AB



$\therefore BD^2 + AD^2 = AB^2$

$$\Rightarrow AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$= a^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{4a^2 - b^2}{4};$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

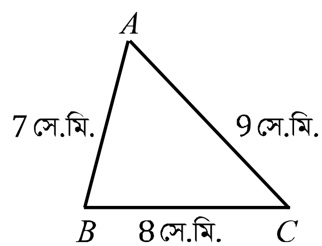
$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD \qquad = \frac{1}{2} \times b \times \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

$$= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

উদাহরণ ১। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি, 8 সেমি ও 9 সেমি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, ত্রিভুজটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে

a = 7 সেমি, b = 8 সেমি এবং = 9 সেমি।



ত্রিভুজটির পরিসীমা $= 2s = a + b + c$

অতএব, $s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{7 + 8 + 9}{2}$ সেমি

$= \frac{24}{2}$ সেমি $= 12$ সেমি

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$ বর্গ সেমি

$= \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3}$ বর্গ সেমি

$= \sqrt{720}$ বর্গ সেমি $= 26.83$ বর্গ সেমি (প্রায়)

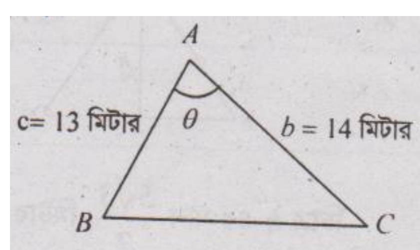
$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 26.83$ বর্গ সেমি (প্রায়)

উদাহরণ ২। একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13 মিটার ও 14 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 91 বর্গমিটার। বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, ত্রিভুজ ABCএর AB = c = 13 মিটার,

$AC = b = 14$ মিটার এবং ABC এর ক্ষেত্রফল $= 91$ বর্গমিটার।

AB ও AC বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ নির্ণয় করতে হবে।



$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times c \times b \sin\theta$

বা, 91 বর্গমিটার$= \frac{1}{2} \times 13 \times 14 \times \sin\theta$ বর্গমিটার

বা, $91 = 13 \times 7 \sin\theta$

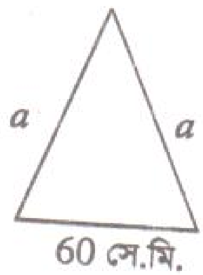
বা, $\sin\theta = \dfrac{91}{13 \times 7} = 1 = \sin 90^\circ$

$\therefore\ \theta = 90^\circ$

$\therefore$ নির্ণেয় অন্তর্ভুক্ত কোণ 90° ।

উদাহরণ ৩। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 60 সেমি। এর ক্ষেত্রফল 1200 বর্গ সেমি হলে, সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি b = 60 সেমি এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য a।



$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{b}{4} = \sqrt{4a^2 - b^2} = 1200$

$\Rightarrow \dfrac{60}{4} = \sqrt{4a^2 - (60)^2} = 1200$

$\Rightarrow 15\sqrt{4a^2 - 3600} = 1200$

$\Rightarrow \sqrt{4a^2 - 3600} = 1200$

$\Rightarrow 4a^2 - 3600 = 6400$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow a^2 = \dfrac{10000}{4} = 2500$

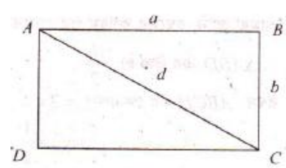
$\therefore a = 50$

$\therefore$ নির্ণেয় সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 50 সেমি।

চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

(১) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল: মনে করুন, $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র। এর দৈর্ঘ্য $AB = a$, প্রস্থ $BC = b$ এবং কর্ণ $AC = d$.

আয়তক্ষেত্রের কর্ণ আয়তক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।



$\therefore$ আয়তক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \Delta\, ABC$

$= 2 \times \dfrac{1}{2} \times a \times b = ab =$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

লক্ষ করুন, আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা $s = 2(a+b)$ এবং $\Delta\, ABC$ সমকোণী।

$\therefore\ AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $d^2 = a^2 + b^2$

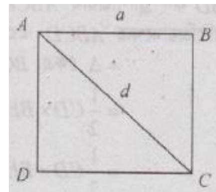
$\therefore d = \sqrt{a^2 + b^2}$

(২) বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল: মনে করুন, $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র। এর প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং কর্ণ d.
AC কর্ণ বর্গক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta ABC$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times a \times a$

$= a^2$ (বর্গের এক বাহুর বর্গ)



লক্ষ্য করুন, ABCD বর্গক্ষেত্রটির পরিসীমা $s = 4a$ এবং কর্ণ $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a.$

(৩) সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল:

(ক) ভূমি ও উচ্চতা দেওয়া আছে।

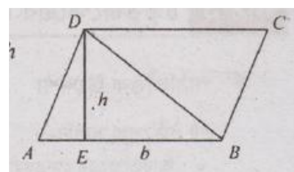
মনে করুন, ABCD একটি সামান্তরিক। এর ভূমি AB = b এবং উচ্চতা DE = h

BD কর্ণ সামান্তরিককে সমান দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

$\therefore$ সামান্তরিক ABCDএর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta ABD$

$= 2 \times \frac{1}{2} d \times h$

$= dh$



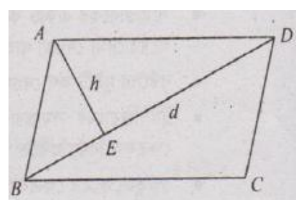
(খ) একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং ঐ কর্ণের বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে।

মনে করুন, $ABCD$ একটি সামান্তরিক । এর কর্ণ $BD = d$ এবং এর বিপরীত কৌণিক বিন্দু A থেকে BD এর উপর অঙ্কিত লম্ব $AE = h$ । কর্ণ BD সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ সামান্তরিক $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল$= 2 \times \Delta ABD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \frac{1}{2} \times h$

$= h.$



(৪) রম্বসের ক্ষেত্রফল: দুইটি কর্ণ দেওয়া আছে।

মনে করুন, $ABCD$ একটি রম্বস। এর কর্ণ $AC = d_1$ এবং $BD = d_2$ । কর্ণদ্বয় পরস্পরাকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
কর্ণ AC রম্বসটিকে সমান দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত করে।

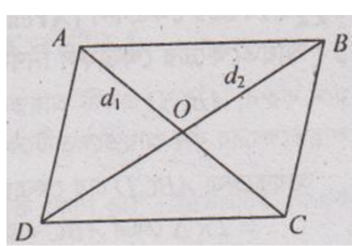
$\therefore \Delta ACD$ এর উচ্চতা $= \frac{d_2}{2}$

$\therefore$ রম্বস $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \Delta ACD$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= 2 \times \frac{1}{2} \times d_1 \times \frac{d_2}{2}. = \frac{1}{2} d_1 d_2$

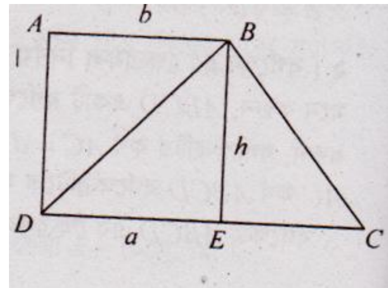


(৫) ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল :

ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল দুইটি বাহু এবং এদের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব দেওয়া আছে।

মনে করুন, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর সমান্তরাল বাহু দুইটি AB ও CD এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব BE।

ধরুন, AB = b একক, CD = a একক এবং BE = h একক। BD কর্ণ ট্রাপিজিয়াম ABCD ΔBCD ও ΔABD ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।



ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \Delta\, BCD$ এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta\, ABD$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} CD \times BE + \frac{1}{2} AB \times AD$$

$$= \frac{1}{2} CD \times BE + \frac{1}{2} AB \times BE$$

$$= \frac{1}{2} a \times h + \frac{1}{2} b \times h$$

$$= \frac{1}{2} h(a+b)$$

(৬) সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল :

যেসব বহুভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান এবং কোণগুলোও সামন, তাদের সুষম বহুভুজ বলে। n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের কেন্দ্র এবং শীর্ষবিন্দুগুলো যোগ করলে n সংখ্যক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়। সুতরাং, বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= n \times$ একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল। $ABCDEF - - - -$ একটি সুষম বহুভুজ, যার কেন্দ্র O; n সংখ্যক বাহু এবং প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a ;

ধরুন, $\Delta\, AOB$ এর উচ্চতা h এবং $\angle AOB = \theta$ । সুষম বহুভুজের প্রতিটি শীর্ষে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ$= 2\theta$

$\therefore n$ সংখ্যক সুষম বহুভুজের শীর্ষ কোণের সমষ্টি$= 2\theta.n.$

সুষম বহুভুজের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ = 4 সমকোণ

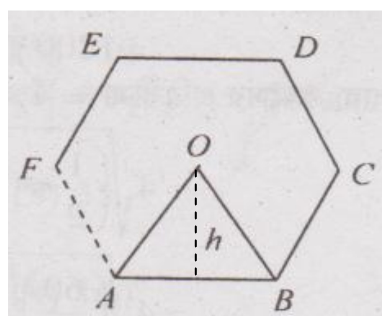
$\therefore n$ সংখ্যক ত্রিভুজের কোণের সমষ্টি $= 2\theta.n + 4$ সমকোণ

$\Delta\, AOB$ এর তিন কোণের সমষ্টি $= 2$ সমকোণ

$\therefore$ এরূপ n সংখ্যক ত্রিভুজের কোণের সমষ্টি $= n.2$ সমকোণ

$\therefore 2\theta.n + 4$ সমকোণ $= n.2$ সমকোণ

$\Rightarrow 2\theta.n = (2n-4)$ সমকোণ



$$\Rightarrow \theta = \frac{(2n-4)}{2n} \quad ''$$

$$\Rightarrow \theta = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

এখন,

$$tan\theta = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a} \qquad \therefore h = \frac{a}{2} tan\theta$$

$$\Delta\, AOB = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a \times \frac{a}{2}\, tan\theta$$

$$= \frac{a^2}{4} \tan\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{a^2}{4} \cot\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \quad \because [\tan(90^\circ - A) = cotA]$$

$$= \frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$ nসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল

উদাহরণ ১। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2000 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 10 মিটার কম হতো তাহলে এটি একটি বর্গক্ষেত্র হতো। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার।

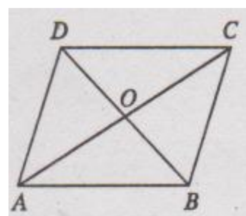
$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার।

প্রশ্নানুসারে, $xy = 2000$ ... (i)
এবং $x - 10 = y$ ... (ii)
সমীকরণ (i) এ $y = x - 10$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$x(x - 10) = 2000$
$\Rightarrow x^2 - 10x - 2000 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 50x + 40x - 2000 = 0$
$\Rightarrow (x - 50)(x + 40) = 0$
$\Rightarrow x = 50$ অথবা $x = -40$ কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হয় না।

$\therefore x = 50$
এখন সমীকরণ (ii) এ x এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,
$y = 50 - 10 = 40$
$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 50 মিটার এবং প্রস্থ 40 মিটার।

উদাহরণ ২। একটি রম্বসের একটি কর্ণ 10 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 120 বর্গমিটার হলে, অপর কর্ণ এবং পরিসীমা নির্ণয় করুন।
সমাধান : মনে করুন, $ABCD$ রম্বসের কর্ণ $BD = d_1 = 10$ মিটার এবং অপর কর্ণ d_2 মিটার ।



$\therefore$ রম্বসটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}d_1d_2$ বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2}d_1d_2 = 120$

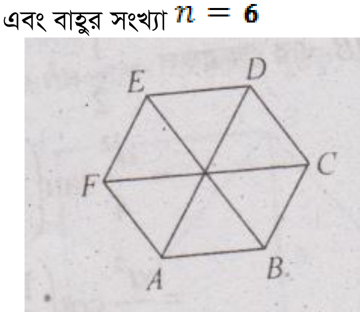
বা, $d_2 = \frac{120 \times 2}{d_1} = \frac{120 \times 2}{10} = 24$

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore OD = OB = \frac{10}{2}$ মিটার = 5 মিটার এবং $OA = OC = \frac{24}{2}$ মিটার = 12 মিটার

ΔAOD সমকোণী ত্রিভুজে $AD^2 = OA^2 + OD^2$
$= (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25 = 169$
$\therefore AD = \sqrt{169} = 13$
$\therefore$ রম্বসের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 13 মিটার।
$\therefore$ রম্বসের পরিসীমা $= 4 \times 13$ মিটার $= 52$ মিটার।
$\therefore$ নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 24 মিটার এবং পরিসীমা 52 মিটার।

উদাহরণ ৩। একটি সুষম ষড়ভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
সমাধান : মনে করুন,সুষম ষড়ভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 8$ সেমি এবং বাহুর সংখ্যা $n = 6$



$\therefore$ সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল

$$\frac{na^2}{4}\cot\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{6 \times 8^2}{4}\cot\left(\frac{180^\circ}{6}\right)$$

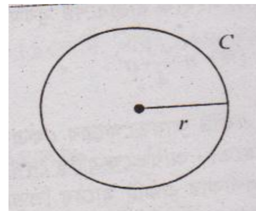
$$= \frac{6 \times 64}{4}\cot 30^\circ = 6 \times 16 \times 1.73$$

$\therefore$ ষড়ভুজটির ক্ষেত্রফল = 166.08 বর্গ সেমি

বৃত্ত সংক্রান্ত পরিমাপ

বৃত্তের পরিধি : বৃত্ত পথের দৈর্ঘ্যই বৃত্তের পরিধি।

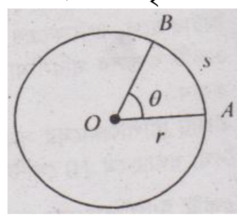
একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, এর পরিধি $C = 2\pi r$,
যেখানে, $\pi = 3.14159265 \ldots\ldots\ldots\ldots$ । এটি অমূলদ সংখ্যা। চার দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মূলদ মান 3.1416 ।



কাজেই, কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ জানা থাকলে π এর আসন্ন মান ব্যবহার করে বৃত্তের পরিধির আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়।

বৃত্ত চাপের দৈর্ঘ্য : মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং চাপ $AB = s$ । বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $\theta°$ কোণ উৎপন্ন করেছে।

∴ বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

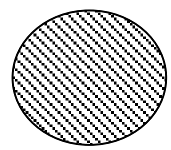


বৃত্তের কেন্দ্রে মোট উৎপন্ন কোণ $= 360°$ এবং চাপ s দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের ডিগ্রি পরিমাণ $\theta°$
জানা আছে, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

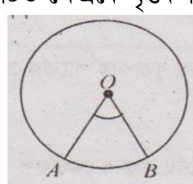
$$\therefore \frac{\theta°}{360°} = \frac{s}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow s = \frac{\pi r\theta}{180}$$

বৃত্তক্ষেত্র ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল : কোনো বৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত এলাকাকে বৃত্তক্ষেত্র বলা হয় এবং বৃত্তটিকে এরূপ বৃত্তক্ষেত্রের সীমারেখা ধরা হয়।



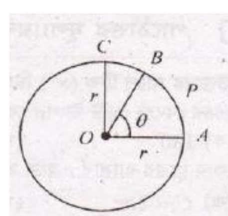
বৃত্তকলা : একটি চাপ ও চাপের প্রান্তবিন্দু সংশ্লিষ্ট ব্যাসার্ধ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে বৃত্তকলা বলা হয়।
মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির উপর A ও B দুইটি বিন্দু। $\angle$AOB এর অভ্যন্তরে OA ও OB ব্যাসার্ধ দ্বারা আবদ্ধ বৃত্তচাপ AB এর উপর দন্ডায়মান AOB কৌণিক এলাকা একটি বৃত্তকলা।



বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2। ব্যাসার্ধ স্থির রেখে বৃত্তচাপ যে হারে বাড়বে বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল সে হারে বাড়বে। সুতরাং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল সংশ্লিষ্ট বৃত্ত চাপের সমানুপাতিক। এবং বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ চাপের সমানুপাতিক। সুতরাং, একই বৃত্তের দুইটি বৃত্তচাপের কৌণিক পরিমাপ এদের দৈর্ঘ্য পরিমাপের সমানুপাতিক।
মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r; AOB বৃত্তকলা ক্ষেত্রটি APB চাপের উপর দন্ডায়মান, যার কৌণিক্ক পরিমাপ θ। OA এর উপর লম্ব OC ব্যাসার্ধ টানুন।

$$\therefore \frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle AOC \text{ এর পরিমাপ}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\theta}{90°} [\angle AOC = 90°]$$



$\Rightarrow$ বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{90^\circ} \times$ বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{\theta}{90^\circ} \times \frac{1}{4} \times \text{বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{\theta}{90^\circ} \times \frac{1}{4} \times \pi r^2 = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

সুতরাং, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 \text{।}$$

উদাহরণ ১। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সেমি এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 75° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।

সমাধান : আমরা জানি, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $s = \frac{\pi r\theta}{180^\circ}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7\times75^\circ}{180^\circ}$ সেমি $= \frac{11\times5}{6}$ সেমি $= \frac{55}{6}$ সেমি = 9.17 সেমি (প্রায়)

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল, $A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= \frac{75^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ বর্গ সেমি $= \frac{5\times11\times7}{12}$ বর্গ সেমি

$= 32.08$ বর্গ সেমি(প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য 9.17 সেমি এবং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 32. 08 বর্গ সেমি।

উদাহরণ ২। একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাসার্ধ 62 মিটার । পার্কটির বাইরের সীমানা ঘেঁষে 6 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, বৃত্তাকার পার্কের ব্যাসার্ধ $r = 62$ মিটার।

$\therefore$ রাস্তাসহ পার্কের ব্যাসার্ধ $R = (62 + 6)$ মিটার $= 68$ মিটার।

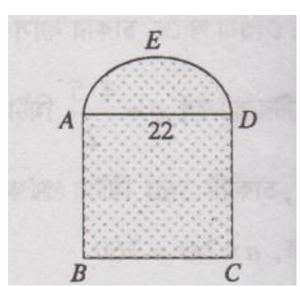
এখন, বৃত্তাকার পার্কের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 62 \times 62$ বর্গমিটার

$= 12081.14$ বর্গমিটার (প্রায়)

রাস্তাসহ বৃত্তাকার পার্কের ক্ষেত্রফল $= \pi R^2 = \frac{22}{7} \times 68 \times 68$ বর্গমিটার $= 14532.57$ বর্গমিটার (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় রাস্তার ক্ষেত্রফল $= (14532.57 - 12081.14)$ বর্গমিটার $= 2451.43$ বর্গমিটার।

উদাহরণ ৩। চিত্রে ABCD একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 22 মিটার এবং AED ক্ষেত্রটি একটি অর্ধবৃত্ত। সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।



সমাধান : মনে করুন, ABCD বর্গক্ষেত্রটির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$

আবার, AED একটি অর্ধবৃত্ত।

$\therefore$ অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{22}{2}$ মিটার $= 11$ মিটার

সুতরাং, সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= ABCD$ বর্গের ক্ষেত্রফল $+ AED$ অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= a^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$

$= (22)^2 + \frac{1}{2} \times 3.1416 \times (11)^2$ বর্গমিটার

$= 484 + \frac{3.1416 \times 121}{2}$ বর্গমিটার

$= 484 + 190.07$ বর্গমিটার (প্রায়)

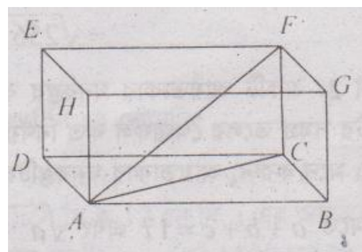
$= 674.07$ বর্গমিটার (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 674.07 বর্গমিটার (প্রায়)

আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনক

আয়তাকার ঘনবস্তু : তিন জোড়া সমান্তরাল আয়তাকার সমতল পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে আয়তাকার ঘনবস্তু বলে। মনে করুন, ABCDEFGH একটি আয়তাকার ঘনবস্তু। দৈর্ঘ্য $AB = a$, প্রস্থ $BC = b$ এবং উচ্চতা $AH = c$

কর্ণ নির্ণয় : $ABCDEFGH$ আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণ $AF.$



ΔABC এ $BC \perp AB$ এবং AC অতিভুজ।

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$

আবার, ΔACF এ $FC \perp AC$ এবং AF অতিভুজ।

$\therefore AF^2 = AC^2 + CF^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\therefore AF = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$\therefore$ আয়তাকার ঘনবস্তুটির কর্ণ $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় : আয়তাকার ঘনবস্তুটির ছয়টি তল রয়েছে, যেখানে বিপরীত তলগুলো পরস্পর সমান। আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল 2(□ABCD + □ABGH + □BCFG)

$= 2(AB \times AD + AB \times AH + BC \times BG)$

$= 2(ab + ac + bc)$

$= 2(ab + bc + ca)$

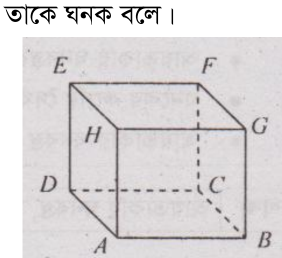
আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয়:

আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা

$= abc.$

ঘনক : আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে, তাকে ঘনক বলে।

মনে করুন, $ABCDEFGH$ একটি ঘনক।



এর দৈর্ঘ্য $=$ প্রস্থ $=$ উচ্চতা $= a$ একক।

ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$

$= \sqrt{3a^2}$

$= \sqrt{3}a$

ঘনকের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2(a.a + a.a + a.a)$

$= 2(a^2 + a^2 + a^2) = 6a^2$

ঘনকটির আয়তন = a.a.a= a^3

উদাহরণ ৪। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণ 12 সেমি এবং এর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার সমষ্টি 17 সেমি। ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, আয়তাকার ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে a, b, ও c সেমি।

প্রশ্নানুসারে, $a+b+c=17$

এবং $\sqrt{a^2+a^2+a^2}=12$

বা, $a^2+a^2+a^2=144$

এখন, $(a+b+c)^2=(17)^2$

বা, $(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)=289$

বা, $144+2(ab+bc+ca)=289$

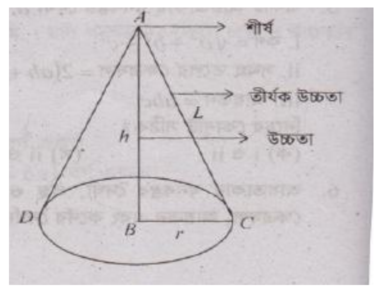
বা, $2(ab+bc+ca)=289-144=145$

সুতরাং, আয়তাকার ঘনবস্তুর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল 145 বর্গ সেমি।

কোনক, বেলন ও গোলক

কোনক: কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন যেকোনো একটি বাহুকে স্থির রেখে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক কোনক বলে।

সাধারণত সমবৃত্তভূমিক কোনককেই কোনক বলা হয়।



চিত্রে, AB হলো কোনকের অক্ষ = উচ্চতা = h ,

BC = ভূমির ব্যাসার্ধ= r এবং তীর্যক উচ্চতা/হেলানো উন্নতি = L.

ABC সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, $AC^2=AB^2+BC^2$

বা, $L^2=h^2+r^2$ $\therefore L=\sqrt{h^2+r^2}$ একক।

কোনকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ (ভূমির পরিধি) $\times$ (তীর্যক উচ্চতা)

$=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times L$ বর্গ একক $=\pi rL$ বর্গ একক

$=\pi r.\sqrt{h^2+r^2}$ বর্গ একক

কোনকের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল

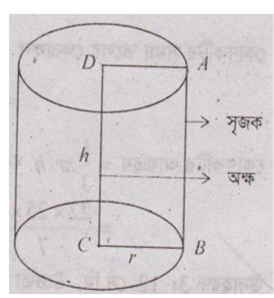
$=(\pi rL+\pi r^2)$বর্গ একক $=\pi r(L+r)$বর্গ একক

কোনকের আয়তন $=\frac{1}{3}\times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল)$\times$ উচ্চতা

$=\frac{1}{3}\times\pi r^2\times h$ ঘন একক

$=\frac{1}{3}\pi r^2h$ ঘন একক।

বেলন : কোনো আয়তক্ষেত্রের যেকোনো বাহুকে অক্ষ ধরে আয়তক্ষেত্রটিকে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক বেলন বা সিলিন্ডার বলা হয়। সমবৃত্তভূমিক বেলনের দুই প্রান্তকে বৃত্তাকার তল, বক্রতলকে বক্রপৃষ্ঠ এবং সমগ্র তলকে পৃষ্ঠতল বলা হয়।



আয়তক্ষেত্রের অক্ষের সমান্তরাল ঘূর্ণায়মান বাহুটিকে বেলনের সৃজক বা উৎপাদক রেখা বলে।

চিত্রে, ABCD একটি বেলন।

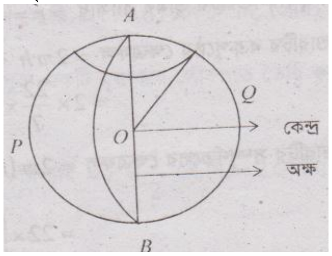
এখানে, ভূমির ব্যাসার্ধ = BC = r, উচ্চতা = CD = h.

সুতরাং, ভূমির ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$

বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি $\times$ উচ্চতা = $2\pi rh$ বর্গ একক
সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল বা পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল
= বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + দুই প্রান্তের ক্ষেত্রফল
$= 2\pi rh + 2\pi r^2$
= $2\pi r$ (h+r) বর্গ একক।
বেলনের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা = $\pi r^2 h$ ঘন একক।

গোলক :

কোনো অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে অক্ষ ধরে ঘোরালে ঐ ব্যাসের চতুর্দিকে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে গোলক বলে।
চিত্রে, APBQ একটি গোলক।
গোলকটির কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r।



গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $\pi \times$ (ব্যাস)^2
$= \pi\times(2r)^2$ বর্গ একক $= 4\pi r^2$
গোলকের আয়তন $=\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

উদাহরণ ১। 24 সেমি উচ্চতা বিশিষ্ট একটি কোনকের ভূমির ব্যাস 14সেমি। কোনকটির তীর্যক উচ্চতার দৈর্ঘ্য, বক্রতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান : দেওয়া আছে, কোনকের উচ্চতা h = 24 সেমি এবং ব্যাস d = 14 সেমি
অতএব, ব্যাসার্ধ $r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7$ সেমি
কোনকটির তীর্যক উচ্চতার দৈর্ঘ্য $L = \sqrt{h^2 + r^2}$
$= \sqrt{(24)^2 + (7)^2}$ সেমি
$= \sqrt{576 + 49}$ সেমি
$= \sqrt{625}$ সেমি
$= 25$ সেমি
কোনকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল = πrL বর্গ একক
$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25$ বর্গ সেমি
= 550 বর্গ সেমি (প্রায়)
কোনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = πr (L+r) বর্গ একক
$= \frac{22}{7} \times 7\,(25 + 7)$ বর্গ সেমি
= 704 বর্গ সেমি(প্রায়)
কোনকটির আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3.1416 \times 7^2 \times 24$ ঘন সেমি = 1232 ঘন সেমি(প্রায়)

উদাহরণ ২। একটি বেলনের উচ্চতা 12 সেমি এবং ভূমির ব্যাস 7 সেমি হলে, এর আয়তন ও বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, ভূমির ব্যাসার্ধ $r = \frac{7}{2}$ সেমি এবং উচ্চতা h = 12 সেমি
বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h = 3.1416 \times 3.5 \times 3.5 \times 12$ ঘন সেমি = 462 ঘন সেমি(প্রায়)
বেলনের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $2\pi rh$ বর্গ একক= $2 \times 3.1416 \times 3.5 \times 12$ বর্গ সেমি = 264 বর্গ সেমি(প্রায়)

উদাহরণ ৩। একটি গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 154 বর্গ সেমি। গোলকটির ব্যাসার্ধ ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি, গোলকের ব্যাসার্ধ r হলে, গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $4\pi r^2$ বর্গ একক।

প্রশ্নানুসারে, $\pi r^2 = 154 = 4$ বর্গ সেমি

$\Rightarrow 4\times3.1416\times r^2 = 154$ বর্গ সেমি

$\Rightarrow r^2 = 154/(4\times3.1416) = 12.25$ বর্গ সেমি

$\Rightarrow r = 3.5$ সেমি

অতএব, গোলকটির ব্যাসার্ধ 3.5 সেমি ।

এবং গোলকটির আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\times3.1416\times(3.5)^3$ ঘন সেমি = 179.67 ঘন সেমি(প্রায়)

দূরত্ব ও উচ্চতা

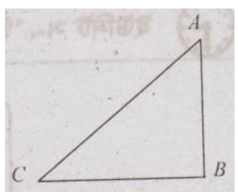
ভূ-রেখা, উর্ধ্বরেখা এবং উল্লম্বতল

ভূ-রেখা : ভূ-রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখা। ভূ-রেখাকে শয়ান রেখাও বলা হয়।

উর্ধ্বরেখা : উর্ধ্বরেখা হচ্ছে ভূমি তলের উপর লম্ব যেকোনো সরলরেখা। একে উল্লম্ব রেখাও বলে।

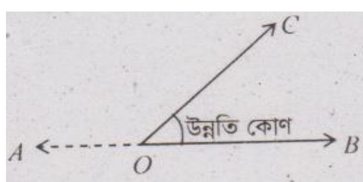
উল্লম্বতল : ভূমি তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী ভূ-রেখা ও উর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দেশ করে। এ তলকে উল্লম্বতল বলে।

চিত্রে, ভূমি তলের কোনো স্থান C থেকে CB দূরত্বে AB উচ্চতা বিশিষ্ট একটি গাছ খাড়া অবস্থায় দন্ডায়মান। এখানে CB রেখা হচ্ছে ভূ-রেখা, BA রেখা হচ্ছে উর্ধ্বরেখা এবং ABC তলটি ভূমির উপর লম্ব যা উল্লম্বতল।



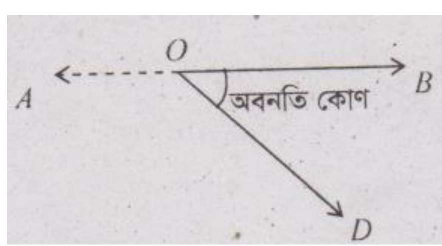
উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ :

উন্নতি কোণ: পাশের চিত্রে, AB সরলরেখাটি ভূ-রেখার সমান্তরাল। C বিন্দুটি AB সরলরেখার উপরে এবং O, B, C একই উল্লম্বতলে অবস্থিত। এখানে O বিন্দু হতে দৃষ্ট বিন্দু C। কাজেই, ∠COB ই O বিন্দুতে C বিন্দুর উন্নতি কোণ।



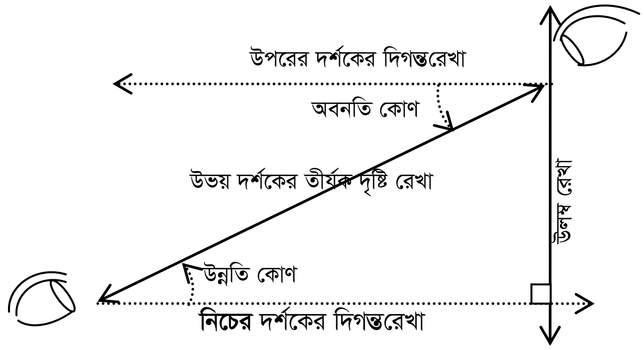
সুতরাং, ভূতলের উপরের কোনো বিন্দু ভূ-তলের রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে উন্নতি কোণ বলে।

অবনতি কোণ: পাশের চিত্রে, AB সরলরেখাটি ভূ-রেখার সমান্তরাল। D বিন্দুটি AB সরলরেখার নিচে এবং O, B, D একই উল্লম্বতলে অবস্থিত। এখানে, O বিন্দু হতে দৃষ্ট বিন্দু D। কাজেই, ∠BOD ই O বিন্দুতে D বিন্দুর অবনতি কোণ।



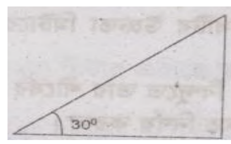
সুতরাং, ভূতলের সমান্তরাল রেখার নিচের কোনো বিন্দু ভূ-রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে অবনতি কোণ বলে।

উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণের একটি ধারণা চিত্র :

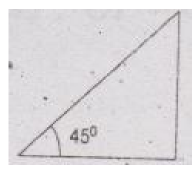


দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক সমস্যায় প্রদত্ত তথ্যকে সমকোণী ত্রিভুজে প্রকাশ করে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মাধ্যমে সমাধান করা হয়। সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আনুমানিক সঠিক চিত্র আবশ্যক। চিত্র অঙ্কনের সময় নিচের কৌশল অবলম্বন করা দরকার।

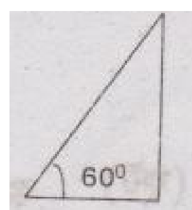
* 30° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে, ভূমি $>$ লম্ব হবে।
লম্ব = অতিভুজের অর্ধেক



* 45° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে, ভূমি = লম্ব হবে।

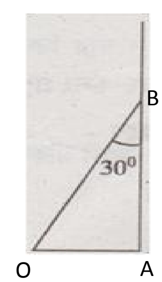


* 60° কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে, ভূমি $<$ লম্ব হবে।
ভূমি = অতিভুজের অর্ধেক



উদাহরণ ১। একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভাঙল যে তার ভাঙা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। গাছটির উচ্চতা কত?

সমাধান : পাশের চিত্রে, B বিন্দুতে গাছটি ভেঙে গিয়ে ভাঙা অংশ BO মাটিতে O বিন্দুতে স্পর্শ করেছে এবং গাছটির দন্ডায়মান অংশ AB.



এখানে, $\angle ABO = 30^\circ$ এবং AO = 10 মিটার।

এখন, $\tan 30^\circ = \frac{AO}{AB}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AB}$ মিটার

$\Rightarrow$। $AB = 10\sqrt{3}$ মিটার $= 10\times1.732$ মিটার (প্রায়)

$= 17.32$ মিটার (প্রায়)

আবার, $\sin 30^\circ = \frac{AO}{BO}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{BO}$ মিটার

$\Rightarrow BO = 20$ মিটার

সুতরাং = AB + BO = (17.32+20) মিটার (প্রায়)
= 37.32 মিটার (প্রায়)

∴ গাছটির উচ্চতা 37.32 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ২। ভূতলস্থ কোনো স্থানে একটি দালানের ছাদের একটি বিন্দুর উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 42 মিটার পিছিয়ে গেলে দালানের ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। দালানের উচ্চতা নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, দালানের উচ্চতা = h মিটার, শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 60^\circ$ এবং C স্থান থেকে CD = 42 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি $\angle ADB = 45^\circ$ হয়। ধরুন, BC = x মিটার।

$\therefore$ BD = BC + CD = (x+42) মিটার

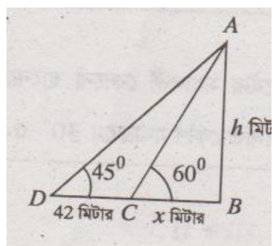
Δ ABC এ $\tan 60^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = x\sqrt{3}$ ... (i)

আবার, Δ ABD এ $\tan 45^\circ = \dfrac{AB}{BD}$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{h}{x+42}$ [$\because \tan 45^\circ = 1$]

$\Rightarrow h = x + 42$ ... (ii)



সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে, $x\sqrt{3} = x + 42$

$\Rightarrow x(\sqrt{3} - 1) = 42 \Rightarrow x = 42/(\sqrt{3} - 1)$

$\Rightarrow x \approx 42/.732 \approx 57.38$

$h = x\sqrt{3} \approx 57.38 \times 1.732 = 99.38$

$\therefore$ নির্ণেয় দালানটির উচ্চতা 99.38 মিটার (প্রায়)।

অনুশীলনী-৬.৬

১। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সেমিও 10 সেমিএবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

২। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে এর ক্ষেত্রফল 6 বর্গমিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

৩। একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা পরস্পর 135° কোণ করে দুই দিকে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে বিপরীত দিকে রওনা হলো। 4 ঘণ্টা পরে তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব কত হবে নির্ণয় করুন।

৪। একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের $\dfrac{3}{2}$ গুণ। এর ক্ষেত্রফল 384 বর্গমিটার হলে, পরিসীমা ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

৫। একটি বর্গাকার মাঠের বাইরে চারদিকে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল 500 বর্গমিটার হলে, মাঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

৬। একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। সামান্তরিকের ভূমি 125 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার হলে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

৭। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 91 সেমিও 51 সে.মি এবং অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 37 সেমিও 13 সে.মি.। ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

৮। একটি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের পার্থক্য 90 সেমি হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

৯। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি.। একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উক্ত বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান। বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

১০। একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস 26 মিটার। পার্কটিকে বেষ্টন করে বাইরে 2 মিটার প্রশস্থ একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

১১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 16 মিটার, প্রস্থ 12 মিটার ও উচ্চতা 4.5 মিটার। এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল, আয়তন ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

১২। কোনো ঘনকের পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য 8 সেমি হলে, এর কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় করুন।

১৩। একটি কোণকের উচ্চতা 12 সেমিও ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি.। কোনকটির তীর্যক উচ্চতা, বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

১৪। 14 সেমি উচ্চতা বিশিষ্ট একটি বেলনের ভূমির ব্যাস 8 সেমি বেলনটির বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

১৫। 4 সেমি ব্যাসের একটি লৌহ গোলককে গলিয়ে $\frac{2}{3}$ সেমি পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত তৈরি করা হলো। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ কত নির্ণয় করুন।

১৬। একটি মিনারের পাদদেশ হতে 20 মিটার দূরে ভূ-তলের কোনো বিন্দুতে মিনারের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° হলে, মিনারটির উচ্চতা কত?

১৭। 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

১৮। ভূ-তলের কোনো বিন্দুতে একটি দালানের ছাদের কোনো বিন্দুর উন্নতি কোণ 30°। ঐ স্থান থেকে দালানের দিকে 60 মিটার এগিয়ে গেলে ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। দালানটির উচ্চতা নির্ণয় করুন।

৬.৭ বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত (Algebraic Ratio and Proportion)

বাস্তব জীবনের অনেক সমস্যা অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা ব্যবহার করে খুব সহজেই সমাধান করা যায়। মানচিত্র ও নকশা অঙ্কন, আকৃতির হ্রাস- বৃদ্ধি, নির্মাণ সামগ্রী ও খাদ্য সামগ্রী তৈরিতে, জমিতে সার প্রয়োগে, ভোগ্য পণ্য উৎপাদনে, ব্যবসা-বাণিজ্য, লাভ-লোকসান, শতকরা হিসাব, অংশ বন্টন এবং দৈনন্দিন নানাবিধ কাজে অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা প্রয়োগ করা হয়ে থাকে। এজন্য অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা স্পষ্ট থাকা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এই ইউনিটের বিষয়বস্তুতে বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এই ইউনিটের বিষয়বস্তুর পাঠসমূহ

- অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা ও প্রয়োগ
- অনুপাতের রূপান্তর
- ধারাবাহিক অনুপাত ও সমানুপাতিক ভাগ।

অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা ও প্রয়োগ

অনুপাত (Ratio)

অনুপাত হলো একই একক বিশিষ্ট দুইটি রাশির মধ্যে তুলনা। সমজাতীয় দুইটি রাশির একটি অপরটির তুলনায় কত গুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ভগ্নাংশটিকে রাশি দুইটির অনুপাত বলা হয়।

দুইটি রাশি aও b এর অনুপাতকে $a : b = \frac{a}{b}$ লেখা হয়। a ও b রাশি দুইটি একই এককে প্রকাশিত হতে হবে। $a : b$ অনুপাতে a কে পূর্বরাশি (antecedent) এবং b কে উত্তররাশি (consequent) বলা হয়। অনুপাত একটি প্রকৃত বা অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। অনুপাতের কোন রাশিই শূন্য নয়।

যদি রফিক ও কামাল ঘণ্টায় যথাক্রমে 5 কিমি ও 3 কিমি দৌড়ায়, তবে তাদের গতিবেগের অনুপাত $= \frac{5}{3}$ অর্থাৎ রফিকের গতিবেগ কামালের গতিবেগের $\frac{5}{3}$ গুণ । সাধারণত একই একক বিশিষ্ট দুইটি পরিমাপের অনুপাত একটি একক বিহীন সংখ্যা, যা ভগ্নাংশ বা পূর্ণসংখ্যাও হতে পারে। তবে অনুপাত অমূলদও হতে পারে। বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত π, সোনালি অনুপাত φ এবং অনেক ত্রিকোণমিতিক অনুপাতই অমূলদ।

সমানুপাত (Proportion)

যদি চারটি রাশি এমন হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে একটি সমানুপাত গঠিত হয়। অর্থাৎ, উক্ত রাশি চারটি সমানুপাতী।

যদি a, b, c, d এমন চারটি রাশি হয়, যেন $a ∶ b = c ∶ d$ হয়, তবে তাদের সমানুপাতী বলা হয়।

সমানুপাতের ক্ষেত্রে চারটি রাশি একই জাতীয় না হলেও চলে । প্রত্যেক অনুপাতের রাশি দুইটি এক জাতীয় হলেই চলে। সমানুপাতের ১ম ও ৪র্থ রাশিকে প্রান্তীয় রাশি এবং ২য় ও ৩য় রাশিকে মধ্য রাশি বলা হয়।

কোন রাশির একাধিক পরিমাপের গুণভিত্তিক (কে কার কত গুণ) তুলনা হল অনুপাত। যেমন, দৈর্ঘ্য একটি রাশি; এর দুইটি পরিমাপ যদি হয় 4 সেমি ও 5 সেমি। তাদের তুলনা হল,

4 সেমি : 5 সেমি = 4×1 সেমি : 5×1 সেমি = 4 : 5;

তদ্রূপ সময় একটি রাশি; এর তিনটি পরিমাপ, 2 ঘন্টা, 3 ঘন্টা ও 60 মিনিট। এদের অনুপাত হবে,

2ঘন্টা : 3ঘন্টা : 60মিনিট = 2 ঘন্টা : 3 ঘন্টা : 1 ঘন্টা = 2 : 3 : 1;

একই রাশির পরিমাপ বিভিন্ন ছোটবড় এককে থাকলে, একই এককে পরিণত করে, সাধারণ একক উঠিয়ে অনুপাতকে একক মুক্ত করা হয়।

দুইটি রাশির পরিবর্তন যদি এমন হয় যে, ভিন্ন ভিন্ন ক্ষেত্রে তাদের পরিমাপের তুল্যমান বা অনুপাত সমান থাকে, তবে তা হল সমানুপাত। যেমন, 2 লিটারের পানির বোতলের দাম 30 টাকা এবং 3লিটার বোতলের দাম 45 টাকা।

এখানে দুইটি রাশি; পানির পরিমাণ এবং পানির দাম। পরিমাণ ও দাম সমানুপাতিক হবে যদি, উভয় ক্ষেত্রের তুল্য মান সমান হয়।

উভয় ক্ষেত্রে পানির পরিমাণের তুলনা, 2 লিটার : 3লিটার = 2 : 3

দামের তুলনা, 30 টাকা : 45 টাকা = 30 : 45 = 2 : 3

সুতরাং এখানে উভয় ক্ষেত্রে পানির পরিমাণ ও দাম সমানুপাতিক।

আবার দামকে পরিমাণ দ্বারা ভাগ করে লিটার প্রতি দর বের করেও তা দেখান যায়:

প্রথম ক্ষেত্রে, 30 টাকা/2 লিটার = 15 টাকা/লিটার

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, 45 টাকা/3লিটার = 15টাকা/ লিটার

দেখা যায় উভয় ক্ষেত্রেই পানির দর সমান

$\Rightarrow$ 30 : 45 = 2 : 3

$\Rightarrow$ 30 : 45 : : 2 : 3;

শতকরাও একটি অনুপাত, যার উত্তর রাশি 100. সুতরাং অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করতে হলে, উত্তর রাশিকে 100 তে রূপান্তর করতে হয়। অথবা অনুপাত থেকে প্রাপ্ত ভগ্নাংশকে 100% দ্বারা গুণ করতে হয়।

উদাহরণ ১। 4 ∶ 5 অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করুন।

সমাধান: $4 ∶ 5 = \frac{4}{5} = \frac{4\times20}{5\times20} = \frac{80}{100} = 80\%$

অথবা $4 : 5 = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}\times100\% = 80\%$ অথবা 4 : 5 = 80 : 100 = 80%

উদাহরণ ২। $x ∶ y = 5 ∶ 6$ হলে, $3x ∶ 5y =$ কত?

সমাধান : দেওয়া আছে,

$x ∶ y = 5 ∶ 6 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{x}{y}\times\frac{3}{5} = \frac{5}{6}\times\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3x}{5y} = \frac{1}{2}$

$\therefore 3x ∶ 5y = 1 ∶ 2$

উদাহরণ ৩। একটি গোলাকার ফ্রেম মেপে ব্যাস পাওয়া গেল 14.1 সেমি এবং পরিধি 44.3 সেমি। অপর একটি ফ্রেমের ব্যাস 21.2 সেমি এবং পরিধি 66.6 সেমি। এ তথ্য থেকে দেখান যে, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাস সমানুপাতিক। সে অনুপাতকে π দ্বারা নির্দেশ করা হলে, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান কত?

প্রথম ফ্রেমের ক্ষেত্রে, পরিধি $P = 44.3$ সেমি এবং ব্যাস $D = 14.1$ সেমি

পরিধি ও ব্যাসে অনুপাত, $P : D = 44.3$ সেমি $: 14.1$ সেমি $= 443 : 141 = 3.1418 \approx 3.142$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সে অনুপাত, $P : D = 66.6$ সেমি $: 21.2$ সেমি $= 666 : 212 = 3.1415 \approx 3.142$

সুতরাং উভয় ক্ষেত্রে অনুপাতের মান সমান $\Rightarrow$ বৃত্তের পরিধি ও ব্যাস সমানুপাতিক। এবং এ অনুপাত π দ্বারা নির্দেশ করা হয় বলে, $\pi \approx 3.142$

ক্রমিক সমানুপতী

যদি এক জাতীয় তিনটি রাশি এরূপ হয় যে,

১ম : ২য় = ২য় : ৩য়, তাহলে ঐ তিনটি রাশিকে ক্রমিক সমানুপাতী বলা হয়।

তিনটি রাশি a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী বলতে বোঝায় $a : b = b : c$

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হবে যদি এবং কেবল যদি $b^2 = ac$ হয়।

অর্থাৎ, তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হলে প্রান্ত রাশিদ্বয়ের গুণফল, মধ্যরাশির বর্গের সমান। ক্রমিক সমানুপাতের ক্ষেত্রে সবগুলো রাশি এক জাতীয় হতে হবে। এক্ষেত্রে c কে aও b এর তৃতীয় সমানুপাতী এবং b কে a ও c এর মধ্য সমানুপাতী বলা হয়।

অনুপাতের রূপান্তর (Transformation of ratios)

এখানে অনুপাতের রাশিগুলো ধনাত্মক সংখ্যা,

(১) ব্যস্তকরণ (Invertendo):

$a : b = c : d$ হলে, $b : a = d : c$ হবে।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $a : b = c : d \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\Rightarrow ad = bc$ [উভয় পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করে] [a, b, c, d এর কোনোটিই শূন্য নয় ধর্তব্য]

$\Rightarrow bc = ad$

$\Rightarrow \frac{bc}{ac} = \frac{ad}{ac}$ [উভয় পক্ষকে ac দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \therefore b : a = d : c$

(২) একান্তরকরণ (Alternendo) :

$a : b = c : d$ হলে, $a : c = b : d$ হবে।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $a : b = c : d \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\Rightarrow ad = bc$ [আড়গুণন করে]

$\Rightarrow \frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$ [উভয়পক্ষকে cd দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow a : c = b : d.$

(৩) যোজন(Compodnendo) :

$a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ হবে।

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ [উভয় পক্ষে1 যোগ করে]

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

(৪) বিয়োজন (Dividendo) :$a : b = c : d$ হলে, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ হবে।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ [উভয় পক্ষে 1 বিয়োগ করে]

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

(৫) যোজন-বিয়োজন (Componendo-Dividendo) :

$a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ হবে।

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $a : b = c : d$ বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

সুতরাং যোজন করে পাওয়া যায়,

$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ... (i)

আবার, বিয়োজন করে পাওয়া যায়,

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$... (ii)

(i) নং এবং (ii) নং এর অনুপাত থেকে পাওয়া যায়,

$$\frac{a+b}{b} / \frac{a-b}{b} = \frac{c+d}{d} / \frac{c-d}{d}$$

$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

(৬) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

প্রমাণ : মনে করুন, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$

$$\therefore a = bk, c = dk, e = fk, g = hk$$

এখন, $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{bk+dk+fk+hk}{b+d+f+h} = \frac{k(b+d+f+h)}{b+d+f+h} = k$

কিন্তু k প্রদত্ত সমানুপাতের প্রত্যেকটি অনুপাতের সমান।

সুতরাং, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

উদাহরণ ৫। $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}-\sqrt{5-x}}=5$ হলে, x এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}-\sqrt{5-x}}=5$

$\therefore\ \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}+\sqrt{5}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}-\sqrt{5}+\sqrt{5-x}}=\frac{5+1}{5-1}$ [5 হর 1 ধরে যোজন-বিয়োজন]

$\Rightarrow\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5-x}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-x}}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \frac{5}{5-x}=\frac{9}{4}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow 5\times 4=9(5-x)\Rightarrow 20=45-9x\Rightarrow 9x=45-20=25$

$\therefore x=\frac{25}{9}=2\frac{7}{9}$

উদাহরণ ৬। একটি সমীকরণ: $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1,$ এবং আরোপিত শর্ত $0<b<2a<2b.$

ক. সমীকরণটি সরল করলে, এটি কত ঘাতের সমীকরণ হবে এবং তার সম্ভাব্য বীজের সংখ্যা কত?
খ. সমীকরণটি সমাধান করুন।
গ. আরোপিত শর্তের যথার্থতা যাচাই করুন।
সমাধান:
ক. সমীকরণটি সরল করলে ত্রিঘাত সমীকরণে পরিণত হবে এবং তার সম্ভাব্য বীজ হবে 3 টি।

খ. দেওয়া আছে, $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$

$\Rightarrow\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=\frac{1+ax}{1-ax}\Rightarrow\frac{1+bx}{1-bx}=\frac{(1+ax)^2}{(1-ax)^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow\frac{1+bx}{1-bx}=\frac{1+2ax+a^2x^2}{1-2ax+a^2x^2}$

$\Rightarrow\frac{1+bx+1-bx}{1+bx-1+bx}=\frac{1+2ax+a^2x^2+1-2ax+a^2x^2}{1+2ax+a^2x^2-1+2ax-a^2x^2}$ [5 এর 1 ধরে যোজন-বিয়োজন]

$\Rightarrow\frac{2}{2bx}=\frac{2+2a^2x^2}{4ax}\Rightarrow\frac{1}{bx}=\frac{1+a^2x^2}{2ax}$

$\Rightarrow 2ax=bx(1+a^2x^2)\Rightarrow 2ax-bx(1+a^2x^2)=0$

$\Rightarrow x\{2a-b(1+a^2x^2)\}=0$

$\Rightarrow x=0$ অথবা, $2a-b(1+a^2x^2)=0$

$\therefore$ একটি সমাধান $x=0$

এখন, $2a-b(1+a^2x^2)=0$

$\Rightarrow b(1+a^2x^2)=2a\Rightarrow 1+a^2x^2=\frac{2a}{b}$

$\Rightarrow a^2x^2 = \frac{2a}{b} - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2a}{b} - 1\right)$

$$x = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}.$$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0,\ x = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}.$

গ. আরোপিত শর্তের যথার্থতা যাচাই: x এর পরের দুটি মান বাস্তব হওয়ার জন্য হরের রাশি $a, b \neq 0$, এবং বর্গমূলের ভেতরের রাশি $2a/b - 1 \geq 0$; কিন্তু $2a/b - 1 = 0$ হলে, ২য়/তৃতীয় মানের অস্তিত্ব থাকে না; প্রথম মানের সমান শূন্য হয়ে যায়।

∴ $2a/b > 1 \Rightarrow 2a > b$,যখন $b > 0 \Rightarrow 0 < b < 2a$ ... (i)

আবার যেহেতু দুইটি বাস্তব রাশির সম্ভাব্য তিনটি সম্পর্ক: $a = b$, $a < b$ অথবা $a > b$;

এ থেকে একটি সম্পর্ক $a < b$ নিয়ে পাই, $2a < 2b$ ... (ii)

এখন, (i) ও (ii) সমন্বয় করে পাই, $0 < b < 2a < 2b$, এটিই প্রদত্ত বা আরোপিত শর্ত;

∴ প্রদত্ত শর্ত যথার্থ ।

কাজ: একই রাশির দুইটি পরিমাপের গুণভিত্তিক তুলনা হল অনুপাত এবং দুইটি চলকের অনুপাত ধ্রুব হলে তা হয় সমানুপাত –ব্যাখ্যা করুন।

ধারাবাহিক অনুপাত ও অংশানুপাত

ধারাবাহিক অনুপাত (Successive Ratio)

মনে করুন, ক এর আয় 500 টাকা, খ এর আয় 1000 টাকা এবং গ এর আয় 1500 টাকা।

এখানে, ক এর আয় ঃ খ এর আয় = 500 ঃ 1000 = 1 ঃ 2

খ এর আয় ঃ গ এর আয় = 1000 ঃ 1500 = 2 ঃ 3

∴ আয়ের প্রেক্ষিতে, ক ঃ খ ঃ গ = 1 ঃ 2 ঃ 3

সুতরাং দুইটি অনুপাত যদি ক ঃ খ এবং খ ঃ গ আকারের হয় এবং যদি উভয় অনুপাতের সাধারণ রাশি খ এর মান উভয় ক্ষেত্রে সমান হয়, তবে তাদেরকে ক ঃ খ ঃ গ আকারে লেখা যায়, একে ধারাবাহিক অনুপাত বা বহু রাশিক অনুপাত বলা হয়। যেকোনো দুইটি বা ততোধিক দ্বিরাশিক অনুপাতকেই ধারাবাহিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়।

এখন, $3 : 4 = \frac{3}{4} = \frac{3\times5}{4\times5} = \frac{15}{20} = 15 : 20$

এবং $5 : 6 = \frac{5}{6} = \frac{5\times4}{6\times4} = \frac{20}{24} = 20 : 24$

∴ 3 ঃ 4 এবং 5 ঃ 6 অনুপাত দুইটি $a : b : c$ আকারে হবে 15 ঃ 20 ঃ 24

প্যাটার্ন অনুসরণ করে ধারাবাহিক অনুপাত নির্ণয়: যদি n সংখ্যক (দুই বা ততোধিক) দ্বিরাশিক অনুপাতে ক্রমান্বয়ে একটি করে রাশি সাধারণ (common) থাকে তবে ধারাবাহিক অনুপাতে n+1 সংখ্যক রাশি থাকবে। যেমন, a ঃ b = 2 ঃ 3, b ঃ c = 4 ঃ 5, c ঃ d = 6 ঃ 7 হয়, তবে এ তিনটি অনুপাত থেকে চার রাশির ধারাবাহিক অনুপাত হবে। ধারাবাহিক অনুপাত নির্ণয়ের প্যাটার্ন লক্ষ করুন:

a ঃ b = 2 ঃ 3
b ঃ c = 4 ঃ 5
c ঃ d = 6 ঃ 7
a ঃ b = 2 ঃ 3

প্রথমে ক্রমান্বয়ে সকল অণুপাত নিচে নিচে লিখে প্রথমটি পুনলিখন সকল পূর্বরাশির গুণ, এরপর h আকারে ১ম পূর্বরাশি ছেড়ে ১ম উত্তর রাশির গুণ এরপর ২টি পূ: রা: ছেড়ে দুইটি উত্তর রাশির সংশ্লেষ এভাবে চলে শেষে সকল উত্তর রাশি গুণ।

$\Rightarrow$ a ঃ b ঃ c ঃ d = $\underline{2}\times4\times6\times2$ ঃ $4\times6\times\underline{2}\times3$ ঃ $6\times\underline{2}\times3\times5$ ঃ $\underline{2}\times3\times5\times7$ ঃ $3\times5\times7\times3$

$\Rightarrow$ a ঃ b ঃ c ঃ d = $2\times4\times2\times2$ ঃ $4\times6\times2$ ঃ $6\times2\times5$ ঃ $2\times5\times7$ ঃ $5\times7\times3$ [উৎপাদক ৩ এর অপনয়ন]

$\Rightarrow$ a ঃ b ঃ c ঃ d = 32 ঃ 48 ঃ 60 ঃ 70 ঃ 105

উদাহরণ ৭। একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 36 সেমি । বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 ঃ 4 ঃ 5 হলে, প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 ঃ 4 ঃ 5

মনে করুন, বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সাধারণ উৎপাদক x

$\therefore$ ১ম টির দৈর্ঘ্য $3x$ সেমি, ২য় টির দৈর্ঘ্য $4x$ সেমি এবং ৩য় টির দৈর্ঘ্য $5x$সেমি

প্রশ্নানুসারে, $3x + 4x + 5x = 36 \Rightarrow 12x = 36 \Rightarrow x = 3$ [12 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ত্রিভুজের বাহু তিনটির

১মটির দৈর্ঘ্য 3×3 বা 9 সেমি, ২য়টির দৈর্ঘ্য 4×3 বা 12 সেমি এবং ৩য় টির দৈর্ঘ্য 5×3 বা 15সেমি

অংশানুপাত (Partial Ratio)

একটি অনুপাতে দুইটি বা তার অধিক অনুপাত সংখ্যা থাকে। প্রত্যেক অনুপাত সংখ্যাকে এদের সমষ্টি দ্বারা ভাগ করে যে যে প্রকৃত ভগ্নাংশ পাওয়া যায়, এদের অনুপাতই অংশানুপাত। অংশানুপাতের অংশসমূহের সমষ্টি হয় ১ যা দ্বারা বন্টনযোগ্য সমগ্র রাশিকে বোঝায়। অংশানুপাত মূল অনুপাতের সমতুল একটি অনুপাত। যেমন, একটি রাশি S; তাকে a : b : c : d অনুপাতে বিভক্ত করতে হবে।

প্রদত্ত অনুপাত, a : b : c : d = $\frac{a}{a+b+c+d} : \frac{b}{a+b+c+d} : \frac{c}{a+b+c+d} : \frac{d}{a+b+c+d}$ [সমতুল অংশানুপাত]

অতএব, ১ম অংশ $= S$ এর $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{Sa}{a+b+c+d}$; ২য় অংশ$= S$ এর $\frac{b}{a+b+c+d} = \frac{Sb}{a+b+c+d}$

৩য় অংশ$= S$ এর $\frac{c}{a+b+c+d} = \frac{Sc}{a+b+c+d}$, ৪র্থ অংশ$= S$ এর $\frac{d}{a+b+c+d} = \frac{Sd}{a+b+c+d}$

এভাবে যেকোনো রাশিকে যেকোনো সংখ্যক নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করা যায়।

উদাহরণ ৮। 6000 টাকা a, b, c ও d এর মধ্যে 3 ঃ 5 ঃ 8 ঃ 9 অনুপাতে ভাগ করলে কে কত পাবে ?

সমাধানঃ 6000 টাকাকে 3 ঃ 5 ঃ 8 ঃ 9 অনুপাতে ভাগ করতে হলে 6000 টাকাকে মোট $(3 + 5 + 8 + 9) = 25$ ভাগ করে যথাক্রমে $3, 5, 8, 9$ ভাগ নিতে হবে। তাদের টাকার আংশিক অনুপাত যথাক্রমে $\frac{3}{25}$ ঃ $\frac{5}{25}$ ঃ $\frac{8}{25}$ ঃ $\frac{9}{25}$

সুতরাং, a পাবে 6000 টাকার $\frac{3}{25} =$ 720 টাকা

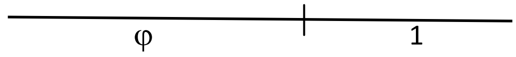
b পাবে 6000 টাকার $\frac{5}{25} =$ 1200 টাকা

c পাবে 6000 টাকার $\frac{8}{25} =$ 1920 টাকা

d পাবে 6000 টাকার $\frac{9}{25} =$ 2160 টাকা

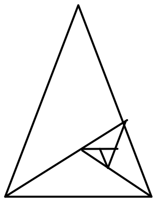
সোনালি অনুপাত(φ)ঃ একটি নির্দিষ্ট সমানুপাত থেকেই এসেছে সোনালি অনুপাত। কোনো রাশির দুইটি অংশের পরিমাপ a ও b যদি এরূপ হয় যে, বড়টির সাথে ছোটটির অনুপাত এবং এদের সমষ্টির সাথে বড়টির অনুপাত সমান হয়, তবে এ সমানুপাতকে সোনালি সমানুপাত বলেঃ $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

এই ক্ষেত্রে একটি অনুপাতের ছোট অংশকে একক ধরা হলে বড় অংশটি একটি অমূলদ সংখ্যা হয় যাকে φ (ফাই) দ্বারা নির্দেশ করা হয়; এটাই সোনালি অনুপাত। তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত φ এর আসন্ন মূলদ মান ১.৬১৮।

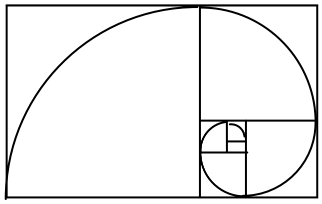


$\varphi : 1 = (\varphi + 1) : \varphi \Rightarrow \varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

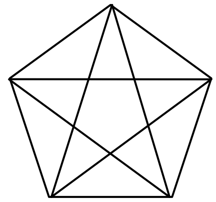
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বড়-ছোট বাহু সোনালি অনুপাতে থাকলে তাকে সোনালি ত্রিভুজ বলে। সোনালি ত্রিভুজের অভ্যন্তরে ক্রমান্বয়ে সোনালি ত্রিভুজ আঁকা যায়। আয়তের দৈর্ঘ্য-প্রস্থ সোনালি অনুপাতে থাকলে তাকে সোনালি আয়ত বলে।



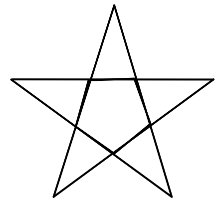
সোনালি ত্রিভুজ



সোনালি আয়ত

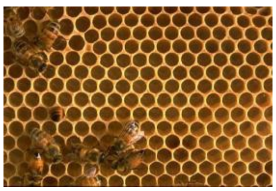


সুসম পঞ্চভুজ



পঞ্চগ্রাম

সুষম পঞ্চগ্রামের রেখাংশগুলো প্রত্যেক ছেদবিন্দুতে সোনালি অনুপাতে বিভক্ত এবং ত্রিভুজগুলো সোনালি ত্রিভুজ। সৃষ্টির পরতে পরতে সোনালি অনুপাত পরিলক্ষিত হয়।



অনুশীলনী-৬.৭

সঠিক উত্তরের পাশে টিক $(\surd)$ চিহ্ন দিন (১-৭) :

১।a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) $a^2 = bc$ (খ) $b^2 = ac$ (গ) $ab = bc$ (ঘ) $c^2 = ab$

২। (i) $a:b = b:c$ হলে, $ac = b^2$

(ii) $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ হলে, $\frac{x+y}{y} = \frac{p+q}{q}$

(iii) $m:n = x:y$ হলে, $mx = ny$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৩। $x:y = 5:6$ হলে, $2x:3y =$ কত?

(ক) $5:3$ (খ) $5:8$ (গ) $5:9$ (ঘ) $5:11$

৪। $3:4$ অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করলে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) 70% (খ) 75% (গ) 80% (ঘ) 85%

৫। দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a এবং b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

৬। দুইটি ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার ও b মিটার এবং উচ্চতা h মিটার। ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করুন।

৭। মা ও মেয়ের বয়সের সমষ্টি 45 বছর। 5 বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত হবে $8:3$। তাদের বর্তমান বয়স কত?

৮। $\frac{x+y-z}{x+y} = \frac{y+z-x}{y+z} = \frac{z+x-y}{z+x}$ এবং $x + y + z \neq 0$ হলে, দেখান যে, $x = y = z$.

৯। $\frac{x^3+y^3}{x+y} = x(x-y+z)$ হলে, দেখান যে,x, y, zক্রমিক সমানুপাতী।

১০। একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর অনুপাত 3 : 4 : 5 এবং পরিসীমা ৩৬ সেমি।

(ক) ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর পরিমাপ কত?

(খ) কোণ ও বাহু ভেদে এটি কি ধরনের ত্রিভুজ? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দিন। এ ত্রিভুজের সদৃশ দুইটি ভিন্ন ত্রিভুজের বাহুর পরিমাপ লিখুন।

(গ) প্রদত্ত অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাতের বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজ আঁকা কি সম্ভব? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দিন। সম্ভব হলে, অনুরূপ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের পরিমাপ নির্ণয় করুন।

১১। একটি আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 12 হেক্টর এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 500 মিটার। এ জমির দৈর্ঘ্য এবং দ্বিতীয় একটি জমির প্রস্থ পরস্পর সমান। উভয় জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3 ঃ 4 এবং 2 ঃ 5।

(ক) প্রথম জমিটির ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?

(খ) প্রথম জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।

(গ) দ্বিতীয় জমির সমান ক্ষেত্রের একটি বর্গাকার জমির বাহুর পরিমাপ নির্ণয় করুন।

৬.৮ পরিসংখ্যান

বর্তমান সময়কে তথ্য প্রযুক্তির যুগ বলা হয়। দ্রুত পরিবর্তনশীল বিশ্বের চ্যালেঞ্জ মোকাবেলায় ও বিজ্ঞান প্রযুক্তির উন্নয়নে পরিসংখ্যানের গুরুত্ব অপরিসীম। পরিসংখ্যান হলো কোনো ঘটনার সংখ্যাত্মক তথ্য। অর্থাৎ সংখ্যাবাচক তথ্যই হলো পরিসংখ্যান। উন্নয়নের ধারা অব্যাহত রাখতে তথ্য সম্পর্কে সম্যক জ্ঞান থাকা প্রয়োজন। কারণ তথ্যের ধারাবাহিকতা সমাজ উন্নয়নের মূল চাবিকাঠি। পরিসংখ্যানিক তথ্য সম্পর্কে জানার জন্য এই ইউনিটের বিষয়বস্তুতে বিভিন্ন ধরনের তথ্য বিশ্লেষণ, লেখচিত্রে উপস্থাপন ও ব্যাখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা অঙ্কন, কেন্দ্রীয় প্রবণতা (গড়, মধ্যক, প্রচুরক) সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

তথ্য ও উপাত্ত

তথ্যনির্ভর বিশ্বে প্রতিনিয়ত আপনারা বিভিন্ন তথ্যের সম্মুখীন হন এবং এর ব্যাপক ব্যবহার দেখতে পান। যেমন, শিক্ষক প্রতিদিন অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীদের হাজিরা রাখেন। আবার, কোনো পরীক্ষার শেষে শিক্ষক শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বর সংরক্ষণ করেন এবং এর উপর ভিত্তিক করে তাদের দুর্বলতা চিহ্নিত করেন ও তা দূরীকরণের জন্য প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা গ্রহণ করেন। এছাড়াও দৈনিক পত্রিকা, রেডিও, টেলিভিশন ইত্যাদি গণমাধ্যম থেকে আবহাওয়া, খেলাধূলা, বাজারদর ইত্যাদি সম্পর্কে বিভিন্ন তথ্য পাওয়া যায়।

সংখ্যাভিত্তিক কোনো তথ্য বা ঘটনা হচ্ছে একটি পরিসংখ্যান। আর তথ্য বা ঘটনা নির্দেশক সংখ্যাগুলো হচ্ছে পরিসংখ্যানের উপাত্ত। যে উপাত্ত সহজে সরাসরি উৎস থেকে সংগ্রহ করা যায়, সে উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা অনেক বেশি। যেমন, ৫০ নম্বরের কোনো প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষায় ২০ জন অংশগ্রহণকারীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর হলো: ২০, ২৫, ৪০, ৩৫, ৩০, ৪৫, ৪০, ৪১, ৩০,২৫, ৪৬, ৩৫, ২০, ৪২, ৩০, ৪৫, ৪৫, ৫০, ৩০, ৪৭। এখানে, গণিতে প্রাপ্ত সংখ্যা নির্দেশিত নম্বরসমূহ একটি পরিসংখ্যান। আর নম্বরগুলো হচ্ছে এ পরিসংখ্যানের উপাত্ত।

সরাসরি উৎস থেকে সংগৃহীত হয় এমন উপাত্ত হলো প্রাথমিক উপাত্ত। পরোক্ষ উৎস থেকে সংগৃহীত হয় এমন উপাত্ত হলো মাধ্যমিক উপাত্ত, যার নির্ভরযোগ্যতা অনেক কম। উপরে বর্ণিত গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলো এলোমেলোভাবে আছে। নম্বরগুলো মানের কোনো ক্রমে সাজানো নেই। এ ধরনের উপাত্ত হলো অবিন্যস্ত উপাত্ত। অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না।

উপাত্তের নম্বরগুলো মানের যেকোনো ক্রমে সাজালে হবে ক্রমবিন্যস্ত উপাত্ত। নম্বরগুলো মানের নিম্নক্রমে সাজালে হয় ৫০, ৪৭, ৪৬, ৪৫, ৪৫, ৪৫, ৪২, ৪১, ৪০, ৪০, ৩৫, ৩৫, ৩০, ৩০, ৩০, ৩০, ২৫, ২৫, ২০, ২০ যা একটি বিন্যস্ত উপাত্ত। অবিন্যস্ত উপাত্ত এভাবে বিন্যস্ত করা বেশ জটিল এবং ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থেকে যায়। শ্রেণিবিন্যাসের মাধ্যমে অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ অতিসহজে বিন্যস্ত উপাত্তে রূপান্তর করা যায় এবং গণসংখ্যা সারণির সাহায্যে উপস্থাপন করা হয়।

কোনো উপাত্ত সারণিভুক্ত করতে হলে প্রথম তার পরিসর নির্ধারণ করতে হয়। এরপর শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করে ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হয়।

উপরে বর্ণিত বিবেচনাধীন উপাত্তের পরিসর, শ্রেণিব্যাপ্তি ও শ্রেণিসংখ্যা নিচে দেওয়া হলো:

পরিসর = (উপাত্তের সর্বোচ্চ সাংখ্যিক মান – সর্বনিম্ন সাংখ্যিক মান) + ১ = (৫০ – ২০) + ১ = ৩১

শ্রেণিব্যাপ্তি/ শ্রেণি ব্যবধান ধরা যায় ৫। তাহলে, শ্রেণিসংখ্যা হবে $\frac{৩১}{৫}$= ৬.২, যার পরবর্তী পূর্ণসংখ্যা ৭।

অতএব শ্রেণি সংখ্যা ৭।

উপরের আলোচনার প্রেক্ষিতে বর্ণিত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি প্রস্তুত করা হলো:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	ঘটনসংখ্যা বা গণসংখ্যা
২০ - ২৪	II	২
২৫ - ২৯	II	২
৩০ - ৩৪	IIII	৪
৩৫ - ৩৯	II	২
৪০ - ৪৪	IIII	৪
৪৫ - ৪৯	$\cancel{\text{IIII}}$	৫
৫০ - ৫৪	I	১
মোট =	২০	২০

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা (Cumulative Frequency): শ্রেণিগুলোর গণসংখ্যাকে পর্যায়ক্রমে যোগ করে স্থাপন করলে তাকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা বলা হবে।

উপরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরে শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করা হয়েছে। উল্লিখিত উপাত্তের শ্রেণি সংখ্যা ৭। প্রথম শ্রেণির সীমা হলো ২০ - ২৪ । এই শ্রেণির নিম্নসীমা ২০ এবং উচ্চসীমা ২৪। এই শ্রেণির গণসংখ্যা ২।

দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা ২। এখন প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা ২ এর সাথে দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা ২ যোগ করে পাওয়া যাবে ৪। এই ৪ হবে দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। আর প্রথম শ্রেণি দিয়ে শুরু হওয়ায় এই শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হবে ২। আবার দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা ৪ এর সাথে তৃতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা যোগ করলে ৪+৪ = ৮, যা তৃতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। এভাবে পর্যায়ক্রমে পরবর্তী শ্রেণিগুলোর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নির্ণয় করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করতে হয়।

উপরের আলোচনার প্রেক্ষিতে গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলোর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি নিম্নরূপ:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
২০ - ২৪	২	২
২৫ - ২৯	২	২ + ২ = ৪
৩০ - ৩৪	৪	৪ + ৪ = ৮
৩৫ - ৩৯	২	৮ + ২ = ১০
৪০ - ৪৪	৪	১০ + ৪ = ১৪
৪৫ - ৪৯	৫	১৪ + ৫ = ১৯
৫০ - ৫৪	১	১৯ + ১ = ২০

চলক/চল (Variable) : আপনারা জানেন, সংখ্যাসূচক তথ্যসমূহ পরিসংখ্যানের উপাত্ত। উপাত্তে ব্যবহৃত সংখ্যাসমূহ হলো চলক। যেমন, গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলো ব্যবহৃত উপাত্তের চলক।

বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক (Discrete and Indiscrete Variable) : পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত চলক দুই প্রকারের হয়। বিচ্ছিন্ন চলক ও অবিচ্ছিন্ন চলক। যে চলকের মান কেবল পূর্ণসংখ্যায় প্রকাশ করা হয়, তাকে বিচ্ছিন্ন চলক বলে। যেমন, উপরে বর্ণিত উদাহরণে ব্যবহৃত গণিতে প্রাপ্ত নম্বর। জনসংখ্যা নির্দেশক উপাত্তে পূর্ণসংখ্যা ব্যবহৃত হয়। তাই জনসংখ্যামূলক উপাত্তের চলক হচ্ছে বিচ্ছিন্ন চলক।

যে চলক পূর্ণসংখ্যাসহ যেকোনো ভগ্নাংশ মানও গ্রহণ করে, তাকে অবিচ্ছিন্ন চলক বলে। অবিচ্ছিন্ন চলকের মান যেকোন বাস্তব সংখ্যা হতে পারে বলে, তা বাস্তব সংখ্যার ব্যবধিতে প্রকাশ করা হয়: $5 \le x \le 6,\ 0 \le x < \infty$ ইত্যাদি।

লোকসংখ্যা বিচ্ছিন্ন চলক; কিন্তু বয়স, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি অবিচ্ছিন্ন চলক।

তথ্য বা উপাত্তের লেখচিত্র

তথ্য বা উপাত্ত লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন একটি বহুল প্রচলিত এবং ব্যাপক ব্যবহৃত পদ্ধতি। কোনো পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত উপাত্তসমূহ লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপিত হলে, তা বোঝার জন্য ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য যেমন সহজ হয় তেমনি চিত্তাকর্ষকও হয়। অনুসন্ধানাধীন সংগৃহীত উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না। তাই এগুলো গণসংখ্যা নিবেশন সারণিভুক্ত বা ক্রমযোজিত সারণিভুক্ত করা হলে এদের সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করা ও সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা সহজ হয়।

সারণিভুক্ত উপাত্তসমূহ যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বোঝার জন্য ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য খুব সুবিধাজনক হয়। আবার, চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপিত উপাত্ত চিত্তাকর্ষকও হয়। এখানে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি থেকে কীভাবে গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা আঁকা হয় তা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

গণসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon)

অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের শ্রেণি ব্যবধানের বিপরীতে গণসংখ্যা নির্দেশক বিন্দুসমূহকে পর্যায়ক্রমে রেখাংশ দ্বারা যুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায়, তাই হলো গণসংখ্যা বহুভুজ।

উদাহরণ ১। কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করুন।

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

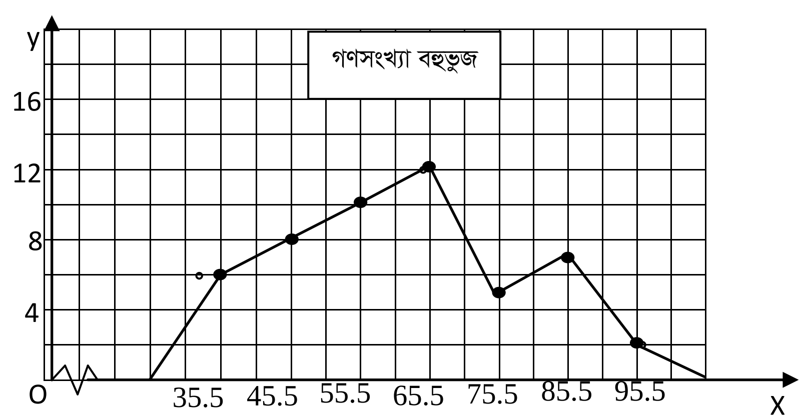
সমাধান: এখানে প্রদত্ত উপাত্ত বিচ্ছিন্ন। শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু বের করে সরাসরি গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা সুবিধাজনক।

শ্রেণি ব্যবধান	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
মধ্যবিন্দু	$\frac{40+31}{2} = 35.5$	45.5	55.5	65.5	75.5	85.5	95.5
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

ছক কাগজের (Graph Paper) x অক্ষ বরাবর প্রতি ৪ ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দুর ১০ একক ধরে এবং y অক্ষ বরাবর ১ ঘরকে গণসংখ্যার ২ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো।

চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়েছে।

গণসংখ্যা বহুভুজ সুন্দর দেখানোর জন্য প্রথম শ্রেণির মধ্যবিন্দু ও শেষ শ্রেণির মধ্যবিন্দুদ্বয়কে শ্রেণি ব্যবধান নির্দেশক x অক্ষের সাথে সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হলো।



ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখচিত্র বা অজিভ রেখা

কোনো উপাত্তের শ্রেণি বিন্যাসের পর শ্রেণি ব্যাপ্তির বা শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমা x অক্ষ বরাবর এবং শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা y অক্ষ বরাবর স্থাপন করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার লেখচিত্র বা অজিভ রেখা পাওয়া যায়।

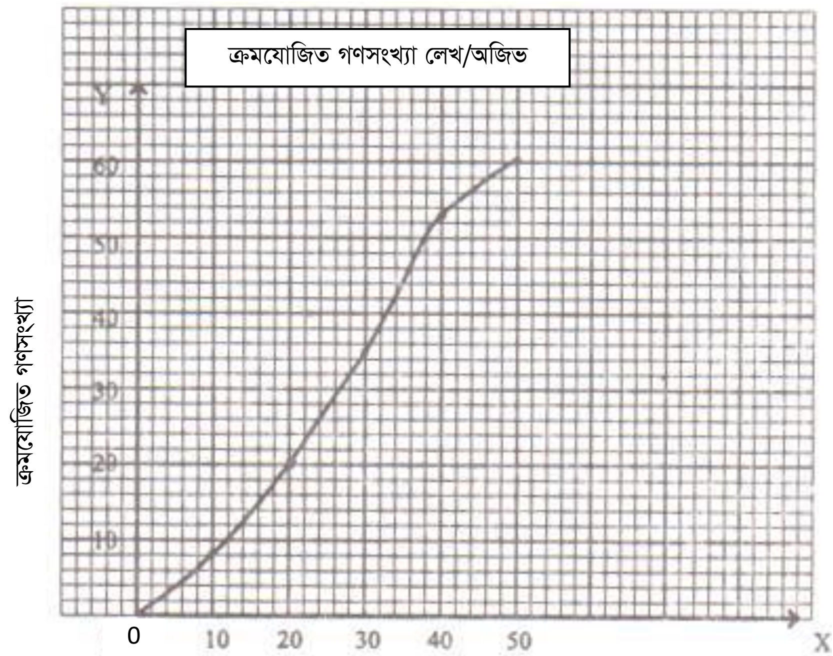
উদাহরণ ২। কোনো বিদ্যালয়ের ৮ম শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ৫০ নম্বরের ১ম সাময়িকী পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো:

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	1 - 10	11 - 20	21 - 30	31 – 40	41 - 50
গণসংখ্যা	8	12	15	18	7

এই গণসংখ্যা নিবেশনের অজিভ রেখা আঁকুন।

সমাধান: প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশনের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হলো :

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	1 - 10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
গণসংখ্যা	8	12	15	18	7
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	8	20=(12+8)	35=(15+20)	53=(18+35)	60=(7+53)



x অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি দুই ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমার একক এবং y অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার 5 একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অজিভ রেখা আঁকা হয়েছে।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা

অনুসন্ধানাধীন অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে দেখা যায় যে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। আবার অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করা হলে মাঝামাঝি একটি শ্রেণির গণসংখ্যা খুবই বেশি হয়। বস্তুত উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জিভূত হওয়ার ঝোঁক বা প্রবণতাকেই কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। কেন্দ্রীয় মান উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্বকারী একটি সংখ্যা এবং এর দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণত কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো: (১) গাণিতিক গড় বা গড়, (২) মধ্যক (৩) প্রচুরক।

গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean)

উপাত্তসমূহের মানের সমষ্টিকে যদি তার সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে উপাত্তসমূহের গড় মান পাওয়া যায়। উপাত্তের সংখ্যা যদি খুব বেশি হয় তবে এ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা বেশ জটিল হয়, সময় সাপেক্ষ ও ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এক্ষেত্রে উপাত্তসমূহ শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সুবিধাজনক।

উদাহরণ ৩। নিচে কোনো একটি শ্রেণির ১০০ জন শিক্ষার্থীর বিজ্ঞানে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় নির্ণয় করুন।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	85-94
গণসংখ্যা	5	10	15	20	30	16	4

সমাধান: এখানে শ্রেণি ব্যাপ্তি দেওয়া আছে। এজন্য শিক্ষার্থীদের ব্যক্তিগত নম্বর কত তা জানা যায় না। এক্ষেত্রে প্রত্যেক শ্রেণির শ্রেণি মধ্যমান নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়।

$$\text{শ্রেণি মধ্যমান} = \frac{\text{শ্রেণির উর্ধ্বমান} + \text{শ্রেণির নিম্নমান}}{2}$$

যদি শ্রেণি মধ্যমান x_i (i = 1, ..., k) হয়, তবে মধ্যমান সংবলিত সারণি হবে নিম্নরূপ:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	**শ্রেণি মধ্যমান (x_i)**	**গণসংখ্যা (f_i)**	**($f_i x_i$)**
25-34	29.5	5	147.5
35-44	39.5	10	395.0
45-54	49.5	15	742.5
55-64	59.5	20	1190.0
65-74	69.5	30	2085.0
75-84	79.5	16	1272.0
85-94	89.5	4	358.0
	মোট	n =100	6190.0

∴ নির্ণেয় গাণিতিক গড় $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$

$= \frac{1}{100} \times 6190 = 61.90$

অনুমিত গড় পদ্ধতিতে (বা গংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে) শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয়:

এ পদ্ধতিতে উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড় নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো:

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \times h$$

যেখানে, $\bar{x}$= নির্ণেয় গড়, a = আনুমানিক গড়, f_i = i-তম শ্রেণির গণসংখ্যা, h = শ্রেণি ব্যাপ্তি

উদাহরণ ৪। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উদাহরণ ৩ এর উপাত্তগুলোর গাণিতিক গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান: সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে অনুসৃত ধাপের আলোকে গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	**মধ্যমান x_i**	**গণসংখ্যা f_i**	**ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$**	**গণসংখ্যা x ধাপ বিচ্যুতি $f_i u_i$**
25-34	29.5	5	-3	-15
35-44	39.5	10	-2	-20
45-54	49.5	15	-1	-15
55-64	59.5	20	0	0
65-74	69.5	30	1	30
75-84	79.5	16	2	32
85-94	89.5	4	3	12
k =7		n = 100		24

এখানে মধ্যবর্তী শ্রেণি হচ্ছে 55-64, যার শ্রেণি মধ্যমান 59.5
সুতরাং, a = 59.5 ধরে

গড় $\bar{x} = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \times h$

$= 59.5 + \frac{1}{100} \times 24 \times 10$

$= 59.5 + 2.4 = 61.9$

মধ্যক (Median)

কোনো পরিসংখ্যানের উপাত্তগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে যে মান উপাত্তগুলোকে সমান দুই ভাগে ভাগ করে, সেই মানই হবে উপাত্তগুলোর মধ্যক। যদি n সংখ্যক উপাত্ত থাকে এবং n যদি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে উপাত্তগুলোর মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$তম পদের মান। আর n যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n}{2}$ তম ও $(\frac{n}{2}+1)$ তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়।

উদাহরণ ৫। নিম্নে প্রদত্ত মানসমূহের মধ্যক নির্ণয় করুন।

4, 1, 6, 3, 8, 7, 2, 9, 12, 2, 3, 8, 15.

সমাধানঃ মানের উর্ধ্ব ক্রমানুসারে সাজালে পাওয়া যায়,

1, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 7, 8, 8, 9, 12, 15

এখানে মানের সংখ্যা 13. সুতরাং 7 তম পদ হলো মধ্যম পদ যার মান 6.

∴নির্ণেয় মধ্যক 6.

উদাহরণ ৬। নিচে 50 জন ছাত্রীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় করুন।

প্রাপ্ত নম্বর	45	50	60	65	70	75	80	90	95	100
গণসংখ্যা	3	2	5	4	10	15	5	3	2	1

সমাধানঃ মধ্যক নির্ণয়ের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হলোঃ

প্রাপ্ত নম্বর	45	50	60	65	70	75	80	90	95	100
গণসংখ্যা	3	2	5	4	10	15	5	3	2	1
ক্রমযোজিত সংখ্যা	3	5	10	14	24	39	44	47	49	50

এখানে, $n = 50$ যা জোড় সংখ্যা।

$$\therefore \text{মধ্যক} = \frac{\frac{50}{2}\text{তম ও } (\frac{50}{2}+1) \text{ তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের যোগফল}}{2}$$

$$= \frac{25 \text{ তম ও } 26 \text{ তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের যোগফল}}{2} = \frac{75+75}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

∴ নির্ণেয় মধ্যক 75.

শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয়

যদি শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হয় n, তবে $\frac{n}{2}$ তম পদের মান হচ্ছে মধ্যক। আর $\frac{n}{2}$ তম পদের মান বা মধ্যক নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলোঃ মধ্যক $= L + \frac{\frac{n}{2} - F_c}{f_m} \times h$, যেখানে L হলো যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা, F_c = মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা, f_m মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h শ্রেণিব্যাপ্তি।

উদাহরণ ৭। কোনো কারখানার অনূর্ধ্ব 50 বছর শ্রমিকদের বয়সের গণসংখ্যা নিবেশন নিম্নরূপ। তাদের বয়সের মধ্যক নির্ণয় করুন।

শ্রেণিব্যাপ্তি	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
গণসংখ্যা	3	13	21	15	5	4	2

সমাধান :

মধ্যক নির্ণয়ের জন্য ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
15-19	3	3
20-24	13	16
25-29	21	37
30-34	15	52
35-39	5	57
40-44	4	61
45-49	2	63
	n = 63	

এখানে, $n = 63$ এবং $\frac{n}{2} = \frac{63}{2}$ বা 31.5.

অতএব, মধ্যক 31.5 তম পদের মান এবং 31.5 তম পদের অবস্থান 25-29 শ্রেণিতে

অতএব, মধ্যক শ্রেণি 25-29.

সুতরাং, $L= 25$, $F_c =16$, $f_m = 21$ এবং $h = 5$.

$$\therefore \text{মধ্যক} = L + \frac{\frac{n}{2} - F_c}{f_m} \times h$$

$$= 25+ \frac{31.5-16}{21} \times 5 = 25 + \frac{15.5}{21} \times 5 = 25+ 3.69 = 28.69$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক 28.69

প্রচুরক (Mode)

কোনো উপাত্তে যে মান সর্বাধিকবার উপস্থাপিত হয়, সেই মান উপাত্তের প্রচুরক। একটি উপাত্তের এক বা একাধিক প্রচুরক থাকতে পারে। কোনো উপাত্তে প্রচুরক নাও থাকতে পারে। আবার থাকলেও প্রচুরক অনন্য নাও হতে পারে।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়ের সূত্র হলো:

$$\text{প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1+f_2} \times h,$$

যেখানে L = প্রচুরক শ্রেণির অর্থাৎ যে শ্রেণিতে প্রচুরক অবস্থিত তার নিম্নমান, f_1 = প্রচুরক শ্রেণি ও তার পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার পার্থক্য, f_2= প্রচুরক শ্রেণি ও তার পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার পার্থক্য এবং h = শ্রেণিব্যাপ্তি।

উদাহরণ ৮ । নিচের সারণি থেকে প্রচুরক নির্ণয় করুন।

শ্রেণিব্যাপ্তি	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
গণসংখ্যা	3	13	21	15	5	4	2

সমাধান : প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য গণসংখ্যা সারণি:

শ্রেণিব্যাপ্তি	গণসংখ্যা
15-19	3
20-24	13
25-29	21
30-34	15
35-39	5
40-44	4
45-49	2

$$\text{প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1+f_2} \times h,$$

এখানে, গণসংখ্যা সর্বাধিক 21 আছে 25-29 শ্রেণিতে।

সুতরাং, $L = 25$ (অথবা 24.5)

$f_1 = 21 - 13 = 8$

$f_2 = 21 - 15 = 6$

$h = 5$

$$\therefore \text{প্রচুরক} = 25+\frac{8}{8+6} \times 5 = 25 + \frac{8}{14} \times 5 = 25 + \frac{40}{14} = 25+2.86 = 27.86$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য :

- শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তে প্রথম শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, তার আগের শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য ধরতে হয়।
- শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তে শেষ শ্রেণিটি প্রচুরক শ্রেণি হলে, পরবর্তী শ্রেণির ঘটন সংখ্যা বা গণসংখ্যা শূন্য ধরতে হয়।

অনুশীলনী– ৬.৮

১। কোনো বিদ্যালয়ের ৯ম শ্রেণির 30 জন ছাত্রীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর নিচে দেওয়া হলো। গণসংখ্যা সারণি তৈরি করুন।

82, 50, 55, 60, 80, 82, 75, 80, 60, 55, 56, 65, 75, 82, 90, 95, 100, 99, 80, 94, 50, 57, 68, 77, 90, 83, 93, 57, 60, 96.

২। 30 টি আমের ওজন (গ্রামে) নিচে দেওয়া হলো। শ্রেণি ব্যবধান 10 নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করুন।

46, 55, 70, 65, 100, 95, 98, 112, 50, 56, 65, 85, 100, 90, 88, 87, 102, 113, 49, 67, 65, 85, 90, 102, 115, 93, 96, 85, 70, 75.

৩। 8, 12, 16, 17, 20 সংখ্যাগুলোর গড় নির্ণয় করুন।

৪। 10, 12, 14, 18, 19, 25 সংখ্যাগুলোর মধ্যক কত?

৫। 25 জন শিক্ষার্থীর বার্ষিক পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বর নিচে দেওয়া হলো:

72, 85, 78, 84, 78, 75, 69, 67, 88, 80, 74, 77, 79, 69, 74, 73, 83, 65, 75, 69, 63, 75, 86, 66, 71. শ্রেণি ব্যবধান 5 নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করুন এবং সারণি থেকে গড় নির্ণয় করুন।

৬। 100 জন লোকের উচ্চতার (সেমি) নিবেশন সারণি নিচে দেওয়া হলো। এ গণসংখ্যা নিবেশনের গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা আঁকুন।

উচ্চতা (সেমি)	146-155	156-165	166-175	176-185	186-195
গণসংখ্যা	5	35	25	15	20

৭। কোনো বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণির 80 জন শিক্ষার্থীর পরিসংখ্যানে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি নিচে দেওয়া হলো। পরিসংখ্যানে প্রাপ্ত নম্বরের গড় সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় করুন।

প্রাপ্ত নম্বর	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
গণসংখ্যা	2	5	16	12	13	20	5	4	2	1

৮। কোনো কারখানার 10 জন শ্রমিকের সাপ্তাহিক আয় (টাকায়) হলো:

400, 602, 650, 305, 300, 503, 400, 710, 650, 950. শ্রমিকদের আয়ের মধ্যক নির্ণয় করুন।

৯। নিচের উপাত্তসমূহের প্রচুরক নির্ণয় করুন:

4, 6, 9, 20, 10, 8, 18, 19, 21, 24, 23, 30.

১০। কোনো শ্রেণির 60 জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো:

শ্রেণিব্যাপ্তি	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74
গণসংখ্যা	4	8	10	20	12	6

প্রদত্ত উপাত্তের মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করুন এবং গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা আঁকুন।

৬.৯ ব্যবহারিক জ্যামিতি

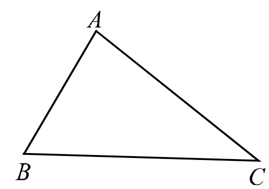
জ্যামিতিক প্রমাণ ও জ্যামিতিক অঙ্কন সম্পর্কে জ্ঞান সম্প্রসারণ ও তা প্রয়োগের দক্ষতা বৃদ্ধি করার উদ্দেশ্যকে সামনে রেখেই ব্যবহারিক জ্যামিতি এখানে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। এর ফলে আপনারা জ্যামিতিক চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কন করতে পারবেন এবং ব্যবহারিক ক্ষেত্রে জ্যামিতিক জ্ঞান ও দক্ষতা প্রয়োগ করতে পারবেন। এই ইউনিটের বিষয়বস্তুতে ব্যবহারিক জ্যামিতির এ অংশে বিভিন্ন প্রকার ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

ত্রিভুজ

তিনটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্রকে ত্রিভুজ এবং রেখাংশগুলোকে ত্রিভুজের বাহু বলা হয়। ত্রিভুজের বাহুগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ত্রিভুজ ক্ষেত্র বলে।

ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয় এবং বাহু দুইটি শীর্ষবিন্দুতে কোণ উৎপন্ন করে। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ রয়েছে। কাজেই বাহুভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার। যথা: সমবাহু ত্রিভুজ, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ও বিষমবাহু ত্রিভুজ। আবার, কোণভেদেও ত্রিভুজ তিন প্রকার। যথা: সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ, স্থূলকোণী ত্রিভুজ ও সমকোণী ত্রিভুজ। ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে পরিসীমা বলে। ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশকে মধ্যমা বলে। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা আছে। আবার, ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বই ত্রিভুজের উচ্চতা।

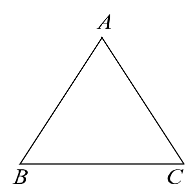
চিত্রে, ABC একটি ত্রিভুজ এবং A, B ও C ত্রিভুজটির তিনটি শীর্ষবিন্দু। AB, BC ও CA ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং এর তিনটি কোণ হলো $\angle BAC, \angle ABC$ ও $\angle BCA$. AB, BC ও CA বাহুর পরিমাপের যোগফল ত্রিভুজটির পরিসীমা ।



ত্রিভুজের প্রকারভেদ

সমবাহু ত্রিভুজ (Equilateral Triangle)

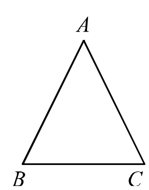
যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু পরস্পর সমান তা সমবাহু ত্রিভুজ। পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজের AB বাহু = BC বাহু = CA বাহু। কাজেই, ABC ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



সমবাহু ত্রিভুজ কোণভেদে কেবল সূক্ষ্মকোণীই হয়। সমকোণী বা স্থূলকোণী হয় না।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (Isosceles Triangle)

যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান তা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজের AB বাহু = AC বাহু ≠BC বাহু। অর্থাৎ, দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান। কাজেই, ABC ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।



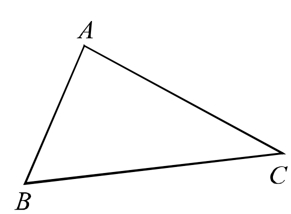
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ কোণভেদে ৩ প্রকার:

১. সমদ্বিবাহু সূক্ষ্মকোণী ২. সমদ্বিবাহু সমকোণী ৩. সমদ্বিবাহু স্থূলকোণী।

বিষমবাহু ত্রিভুজ (Scalene Triangle)

যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর অসমান তা বিষমবাহু ত্রিভুজ।

পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য পরস্পর অসমান। কাজেই, ABC ত্রিভুজটি একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ।



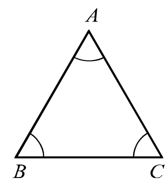
বিষমবাহু ত্রিভুজ কোণভেদে ৩ প্রকার:

১. বিষমবাহু সূক্ষ্মকোণী ২. বিষমবাহু সমকোণী ৩. বিষমবাহু স্থূলকোণী।

সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (Acute Angled Triangle)

যে ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ সূক্ষ্মকোণ, তা সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$ কোণ তিনটির প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ। অর্থাৎ প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ ৯০° থেকে কম। কাজেই, Δ ABC একটিসূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।



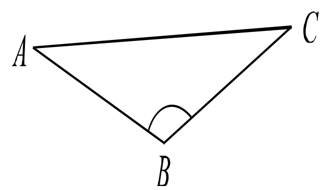
সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বাহুভেদে ৩ প্রকার:

১. সূক্ষ্মকোণী সমবাহু ২. সূক্ষ্মকোণী সমদ্বিবাহু ৩. সূক্ষ্মকোণী বিষমবাহু।

স্থূলকোণী ত্রিভুজ (Obtuse Angled Triangle)

যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ, তা স্থূলকোণী ত্রিভুজ।

পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ, অপর দুইটি কোণ $\angle BAC$ও $\angle BCA$প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। কাজেই, ΔABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ।



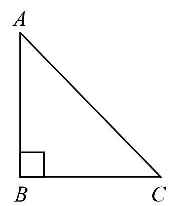
স্থূলকোণী ত্রিভুজ বাহুভেদে ২ প্রকার:

১. স্থূলকোণী সমদ্বিবাহু ২. স্থূলকোণী বিষমবাহু।

সমকোণী ত্রিভুজ (Right Angled Triangle)

যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ, তা সমকোণী ত্রিভুজ।

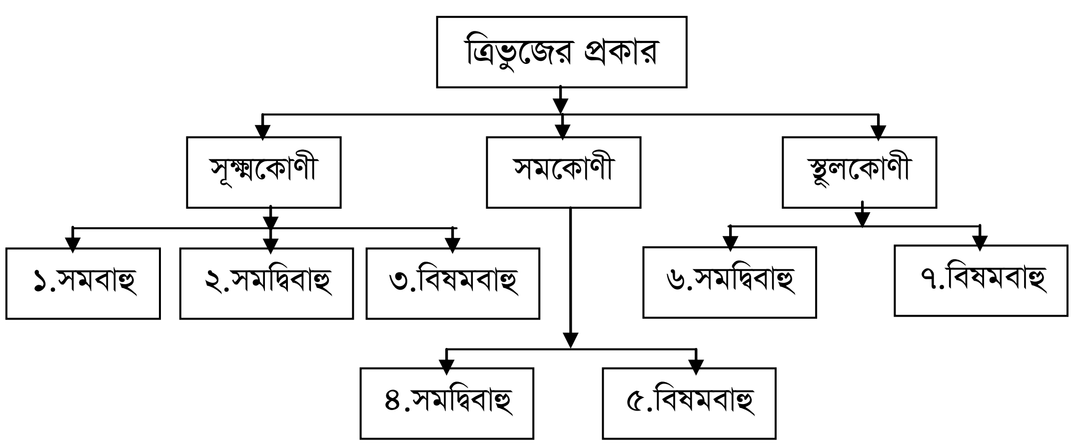
পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে $\angle ABC$ সমকোণ, অপর কোণ দুইটি $\angle BAC$ ও $\angle ACB$ প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। কাজেই, Δ ABC একটিসমকোণী ত্রিভুজ।



সমকোণী ত্রিভুজ বাহুভেদে ২ প্রকার:

১. সমকোণী সমদ্বিবাহু ২. সমকোণী বিষমবাহু।

ত্রিভুজের প্রকারভেদের একটি চার্ট:

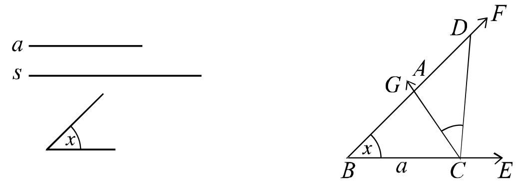


কোণ ও বাহুভেদে ত্রিভুজ ৭ প্রকার: ১. সূক্ষ্মকোণী সমবাহু ২. সূক্ষ্মকোণী সমদ্বিবাহু ৩. সূক্ষ্মকোণী বিসমবাহু ৪. সমকোণী সমদ্বিবাহু ৫. সমকোণী বিসমবাহু ৬. স্থূলকোণী সমদ্বিবাহু ৭. স্থূলকোণী বিসমবাহু

ত্রিভুজ সংক্রান্ত সম্পাদ্য

সম্পাদ্য ১

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, একটি ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন কোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনঃ যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিন। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$এর সমান $\angle CBF$আঁকুন। BF রশ্মি থেকে s এর সমান করে BD অংশ কাটুন। C, D যোগ করুন। C বিন্দুতে CD রেখাংশের যে পাশে B বিন্দু অবস্থিত সেই পাশে $\angle BDC$এর সমান করে $\angle DCG$আঁকুন।

মনে করুন, CG রশ্মি BD রেখাংশকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABCই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণঃΔ ADC এ $\angle ADC = \angle ACD$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore AC = AD$

এখন, Δ ABC এ $\angle ABC = \angle x$, BC= a [অঙ্কনানুসারে]

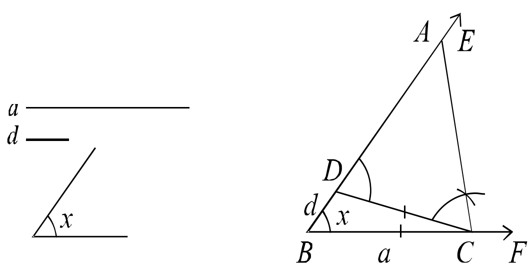
এবং BA + AC = BA + AD = BD = s.

অতএব, Δ ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ২

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করুন, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ$\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনঃ যেকোনো একটি রশ্মি BF থেকে ভূমি a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিন। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBE$ আঁকুন।

BE রশ্মি থেকে d এর সমান করে BD অংশ কাটুন। C, D যোগ করুন। CD রেখাংশের যে পাশে E বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে $\angle EDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকুন। CA রশ্মি BE রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

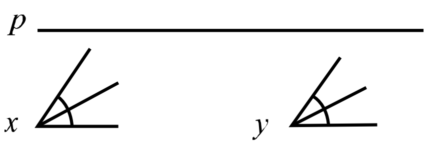
তাহলে, Δ ABCই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

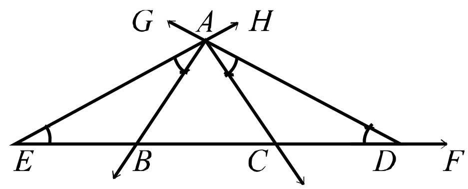
প্রমাণঃ অঙ্কনানুসারে, Δ ACD এ $\angle ADC = \angle ACD$

$\therefore$ AC = AD
সুতরাং, দুই বাহুর অন্তর AB – AC = AB – AD = BD = d,
এখন, Δ ABC এ BC = a, AB – AC = d এবং $\angle$ABC = $\angle$x
সুতরাং, Δ ABC ই কাঙ্ক্ষিত ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ৩

ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।





বিশেষ নির্বচন : মনে করুন, একটি ত্রিভুজের পরিসীমা p এবং ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle$x ও $\angle$y দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যে কোনো একটি রশ্মি EF থেকে পরিসীমা p এর সমান করে ED অংশ কেটে নিন। E ও D বিন্দুতে ED রেখাংশের একই পাশে $\angle$DEH = $\frac{1}{2}\angle$x এবং $\angle$EDG = $\frac{1}{2}\angle$y আঁকুন।

মনে করুন, EH ও DG রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে$\angle$EAB = $\angle$AED এবং $\angle$DAC =$\angle$ADE আঁকুন। AB এবং AC রশ্মিদ্বয় ED রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।
প্রমাণ: ΔAEB এ, $\angle$AEB = $\angle$EAB [অঙ্কনানুসারে]
$\therefore$ AB =EB
আবার Δ ACD এ, $\angle$ADC = $\angle$DAC [অঙ্কনানুসারে]
$\therefore$ AC = CD
সুতরাং, Δ ABC এ AB + BC + CA = EB + BC + CD = ED = p.

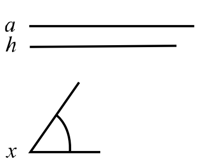
$\angle ABC = \angle AEB + \angle EAB = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

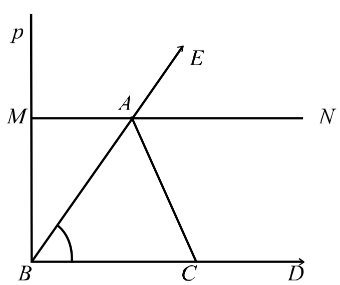
এবং $\angle ACB = \angle ADC + \angle DAC = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle y = \angle y$

সুতরাং, Δ ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ৪

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও উচ্চতা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।





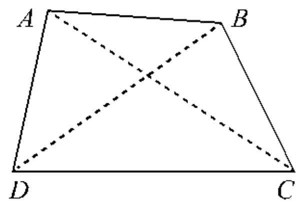
বিশেষ নির্বচন : মনে করুন, একটি ত্রিভুজের ভূমি a, উচ্চতা h এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle$x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যে কোনো একটি রশ্মি BD থেকে BC = a অংশ কেটে নিন। B বিন্দুতে BC এর উপর BP লম্ব অঙ্কন করুন এবং BP থেকে BM = h অংশ কেটে নিন। M বিন্দুতে BC এর সমান্তরাল MN রেখাংশ অঙ্কন করুন।
আবার B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান করে $\angle CBE$ অঙ্কন করুন। BE রেখাংশ MN কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করুন। তাহলে, Δ ABCই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।
প্রমাণ: যেহেতু MN ||BC [অঙ্কনানুসারে] $\Rightarrow$ Δ ABC এর উচ্চতা BM =h.
আবার, BC = a এবং $\angle ABC = \angle x$; $\therefore$ Δ ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

চতুর্ভুজ (Quadrilateral)

চারটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি চতুর্ভুজ এবং রেখাংশ চারটি চতুর্ভুজের বাহু। চিত্র দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটি একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র।

পাশের চিত্রে, A, B, C ও D বিন্দু চারটির যেকোনো তিনটি সমরেখ নয়। AB, BC, CD ও DA রেখাংশ চারটির সংযোগে ABCD চতুর্ভুজ গঠিত হয়েছে। কাজেই, AB, BC, CD ও DA চতুর্ভুজটির চারটি বাহু। এখানে A, B, C ও D চতুর্ভুজটির চারটি কৌণিক বিন্দু বা শীর্ষবিন্দু।



$\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ ও $\angle DAB$ চতুর্ভুজের চারটি কোণ। ABCD চতুর্ভুজকে '□ABCD' হিসেবেও নির্দেশ করা যায়।

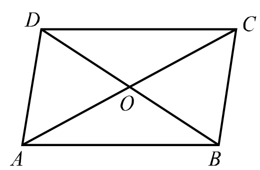
শীর্ষবিন্দু A ও B যথাক্রমে শীর্ষবিন্দু C ও D এর বিপরীত শীর্ষ। AB বাহু ও CD বাহু পরস্পর বিপরীত বাহু এবং AD বাহু ও BC বাহু পরস্পর বিপরীত বাহু। এক বিন্দুতে যে দুইটি বাহু মিলিত হয়, এরা সন্নিহিত বাহু। অর্থাৎ, AB ও BC বাহু দুইটি সন্নিহিত বাহু। AC ও BD রেখাংশদ্বয় ABCD চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ। চতুর্ভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে এর পরিসীমা বলে।

চতুর্ভুজের প্রকারভেদ(বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজ আঁকবে বৈশিষ্ট্য সমূহ পরিমাপ করে যাচাই করবে)

সামান্তরিক (Parallelogram)

যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান্তরাল, তাই সামান্তরিক।

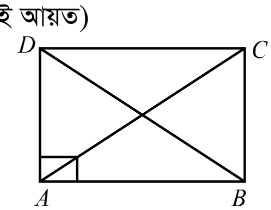
পাশের চিত্রে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। সামান্তরিকের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান। অর্থাৎ AB বাহু = CD বাহু এবং BC বাহু = AD বাহু। সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান।



অর্থাৎ, $\angle DAB = \angle BCD$ এবং $\angle ABC = \angle CDA$। সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ AC ও BD। কর্ণ দুইটি সমান নাও হতে পারে। কর্ণ দুইটি তাদের ছেদ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

আয়ত (Rectangle)

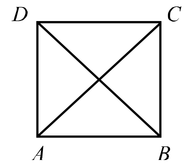
যে সামান্তরিকের কোণ সমকোণ, তাই আয়ত। (যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান তাই আয়ত)
পাশের চিত্রে, ABCD একটি আয়ত। আয়ত এমন একটি সামান্তরিক যার প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ। আয়তের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ এবং বিপরীত বাহুগুলো সমান ও সমান্তরাল। আয়তের কর্ণদ্বয় সমান এবং এরা পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডন করে।



অর্থাৎ, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$
AB = DC, AD = BC এবং AD||BC, AB||DC এবং কর্ণ AC = কর্ণ BD।

বর্গ (Square)

বর্গ এমন একটি আয়ত যার সন্নিহিত বাহুগুলো সমান। অর্থাৎ, বর্গ এমন একটি সামান্তরিক যার প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ এবং বাহুগুলো সমান। বর্গের কর্ণদ্বয় সমান এবং এরা পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখন্ডন করে।



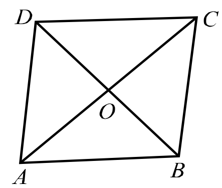
পাশের চিত্রে, ABCD একটি বর্গ। এখানে, $\angle A=\angle B=\angle D=\angle C= 90^\circ$ এবং AB =BC= CD =DA.

কর্ণ AC = কর্ণ BD.

বর্গের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে বর্গক্ষেত্র বলে।

রম্বস (Rhombus)

রম্বস এমন একটি সামান্তরিক যার সকল বাহুর দৈর্ঘ্য সমান। অর্থাৎ, রম্বসের বিপরীত বাহুগুলো সমান্তরাল এবং চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান।

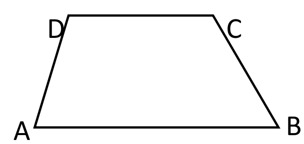


পাশের চিত্রে, ABCD একটি রম্বস। রম্বসের বাহুগুলো সব সমান এবং বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান। অর্থাৎ AB = BC = CD = DA এবং AB|| DC, AD || BC আবার, $\angle DAB = \angle DCB$ এবং $\angle ABC = \angle ADC$

এর AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে সমদ্বিখন্ডিত হয়েছে, কেননা প্রত্যেক রম্বস একটি সামান্তরিক। এখন, $\angle AOB=\angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$।

ট্রাপিজিয়াম (Trapezium)

যে চতুর্ভুজের অন্তত একজোড়া বাহু সমান্তরাল (অপর জোড়া সমান্তরাল বা অসমান্তরাল), তাকে ট্রাপিজিয়াম বলে।



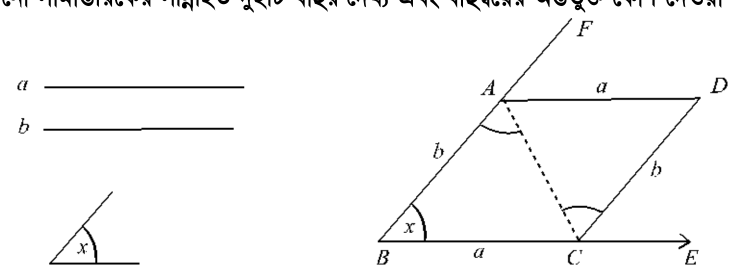
পাশের চিত্রে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এখানে, AB || DC. ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটিকে ভূমি এবং অসমান্তরাল বাহুদ্বয়কে তীর্যক বাহু বলা হয়। তীর্যক বাহু দুইটি সমান হলে, তাকে সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম বলা হয়।

অর্থাৎ, AD বাহু = BC বাহু হলে, সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম হবে।

সামান্তরিক সংক্রান্ত সম্পাদ্য

সম্পাদ্য ১

কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করুন, একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু a ও b এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ$\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নিন। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ অঙ্কন করুন। BF থেকে b এর সমান BA নিন। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। এরা পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D এবং C, D যোগ করুন।

তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণঃ AC রেখাংশ আঁকুন। Δ ABC ও Δ ADC এ AB = CD = b, AD = BC = a এবং AC বাহু সাধারণ।

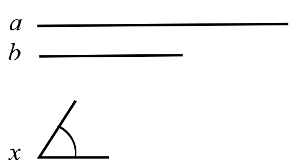
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC \Rightarrow \angle BAC = \angle DCA$. কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ $\Rightarrow AB || CD$

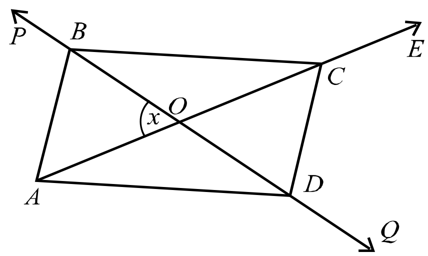
অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, BC||AD. আবার অঙ্কনানুসারে $\angle ABC = \angle x$

অতএব ABCD ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ২

সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও এদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।





বিশেষ নির্বচন : মনে করুন, সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ a ও b এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ$\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনঃ যেকোনো রশ্মি AE থেকে a এর সমান করে AC রেখাংশ নিন। AC এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করুন। O বিন্দুতে $\angle AOP = \angle x$ আঁকুন। OP এর বিপরীত রশ্মি OQ অঙ্কন করুন। OP ও OQ রশ্মিদ্বয় থেকে $\frac{1}{2}$b এর সমান যথাক্রমে OB ও OD রেখাংশ নিন। A ও B, A ও D, C ও B, C ও D যোগ করুন।

তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণঃ ΔAOB ও ΔCOD তে OA= OC = $\frac{1}{2}$ a, OB = OD =$\frac{1}{2}$ b [অঙ্কনানুসারে]

এবং $\angle AOB = \angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]

অতএব, $\Delta AOB \cong \Delta COD$

$\Rightarrow$ AB = CD এবং $\angle ABO = \angle CDO$, কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ। $\therefore$ AB ও CD সমান ও সমান্তরাল।

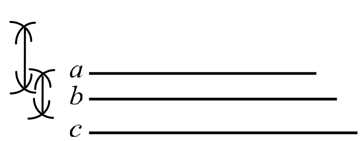
অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

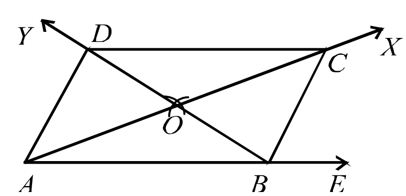
সুতরাং, ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC = AO + OC = $\frac{1}{2}$ a + $\frac{1}{2}$ a = a ও

BD = BO+OD =$\frac{1}{2}$ b + $\frac{1}{2}$ b = b এবং কর্ণ দুইটির অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB = \angle x$

অতএব, ABCD ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ৩ঃ সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।





বিশেষ নির্বচন: সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ a ও b এবং একটি বাহু c দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।
অঙ্কন: a ও b কর্ণদ্বয়কে সমান দুইভাগে বিভক্ত করুন।
এখন যেকোনো রশ্মি AE থেকে c এর সমান AB নিন।

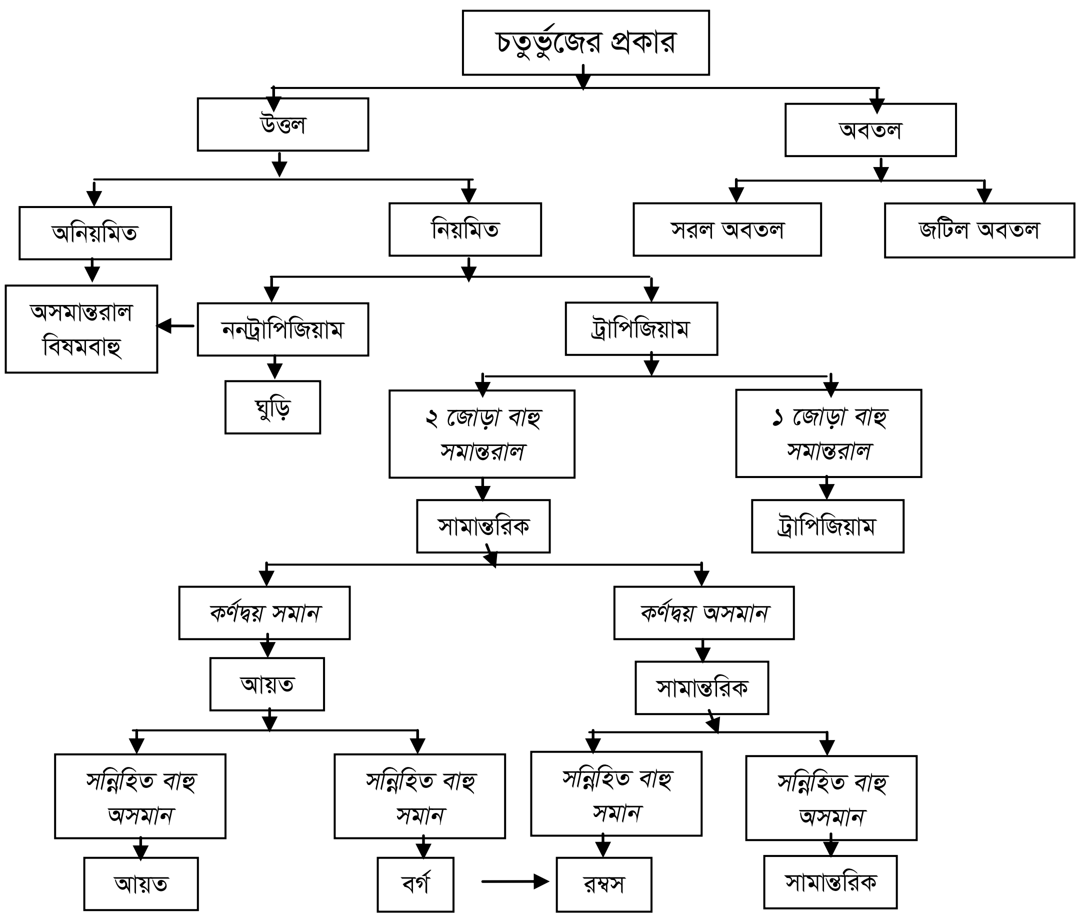
A ও B কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে $\frac{a}{2}$ ও $\frac{b}{2}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর উপরের পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। মনে করুন, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। AO এবং OB রেখাংশদ্বয় আঁকুন। AO কে AX বরাবর এবং BO কে BY বরাবর বর্ধিত করুন। OX থেকে $\frac{a}{2}$ = OC এবং OY থেকে $\frac{b}{2}$ = OD নিন। AD, DC ও BC বাহু আঁকুন। তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: ΔAOB ও ΔCOD এ $OA = OC = \frac{a}{2}$, $OB = OD = \frac{b}{2}$ [অঙ্কনানুসারে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ = অন্তর্ভুক্ত$\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$
$\Rightarrow AB = CD$ এবং $\angle ABO = \angle ODC$, কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।
$\therefore$ AB ও CD সমান ও মান্তরাল; অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল
$\Rightarrow$ ABCD একটি সামান্তরিক।

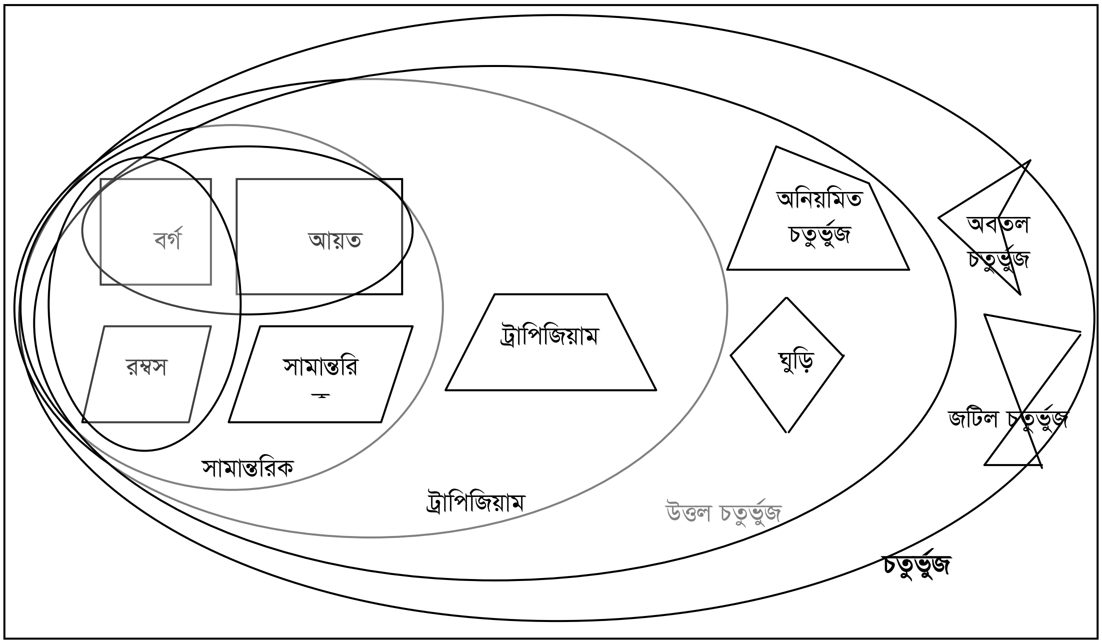
আবার, $AB = c$; কর্ণ $AC = AO+OC= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$ এবং কর্ণ $BD = BO + OD = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$.

অতএব, ABCD ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

চতুর্ভুজের শ্রেণিকরণের একটি ধারণা চিত্র (Concept Map)



বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজের একটি ভেনচিত্র



বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজের সেট

উত্তল চতুর্ভুজ = { অনিয়মিত চতুর্ভুজ, ঘুড়ি, ট্রাপিজিয়াম, সামান্তরিক, রম্বস, আয়ত, বর্গ }

অবতল চতুর্ভুজ = { অবতল চতুর্ভুজ, জটিল চতুর্ভুজ}

ট্রাপিজিয়াম = { ট্রাপিজিয়াম, সামান্তরিক, রম্বস, আয়ত, বর্গ }

নন্‌ট্রাপিজিয়াম = { অনিয়মিত চতুর্ভুজ, ঘুড়ি, অবতল চতুর্ভুজ, জটিল চতুর্ভুজ }

আয়ত = { আয়ত, বর্গ }

রম্বস = { রম্বস, বর্গ }

সামান্তরিক = { সামান্তরিক, রম্বস, আয়ত, বর্গ }

ঘুড়িঃ এক জোড়া বিপরীত কোণ সমান এবং এরা স্থূলকোণ। অপর জোড়া অসমান। বিপরীত বাহু জোড়া অসমান ও অসমান্তরাল। দুই জোড়া সন্নিহিত বাহু সমান এবং দুই জোড়া সন্নিহিত বাহু অসমান। কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব।

উত্তল চতুর্ভুজঃ যে চতুর্ভুজের অভ্যন্তরের যেকোন দুই বিন্দুর সংযোগ রেখাংশ সম্পূর্ণভাবে তার অভ্যন্তরেই থাকে, তাই উত্তল চতুর্ভুজ। উত্তল চতুর্ভুজের অন্তস্থ যেকোন কোণ সরলকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং কর্ণদ্বয় অভ্যন্তরেই থাকে।

অবতল চতুর্ভুজঃ যে চতুর্ভুজের অভ্যন্তরের যেকোন দুই বিন্দুর সংযোগ রেখাংশ সম্পূর্ণভাবে তার অভ্যন্তরে থাকে না, তাই অবতল চতুর্ভুজ। অবতল চতুর্ভুজের অন্তস্থ একটি কোণ সরলকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর বা প্রবৃদ্ধ কোণ এবং কর্ণদ্বয়ের একটি তার অভ্যন্তরে এবং অপরটি বাইরে থাকে।

জটিল চতুর্ভুজঃ জটিল চতুর্ভুজের দুইটি বাহু পরস্পর ছেদ করে এবং দুইটি ত্রিভুজের জোট গঠন করে।কর্ণদ্বয় বাইরে অবস্থান করে। পরিমাপের প্রেক্ষিতে শীর্ষ কোণগুলো কি ধরনের কোণ?

অনুশীলনী– ৬.৯

১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ 60° হলে, অপর কোণের পরিমাপ কত ডিগ্রি?

২। সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ কত ডিগ্রি?

৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করুন।

(ক) 7 সেমি, 4 সেমি (খ) 6.8 সেমি, 5.5 সেমি

(গ) 8 সেমি, 6.2 সেমি

৪। একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু 5.5 সেমি এবং একটি সূক্ষ্মকোণ 45° দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করুন।

৫। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 5.6 সেমি ও ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 30° হলে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করুন।

৬। নিচের কোনটি সামান্তরিক নয় এবং কেন?

(ক) আয়ত (খ) বর্গ (গ) ট্রাপিজিয়াম (ঘ) রম্বস

৭। একটি সামান্তরিক কখন আয়ত এবং কখন রম্বস হয়?

৮। একটি আয়ত ও একটি বর্গের মধ্যে পার্থক্য কী?

৯। একটি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সেমি ও 6.5 সেমি এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 30° দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকুন।

১০। একটি সামান্তরিকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সেমি ও 6.5 সেমি দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকুন।

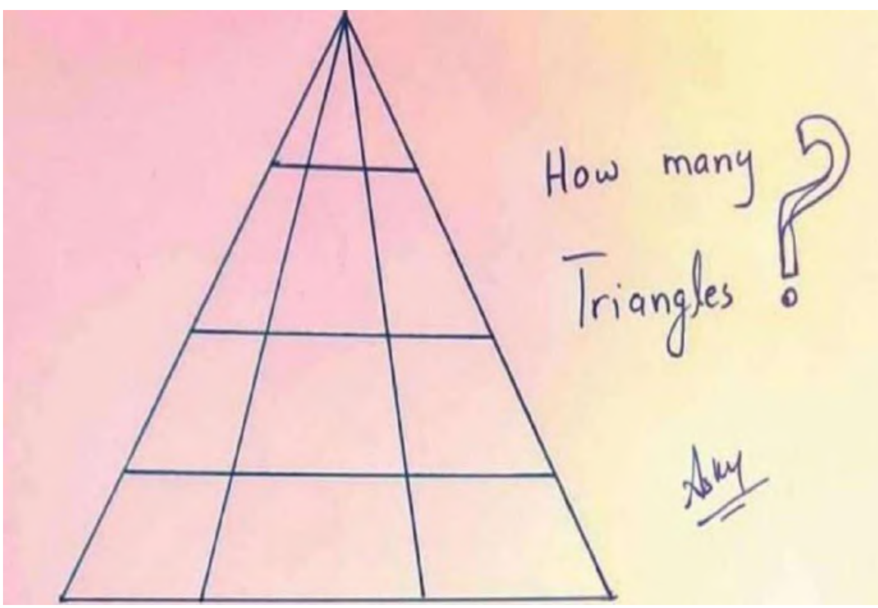
১১। কোন কোন কোণকে কম্পাস ও রুলারের সাহায্যে সমত্রিখন্ডন করা যায়? একটি করে দেখান। যেকোনো প্রদত্ত কোণকে সমত্রিখন্ডন করার উপায় কী?

১২। একটি বৃত্তের সমান ক্ষেত্র বিশিষ্ট বর্গ আঁকার উপায় কী

রেফারেন্স

গণিত, অষ্টম শ্রেণি ও নবম শ্রেণি, জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা;

গণিত, নবম-দশম শ্রেণি, জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।



ইউনিট ৭ : গণিত শিক্ষক

শিক্ষক হলেন সে ব্যক্তি যিনি অন্যদের জ্ঞান, দক্ষতা ও মূল্যবোধ অর্জনে সহায়তা করেন। শিক্ষকতা একটি পেশা। প্রতিটি পেশার জন্য একটি নির্ধারিত শিক্ষাগত যোগ্যতা প্রয়োজন। তেমনি প্রতিটি বিষয় শিক্ষকের জন্য সে বিষয় কেন্দ্রিক একটি নির্ধারিত শিক্ষাগত যোগ্যতা এবং সে সাথে অবশ্যই পেশাগত যোগ্যতা প্রয়োজন। শিক্ষাগত যোগ্যতা ও পেশাগত যোগ্যতা অর্জনের মাধ্যমে একজন শিক্ষক শিক্ষকতার যোগ্যতা অর্জন করেন। এই ইউনিটের সিলেবাসে উল্লিখিত বিষয়বস্তুকে দুইটি সাবইউনিটে বিভক্ত করা হয়েছে।

৭.১ শিক্ষানবীশ শিক্ষক, পারদর্শী গণিত শিক্ষকের যোগ্যতা

৭.২ উত্তম গণিত শিক্ষকের দৃষ্টিভঙ্গী, বিশ্বাস ও গুণাবলি

৭.১ শিক্ষানবীশ শিক্ষক, পারদর্শী গণিত শিক্ষকের যোগ্যতা

শিক্ষানবীশ শিক্ষক

শিক্ষাগত যোগ্যতার মাধ্যমে বিষয়ভিত্তিক জ্ঞান অর্জন করা যায়। কিন্তু পেশায় সাফল্য লাভ করতে হলে অবশ্যই পেশাগত জ্ঞান অর্জন করতে হবে। শিক্ষকতা বেশ জটিল একটি কর্মপ্রক্রিয়া। শিক্ষক তাঁর জ্ঞান, দক্ষতা, পেশাগত গুণাবলি মূল্যবোধের মাধ্যমে প্রাতিষ্ঠানিক, সামাজিক ও সাংস্কৃতিক শিক্ষার বিভিন্ন দিক সহজভাবে শিক্ষার্থীর কাছে উপস্থাপন করেন। শিক্ষকতার পেশায় দক্ষতা অর্জনের জন্য শিক্ষানবীশ শিক্ষক হতে হবে। অর্থাৎ শিক্ষক হতে চাইলে এক বছর বা একটা নির্দিষ্ট সময় ব্যাপী শিক্ষকতার পেশাগত দক্ষতা অর্জনের জন্য নির্ধারিত কোর্স বা ট্রেনিং এর সাথে সম্পৃক্ত থাকাকে প্রাতিষ্ঠানিকভাবে শিক্ষানবীশ শিক্ষক বলা হয়। এই কোর্সে প্রফেশনাল স্টাডিজ ও টিচিং স্টাডিজের বিভিন্ন বিষয় নিয়ে আলোচনা হয়। এবং সেই সাথে শিক্ষানবীশ শিক্ষক বিভিন্ন বিদ্যালয়ের সাথে সংযুক্ত হয়ে শিক্ষক প্রশিক্ষকের অধীনে পাঠদান অনুশীলন করেন।

শিক্ষানবীশ শিক্ষককে পাঠদান অনুশীলন কার্যক্রমের সাথে নিম্নোক্তভাবে সম্পৃক্ত হতে হয়:

- প্রতিদিন পাঠের বিষয়ের উপর শিক্ষানবীশ শিক্ষক পাঠ পরিকল্পনা তৈরি করেন।
- তৈরিকৃত পাঠ পরিকল্পনা বিষয়ের শিক্ষক প্রশিক্ষক কর্তৃক অনুমোদন করাতে হয়।
- অনুমোদিত পাঠ পরিকল্পনা নিয়ে পূর্ব নির্ধারিত বিদ্যালয়ে শিক্ষানবীশ শিক্ষক শ্রেণি কার্যক্রম পরিচালনা করবেন।
- পাঠ পরিকল্পনা অনুসরণ করে শ্রেণি কার্যক্রম পরিচালনা করবেন।
- শ্রেণি কার্যক্রম পরিচালনায় শিক্ষার্থীর সক্রিয়তা, আনন্দ ও আগ্রহ সৃষ্টির প্রতি লক্ষ রাখতে হবে।
- শিক্ষা উপকরণ তৈরি ও শ্রেণি কার্যক্রমে ব্যবহারের নিয়মগুলোর প্রতি লক্ষ রাখতে হবে।
- শ্রেণির সাধারণ উপকরণ ব্যবহারের নিয়মগুলোর প্রতি লক্ষ রাখতে হবে।
- শিক্ষার্থীর কাজ যেমন একক/জোড়ায়/দলগত কাজ প্রয়োজন নুসারে কোনটি কখন কিভাবে পরিচালনা করা উচিত সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।
- শিক্ষানবীশ শিক্ষকের দ্বারা পরিচালিত শ্রেণি কার্যক্রম শিক্ষক প্রশিক্ষক পরিদর্শন ও পর্যবেক্ষণ করবেন।
- পর্যবেক্ষণ শেষে শিক্ষক প্রশিক্ষক শিক্ষানবীশ শিক্ষককে লিখিত এবং মৌখিকভাবে ফিডব্যাক দিবেন।
- এই ফিডব্যাক এর উপর ভিত্তি করে শিক্ষানবীশ শিক্ষক পরবর্তী দিনের শ্রেণি কার্যক্রম পরিচালনা করবেন এবং নিজের ভুলগুলো শুধরে নিবেন।

বি.এড কোর্সের অন্যান্য কার্যক্রমের সাথে সাথে দুই পর্যায়ে প্রায় চার মাস পাঠদান অনুশীলন কার্যক্রম চলে। এই চার মাস প্রতিনিয়ত অনুশীলন, কোর্সের বিভিন্ন সেশন, এ্যাসাইনমেন্ট, সেমিস্টার মূল্যায়ন, চূড়ান্ত মূল্যায়ন ইত্যাদি কর্ম প্রক্রিয়ার মাধ্যমে একজন শিক্ষানবীশ শিক্ষক ধীরে ধীরে পারদর্শী শিক্ষক হওয়ার গৌরব অর্জন করেন।

পারদর্শী গণিত শিক্ষকের যোগ্যতা

প্রতিটি পেশার ক্ষেত্রে একটি কাঙ্ক্ষিত শিক্ষাগত যোগ্যতা প্রয়োজন হয়। এবং সে সাথে প্রয়োজন হয় পেশাগত যোগ্যতার। একজন গণিত শিক্ষকেরও শিক্ষাগত যোগ্যতার সাথে পেশাগত যোগ্যতা থাকা আবশ্যিক। শিক্ষকতা সব সময়ই একটি জটিল প্রক্রিয়া। আবার গণিতের মত বিমূর্ত একটি বিষয়কে শিক্ষার্থীর কাছে প্রাণবন্ত ও আকর্ষণীয় করে তুলতে হলে গণিত শিক্ষকের আরও বিশেষ দক্ষতার প্রয়োজন হয়। একজন পারদর্শী গণিত শিক্ষকের যোগ্যতাসমূহ নিচে দেয়া হল :

- শিক্ষাগত যোগ্যতা
- পেশাগত যোগ্যতা

শিক্ষাগত যোগ্যতা

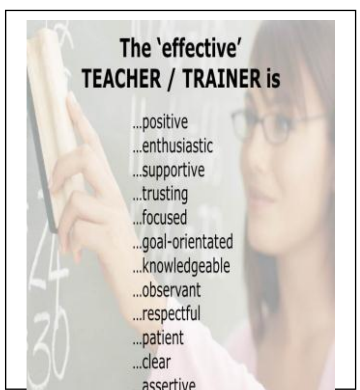
শিক্ষাগত যোগ্যতায় গণিত শিক্ষকের গণিত বিষয়ে অনার্স/মাস্টার্স ডিগ্রিধারী হতে হবে। এ ছাড়া তার পেশাগত ডিগ্রি অর্থাৎ বি.এড, বা এম.এড ডিগ্রি থাকবে। এরপরও বর্তমানে জাতীয় শিক্ষক নিবন্ধন ও প্রত্যয়ন কর্তৃপক্ষ কর্তৃক নিবন্ধনের সনদও থাকতে হবে।

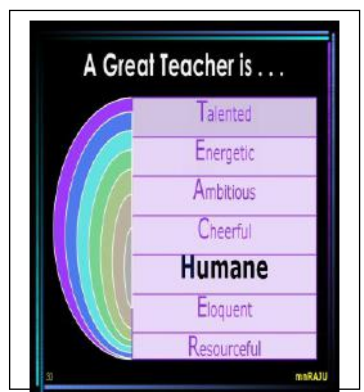
পেশাগত যোগ্যতা

- শিক্ষকতা পেশাকে ভালবাসতে হবে এবং সম্মান করতে হবে।
- গণিত বিষয়কে ভালবাসতে হবে।
- গণিতের প্রতি শিক্ষার্থীর ভালবাসা তৈরির জন্য শিখন প্রক্রিয়ার পরিবেশ তৈরি করতে হবে।
- গণিত বিষয়ের সৌন্দর্য উপলদ্ধি করতে হবে।
- গণিতের সৌন্দর্য উপলদ্ধি করার পরিবেশ শ্রেণিতে তৈরি করতে হবে।
- শ্রেণির শিক্ষার্থীর মেধা এবং চাহিদার প্রতি লক্ষ রাখতে হবে।
- শ্রেণি কার্যক্রমে আকর্ষণীয় পরিবেশ সৃষ্টি করতে হবে।
- শিক্ষার্থীর আগ্রহ ও সক্রিয়তার দিকে নজর দিতে হবে।
- পাঠের বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত শিক্ষা উপকরণ ব্যবহার করতে হবে।
- শিক্ষা উপকরণ খুব সচেতনভাবে ব্যবহার করতে হবে যেন প্রয়োজনের অতিরিক্ত না হয়।
- অবশ্যই শ্রেণি উপযোগী শিক্ষা উপকরণ ব্যবহার করতে হবে।
- শিক্ষার্থীর গাণিতিক চিন্তণ দক্ষতার বিকাশে সচেষ্ট থাকতে হবে।

৭.২ উত্তম গণিত শিক্ষকের দৃষ্টিভঙ্গি, বিশ্বাস ও গুণাবলি

এক্ষেত্রে শিক্ষকের ভূমিকা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। শিক্ষার্থীর জীবন গঠনের গুরুদায়িত্ব শিক্ষকের উপর অনেকাংশেই নির্ভর করে। শিক্ষকের দৃষ্টিভঙ্গি, যোগ্যতা, কর্মপরিকল্পনা, সুযোগ্য পরিচালনা এবং দক্ষতার গুণেই শিক্ষার্থীর শিখন স্থায়ী হয়। শিক্ষক প্রকৃতপক্ষে শিক্ষার্থীর বন্ধু, দার্শনিক এবং পরিচালক। শিক্ষকতার মত জটিল কার্যক্রমের দায়িত্ব নিতে হলে শিক্ষককে অনেকগুলো বিশেষ গুণের অধিকারী হতে হয়। ইংরেজিতে TEACHER শব্দটিকে অনেকগুলো বিশেষ বিশেষণে নিম্নোক্তভাবে লেখা যায়।



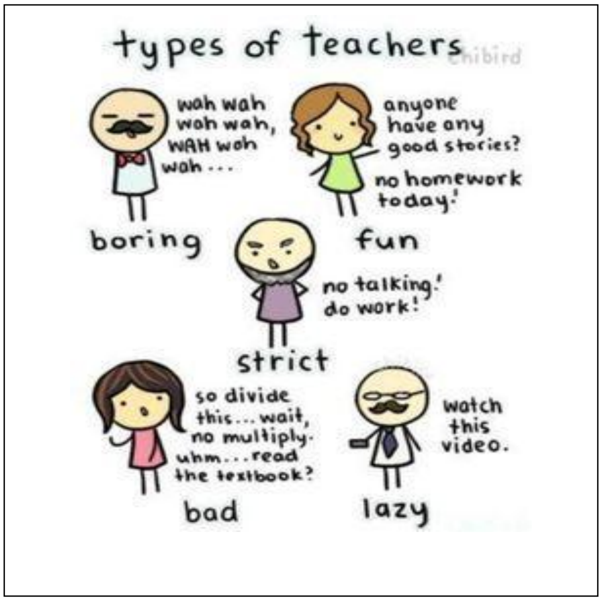


একজন উত্তম শিক্ষকের প্রধান কাজ হচ্ছে শিখন পরিবেশ তৈরি করা। সেজন্য আগে নিজেকে তৈরি করতে হবে। শিক্ষক পূর্বেই বিষয়ভিত্তিক প্রস্তুতির সাথে শিখন পরিবেশ তৈরির প্রস্তুতিও গ্রহণ করবেন। কবি রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর বলেছেন,

A teacher can never truly teach unless he is still learning himself. A lamp can not light another lamp unless it continues to burn its own flame.

Vygotsky's constructivism পর্যালোচনায় দেখা যায়, গণিত শিখনের ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর প্রতিটি গাণিতিক বিষয় সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা গঠন প্রয়োজন। তাই শিক্ষণের মূখ্য ভূমিকা বক্তৃতা দেওয়া নয়, গাণিতিক বিষয়কে শুধু ব্যাখ্যা করা বা গাণিতিক জ্ঞানকে শুধু শিক্ষার্থীর নিকট স্থানান্তর করা নয়, বরং এমন পরিবেশ সৃষ্টি করা যাতে শিক্ষার্থীরা গাণিতিক বিষয়বস্তু সম্পর্কিত জ্ঞান নিজেরাই সংগঠিত করতে পারে।

একজন উত্তম গণিত শিক্ষকের দৃষ্টিভঙ্গী, বিশ্বাস ও গুণাবলিকে নিম্নরূপে লেখা যায়,



১. **বিষয় জ্ঞান:** শিক্ষকমাত্রই তার নিজের বিষয়ের উপর ব্যাপক জ্ঞানের অধিকারী হবেন। যথাযথ গাণিতিক জ্ঞান ব্যতীত গণিত শিক্ষকের পক্ষে গণিত শিখন পরিবেশ তৈরিকরা কোন ভাবেই সম্ভব নয়। গণিত শিক্ষককে গণিতের দর্শন সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করতে হবে। গণিতের পরিসর অনেক ব্যাপক। উত্তম গণিত শিক্ষককে এই ব্যাপক পরিসরের যথাযথ এবং সন্তোষ জনক জ্ঞানের অধিকারী হতে হবে।

২. **বিষয়ের প্রতি অনুরাগ:** গণিত শিক্ষকের অবশ্যই গণিত বিষয়ের প্রতি আগ্রহ, আকর্ষণ ও অনুরাগ থাকতে হবে। গণিতের বৈচিত্রময় বিষয়ের প্রতি অনুরাগী একজন শিক্ষক সবসময় শিক্ষার্থীকে গণিতের প্রতি আগ্রহী ও অনুরাগী করে তুলতে পারেন।

৩. **গণিত শিখন কৌশল সম্পর্কে জ্ঞান:** গণিত শিখন পরিবেশ তৈরিতে গণিত শিখনের বিভিন্ন কৌশল সম্পর্কে বিশদ জ্ঞান গণিত শিক্ষকের থাকতে হবে। গণিত শিখনের আধুনিক কলাকৌশল প্রয়োগের মাধ্যমে এমন শিখন পরিবেশ তৈরিকরা সম্ভব যাতে শিক্ষার্থী গাণিতিক বিষয় সম্পর্কিত জ্ঞান নিজেরাই সংগঠিত করতে পারে।

৪. **শিক্ষা উপকরণ তৈরি ও ব্যবহার:** গণিত শিখন পরিবেশ তৈরিতে বিভিন্ন শিখন কৌশল প্রয়োগ করতে হয়। এবং সেজন্য প্রয়োজন হয় বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত গণিত শিক্ষা উপকরণ। বিভিন্ন ধরনের গণিত শিক্ষা উপকরণ রয়েছে। গণিত শিক্ষককে অবশ্যই এসব শিক্ষা উপকরণ তৈরি, সংগ্রহ ও ব্যবহারের নিয়মাবলি সম্পর্কে সম্যক ধারণা থাকতে হবে। পরিবেশ থেকে সংগৃহীত উপকরণ, স্বল্প মূল্য ও বিনামূল্যে উপকরণ, ইন্টারনেট থেকে সংগৃহীত ইত্যাদি গণিত শিক্ষা উপকরণ ব্যবহার করে গণিত বিষয়কে শিক্ষার্থীর নিকট আকর্ষণীয় করে তুলতে সক্ষম হতে হবে।

৫. **মানসিক কৌতূহল:** একজন আদর্শ গণিত শিক্ষকের মধ্যে থাকবে ব্যাপক মানসিক কৌতূহল। বিশ্বে কখন কোথায় কী ঘটছে, কেন ঘটছে এসব ব্যাপার জানার জন্য গণিত শিক্ষক সর্বদা কৌতূহলী হবেন। এবং এই কৌতূহল শিক্ষার্থীর মধ্যে সঞ্চার করবেন। পৃথিবীর যাবতীয় বিষয়ের প্রতি গণিত শিক্ষকের থাকবে গভীর অনুরাগ।

৬. **প্রযুক্তির ব্যবহার:** এখন যুগটাই প্রযুক্তির যুগ। একুশ শতকের শিক্ষার্থীর চাহিদা অনুযায়ী একজন আধুনিক গণিত শিক্ষক হতে হলে, শিক্ষক অবশ্যই প্রযুক্তি ব্যবহারে পারদর্শী হবেন। কম্পিউটার ও ইন্টারনেট ব্যবহারের মাধ্যমে একুশ শতকের শিক্ষার্থীর চাহিদা অনুযায়ী নিজেকে তৈরি করতে হবে। গণিত বিষয়ক ডিজিটাল কনটেন্ট ব্যবহার করে গণিত শিখন কার্যক্রম অনেক বেশি সক্রিয় করে তোলা যায়। বিভিন্ন গাণিতিক সফটওয়্যার ব্যবহার করে শিক্ষার্থীর গাণিতিক চিন্তার বিকাশ সাধন সম্ভব। কম্পিউটার ও ইন্টারনেট ব্যবহারের মাধ্যমে শিক্ষক নিজে অন্যান্য দেশের শিক্ষকের সাথে যোগাযোগ সৃষ্টির মাধ্যমে নিজেকে বিশ্বমানের শিক্ষক হিসাবে তৈরি করতে পারেন।

৭. **পত্র-পত্রিকা ও জার্নাল সম্পর্কে জ্ঞান:** ইন্টারনেট ছাড়াও পত্র-পত্রিকা, ম্যাগাজিন, জার্নাল থেকে বিভিন্ন তথ্য ও তত্ত্ব সংগ্রহ করে শিক্ষক নিজেকে সমৃদ্ধ করতে পারেন। শিক্ষার্থীর সাথে বিভিন্ন কুইজ, ধাঁধা শেয়ারিং এর মাধ্যমে তাদের গাণিতিক চিন্তা ধারার বিকাশে সহায়তা করা যায়।

৮. **কৌতূক ও রসপ্রিয়তা:** শিখন পরিবেশ আকর্ষণীয় ও হালকা করার জন্য শিক্ষক মাঝে মাঝে হাস্য রসাত্মক পরিবেশ তৈরি করবেন। পাঠের বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত কৌতূক বিষয়কে আরো আকর্ষণীয় করে যা শিক্ষার্থীকে অধিক আগ্রহী ও গণিতের প্রতি মনোযোগী করে।

৯. **সৃজনীশক্তি ও উদ্ভাবনী ক্ষমতা:** গণিত শিক্ষককে অবশ্যই সৃজনীশক্তি ও উদ্ভাবনী ক্ষমতার অধিকারী হতে হবে এবং শিক্ষার্থীকে সৃজনশীল করে গড়ে তুলতে হবে। উদ্ভাবনী শক্তির মাধ্যমে নানাভাবে শিখনের অনুকুল পরিবেশ সৃষ্টি করবেন। শিক্ষার্থীর কর্মস্পৃহাকে সঠিকভাবে পরিচালনার মাধ্যমে তাদের কর্মতৎপর হওয়ার সুযোগ সৃষ্টি করবেন।

১০. **অন্যান্য বিষয় সম্পর্কে জ্ঞান:** একজন আদর্শ গণিত শিক্ষকের জন্য শুধু নিজের বিষয়ের জ্ঞানই যথেস্ট নয়, অন্যান্য বিষয় সম্পর্কে ও তার জ্ঞান থাকতে হবে। অন্যান্য বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত করে গণিত শিখন কার্যক্রম আরো গতিশীল করা যায়।

১১. **চারিত্রিক দৃঢ়তা ও প্রবল ইচ্ছাশক্তির অধিকারী:** গণিত শিক্ষক হবেন দৃঢ় ও নৈতিক চরিত্রের অধিকারী যার উপর সব ব্যাপারেই শিক্ষার্থী আস্থা রাখতে পারে। শিক্ষকের প্রতি শ্রদ্ধা ও ভালবাসা জন্মালে বিষয়ের প্রতিও শিক্ষার্থীর ভালবাসা জন্মাবে।

১২. **সংস্কারমুক্ত মন:** গণিত শিক্ষক হবেন আধুনিক, প্রগতিশীল ও অসাম্প্রদায়িক। তিনি বৃহৎ গন্ডিতে নিরপেক্ষ দৃষ্টি নিয়ে শিক্ষার্থীর আত্মবিশ্বাস অর্জন করবেন।

১৩. **শিক্ষার্থীর মনস্তত্ত্ব সম্পর্কে জ্ঞান:** শিক্ষার্থীর বয়স, আগ্রহ ও সামর্থ্য অনুযায়ী শিক্ষককে শিখন পরিবেশ তৈরি করতে হবে। শিক্ষার্থীর দৈহিক ও মানসিক দিক বিবেচনা করে শিক্ষার্থীর প্রকৃতি সম্বন্ধে শিক্ষক সজাগ থাকবেন।

শিক্ষাবিদ উইলিয়াম আর্থার ওয়ার্ড এর মতে- একজন সাধারণ শিক্ষক বক্তৃতা করেন, একজন ভাল শিক্ষক বিশ্লেষণ করেন, একজন উত্তম শিক্ষক প্রদর্শন করেন, একজন শ্রেষ্ঠ শিক্ষক অনুপ্রাণিত করেন। একজন আদর্শ গণিত শিক্ষক হবেন সত্যিকারের গণিত অনুরাগী, যিনি তার ক্রিটিক্যাল ও ক্রিয়েটিভ চিন্তা ক্ষমতা দিয়ে শিক্ষার্থীকে গণিত অনুরাগী করবেন এবং শিক্ষার্থীর গাণিতিক চিন্তন ক্ষমতা ও বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গির উন্মেষ ঘটাতে সহায়তা করবেন।

অনুশীলনী- ৭

বহু নির্বাচনি প্রশ্ন

১। উত্তম গণিত শিক্ষকের প্রধান কাজ হল,

ক) পাঠ দান করা

খ) পাঠ পরিকল্পনা করা

গ) পাঠের পরিবেশ তৈরি করা

ঘ) পাঠ উপস্থাপন করা

সংক্ষিপ্ত উত্তর প্রশ্ন

১। শিক্ষানবীশ গণিত শিক্ষক ও পারদর্শী গণিত শিক্ষকের মধ্যে কী পার্থক্য রয়েছে?

২। গণিত শিক্ষকের যোগ্যতার একটি তালিকা প্রস্তুত করুন।

রচনামূলক প্রশ্ন

১। কার্যকর শিখন পরিবেশ তৈরির জন্য একজন গণিত শিক্ষকের কি ধরনের বিশ্বাস ও গুণাবলি থাকা প্রয়োজন বলে আপনি মনে করেন, উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দিন।

কার্য সম্পাদন/ ব্যবহারিক কাজ

১। আপনার পাশের বিদ্যালয়ের যে কোন ৪ জন গণিত শিক্ষকের আপনার দৃষ্টিতে কি গুণাবলি রয়েছে বা থাকা প্রয়োজন- পর্যালোচনা করুন।

রেফারেন্স- ৭

- ডি. এম. ফিরোজ শাহ্, আধুনিক গণিত শিক্ষণ, এম. এ. ওহাব এন্ড সন্স, ঢাকা।
- ড. মোহাম্মদ আজহার আলী ও মিসেস হোসনে আরা বেগম, সফল শিক্ষক, শিক্ষা ও গবেষণা ইনস্টিটিউট, ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়।
- শ্যামা প্রসাদ চট্টরাজ, গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি, সেন্ট্রাল লাইব্রেরী, কলিকাতা (১৯৮২)।
- শৈলেন্দ্র কুমার ঘোষ, গণিত শিক্ষণ, সোমা বুক এজেন্সী, কলিকাতা (১৯৯৫)।

ইউনিট ৮ : গণিতে অর্জন যাচাই কৌশল

শিখন শেখানো প্রক্রিয়ায় শিক্ষার্থী কতটা জ্ঞান দক্ষতা অর্জন করল তা সংশ্লিষ্ট সকলেরই জানা প্রয়োজন। এ অর্জন যাচাইকে সাধারণ ভাবে বলা হয় মূল্যায়ন। মূল্যায়নের বিভিন্ন ক্ষেত্র সনাক্ত করে, বিভিন্ন হাতিয়ার ব্যবহার করে বিভিন্ন কৌশলে তা সম্পন্ন করা হয়। এ অর্জন যাচাই বা মূল্যায়ন গণিত বিষয়ের ক্ষেত্রে অত্যন্ত তাৎপর্যপূর্ণ।

ইউনিট বিভাজন :

৮.১ শ্রেণিতে প্রশ্নকরণ: ধারণা, প্রকারভেদ, প্রয়োজনীয়তা, কৌশল
মূল্যায়ন কৌশল: গাঠনিক ও প্রান্তিক, আনুষ্ঠানিক ও অনানুষ্ঠানিক, নির্ণায়ক

৮.২ উত্তম অভীক্ষা: বৈশিষ্ট্য, আদর্শায়ন

৮.৩ শিখনের ডমেইন ব্যবহারর, সৃজনশীল প্রশ্ন পদ্ধতি

৮.১ শ্রেণিতে প্রশ্নকরণ(ধারণা-প্রকারভেদ-প্রয়োজনীয়তা-কৌশল)

ধারণা

শিক্ষার্থীর সবলতা, দুর্বলতা, জ্ঞান ও দক্ষতা যাচাই করে শিখন ত্বরান্বিত করার জন্য শ্রেণিতে প্রশ্ন করা অবধারিত। শিক্ষক শিক্ষার্থীকে প্রশ্ন করবেন আবার শিক্ষার্থীও যাতে প্রশ্ন করে তার ধারণা স্পষ্ট করে নিতে পারে, সে সুযোগ করে দিবেন। জোড়ায় কাজ বা দলীয় কাজের সময় শিক্ষার্থীরা একে অপরকে প্রশ্ন করবে। প্রশ্নকরণের মাধ্যমে পাঠের প্রতি শিক্ষার্থীর আগ্রহ ও কৌতুহল জাগ্রত হয় এবং সক্রিয় শিখন পরিবেশ সৃষ্টি হয়?

প্রশ্নের ধারা অনেকটাই নির্ভর করে শিক্ষক, শিক্ষার্থী ও বিষয়বস্তুর উপর। পাঠের শুরুতে থাকবে পূর্বজ্ঞান যাচাই, আগ্রহ বা উৎসাহ সৃষ্টিমূলক প্রশ্ন যা পাঠের প্রতি শিক্ষার্থীর প্রেষণা সৃষ্টি করবে। মাঝে থাকবে চিন্তামূলক, ব্যাখ্যামূলক বা অনুসন্ধানী প্রশ্ন যা আলোচনায় উদ্বুদ্ধ করবে। পাঠের শেষাংশে থাকবে মূল্য যাচাই, পুনরালোচনা, উপসংহার এবং ধারণা সম্প্রসারণ মূলক প্রশ্ন।

প্রশ্নের প্রকারভেদ

বিভিন্ন সময় বিভিন্ন প্রেক্ষিতে প্রশ্নের শ্রেণিকরণ করা হয়। উত্তরের অনন্যতা ও বিভিন্নতার প্রেক্ষিতে প্রশ্নকে বদ্ধ ও খোলা প্রশ্ন হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

১. **বদ্ধ প্রশ্ন**(close ended): স্মৃতি উদ্রেকের জন্য সাধারণত বদ্ধ প্রশ্ন করা হয়। বদ্ধ প্রশ্নের সঠিক উত্তর হয় অনন্য । যেমন, ৩ + ৪ = কত?

২. **খোলা প্রশ্ন** (open ended): চিন্তার উদ্রেকের জন্য খোলা প্রশ্ন। খোলা প্রশ্নের সঠিক উত্তর বিভিন্ন হয়।
যেমন, ১০ কে কিভাবে দুই সংখ্যার সমষ্টি রূপে দেখান যায়?
শিক্ষার উদ্দেশ্যের ক্ষেত্রের প্রেক্ষিতে প্রশ্নের শ্রেণি বিভাগ: স্মৃতিমূলক, উপলব্ধিমূলক, প্রয়োগমূলক ও উচ্চ স্তরের প্রশ্ন।

১. **স্মৃতিচয়ন প্রশ্ন:** যে প্রশ্নের উত্তর স্মৃতির পাতায় জমা জ্ঞান থেকে আসে। যেমন, পিথাগোরাসের সূত্রটি কী?

২. **উপলব্ধিমূলক প্রশ্ন:** যে প্রশ্নের উত্তর দিতে কেবল স্মৃতির উপাদানই যথেষ্ট নয়, বরং কিছু স্মৃতি ও উপলব্ধি সমন্বয় করে উত্তর দিতে হয়। যেমন, স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের সূত্র কি প্রযোজ্য? কেন প্রযোজ্য বা প্রযোজ্য নয়?

৩. **প্রয়োগমূলক প্রশ্ন:** যে প্রশ্নের উত্তর দিতে স্মৃতি ও উপলব্ধির উপাদান ছাড়াও প্রয়োগ দক্ষতার প্রয়োজন হয়। যেমন, সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের কোণগুলোর পরিমাণ কত?

৪. **উচ্চতর দক্ষতার প্রশ্ন:** যে প্রশ্নের উত্তর দিতে ব্যাখ্যা, বিশ্লেষণ, মূল্যায়ন বা সৃজন দক্ষতার প্রয়োজন হয়। যেমন, পিথাগোরীয় ত্রিজোট (দুইটি বর্গের সমষ্টি তৃতীয় সংখ্যার বর্গের সমান) নির্ণয়ের জন্য একটি সাধারণ সূত্র গঠন কর।

৫. **অনুসন্ধানি প্রশ্ন(probing question):** শিক্ষার্থী যখন শ্রেণিতে প্রশ্নের উত্তরে কোনো সাড়া না দেয় বা ভুল উত্তর দেয় অথবা আংশিক শুদ্ধ উত্তর দেয়, তখন আরও কিছু অনুসারক প্রশ্ন করে এ পরিস্থিতি থেকে তাকে শুদ্ধ উত্তর খুঁজে নিতে সাহায্য করা হয়। এরূপ প্রশ্ন গুচ্ছই অনুসন্ধানি প্রশ্ন । একটি প্রশ্নের উত্তরকে অনুসরণকরে পরবর্তী প্রশ্ন করা হয় যতক্ষণ না শুদ্ধ উত্তর খুঁজে পাওয়া যায়।

পাঠের পর্যায় ভিত্তিক প্রশ্নের প্রকার :

১. প্রারম্ভিক প্রশ্ন (খোলা উত্তর)

- এগুলো কি ভাবে সাজানো যায়?
- এর জন্য কত উপায় চিন্তা করা যায়?
- কী ঘটবে যখন ... ?
- এ থেকে কী তৈরি করা যায়?
- কি কি পার্থক্য নির্ধারণ করা যায়?

২. গণিত সম্পর্কিত চিন্তন উদ্দীপ্তকারি প্রশ্ন: এ জাতীয় প্রশ্ন কোন প্যাটার্ন, পারস্পরিক সম্পর্ক এবং ধারণাগত নেটওয়ার্ক সংগঠনে সহায়তা করে।

- এতে কী মিল আছে? কী গড়মিল আছে?
- কোনো উপায়ে কি গ্রুপ করা যায়?
- কোন প্যাটার্ন দেখতে পাও কি? কিভাবে এ প্যাটার্ন তোমাকে উত্তর পেতে সাহায্য করবে?
- এর পর কী হতে পারে বলে মনে কর। কেন এরূপ হতে পারে?
- এগুলো সংরক্ষণ করা যায় কিভাবে?
- কী ঘটবে যদি ...

৩. মূল্যযাচাই প্রশ্ন: কিভাবে তারা চিন্তা করছে, কী তারা বুঝেছে, কাজের কোন পর্যায়ে তারা আছে:

- তোমরা কী পর্যবেক্ষণ করেছ?
- তোমরা কিভাবে এটা বের করেছ?
- তুমি এরূপ চিন্তা করছ কেন?
- কি কারণে এভাবে কাজ করতে সিদ্ধান্ত নিলে?

৪. চূড়ান্ত আলোচনামূলক প্রশ্ন: তাদের সম্মিলিত প্রচেষ্টা, মতবিনিময়, কৌশল ও সমাধানের তুলনা, প্রতিফলন, গাণিতিক ধারণা এবং এগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক উপলব্ধি করা এবং তাদেরকে তাদের কাজ মূল্যায়ন করতে উৎসাহিত করে:

- সকলের ফল কি একই রকম?
- কার কার উত্তর/শ্রেণিকরণ/প্যাটার্ন একরূপ হয়েছে?
- কার কার সমাধান ভিন্নরূপ?
- অনুরূপ/ভিন্নরূপ হওয়ার কারণ কী?
- আমরা কি সকল সম্ভাবনা পেয়ে গেছি? কিভাবে তা জানলাম?
- অন্য উপায়ে তা হতে পারত কিনা এটা কি ভেবেছ?
- এটা কি মনেকর যে আমরা উত্তম সমাধানটি পেয়ে গেছি?

শ্রেণিতে প্রশ্ন করার প্রয়োজনীয়তা

প্রশ্নকরণের ধারণার মধ্যেই এর প্রয়োজনীয়তার কথা নিহিত আছে। এছাড়াও নিম্নরূপ কতিপয় পয়েন্ট আকারে প্রশ্ন করার প্রয়োজনীয়তার বর্ণনা করা হল:

- শ্রেণিতে শিখনের গতি অব্যাহত রাখা
- শিক্ষার্থীদেরকে শিখনে নিয়োজিত রাখা
- যা শেখা হল তার উপলব্ধি মাত্রা যাচাই এবং এর প্রয়োগ দক্ষতা যাচাই
- শিক্ষার্থীর স্মরণ ও উপলব্ধি স্তর যাচাই

- স্বতন্ত্র ও অংশগ্রহণমূলক চিন্তন ত্বরান্বিত করা
- শিখন বিষয়ে মতামত ও দৃষ্টিভঙ্গি চাওয়া
- সাথীদের সাথে মতবিনিময়ের মাধ্যমে মতামত সংগঠনের সুযোগ সৃষ্টি করা
- সৃজনশীল(creative), কল্পনামূলক(imaginative) ও উদ্ভাবনী(innovative) চিন্তার উদ্রেক করা
- দূরকল্পনা(speculation), আনুমানিক তত্ব (hypothesis), ধারণা/মতামত গঠনে সহায়তা (idea/opinion forming)
- বক্তৃতা ভিত্তিক শিখন ধারা বাদ দিয়ে অংশগ্রহণমূলক শিখনের দৃষ্টিভঙ্গি গঠন
- উচ্চতর চিন্তন প্রক্রিয়ার সূচনা করা
- শিক্ষার্থীদের উত্তর/সাড়ার ভিত্তিতে উচ্চতর চিন্তন মডেল তৈরি করা।

শ্রেণিতে প্রশ্নকরার কৌশল

প্রশ্ন করার পূর্বেই কোন শিক্ষার্থীকে নির্দিষ্ট করে প্রশ্ন করবেন না। সমস্ত শ্রেণিকে লক্ষ্য করে প্রশ্ন করুন। চিন্তা করার সময় দিন। দুই একজন থেকে নাম ধরে ডেকে উত্তর আদায় করুন। সঠিক উত্তরকারিকে কিয়ৎ প্রশংসা করুন। ভুল উত্তর দিলে নিরুৎসাহিত না করে পুনরায় নির্দেশনা মূলক প্রশ্ন করুন। যারা উত্তর দিতে চায় না, তাদেরকে দিয়ে অন্যের সঠিক উত্তর বলিয়ে নিন।

এছাড়াও প্রশ্ন কারার জন্য নিম্নরূপ ১০টি কৌশল সুপারিশ করা হয়:

১. স্মৃতিচয়ন (recall) প্রশ্ন যেন প্রাধান্য না পায়। সূত্র, সমীকরণ বা সংজ্ঞা বলা, উচ্চতর চিন্তনের পরিচায়ক নয়।

২. অনুসন্ধানি প্রশ্ন (probing question) জিজ্ঞেস করুন যাতে উত্তরের জন্য ব্যাখ্যা-বিশ্লেষণ, বিশদায়ন বা চিন্তা স্পষ্টিকরণের প্রয়োজন হয়:

- সংখ্যারেখায় একটি ভগ্নাংশ যেমন, $\frac{7}{4}$ বা একটি অমূলদ সংখ্যা $\sqrt{2}$ নির্দেশ করার উপায় কী?
- এখানে উত্তর কী হবে এর পূর্বাভাষ (prediction) কিভাবে দেওয়া যায়?
- তোমার পূর্বানুমান (estimation) কিভাবে প্রমাণ করবে?

৩. প্রশ্ন করে উত্তর আদায়ের পূর্বে তাদেরকে চিন্তা করাার যথাযথ সময় দিন।

৪. শিক্ষার্থীদেরকে গণিত দৃশ্যমান করতে বলুন।

৫. উপলব্ধি, প্রতিফলন ও সঠিকতা যাচাই মূলক প্রশ্ন করুন।

সঠিকতা যাচাইমূলক প্রশ্নের ধরন (শিক্ষার্থী বুঝতেছে এমন পর্যায়ে):

- তুমি যে পদ্ধতি বা কৌশল ব্যবহার করেছ তার ব্যাখ্য দাও। কেন এ পদ্ধতি পছন্দ করেছ?
- এ পদ্ধতি ব্যবহার না করলে কী হত?
- সমস্যাটিকে অংশে অংশে বিভক্ত করে নিলে কী হতে পারে?
- এ সমস্যার অনুরূপ সমস্যা তৈরি করে কি সমাধান করতে পার?
- অন্য উপায়ে করার চিন্তা কর।
- এর কোন বিপরীত উদাহরণ কি চিন্তা কর যায়?

উপলব্ধি যাচাই মূলক প্রশ্নের ধরন(শিক্ষার্থী বুঝতেছে এমন পর্যায়ে):

- তোমার পদ্ধতি ও উত্তর সঠিক কেন?
- তুমি কি আমাদেরকে বোঝাতে পার যে তুমি সঠিক?
- উত্তরের সকল অংশ নিয়ে কি তুমি ভেবেছ? এমন কোন অংশ কি আছে যেখানে তুমি ভুল করতে পার?
- আরও সহজ শব্দাবলিতে কি তোমার চিন্তা ব্যখ্যা করতে পার?
- এটা দেখানোর জন্য কি একটা মডেল তৈরি করতে পার?

স্পষ্টিকরণ মূলক প্রশ্নের ধরন (শিক্ষার্থী দ্বিধান্বিত এ পর্যায়ে):

- সমাধান পেতে তোমার কী প্রয়োজন?
- তুমি কী কৌশল অবলম্বন করবে?
- তোমার নিজের ভাষায় কিরূপে বর্ণনা করবে?
- আরও সহজতর সংখ্যা বা কম সংখ্যক সংখ্যা দিয়ে কি এটা চেষ্টা করে দেখতে পার?
- তোমার দলের অন্যরা কী করার চেষ্টা করেছে?
- সমস্যার কোন অংশ তোমার কাছে স্পষ্ট এবং কোন অংশে তুমি দ্বিধাগ্রস্ত?

৬. আলোচনা সংকুচিত করে এমন চোঙমুখি (funneling) প্রশ্ন করার চেষ্টা থেকে বিরত থাকুন।

৭. কেন্দ্রমুখি (focusing) প্রশ্ন করুন।

৮. শিক্ষার্থী যেন শিক্ষককে এবং একে অন্যকে প্রশ্ন করতে উৎসাহিত হয় এমন পরিবেশ সৃষ্টি করুন।

৯. শিক্ষক নিজেই নিজের প্রশ্নের উত্তর দেন; এটা বাদ দিতে হবে। যারা হাত তুলে, কেবল তাদের থেকেই উত্তর নিলে চলবে না। যারা হাত তুলে না, তাদেরকেও সক্রিয় করে তুলতে হবে।

১০. সমন্বিত প্রচেষ্টায় উত্তর দেওয়া উৎসাহিত করতে হবে।

কার্যকর প্রশ্ন করার সুপারিশমালা

নিচে বর্ণিত ৫টি স্তরের উপরের প্রশ্নগুলোর উপর বেশি গুরুত্ব দিন এবং ক্রমান্বয়ে নিচের গুলোতে কম গুরুত্ব দিন।

১. প্রামাণিক তথ্য চেয়ে প্রশ্ন করুন:

- কী ধরনের প্রামাণিক তথ্য পেয়েছ?
- কী থেকে এ চিন্তা করলে?

২. ব্যাখ্যা করতে বলুন:

- তুমি কিভাবে এটি ব্যাখ্যা করবে?
- কি কি কারণ তোমাকে এ চিন্তায় উদ্বুদ্ধ করল?

৩. ধারণা ও মতামত সংযোগকারী প্রশ্ন করুন:

- এটা কিভাবে তুলনা করা যায় যে, ... ?
- অন্যরা এ বিষয়ে কী পেয়েছে অথবা কী বলছে?

৪. পূর্বানুমান করতে উৎসাহিত করুন:

- তুমি এর পর কী করবে?
- কী ঘটবে যদি তুমি ...?
- এটা বন্ধ করতে তুমি কী করবে?

৫. বর্ণনা করতে বলুন:

- তুমি কী করেছ?
- কী ঘটেছিল?
- কী হতে তুমি দেখেছ?

মূল্যায়ন কৌশল (গাঠনিক ও প্রান্তিক, আনুষ্ঠানিক ও অনানুষ্ঠানিক, নির্ণায়ক)

শিক্ষার্থীর শিখন অগ্রগতি সম্পর্কে তথ্য সংগ্রহ করে মান নির্ধারণ করাই মূল্যায়ন বা মূল্য যাচাই। এ প্রক্রিয়াকে একদিকে গাঠনিক ও সামষ্টিক (প্রান্তিক) এবং অপর দিকে আনুষ্ঠনিক ও অনানুষ্ঠানিক হিসাবে সনাক্ত করা হয়।

গাঠনিক মূল্যযাচাই (Formative assessment)

গাঠনিক মূল্যায়ন এক ধরনের আত্ম প্রতিফলন প্রক্রিয়া যা শিক্ষার্থীর শিখন অগ্রগতি ত্বরান্বিত করে। বিভিন্ন শিক্ষাবিদ একে বিভিন্নরূপে সংজ্ঞায়িত করেন।

<u>কাওভী এবং বেল (Cowie and Bell):</u> গাঠনিক মূল্যায়ন শিখন প্রবলতর করতে, সনাক্ত করতে এবং সাড়া দিতে শিক্ষক-শিক্ষার্থীর মাঝে এটি দ্বিমুখী প্রক্রিয়া। (it is the bidirectional process between teacher and student to enhance, recognize and respond to the learning.)

<u>ব্ল্যাক ও উইলিয়াম (Black and Wiliam):</u> মূল্যায়ন গাঠনিক হয় তখনই, যখন শিখন কার্যক্রমের ফলাবর্তন/ফিডব্যাক, শিক্ষার্থীর চাহিদা মেটাতে এবং শিখন কার্যক্রম উন্নয়নে ব্যবহৃত হয়।

<u>নিকোল ও ম্যাকফারলেন-ডিক (Nicol and Macfarlane-Dick):</u> গবেষণার মাধ্যমে দেখান যে, গাঠনিক পরিমাপন ও ফলাবর্তন শিক্ষার্থীকে স্বনিয়ন্ত্রিত শিখন (<u>self-regulated learning</u>) প্রতিষ্ঠায় সহায়তা করে।

অতএব বলা যায়, শিক্ষার্থীর চাহিদা মিটিয়ে শিখন প্রবলতর করতে শিক্ষণ-শিখন পদ্ধতি ও কৌশল উত্তরোত্তর উন্নয়নের নিয়ামক হিসেবে ব্যবহৃত হওয়ার মত তথ্য পাওয়ার জন্য শিক্ষক ও শিক্ষার্থী মিলিতভাবে যে কার্যক্রম হাতে নেন তাই গাঠনিক মূল্যায়ন ।

Michael Scriven (1967) প্রথম গাঠনিক(Formative) এবং সামষ্টিক (Summative) মূল্যায়নের ধারণা প্রবর্তন করেন। এ দুই ধরনের মূল্যায়নের লক্ষ্য, প্রয়োজনীয় তথ্য সংগ্রহ এবং কিরূপে এদের ব্যবহার হয় তার উপর জোর দেওয়া। বেঞ্জামিন ব্লুম পূর্ণ শিখনের চাবিকাঠি হিসেবে এ ধারণাকে প্রতিষ্ঠা করেন। তিনি থমাস হেস্টিং এবং জর্জ মেডোসের সাথে ফর্মেটিভ এবং সামেটিভ পরিমাপন ও মূল্যায়নের উপর পুস্তিকা রচনা করেন (১৯৭১) এবং দেখান যে কি ভাবে গাঠনিকমূল্যায়নের ধারণা শিখন শেখানো কার্যক্রমের সাথে বিভিন্ন বিষয়বস্তুর ক্ষেত্রে সমন্বয় করা যায়।

গাঠনিক মূল্যায়নের স্বরূপ বা বৈশিষ্ট্য

শিখন প্রক্রিয়ার অঙ্গ (part of learning) : শিক্ষার্থীর চাহিদা পূরণার্থে গঠনমূলক পরিমাপনের উদ্ভব। এটি শিক্ষণ-শিখন প্রক্রিয়ার অঙ্গ। এ মূল্যায়নের ফিডব্যাক বা ফলাবর্তন শিখন প্রক্রিয়াকে প্রবলতর করার জন্য ব্যবহৃত হয়; গ্রেডিং এর জন্য নয়।

ভীতিকর নয় (nonthreatening): এর ফলাফল শিক্ষার্থীর মাঝে পাশ-ফেলের ভীতি উদ্রেককারী নয়। শিক্ষার্থী নিজের কাজের মান নির্ধারণ করতে পারে এবং নম্বর প্রদান প্রক্রিয়া ও বিষয়বস্তুর পরিসরের উপর প্রশ্ন করতে পারে।

তাৎক্ষণিক ফলাবর্তন (immediate feedback): শিক্ষক শিক্ষার্থী তাৎক্ষণিক ভাবে এর ফল পান। শিক্ষক ব্যক্তিক ও শ্রেণি ভিত্তিক কাজের একটা চিত্র পান। শিক্ষার্থীও তার সহপাঠি থেকে ফিডব্যাক পায় এবং বুঝতে পারে সে কতটা ভাল করেছে।

গাঠনিক তথ্য (structured information): শিক্ষক অগ্রগতি যাচাই করতে পারেন এবং শিক্ষণ উন্নয়নের পরিকল্পনা করতে পারেন। শিক্ষার্থী তার অগ্রগতি দেখতে পায়, সফলতার আনন্দ উপভোগ করে এবং অভিজ্ঞতার ভান্ডার সমৃদ্ধ হয়। এ থেকে শিক্ষক শিক্ষার্থী উভয়ই শিখতে পারেন।

উন্নয়নের ভিত্তি (basis to improve) : গঠনমূলক মূল্যায়নের সার-সংক্ষেপ শিক্ষককে একটি ভিত্তি প্রদান করে যেন, তিনি প্রয়োজনীয় বিষয়বস্তু পুনরালোচনা করতে পারেন। যে বিষয়বস্তুতে তারা কম ভাল করেছে তা অতিরিক্ত অভিজ্ঞতা প্রদানের ভিত্তি প্রদান করে। শিক্ষক ও শিক্ষার্থী উভয়ই তাদের চিন্তাধারাকে রিভাইজ ও রিফাইন করতে পারেন।

গণিত শিক্ষায় গঠনমূলক মূল্যযাচাই

গণিত শিক্ষায় শিক্ষার্থীরা সমস্যা মোকবেলা করে। কোন স্তরের শিক্ষার্থী কতটুকু গাণিতিক জ্ঞান নিয়ে সমস্যা সমাধান করে গণিত শিক্ষকের তা জানা অত্যন্ত জরুরী। গঠনমূলক মূল্যায়নের মাধ্যমে তা জানা যায়। কোন বিষয়বস্তু শিখনে শিক্ষার্থী কি ভাবে চিন্তা করে এটা জানা থাকলে শিক্ষক শিক্ষার্থীকে যথার্থ সহায়তা করতে পারেন, ধারণাগত সমস্যা দূর করতে পারেন। এতে শিখনের উন্নয়ন ঘটে। এ প্রেক্ষিতে গঠনমূলক মূল্যায়নের একটি নির্ণায়ক (Diagnostic) ধরনের মূল্যায়ন ।

শিক্ষার্থীরা তাদের স্বতঃস্ফূর্ত ধারণা ব্যাক্ত করে নিঃশংকোচে ও নির্ভয়ে দলের মাঝে এবং শিক্ষকের সাথে মত বিনিময় করতে পারে শ্রেণীতে সে পরিবেশ সৃষ্টি করতে হবে। শিক্ষকের ফিডব্যাক থেকে শিক্ষার্থী সমস্যা সমাধানে তার চিন্তাধারার প্রয়োজনীয় সংশোধন করবে এবং শিক্ষক তাঁর ক্লাশের ফিডব্যাক নিয়ে শিক্ষার্থীর চাহিদা মোতাবেক তার শিক্ষণ পদ্ধতিতে প্রয়োজনীয় পরিমার্জন করবেন।

শিক্ষণ প্রক্রিয়ায় গাঠনিক মূল্যযাচাই কৌশল

- **মান নির্ণায়ক ও লক্ষ্য নির্ধারক (Criteria and Goal Setting):** শিক্ষার্থী লক্ষ সম্পর্কে জানবে এবং লক্ষ কতটা অর্জিত হয়েছে, কি কৌশলে বা কিসের উপর ভিত্তি করে, পরিমাপ করা হবে তাও জানাতে হবে।
- **পর্যবেক্ষণ (Observation) :** পরিমাপক বা ক্রাইটেরিয়া ভিত্তিক পর্যবেক্ষণ গঠনমূলক মূল্যায়নের বিশেষ হাতিয়ার।
- **শ্রেণীতে আলোচনা (Class Discussion):** জোড়ায় ও দলীয় আলোচনায় অংশগ্রহণ করবে।
- **প্রশ্নকরণ (Questioning):** সরল তথ্যমূলক প্রশ্নের বদলে চিন্তা ও প্রতিফলনমূলক প্রশ্ন করতে হবে।
- **নিজকে ও সহপাঠীকে মূল্যায়ন (Self and Peer Assessment)**: শিক্ষার্থী নিজের কাজ যাচাই করবে এবং সাথীর কাজও যাচাই করবে।
- **রেকর্ড সংরক্ষণ (Record Keeping):** শিক্ষক শিক্ষার্থী উভয়ই পরিমাপের রেকর্ড সংরক্ষণ করবেন।
- **প্রতিফলন অনুশীলন (Reflective Practice):** এর মাধ্যমে নিজেই নিজের কাজ ও অবস্থানের মূল্যায়ন করবে।
- **শিক্ষণগত সমন্বয় (Instructional Adjustment):** যথাযথভাবে পুনঃশিক্ষণ, বিকল্প কৌশল, আরও অনুশীলনের সুযোগ, বাড়ির কাজ বা বিশেষ অর্পিত কাজ প্রদান করে শিখন শেখান কার্যক্রমের পুনঃসমন্বয় করা হয়। শিক্ষক শিক্ষার্থীর এসব কাজ এবং অভীক্ষার উত্তরপত্র বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই করবেন। মূল্যায়ন/এ্যাসেসমেন্ট তখনই গঠনমূলক হবে, যখন প্রাপ্ত তথ্য শিক্ষার্থীর চাহিদা পূরণে শিক্ষণ-শিখন প্রক্রিয়াার উন্নয়নের কাজে ব্যবহৃত হবে।

মূল্যযাচাই কৌশলের ধরন : সারসংক্ষেপ ও প্রতিফলন, বিষয়বস্তু ভিত্তিক বক্তব্য, শিক্ষার্থীর লেখা, বলা ও কাজ থেকে অর্থপূর্ণ ধারণা গ্রহণ। তাছাড়া নিম্নরূপ কৌশল অবলম্বন করেও মূল্যযাচাই করা হয়:

১. তালিকা, চার্ট বা গ্রাফ করতে দিয়ে ধারণা গ্রহণ করুন।

২. তথ্যের চিত্র ভিত্তিক প্রদর্শন

৩. সহযোগিতা মূলক কার্যক্রম গ্রহণ ।

৪. EC (Exit Card): প্রত্যেকে একটি করে কার্ডে তার ধারণা লিখবে, ক্লাশ শেষে তা একটি বক্সে রেখে যাবে, শিক্ষক এগুলো চেক করবেন।

RTI(Respond To Intervention): শিক্ষার্থীর কথা বা কাজের মাঝ পথে কোনরূপ হস্তক্ষেপ করলে কিরূপ প্রতিক্রিয়া ব্যক্ত করে তা দেখবেন। বুদ্ধ্যঙ্ক ও কৃতিত্বে পার্থক্য থাকলে শিখন প্রতিবন্ধী কি না, চিহ্নিত করতে এবং সহায়তা দিতে এ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা হয়।

IDEA(Individuals with Disabilities Education Act : No child left behind): শিক্ষার্থীর যে কোন ধরনের প্রতিবন্ধকতার অজুহাতে তাকে শিক্ষা কার্যক্রমের বাইরে রাখা যাবে না – ইত্যাদি।

সামষ্টিক মূল্যায়ন (Summative Assessment)

একটি পাঠ/কোর্স শেষে শিক্ষার্থী কতটা অর্জন করল বা তার কতটা অগ্রগতি হল, সে পরিমাপের মাত্রা নির্ধারণ করার মত তথ্য সংগ্রহ করাই সামষ্টিক মূল্যায়ন। এ মূল্যায়নের ফলে শিক্ষার্থীরা জানতে পারে 'তারা কেমন করল এবং কি ভাবে করল'। শিক্ষক জানতে পারেন, তাঁর শিখন প্রক্রিয়ার সফলতা বা বিফলতার মাত্রা। যে লক্ষ-উদ্দেশ্য ও শিখনফল অর্জনের জন্য পরিকল্পনা ছিল তার কে কতটা অর্জন করতে পেরেছে। সামষ্টিক মূল্যায়ন সকলের বুঝার জন্য সাধারণত সংখ্যাগত ভাবে, লেটার গ্রেডে বা জিপিএ এর মাধ্যমে প্রকাশিত হয়।

এতে ১) শিক্ষার্থীর অর্জনের মাত্রা, ২) শিখন সামগ্রীর কার্যকারিতা ৩) শিক্ষকের দক্ষতা এবং ৪) শিখন-শেখানো পদ্ধতি ও কৌশলের সফলতার মাত্রাও প্রতিফলিত হয়। তাই এ মূল্যায়নের নাম সামষ্টিক মূল্যায়ন।

গাঠনিক ও সামষ্টিক মূল্যায়নের পার্থক্য

গাঠনিক মূল্যায়ন আসলে কোন মূল্যায়ন নয়; বরং এটি শিখন-শেখানো প্রক্রিয়ার অঙ্গ। তাই এ প্রক্রিয়াকে 'গাঠনিক মূল্যায়ন' এর পরিবর্তে 'গাঠনিক পরিমাপন' বলাই যুক্তিযুক্ত। অপরদিকে সামষ্টিক পরিমাপন কেবল সংখ্যাগত পরিমাপই নয় তা সংখ্যাগত এবং সাথে সাথে গুণগত মাত্রাও প্রকাশ করে। তাই এ প্রক্রিয়াকে 'সামষ্টিক পরিমাপন' এর পরিবর্তে 'সামষ্টিক মূল্যায়ন' বলাই সঙ্গত।

মূল্যায়ক কিভাবে তার মূল্যায়নের ফল ব্যবহার করবেন তার উপর নির্ভর করেই একটি মূল্যায়ন হয়ে ওঠে গাঠনিক অথবা সামষ্টিক। মূল্যায়ক যদি শিখন-শেখানো প্রক্রিয়া উন্নয়ন কাজে মূল্যায়নের ফল ব্যবহার করেন সে মূল্যায়ন হবে গাঠনিক এবং তিনি যদি গ্রেডিং, রিপোর্টিং বা সার্টিফিকেট প্রদানের কাজে ব্যবহার করেন তবে তা হবে সামষ্টিক। তাই বলা হয়, **" রাঁধুনি যখন সুপের স্বাদ নেয়, তা গাঠনিক এবং অতিথি যখন সুপের স্বাদ নেয় তা প্রান্তিক বা সামষ্টিক মূল্যায়ন"।**

গাঠনিক যাচাইয়ের আলোকে নিরাময়মূলক ব্যবস্থা নেওয়া হয় কিন্তু সামষ্টিক মূল্যায়নে এর সুযোগ থাকে না। গাঠনিক মূল্যযাচাই হয় পাঠ চলাকালীন এবং সামষ্টিক মূল্যায়ন হয় পাঠ/অধ্যায় শেষে বা কোর্স সমাপনান্তে।

গাঠনিক পরিমাপের ফল সামষ্টিক মূল্যায়নে সংযোগ করার সুযোগ থাকে; তবে পূর্বথেকে তা জানাতে হবে। সামষ্টিক মূল্যায়নের ফলের আলোকে পরবর্তী শিখন কার্যক্রম শোধরানো যায়।

অনানুষ্ঠনিক ও আনুষ্ঠানিক মূল্যায়ন(Informal & formal Evaluation)

কোন পরীক্ষা কার্যক্রমের আনুষ্ঠানিকতা ছাড়া শ্রেণিকক্ষে মৌখিক বা লিখিত ছোট ছোট প্রশ্ন করে উত্তর আদায়, জোড়ায় কাজ ও দলীয় কাজ, বাড়ির কাজ, অর্পিত কাজ, কুইজ, ক্লাশটেস্ট ইত্যাদির মাধ্যমে মূল্যযাচাইকে বলা হয় অনানুষ্ঠনিক মূল্যায়ন বা মূল্যযাচাই।

অপরদিকে পূর্ব থেকে পরীক্ষার দিন তারিখ বা সময়সূচি ঘোষণা করে সার্বিক প্রস্তুতি নিয়ে পরীক্ষার মাধ্যমে মূল্যায়নকে বলে আনুষ্ঠানিক মূল্যায়ন। পিএসসি, জেএসসি, এসএসসি ইত্যাদি যেকোন পাবলিক পরীক্ষা কার্যক্রমই আনুষ্ঠানিক। বিদ্যালয়ের ষান্মাসিক, বার্ষিক পরীক্ষার প্রকৃতিও আনুষ্ঠানিক।

প্রান্তিক মূল্যায়ন সাধারণত আনুষ্ঠানিক হয়। গাঠনিক মূল্যায়ন প্রধানত অনানুষ্ঠানিক হলেও কখনও আনুষ্ঠানিকও হতে পারে।

নির্ণায়ক মূল্যযাচাই (Diagnostic assessment)

গঠনমূলক মূল্যযাচাই হয় পাঠ চলাকালে, প্রান্তিক মূল্যায়ন হয় পাঠ শেষে বা কোর্স শেষে। নির্ণায়ক মূল্যযাচাই হয় পাঠের আগে বা শুরুতে।

পাঠ বা ইউনিট শুরুর পূর্বে শিক্ষার্থীর সবলতা, দুর্বলতা, জ্ঞান ও দক্ষতার মাত্রা নির্ণয় করাকে বলা হয় নির্ণায়ক মূল্যায়ন। নির্ণায়ক মূল্যায়নের মাধ্যমে প্রাপ্ত তথ্য যথোপযুক্ত শিখন শেখানো কার্যক্রম নির্ধারণে সহায়তা করে।

মূল্যায়ন প্রক্রিয়া যাই হোক, মূল্যায়ন কখন হবে এবং প্রাপ্ত তথ্য কী কাজে ব্যবহৃত হবে তার উপর ভিত্তি করেই একটি মূল্যায়ন হয়ে ওঠে নির্ণায়ক, গাঠনিক বা প্রান্তিক।

৮.২ উত্তম অভীক্ষা : বৈশিষ্ট্য ও আদর্শায়ন

উত্তম অভীক্ষার বৈশিষ্ট্য

অভীক্ষা হল, শিক্ষা ক্ষেত্রে বিভিন্ন পর্যায়ে নির্ধারিত উদ্দেশ্যের দিকে শিক্ষার্থীর শিখন অগ্রগতি বা অর্জন যাচাইয়ের প্রধান হাতিয়ার। বিষয়বস্তুর উপর পরিকল্পিত ও সুসমন্বিত এক সেট প্রশ্নপত্র নিয়ে অভীক্ষা গঠিত হয়। যে অভীক্ষার মাধ্যমে মূল্যায়ন কাজ সুষ্ঠু ও সার্থক ভাবে সম্পন্ন হয় তাই সুঅভীক্ষা বা উত্তম অভীক্ষা। উত্তম অভীক্ষার কতিপয় বৈশিষ্ট্য রয়েছে, যা উন্নয়নের মাধ্যমে একটি সাধারণ অভীক্ষা উত্তম অভীক্ষায় পরিণত হয়।

অভীক্ষা প্রণয়ন কালে সাধারণত কিছু ত্রুটি থেকে যায়। এ ত্রুটিগুলো হল: অভীক্ষার নমুনায়নজনিত স্থায়ী ত্রুটি, পরিমাপজনিত অস্থায়ী ত্রুটি, ব্যক্তিক পর্যবেক্ষণ ত্রুটি এবং সংব্যাখ্যান জনিত ত্রুটি। এসব ত্রুটি দূর করার ফলে অভীক্ষায় যে বৈশিষ্ট্য প্রতিষ্ঠিত হয় তা হল যথাক্রমে যথার্থতা, নির্ভরযোগ্যতা, নৈর্ব্যক্তিকতা ও আদর্শায়ন।

এ ছাড়া অভীক্ষার বাস্তবায়ন সংক্রান্ত কিছু বৈশিষ্ট্য রয়েছেঃ সময় উপযোগিতা, পরিমিততা, প্রয়োগশীলতা এবং গ্রেডিং। এগুলোকে একত্রে ব্যবহার যোগ্যতার বৈশিষ্ট্য হিসাবে সনাক্ত করা যায়।

১. যথার্থতা (Validity): অধীত বিষয়বস্তুর প্রতিটি ধারণার উপর প্রশ্ন করতে গেলে কখনও অভীক্ষার দৈর্ঘ্য এত বেশি হয় যে, অভীক্ষা প্রয়োগশীলতা হারায়। তাই নমুনায়নের মাধ্যমে বিষয়বস্তুগত ধারণা নির্বাচন করে অভীক্ষাপদ বা প্রশ্ন প্রণয়ন সীমিত রাখা হয়। এ নমুনায়নে যদি ত্রুটি থাকে, অতিগুরুত্বপূর্ণ ধারণা বা অধ্যায় অভীক্ষা থেকে বাদ পড়ে যায়; একে বলা হয় স্থায়ি ত্রুটি। এ স্থায়ী ত্রুটি দূর করে অভীক্ষাপদ নির্বাচন করলে অভীক্ষার যথার্থতা বৃদ্ধি পায়।

অতএব অভীক্ষার্থীর যে জ্ঞান, দক্ষতা, গুণ বা বৈশিষ্ট্য পরিমাপের জন্য অভীক্ষা ব্যবহৃত হয়, সত্যিকারে অভীক্ষাটি কত সূক্ষ্মভাবে বা সঠিকভাবে তা পরিমাপ করে, তার মাত্রাই অভীক্ষার যথার্থতা।

কোন বৈশিষ্ট্য পরিমাপের জন্য একটি অভীক্ষার যথার্থতার মাত্রা বেশি হলেও অন্য বৈশিষ্ট্য পরিমাপের ক্ষেত্রে তা যথেষ্ট যথার্থ নাও হতে পারে। যথার্থতা অভীক্ষার একটি বাহ্যিক বৈশিষ্ট্য যা ব্যবহারিক ক্ষেত্র বা উদ্দেশ্যের উপর নির্ভরশীল।

যৌক্তিক পদ্ধতিতে এবং পরিসংখ্যান পদ্ধতিতে যথার্থতার মাত্রা নির্ণয় করা হয়। পরিসংখ্যানগত যথার্থতার সীমা শূন্য ও এক এর মধ্যে সীমিত। ০< যথার্থতা <১। যথার্থতার মাত্রা ০.৬ এর বেশি হলে উচ্চমানের, ০.৪ থেকে ০.৬ পর্যন্ত মধ্যমানের এবং এর কম হলে নিম্ন মানের যথার্থতা হিসাবে চিহ্নিত হয়।

অভীক্ষার যথার্থতাকে আবার বাহ্যিক, বিষয়বস্তু নির্ভর, সংগঠনমূলক, সহঅবস্থানমূলক ও ভবিষ্যৎ সম্ভাবনামূলক যথার্থতায় বিভক্ত করা হয়:

- **বাহ্যিক যথার্থতা (Face Validity):** অভীক্ষাপত্রটি হাতে নিয়ে একবার দু'বার দেখে এ বিষয়ে অভিজ্ঞ ব্যক্তিরা অভিক্ষাপদের কাঠিন্যমান, বিষয়বস্তুর অন্তর্ভুক্তিতা ও ধারাবহিক সংগঠন ইত্যাদি সম্পর্কে যে সাধারণ মন্তব্য করেন, এর উপর ভিত্তি করেই বাহ্যিক যথার্থতা নির্ধারিত হয়। বাহ্যিক যথার্থতার অভাবে কখনো অভিক্ষার্থীদের মাঝে ভুল বোঝাবুঝি বা অসন্তোষ সৃষ্টি হতে পারে।

- **বিষয়বস্তু নির্ভর যথার্থতা (Content Validity):** কোন অভীক্ষার বিষয়বস্তু নির্ভর যথার্থতা বলতে বোঝায় অভীক্ষাটি পাঠ্য বিষয়বস্তুর বিভিন্ন ক্ষেত্রের জ্ঞান, দক্ষতা এবং শিক্ষাক্রমভুক্ত উদ্দেশ্যাবলি পরিমাপের জন্য কতটা সমন্বয় করতে পেরেছে তার মাত্রা। একে শিক্ষাক্রমিক যথার্থতাও বলা হয়। অভীক্ষাপদ প্রণয়নে একটি সুষ্ঠু পদ বিনির্দেশ ছক (Ist: Item specification table) ব্যবহার করলে, এ ধরনের যথার্থতা বৃদ্ধি পায়।
- **সংগঠনমূলক যথার্থতা (Construct Validity):** একটি অভীক্ষার ফলাফলকে যে মাত্রায় কোন মনোবৈজ্ঞানিক সংগঠন যেমন, বুদ্ধি, যুক্তি শক্তি, গাণিতিক সম্ভাবনা, কারণিক দক্ষতা, সংগীত মূলক শক্তি, যন্ত্রমূলক শক্তি ইত্যাদির তাৎপর্য নির্ণয়ে ব্যবহার করা যায়, তাই সংগঠনমূলক যথার্থতা। এ যথার্থতার মান যৌক্তিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করা হয়।

- **সহঅবস্থানমূলক যথার্থতা (Concurrent Validity):** সহঅবস্থানমূলক যথার্থতা বলতে বোঝায় সে অভীক্ষা প্রচলিত কোন অভীক্ষার সাথে কতটুকু সামঞ্জস্যপূর্ণ পরিমাপ দিতে পারে তার মাত্রা। এ যথার্থতা পরিসংখ্যান পদ্ধতিতে নির্ণয় করা হয়। একই দলের উপর প্রচলিত অভীক্ষা ও নতুন অভীক্ষা পরপর প্রয়োগ করে গুণভ্রামক পদ্ধতিতে অনুবন্ধ সহগ নির্ণয় করে এ মাত্রা নির্ধারণ করা হয়। সারি পার্থক্য পদ্ধতিতে অনুবন্ধ নির্ণয় করলে, তার বর্গমূল নিতে হয়।

- **ভবিষ্যৎ সম্ভাবনামূলক যথার্থতা (Predictive Validity): একজন শিক্ষক বিদ্যালয়ে গৃহীত পরীক্ষার ভিত্তিতে বহিঃপরীক্ষায় শিক্ষার্থীদের সফলতার সম্ভাবনা যাচাই করতে চান; অথবা গণিতের একটি অভীক্ষা প্রয়োগ করে শিক্ষীদের কোন বিশেষ বৃত্তিতে সফল হওয়ার সম্ভাবনা বিচার করতে চান। এসব ক্ষেত্রে অভীক্ষার যে যথার্থতা নির্ণয় করা হয়, তাকে বলা হয় ভবিষ্যৎ সম্ভাবনামূলক যথার্থতা। যে অভীক্ষার যথার্থতা নির্ণয় করতে হবে একটি দলে তার প্রয়োগ এবং সময়ের ব্যবধানে পুনরায় বিশেষ বৈশিষ্ট্যের অভীক্ষার প্রয়োগ করা হয়। উভয় পরীক্ষার ফলাফলের অনুবন্ধ সহগই এ যথার্থতার মাত্রা নির্দেশ করে।**

২. নির্ভরযোগ্যতা (Reliability):একদল অভীক্ষার্থীর উপর একই অভীক্ষা সময়ের ব্যবধানে পুনরায় প্রয়োগ করে যদি ফলাফল সামঞ্জস্যপূর্ণ না হয়, তখন এ ক্রটিকে অস্থায়ী ক্রটি বলা হয়। অভীক্ষার অস্থায়ী ক্রটি দুর করতে পারলে, অভীক্ষা নির্ভরযোগ্য হয়। অতএব বলা যায়, অভীক্ষার যে বৈশিষ্ট্যের ফলে বারবার প্রয়োগ করে সামঞ্জস্যপূর্ণ ফলাফল পাওয়া যায়, তাই অভীক্ষার নির্ভরযোগ্যতা। দুইবার প্রয়োগের ফলাফলের অনুবন্ধ সহগই নির্ভরযোগ্যতার পরিমাপক। ০<নির্ভরযোগ্যতা<১। অভীক্ষা পদ অতি বেশি বা অতি কম হলে নির্ভরযোগ্যতা হ্রাস পায়। নির্ভরযোগ্যতা অভীক্ষার একটি আভ্যন্তরীণ বৈশষ্ট্য। নিম্নরূপ কয়েকটি পদ্ধতিতে নির্ভরযোগ্যতা নির্ণয় করা হয়:

- **অভীক্ষা-পুনঅভীক্ষা পদ্ধতি (test retest method):** তৈরী অভীক্ষা একবার প্রয়োগের দুই/তিন সপ্তাহ পর পুনরায় প্রয়োগ করে প্রাপ্ত দুই পরিমাপের সহঅনুবন্ধ নির্ণয় করা হয়।

- **সমান্তরাল অভীক্ষা পদ্ধতি (parallel test method):** একই সাথে একই বিন্যাসের দুইটি অভীক্ষা প্রস্তুত করে সময়ের ব্যবধান না দিয়ে একই দলের উপর পরপর প্রয়োগ করা হয়। দুই পরিমাপের অনুবন্ধ সহগ নির্ণয় করা হয়।

- **অন্তর্দ্বিখন্ডন পদ্ধতি (split half method):** প্রস্তুতকৃত পূর্ণ অভীক্ষা প্রয়োগ করা হয়। প্রত্যেক উত্তরপত্রের বিজোড় ও জোড় ক্রমিক নম্বর বিশিষ্ট পদের প্রাপ্ত নম্বর আলাদা আলাদা যোগ করা হয়। এ দুই সেট নম্বরের অনুবন্ধ সহগ অর্ধ অভীক্ষার নির্ভরযোগ্যতা নির্দেশ করে। পূর্ণ অভীক্ষার নির্ভরযোগ্যতা নির্ণয়ের জন্য স্পিয়ারম্যান -ব্রাউনের এ সূত্রটি প্রয়োগ করা হয়:

  $r = \frac{nr'}{1+(n-1)r'}$; এখানে r' = অর্ধ বা সংক্ষিপ্ত অভীক্ষার নির্ভরযোগ্যতা

  r = দীর্ঘ অভীক্ষার নির্ভরযোগ্যতা

  n = অভীক্ষাটি যে গুণিতক হারে বৃদ্ধি করা হয়, এখানে দ্বিগুণের জন্য এর মান ২।
- **যৌক্তিক সমতুলতা পদ্ধতি (logical equivalence method):** এ পদ্ধতিতে কুডার-রিচার্ডসনের সূত্র-২১ প্রয়োগ করে নির্ভরযোগ্যতা নির্ণয় করা হয়: $r = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum pq}{\sigma^2}\right]$

  এখানে n = অভীক্ষার পদ সংখ্যা;

  p = একটি পদের শুদ্ধ উত্তরকারির সংখ্যা/মোট অভীক্ষার্থীর সংখ্যা;

  q = একটি পদের ভুল উত্তরকারির সংখ্যা/মোট অভীক্ষার্থীর সংখ্যা;

  $\sum$pq = সকল পদের জন্য pq মানের যোগফল

  σ^2 = পূর্ণ অভীক্ষার ভেদাঙ্ক

  r = অভীক্ষার নির্ভরযোগ্যতা

  [কোনো অভীক্ষার্থী কোনো পদের উত্তর না দিয়ে থাকলে, সেটি ভুল উত্তর ধরা হলে, p + q = 1]

৩. নৈর্ব্যক্তিকতা (Objectivity): অভীক্ষার যে বৈশিষ্ট্যের কারণে অভীক্ষাপদের সঠিক উত্তর অভিন্ন হয় বা একাধিক অভিক্ষক কর্তৃক উত্তরপত্র মূল্যায়িত হলেও ব্যক্তিক পার্থক্যের কারণে মূল্যমানে তারতম্য হয় না, সে বৈশিষ্ট্যই অভীক্ষার নৈর্ব্যক্তিকতা। অভিক্ষকের পর্যবেক্ষণ ক্রটির কারণে নৈর্ব্যক্তিকতা হ্রাস পায়।

বহুনির্বাচনি, শূন্যস্থান পূরণ, মিলকরণ, এক কথায় উত্তর ইত্যাদি অভীক্ষাপদের নৈর্ব্যক্তিকতা বেশি। সংক্ষিপ্ত উত্তর প্রশ্নের নৈর্ব্যক্তিকতা এদের চেয়ে কম হলেও, বিশদ উত্তর প্রশ্নের চেয়ে বেশি। রচনামূলক বা বিশদ উত্তর প্রশ্নের নৈর্ব্যক্তিকতা সবচেয়ে কম হয়। তবে রচনামূলক বিশদ উত্তর প্রশ্নের পরিবর্তে কাঠামো প্রশ্ন বা সৃজনশীল প্রশ্ন অভীক্ষায় অন্তর্ভুক্তির মাধ্যমে অভীক্ষার নৈর্ব্যক্তিকতা বৃদ্ধি করা যায়। তাই আজকাল সৃজনশীল প্রশ্নের উপর বেশ গুরুত্ত্ব দেওয়া হচ্ছে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নে শিক্ষার্থী কোন পদের সঠিক উত্তর না জেনেও অনুমান করে উত্তর দিয়ে তার জানার চেয়ে বেশি কিছু নম্বর পেতে পারে, যার কারণে অভীক্ষার নৈর্ব্যক্তিকতা কিছুটা ক্ষুন্ন হয়। এ ক্রটি দূর করার জন্য নিম্নরূপ সংশোধন সূত্র ব্যবহার করা যায়: $S = R - \frac{W}{C-1}$; এখানে, R = সঠিক উত্তরের সংখ্যা, W = ভুল উত্তরের সংখ্যা, C = প্রতিটি পদের উত্তর পছন্দের সংখ্যা, এবং S = প্রকৃত স্কোর।

৪. আদর্শায়ন (Standardization) : অভীক্ষার সংব্যাখ্যান জনিত ত্রুটি দূর করাই আদর্শায়ন। অভিজ্ঞ শিক্ষক বা বিশেষজ্ঞ কর্তৃক সতর্কতার সাথে পদ বিনির্দেশ ছক অনুসরণ করে প্রাথমিক অভীক্ষা তৈরী হয়। প্রতিনিধিত্বমূলক শিক্ষার্থী দলের উপর পরীক্ষামূলক প্রয়োগ করে তাকে বৈশিষ্ট্যমন্ডিত করা হয়; আদর্শমান স্থির করা হয়, প্রয়োগ এবং স্কোরিং বা নম্বর প্রদানের সুষম নীতিমালা তৈরিকরা হয়, তবে এটা আদর্শায়িত অভীক্ষায় পরিণত হয়। আদর্শায়ন প্রক্রিয়া নিয়ে পরে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে।

৫. ব্যবহার উপযোগিতা(Usability): অভীক্ষার ব্যবহার উপযোগিতা কয়েকটি দিকের উপর নির্ভরশীল:

- **সময় নির্ভর উপযোগিতা(time bound utility):** এক সময়ে তৈরী অভীক্ষাপদ আরেক সময়ে অনুপযোগী হয়ে পড়তে পারে। যেমন, বাংলাদেশের প্রেসিডেন্ট কে? বাংলা দেশের বিভাগ কয়টি? আগামি অলিম্পিক কোথায় অনুষ্ঠিত হবে? ক্রিকেটে বিশ্বসেরা অলরাউন্ডার কে? ইত্যাকার পরিবর্তনশীল তথ্যের প্রশ্নের সঠিক উত্তর সময়ের প্রেক্ষিতে পরিবর্তিত হয়। কাজেই এক সময়ে তৈরী অভীক্ষা সময়ের ব্যবধানে প্রশ্ন বা সঠিক উত্তর পরিবর্তন করে সময় উপযোগী করে নিতে হয়।
- **পরিমিততা(economy):** অভীক্ষা প্রণয়ন, প্রয়োগ ও মূল্যযাচাইয়ে সময়, অর্থ ও শ্রম যেন যথাসম্ভব কম লাগে সে দিকে খেয়াল রাখতে হবে। পদসংখ্যা অতি বেশিও হবেনা বা অতি কমও হবে না।
- **প্রয়োগশীলতা(administrability):** অভীক্ষার কোন ধরনের পদ কোথায় থাকবে তার একটা মনো বৈজ্ঞানিক ভিত্তি থাকতে হবে। প্রয়োগ পদ্ধতি, নম্বর প্রদান এবং তাৎপর্য নির্ণয় প্রক্রিয়া যেন সহজতর ও দ্রুততর হয় সে দিকেও লক্ষ্য রাখতে হবে। আধুনিক প্রযুক্তি ব্যবহারের সুযোগ থাকতে হবে।
- **মূল্যায়ন স্তর নির্ধারণ বা গ্রেডিং (grading):** অভীক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বরের বিভিন্ন শ্রেণি ব্যবধানের ভিত্তিতে গ্রেডিং করার নির্দেশনা থাকতে হবে। যেমন A^+, A, B, C, D, F ইত্যাদি।

অভীক্ষা আদর্শায়ন (Standardization of a test)

একটি আদর্শ অভীক্ষা গঠন করতে হলে বিভিন্ন পর্যায়ের মধ্যদিয়ে অগ্রসর হতে হয়। এর প্রতিটি পর্যায় অভীক্ষার আদর্শায়নের জন্য আবশ্যক। এই পর্যায়গুলো হল: প্রাথমিক ধারণা গঠন ও পরিকল্পনা প্রণয়ন → পদ-বিনির্দেশ ছক তৈরি → পদ প্রস্তুতকরণ, সংগ্রহ ও সংগঠন → পরীক্ষামূলক প্রয়োগ → পদ বিশ্লেষণ → অভীক্ষা পদের নির্বাচন ও পুনর্গঠন → অভীক্ষার যথার্থতা ও নির্ভরযোগ্যতা নির্ণয় → নর্ম বা আদর্শমান নির্ধারণ → প্রয়োগ পদ্ধতি বা নির্দেশনা প্রণয়ন।

১. প্রাথমিক ধারণা গঠন ও পরিকল্পনা গ্রহণ: যে বিষয়ের উপর অভীক্ষা রচনা করা হবে সেই বিষয়টি সম্বন্ধে একটি সুনির্দিষ্ট ও সুস্পষ্ট প্রাথমিক ধারণা গঠন করতে হবে। যদি বুদ্ধি অভীক্ষা গঠন করতে হয় তাহলে প্রথমেই বুদ্ধি কাকে বলে সে সম্বন্ধে একটি পরিষ্কার ধারণা অভীক্ষা-রচয়িতার থাকা দরকার। বিভিন্ন বিষয়ের ক্ষেত্রেও একইভাবে অভীক্ষা রচয়িতা পরীক্ষার্থীর কাছ থেকে কী প্রত্যাশা করেন তা তাঁকে পরিষ্কারভাবে পূর্বেই স্থির করে নিতে হবে। অভীক্ষা প্রণয়নকারী দল শিক্ষাক্রম নির্দেশিকা, পাঠ্যবই, সর্বশেষ পেশাগত জার্নাল পর্যালোচনা করেন এবং যে বৈশিষ্ট্য বা দক্ষতা যাচাই করতে হবে সেগুলো যাচাইয়ের নতুন পদ্ধতি কী হবে সে সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা নিয়ে,অভীক্ষা তৈরির জন্য প্রয়োজনীয় সময়, অর্থ, লোকবল ও প্রক্রিয়া সমন্বয় করে একটি পরিকল্পনা প্রণয়ন করবেন।

২. **পদ বিনির্দেশ ছক**(Item Specification Table): শিক্ষার্থীর আচরণের কাঙ্ক্ষিত পরিবর্তন কতটা সাধিত হয়েছে তা নিরূপণের জন্য মূল্যায়ন কার্যক্রম পরিচালনার পূর্বে বিষয়ের গুরুত্ব ও শিক্ষণ উদ্দেশ্যের উপর ভিত্তি করে অভীক্ষার পদ তৈরির জন্য যে কর্ম পরিকল্পনা তৈরি করা হয় তাই পদ বিনির্দেশ সারণি। এ সারণি তৈরির সময় শিক্ষণ ইউনিট নির্ধারণ, শিখন উদ্দেশ্য নির্ধারণ এবং শিখন উদ্দেশ্যের সাথে সংগতি রেখে অভীক্ষার মোট পদসংখ্যা নির্ধারণ, প্রতিটি পদের পূর্ণমান নির্দিষ্টকরণ ও অভীক্ষার সময়কাল নির্দিষ্ট করা হয়। পদ নির্দিষ্টকরণ সারণি হলো অভীক্ষা তৈরির ব্লু-প্রিন্ট বা নীল নকশা।

পদ বিনির্দেশ ছকের উদাহরণ :

বিষয়ঃ গণিত, ৭ম শ্রেণি

বিষয়বস্তু↓	জ্ঞানের স্তর ভিত্তিক মান বন্টন				মোট মান
	স্মৃতি	উপলব্ধি	প্রয়োগ	উচ্চতর প্রয়োগ	
মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা		২		৪	৬
সমানুপাত ও লাভ ক্ষতি	২	২	২	৪	১০
পরিমাপ	-	২	৪	-	৬
বীজগণিতীয় রাশির গুণ ও ভাগ	২	২	৪	-	৮
বীজগণিতীয় সূত্রাবলি ও প্রয়োগ	২	২	৬	-	১০
বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ	২	২	৪	-	৮
সরল সমীকরণ	২	৩	৪	-	৯
সমান্তরাল রেখা	-	২	৪	-	৬
ত্রিভুজ	২	২	৪	৬	১৪
সর্বসমতা ও সদৃশতা	২	২	৪	-	৮
তথ্য ও উপাত্ত	২	৩	৪	৬	১৫
	১৫	২৫	৪০	২০	১০০

এরূপ পদ বিনির্দেশ ছক অনুসরণ করে প্রশ্নপত্র প্রণয়ন করলে, অভীক্ষার বিষয়বস্তুনির্ভর যথার্থতা বৃদ্ধি পায়।

৩. পদ প্রস্তুতকরণ, সংগ্রহ ও সংগঠন : অভীক্ষা গঠনের দ্বিতীয় পর্যায় হল প্রশ্ন/সমস্যা বা অভীক্ষা পদ প্রস্তুত করা। শিক্ষার্থীর স্তর, বয়স এবং মানসিক পরিপক্কতার উপর ভিত্তি করে যে প্রাথমিক ধারণা তৈরি করা হয়, তারই ভিত্তিতে পদ প্রস্তুত করতে হয়। পদ প্রস্তুতের সময় কয়েকটি নীতি অনুসরণ করা বাঞ্ছনীয়।

ক) এই পর্যায়ে সংগৃহীত প্রশ্নের সংখ্যা প্রয়োজনের অতিরিক্ত হবে। যতটি প্রশ্ন অভীক্ষায় ব্যবহৃত হবে তার তিন বা চারগুণ প্রশ্ন তৈরি করতে হবে। কোন প্রশ্নের দ্বারা শিক্ষার্থীদের কোন ধরনের শিখন পরিমাপ করা হবে, প্রশ্নের উত্তর সুনির্দিষ্ট এবং সুস্পষ্ট আছে কিনা, নির্বাচিত প্রশ্নগুলো শিক্ষার্থীদের মূল্যায়নের জন্য যথার্থ, নির্ভরযোগ্য এবং নৈর্ব্যক্তিক কিনা ইত্যাদি দিকগুলো লক্ষ রাখতে হবে।

খ) প্রশ্ন বা অভীক্ষাপদ সংগ্রহে শিক্ষক শিক্ষার্থীদের মানসিক ক্ষমতা এবং শিক্ষালব্ধ অভিজ্ঞতা উভয়ের কথাই বিচার করবেন। অর্থাৎ শিক্ষণের সময় শিক্ষক যেভাবে বিষয়বস্তুর বিশ্লেষণ করেছেন প্রশ্ন তার প্রেক্ষিতে গঠন করা উচিত। তাছাড়া প্রশ্নগুলো এমন হওয়া উচিত, যেন শিক্ষার্থীরা মানসিক ক্ষমতা দ্বারা সমাধান করতে সক্ষম হয়।

গ) প্রশ্নগুলো পৃথক পৃথকভাবে এক-একটি কার্ডে লিখলে ভাল হয়। পরবর্তী পর্যায়ে কাজ করতে সুবিধা হয় । প্রশ্নগুলো পৃথক পৃথকভাবে লিখলে, পরবর্তী পর্যায়ে ইচ্ছানুযায়ী বিন্যাস করা যায়।

৪. পরীক্ষামূলক প্রয়োগ ও ট্রাই-আউট বা পদের কার্যকারিতা বিচারঃ প্রশ্ন রচনার পর সেগুলোর উপযোগিতা বা কার্যকারিতা বিচার করতে হয়। এর জন্য প্রথম যে ছেলেমেয়েদের জন্য প্রশ্নটি গঠিত হয়েছে তার একটি প্রতিনিধিত্বমূলক ছোট বাছাই দল (Sample Group) গঠন করতে হয়। প্রশ্নটি যে বয়সের বা শ্রেণির ছেলেমেয়েদের জন্য তৈরি হবে, সে বয়সের বা শ্রেণির ছেলেমেয়েদের নিয়ে বাছাই দল করা হয়। এবার এই ক্ষুদ্র বাছাই দলটির উপর গঠিত প্রশ্নগুলো প্রয়োগ করা হবে। এই পদ্ধতিকে ট্রাই-আউট (Try out) বা পদের কার্যকারিতা বিচার বলা হয়। এই ট্রাইআউট দ্বারা দেখা হয়, কোন পদগুলো উপযোগী আর কোন পদগুলো অনুপযোগী। ট্রাই-আউটের শেষে যে পদগুলো অভীক্ষার জন্য উপযোগী সেগুলো রেখে বাকিগুলো বাদ দেওয়া হয়।

ক. পদ বিশ্লেষণ(Item Analysis): পদগুলোর উপযোগিতা বিচার করার জন্য যে প্রক্রিয়ার সাহায্য নেওয়া হয় তা পদবিশ্লেষণ। পদ বিশ্লেষণের সময় পদের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলো পরীক্ষা করা হয়। প্রথমে দেখতে হবে প্রশ্নটি কঠিন কিনা। যদি দেখা যায় প্রশ্নটি সমাধান করতে অধিকাংশ পরীক্ষার্থীই ব্যর্থ, তাহলে বুঝতে হবে যে, প্রশ্নটি খুবই কঠিন। সাধারণত মোট পরীক্ষার্থীর ২০% এর বেশি যে প্রশ্নের নির্ভুল উত্তর দিতে পারে না সেই প্রশ্নটি অত্যন্ত কঠিন অর্থাৎ অনুপযোগী বলে বিবেচিত হবে। সেটিকে অভীক্ষা থেকে বাদ দিতে হবে।

দ্বিতীয়ত দেখতে হবে প্রশ্নটি অত্যন্ত সহজ কিনা। যে প্রশ্নটি ৮০% বা তার বেশি সংখ্যক শিক্ষার্থী নির্ভুল উত্তর দেবে সেই প্রশ্নটি সহজ বলে গণ্য হবে। সেটিও অভীক্ষা থেকে বাদ দিতে হবে। তবে কিছু সংখ্যক সহজ প্রশ্ন এই অভীক্ষাতে রাখতে হবে কিন্তু তার সংখ্যা হবে সীমাবদ্ধ।

তৃতীয়ত দেখতে হবে প্রতি প্রশ্নের বিভেদক ক্ষমতা (Discriminating power); ৫০% বা তার কাছাকাছি সংখ্যক পরীক্ষার্থী যে পদের নির্ভুল উত্তর করতে পারে সে পদের বিভেদকে ক্ষমতা সর্বোচ্চ। বলা বাহুল্য উচ্চ বিভেদক ক্ষমতা সম্পন্ন পদ যত বেশি অভীক্ষায় থাকবে ততই অভীক্ষাটির যথার্থতা বৃদ্ধি পাবে। সবশেষে বিশ্লেষণের মাধ্যমে যেসব পদ দ্ব্যর্থবোধক, অস্পষ্ট বা অনির্দিষ্ট প্রকৃতির বলে প্রমাণিত হবে সেগুলোকে বাদ দিতে হবে। অভীক্ষায় এই ধরনের পদ থাকলে অভীক্ষার যথার্থতার মান হ্রাস পায়। (পদ বিশ্লেষণের উদাহরণ পরবর্তীতে দেওয়া হল)।

খ. অভীক্ষা পদের নির্বাচন ও পুনর্গঠন : অভীক্ষার পদগুলোকে বিষয়বস্তুর ক্রম অনুসারে সাজাতে হবে। সহজ থেকে কঠিন, উদ্দেশ্যের সামঞ্জস্যতা দেখে সমন্বয় করতে হবে। বুদ্ধিবৃত্তিক উপলব্ধি, প্রয়োগ, বিশ্লেষণ-সংশ্লেষণ, মূল্যায়ন ও সৃজন বিষয়ক অভীক্ষা পদের ধারাবাহিকতা অনুযায়ী এবং অভীক্ষা পদের সাধারণ কাঠিন্যমানের ভিত্তিতে অভীক্ষাপদ সাজাতে হবে।

৫. অভীক্ষার যথার্থতা ও নির্ভরযোগ্যতা নির্ণয় : অভীক্ষার যথার্থতা ও নির্ভরযোগ্যতার মান নির্ণয় করতে হবে। যদি দেখা যায় যে এই দুইটি মান যথেষ্ট উচ্চ স্তরে তাহলে অভীক্ষাটি গ্রহণযোগ্য হবে। তবে নির্ভরশীলতা ও যথার্থতার মান কত উচ্চ স্তরের হলে অভীক্ষাটি কার্যকর বলে গ্রহণ করা হবে তা অভীক্ষাটির প্রকৃতি ও প্রয়োগ ক্ষেত্রের উপর নির্ভর করবে। একটি অভীক্ষার যথার্থতা বা নির্ভরযোগ্যতার মান উচ্চ না হলে, একে কখনও আদর্শায়িত অভীক্ষা বলা যাবে না। তাই অভীক্ষা আদর্শায়নে অভীক্ষার যথার্থতা ও নির্ভরযোগ্যতা নির্ণয় অতি গুরুত্বপূর্ণ। পরিসংখ্যান পদ্ধতিতে দুই গুচ্ছ স্কোরের অনুবন্ধ সহগ নির্ণয় করে যথার্থতা ও নির্ভরযোগ্যতার মান নির্ধারণ করা হয়।

উত্তম অভীক্ষার বৈশিষ্ট্য হিসাবে যথার্থতা ও নির্ভরযোগ্যতার বর্ণনায় কি কি পদ্ধতিতে এগুলো নির্ণয় করা যায় তার উল্লেখ আছে।

৬. নর্ম বা আদর্শমান নির্ণয় : অভীক্ষার আদর্শমান নির্ণয়ের জন্য পুনঃ প্রয়োগের ফলে প্রাপ্ত স্কোর বন্টনকে কাজে লাগাতে হবে। ঐ স্কোরগুলির ভিত্তিতে যে কোন ধরনের আদর্শমান নির্ধারণ করতে হবে। প্রয়োজনমতো বয়সভিত্তিক ও শ্রেণীভিত্তিক আদর্শমান নির্ণয় করতে হবে। অভীক্ষার আদর্শায়নের জন্য অভীক্ষাপদ এমনভাবে তৈরি করতে হবে যাতে তা সমাজ, স্থান, স্তর এবং সময়ভেদে সকলের কাছে সমভাবে গ্রহণযোগ্য ও তাৎপর্যপূর্ণ হয়। এই জন্যই অভীক্ষার আদর্শমান নির্ণয় করা হয়। আদর্শমান হতে পারে বয়সভিত্তিক, শ্রেণিভিত্তিক বা ক্রাইটেরিয়া ভিত্তিক।

একটি নির্দিষ্ট বয়সের অভীক্ষার্থীদের স্কোরের গড়/মধ্যক/প্রচুরক হল অভীক্ষাটির বয়স ভিত্তিক আদর্শ মান বা এইজ নর্ম। একটি নির্দিষ্ট শ্রেণির অভীক্ষার্থীদের এরূপ মান হল অভীক্ষাটির শ্রেণি ভিত্তিক আদর্শ মান বা গ্রেড নর্ম। একটি নির্দিষ্ট কাজ, বৃত্তি বা পেশায় নিয়োজিত অভীক্ষার্থীদের এরূপ মান হল অভীক্ষাটির সে কাজ ভিত্তিক আদর্শ মান বা ক্রাইটেরিয়া নর্ম।

প্রতিনিধিত্বমূলক দলের উপর অভীক্ষা প্রয়োগ ও পুন:প্রয়োগের মাধ্যমে অভীক্ষার আদর্শমান নির্ণয় করা হয়।

পদ বিশ্লেষণ পদ্ধতি ও কৌশল

পদ বিশ্লেষণ আদর্শায়ন প্রক্রিয়ার একটি স্তর। পদ বিশ্লেষণের নানা ধরনের উন্নত কৌশল আছে। বিদ্যালয়ে শিক্ষার্থীদের জন্য শিক্ষাগত বা মনোবৈজ্ঞানিক অভীক্ষা গঠনের জন্য সাধারণত শিক্ষকগণ যে পদ্ধতি প্রয়োগ করতে পারেন সে রকম উদাহরণ দেওয়া হল:

ক) অভীক্ষাপদের কাঠিন্যমান নির্ণয় (Difficulty Value): উচ্চমানের $\frac{1}{3}$ অংশ ও নিম্নমানের $\frac{1}{3}$ অংশ স্কোরের ভিত্তিতে প্রত্যেকটি অভীক্ষাপদের কাঠিন্য মান নির্ণয় করা হয়। মধ্যবর্তী $\frac{1}{3}$ অংশকে এই বিশ্লেষণের অন্তর্ভুক্ত করা হয় না। ধরা হয় মধ্যবর্তী এই স্কোরগুলোর প্রকৃতি একই রকম। কিভাবে কোন অভীক্ষা পদের কাঠিন্য মান নির্ণয় করা যায়, একটি উদাহরণের সাহায্যে আলোচনা করা হল। মনে করি 60 জন ছাত্রের উপর প্রস্তুতকৃত একটি নমুনা অভীক্ষা প্রয়োগ করা হল। এক্ষেত্রে নিম্নলিখিত পর্যায়ে অগ্রসর হতে হবে:

(i) 60 টি স্কোরকে মানের ক্রমানুসারে সাজাতে হবে।

(ii) উচ্চমান স্কোর বিশিষ্ট 60 এর এক তৃতীয়াংশ বা 20টি স্কোর বিশিষ্ট উত্তরপত্র এবং নিম্নমান স্কোর বিশিষ্ট 20টি স্কোরের উত্তরপত্র বেছে নিতে হবে। মাঝের এক তৃতীয়াংশ উত্তরপত্র বিবেচনায় নেয়া হবে না।

(iii) প্রত্যেকটি অভীক্ষাপদ বা প্রশ্নের ক্ষেত্রে 60 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে উচ্চমানের কত জন এবং নিম্নমানের কত জন সঠিক উত্তর করেছে তা নির্ণয় করতে হবে।

(iv) নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে প্রত্যেকটি অভীক্ষাপদের কাঠিন্যমান নির্ণয় করা হয়।

কাঠিন্যমানকে সংক্ষেপে DV ধরা হয়।

$\therefore$ কাঠিন্য মান $(D.V) = \frac{R}{T} \times 100;$ এখানে R= উভয় দলের মোট নির্ভুল উত্তরের সংখ্যা

T= উভয় দলের মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা

মনে করি কোন একটি প্রশ্নে উচ্চমানের 20 জনের মধ্যে 14 জন এবং নিম্নমানের 20 জনের 6 জন সঠিক উত্তর করেছে। এক্ষেত্রে T= $20+20=40$ এবং $R=14+6=20$

$\therefore$ উক্ত প্রশ্নের কাঠিন্য মান $(D.V) = \frac{R}{T} \times 100; = \frac{20}{40} \times 100 = 50$

এভাবে প্রত্যেকটি অভীক্ষা পদের কাঠিন্য মান নির্ণয় করা যায়।

খ) অভীক্ষা পদের বিভেদক ক্ষমতা নির্ণয়(Discriminating Power): অভীক্ষাপদগুলোর বিভেদক ক্ষমতা নির্ণয়ে পূর্বোল্লিখিত তথ্যই ব্যবহার করা হয়। কোন অভীক্ষাপদের পার্থক্য নির্ণায়ক বা বিভেদক ক্ষমতা নির্ণয়ের সূত্রঃ

বিভেদক ক্ষমতা $(DP) = \frac{R_u - R_L}{\frac{1}{2}T}$ [এখানে $R_u =$ উচ্চমানের যতজন পরীক্ষার্থী পদটির নির্ভুল উত্তর করেছে।

$R_L =$ নিম্নমানের যতজন পরীক্ষার্থী অভীক্ষাপদটির নির্ভুল উত্তর করেছে।]

$\therefore$ উক্ত প্রশ্নের বিভেদকে ক্ষমতা $(DP) = \frac{R_u - R_L}{\frac{1}{2}T} = \frac{14-6}{\frac{1}{2} \times 40} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$

এভাবে প্রত্যেক অভীক্ষাপদের বিভেদক ক্ষমতা নির্ণয় করা হয়। কোন অভীক্ষাপদের সবচেয়ে বেশি পার্থক্য-নির্ণায়ক মান 1 এবং সবচেয়ে কম শূন্য (০) হতে পারে। আবার এই সূত্র প্রয়োগে ঋণাত্মক মানও আসতে পারে।

(গ) অভীক্ষাপদের বিকল্পগুলোর অভ্যন্তরীণ সামঞ্জস্য নির্ণয় (Internal Consistency of alternatives) : সাধারণ নীতি অনুযায়ী কোন প্রশ্নের অন্তর্ভুক্ত বিকল্প উত্তরের যেগুলো নিম্নমানের পরীক্ষার্থীদের অপেক্ষাকৃত বেশি আকর্ষণ করে তাদের কার্যকারিতা বেশি।

অভ্যন্তরীণ সামঞ্জস্য নির্ণয়ের সূত্রঃ $IC(a) = \frac{R_L - R_u}{\frac{1}{2}T}$

$IC\ (a) =$ বিকল্প উত্তর a এর IC, $R_L =$ নিম্নমানের শিক্ষার্থীদের বিশেষ সম্ভাব্য উত্তর নির্বাচনের সংখ্যা;

$R_u =$ উচ্চমানের শিক্ষার্থীদের বিশেষ সম্ভাব্য উত্তর নির্বাচনের সংখ্যা।

একটি পদ থেকে পদ বিশ্লেষণ সংক্রান্ত তিনটি মান নির্ণয়ের উদাহরণঃ

প্রশ্ন :একটি চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুজোড়া সমান্তরাল; এটি কী ধরনের চতুর্ভুজ?

ক. সামান্তরিক খ. আয়ত গ. ট্রাপিজিয়াম ঘ. রম্বস

পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 45 এবং এদের মধ্যে উচ্চমানের 15 জন (এক তৃতীয়াংশ) এবং নিম্নমানের 15 জনের প্রদত্ত উত্তরের তালিকা দেয়া হল :

বিকল্প উত্তর	ক	খ	গ	ঘ
উচ্চমানের ১৫ জনের উত্তরের বন্টন	15	0	0	0
নিম্নমানের ১৫ জনের উত্তরের বন্টন	6	4	2	3

অভীক্ষা পদটির কাঠিন্য মান, বিভেদক ক্ষমতা এবং বিকল্পগুলোর অভ্যন্তরীণ সামঞ্জস্যতা নির্ণয় করুন।

কাঠিন্যমান $DV = \frac{R}{T} \times 100 = \frac{21}{30} \times 100 = 70$;   [এখানে $R = 15 + 6 = 21$, $T = 15 + 15 = 30$]

বিভেদক ক্ষমতা $DP = \frac{R_u - R_L}{\frac{1}{2}T} = \frac{15-6}{\frac{1}{2}\times 30} = \frac{9}{15} = 0.6$ [এখানে, $R_u = 15$, $R_L = 6$]

এখানে সর্বাধিক প্রযোজ্য উত্তর 'ক'। অতএব অপর তিনটি বিকল্পের আইসি নির্ণয় করতে হবে।

বিকল্প 'খ' এর অভ্যন্তরীণ সামঞ্জস্য; IC (খ) $= \frac{R_L - R_u}{\frac{1}{2}T} = \frac{4-0}{\frac{1}{2}\times 30} = \frac{4}{15} = 0.266$

'গ' এর অভ্যন্তরীণ সামঞ্জস্য; IC (গ) $= \frac{R_L - R_u}{\frac{1}{2}T} = \frac{2-0}{\frac{1}{2}\times 30} = \frac{2}{15} = 0.133$

'ঘ' উত্তরের অভ্যন্তরীণ সামঞ্জস্য; IC (ঘ) $= \frac{R_L - R_u}{\frac{1}{2}T} = \frac{3-0}{\frac{1}{2}\times 30} = \frac{3}{15} = \frac{1}{15} = 0.20$

এ পদ বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায় যে, অভীক্ষা পদটির কাঠিন্যমান ৭০ এবং বিভেদক ক্ষমতা ০.৬০ (গ্রহণযোগ্য মানের),। কিন্তু, বিকল্প উত্তরগুলো নিম্নমানের; পরীক্ষার্থীর আকর্ষণ করার ক্ষমতা খুবই কম। বিশেষত (গ) উত্তরের IC অত্যন্ত কম। অতএব এ উত্তরটি পরিবর্তন করা বাঞ্ছনীয়। (এখানে 'ট্রাপিজিয়াম' এর পরিবর্তে 'বর্গ' প্রযোজ্য হবে)

৮.৩ শিখনের ডোমেইন ব্যবহার : সৃজনশীল প্রশ্ন পদ্ধতি

শিক্ষা কার্যক্রমের একটি রূপরেখা হচ্ছে কারিকুলাম বা শিক্ষাক্রম। শিক্ষার প্রতিটি স্তরের জন্য শিক্ষাক্রম থাকে। শিক্ষাক্রমে নির্দিষ্ট স্তরের শিক্ষার উদ্দেশ্যসমূহ বর্ণিত আছে। একই সাথে বিষয়ভিত্তিক শিখনফল, বিষয়বস্তু, শিখন-শেখানো কার্যাবলি, শেখানোর পদ্ধতি এবং শিক্ষার্থীদের মূল্যায়ন কৌশল ইত্যাদিরও উল্লেখ আছে। সম্প্রতি শিক্ষার্থীদের মূল্যায়ন কৌশলে পরিবর্তন আনা হয়েছে। শিক্ষা মন্ত্রণালয়ের ০৬/০৬/২০০৭ খ্রি. তারিখে প্রকাশিত নং- শিম/শাঃ১১/বিবিধ-৬/সেসিপ/২০০৪/৯৯৯ অনুযায়ী নুতন প্রশ্ন পদ্ধতিতে এসএসসি পরীক্ষা সংক্রান্ত আনুষ্ঠানিক ঘোষণা প্রদান করা হয়।

পরবর্তীতে ৩০ এপ্রিল ২০০৮ খ্রি. তারিখে 'কাঠামোবদ্ধ প্রশ্ন' শব্দের পরিবর্তে 'সৃজনশীল প্রশ্ন' সংক্রান্ত প্রজ্ঞাপন প্রকাশিত হয়। ২০১০ সালে এসএসসি পরীক্ষায় বাংলা প্রথম পত্র ও ধর্মশিক্ষা বিষয়ে এবং ২০১১ সালে আরো কয়েকটি বিষয়ে সৃজনশীল প্রশ্ন পদ্ধতিতে এসএসসি পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়েছে। এ ধারাবাহিকতায় ২০১২ সালে অনুষ্ঠেয় এইচএসসি পরীক্ষার বাংলা বিষয়ের প্রথম পত্র ও ২০১৩ সালে পৌরনীতি, রসায়ন এবং ব্যবসায় নীতি ও প্রয়োগ এবং আলিম পরীক্ষায় বাংলা ও ইসলামের ইতিহাস বিষয়ে সৃজনশীল প্রশ্নপদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়। পরবর্তীতে ২০১৫ সালে এসএসসি ও ২০১৭ সালে এইচএসসি পরীক্ষার গণিত বিষয়ের প্রশ্নপত্রও সৃজনশীল প্রশ্ন পদ্ধতিতে অনুষ্ঠিত হচ্ছে।

মূলত: কোন পাঠের শিখনের উদ্দেশ্য নির্ধারণ ও শিখন-শেখানো কার্যক্রমের রূপরেখা প্রণয়ন এবং শিক্ষার্থীদের অর্জনযোগ্য দক্ষতাগুলো যাচাই বা পরিমাপের জন্য মার্কিন শিক্ষা মনোবিজ্ঞানী Benjamin Samuel Bloom (১৯১৩ - ১৯৯৯) তাঁর সহযোগীদেরকে নিয়ে এক গবেষণায় ১৯৫৬ সালে তিনটি শিখন ক্ষেত্রের উল্লেখ করেন। এগুলো হচ্ছে:

১. বুদ্ধিবৃত্তিক চিন্তন ক্ষেত্র (Cognitive Domain)
২. আবেগিক ক্ষেত্র (Affective Domain-)
৩. মনোপেশিজ ক্ষেত্র (Psychomotor Domain)।

২০১২ সালে প্রণীত শিক্ষাক্রমেও শিক্ষার্থীর অর্জনের সার্বিক মূল্যায়নের উপর গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে। তবে, *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain* নামে ১৯৫৬ সালে প্রকাশিত মূল ভার্সনে বুদ্ধিবৃত্তিক চিন্তন ক্ষেত্রে ৬টি দক্ষতা স্তর (জ্ঞান, অনুধাবন, প্রয়োগ, বিশ্লেষণ, সংশ্লেষণ ও মূল্যায়ন) চিহ্নিত করা হলেও ২০০১ সালে দক্ষতা স্তরগুলো পরিমার্জন করা হয়। সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়নের ক্ষেত্রে উল্লিখিত ৬টি দক্ষতা স্তরকে চারটি দক্ষতা স্তরে (গণিত ও হিসাব বিজ্ঞান ব্যতীত) বিন্যাস করা হয়েছে। এসএসসি ও এইচএসসি পরীক্ষার প্রশ্নপত্রে এই চারটি স্তরের বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন অন্তর্ভুক্ত থাকছে। এ দুই প্রকারের প্রশ্নপত্র সমন্বয়ে সৃজনশীল প্রশ্নপদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হচ্ছে। সেসিপ প্রকল্পের আওতায় এ প্রশ্ন পদ্ধতি সংক্রান্ত বিষয়ে প্রশিক্ষণ কার্যক্রম পরিচালিত

হচ্ছে এবং '*সৃজনশীল প্রশ্ন প্রশিক্ষণ ম্যানুয়্যাল*' প্রণীত হয়েছে। এতে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংক্রান্ত বিস্তারিত আলোচনা অন্তর্ভুক্ত হয়েছে।

উক্ত ম্যানুয়েল অনুযায়ী চিন্তন দক্ষতার স্তরসমূহ শিক্ষাক্রমে চিন্তন দক্ষতার বিভিন্ন স্তরের প্রশ্নের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদেরকে মূল্যায়নের তাগিদ দেওয়া হয়েছে। নিম্নে চিন্তন দক্ষতার ৬টি স্তরের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা প্রদত্ত হলো :

- **স্মরণ করা(Remember):** উপস্থাপিত ঘটনা, পরিস্থিতি বা বস্তুর সাথে সংশ্লিষ্ট তথ্য শনাক্ত এবং স্মৃতি থেকে উল্লেখ করতে পারা।
- **বুঝতে পারা (Understand):** লিখিত, মৌখিক বা লেখচিত্রের মাধ্যমে পরিবেশিত নির্দেশনামূলক তথ্য/ম্যাসেজ থেকে অর্থ বলতে বা লিখতে পারা (ব্যাখ্যা/বর্ণনা করা)।
- **প্রয়োগ করা (Apply):** তথ্য, পদ্ধতি, ধারণা, সূত্র নতুন পরিস্থিতিতে ব্যবহার করা। প্রয়োজনীয় জ্ঞান ও অনুধাবন ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান।
- **বিশ্লেষণ করা (Analyze):** বস্তু, ধারণা, সূত্র, প্রক্রিয়া, পদ্ধতি বিভিন্ন উপাদানে বিভক্ত, উপাদানসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক এবং সমগ্রের সাথে সম্পর্ক নির্ধারণ করা।
- **মূল্যায়ন করা (Evaluate):** ক্রাইটেরিয়া, মানদণ্ড, যুক্তির ভিত্তিতে মতামত, বিচার-বিবেচনা প্রদান।
- **সৃষ্টি করা (Create):**নতুন পরিস্থিতিতে তথ্য/উপাদান একত্রিত করে নতুন কিছু (বস্তু, ধারণা) সৃষ্টি করা।

সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়নের ক্ষেত্রে উল্লিখিত ৬টি দক্ষতা স্তরকে নিচের চারটি দক্ষতা স্তরে বিন্যাস করা হয়েছে। এসএসসি পরীক্ষার প্রশ্নপত্রে এই চারটি স্তরের বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন অন্তর্ভুক্ত থাকছে। বর্তমানে গণিত বিষয়েও এ পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হচ্ছে।

চিন্তন দক্ষতার চারটি স্তরকে কাঠিন্যের ক্রমানুসারে নিম্নোক্তভাবে বিন্যস্ত করা হয়েছে:

দক্ষতা স্তর	চিন্তন দক্ষতার বিবরণ
জ্ঞান স্তর	এটি হলো চিন্তন দক্ষতার সর্বনিম্ন স্তর। এর অর্থ হচ্ছে পূর্বে জানা কোনো কিছু স্মরণ করা। এর মধ্যে যে সব বিষয় অন্তর্ভুক্ত সেগুলো হলো : সাধারণ শব্দসমূহ, বিশেষ তথ্য, তত্ত্ব, পদ্ধতি, প্রক্রিয়া, ধারণা এবং নীতিমালা ইত্যাদি স্মরণ করা বা চিনতে পারা। জ্ঞান স্তরের প্রশ্ন তৈরি করা সহজ। জ্ঞান স্তরের প্রশ্নের উত্তর সরাসরি পাঠ্যপুস্তকে পাওয়া যায়।
অনুধাবন স্তর	অনুধাবন হল কোনো বিষয়ের অর্থ বোঝার দক্ষতা। তা হতে পারে তথ্য, নীতিমালা, সূত্র, নিয়ম, পদ্ধতি, প্রক্রিয়া ইত্যাদি বুঝতে পারা। বুঝতে পারলে ব্যাখ্যা অথবা অনুবাদ করা যায়। বুঝতে পারলেই মৌখিকভাবে এবং প্রতীক, গ্রাফ, সারণি ও চিত্রের সাহায্যে বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা সম্ভব হয়। এ ধরণের প্রশ্নের উত্তর দেওয়ার জন্য জ্ঞান স্তরের তুলনায় অধিকতর দক্ষতার প্রয়োজন। শিখন এবং মূল্যায়ন -এর জন্য অনুধাবন স্তরের প্রশ্নের ব্যবহার গুরুত্বপূর্ণ।
প্রয়োগ স্তর	প্রয়োগ বলতে বুঝায় পূর্বের শেখা বিষয়কে নতুন কোনো পরিস্থিতিতে ব্যবহার করার দক্ষতা। আইন, বিধি, তত্ত্ব, সূত্র, নিয়ম, পদ্ধতি, ধারণা, নীতি ইত্যাদির প্রয়োগ হতে পারে। প্রয়োগ দক্ষতা স্তরে অন্তর্ভুক্ত থাকতে পারে চার্ট ও গ্রাফ তৈরি করা; পদ্ধতির সঠিক ব্যবহার ও প্রদর্শন এবং হিসাবনিকাশ।
উচ্চতর চিন্তন দক্ষতা স্তর	উচ্চতর চিন্তন-দক্ষতা বলতে বোঝায় কোনো বিষয়ের বিশ্লেষণ (বিশেষ থেকে সাধারণ), সংশ্লেষণ (সাধারণ থেকে বিশেষ) এবং মূল্যায়ন (বিচার-বিবেচনা, যুক্তি)। কোনো সমগ্র বিষয়, ধারণা বা বিষয়বস্তুকে বিভিন্ন উপাদান বা অংশে বিভক্ত করা এবং তাদের মধ্যে সম্পর্ক চিহ্নিত করা। বিষয় সংশ্লিষ্ট একগুচ্ছ তথ্য/উপাদান/অংশ সংগঠিত এবং সমগ্রতে রূপান্তর করা। বিভিন্ন উৎস থেকে তথ্য বা ধারণা সংগ্রহ করে তা দিয়ে একটি কাঠামো বা নকশা তৈরি করা। কোনো মতামত, কাজ, সমাধান এবং পদ্ধতির মূল্যবিচার করা। দক্ষতার সর্বোচ্চ স্তর হিসেবে এর মধ্যে নিম্নতর স্তরের অন্য সব চিন্তন দক্ষতাগুলো অন্তর্ভুক্ত থাকে। পূর্বের জানা তথ্য/তত্ত্ব (জ্ঞান) ব্যবহার করে নতুন কোনো পরিস্থিতিতে বিচার-বিশ্লেষণ করার, সিদ্ধান্ত গ্রহণের এবং মূল্যায়নের দক্ষতাই হলো উচ্চতর চিন্তন-দক্ষতা।

গণিতে শিক্ষাক্রমের প্রায়োগিক দিকের উপর গুরুত্ব আরোপ করে এ ৬ টি চিন্তন-দক্ষতার স্তরকে সহজ, মধ্যম ও কঠিন এ ৩ স্তরে বিন্যস্ত করা হয়েছে।

সহজ মান (স্মৃতি ও উপলব্ধি): এ স্তরের প্রশ্নগুলো হবে সহজ। সাধারণ বা বিশেষ কোন তত্ত্ব, তথ্য, পদ্ধতি, প্রক্রিয়া, ধারণা এবং নীতিমালা ইত্যাদি চিনতে পারার দক্ষতা যাচাই করার জন্য সহজ মান প্রশ্ন করা হয়।

মধ্যম মান (উপলব্ধি ও প্রয়োগ): এ স্তরের প্রশ্নে কোন তথ্য, নীতিমালা, সূত্র, নিয়ম, পদ্ধতি, প্রক্রিয়া ইত্যাদি নুতন পরিস্থিতির আলোকে ব্যাখ্যা করতে দেওয়া হবে। শিক্ষার্থী পূর্বে অধীত বিষয়কে অপরিচিত কোন পরিস্থিতিতে ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে। এ ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীকে সহজ মানের প্রশ্ন অপেক্ষা অধিক গভীর চিন্তন দক্ষতা প্রদর্শন করতে হবে।

কঠিন মান (উচ্চতর প্রয়োগ): এ ধরনের প্রশ্নের উত্তর প্রদানে শিক্ষার্থীকে বিভিন্ন মাত্রার (Multiple Dimension) চিন্তন দক্ষতা ব্যবহার করতে হবে। কঠিন মানের প্রশ্নের উত্তরে পূর্বে পঠিত তথ্য, নীতিমালা, সূত্র, নিয়ম, পদ্ধতি, প্রক্রিয়া ইত্যাদি নুতন পরিস্থিতির আলোকে বিশ্লেষণ করার প্রয়োজন হবে।

নিম্নে শিক্ষার্থী কর্তৃক গণিতের বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন উত্তর দানে বিবেচ্য সময় ছকে উল্লেখিত হলো। প্রশ্নপত্র প্রণয়নের ক্ষেত্রে সময় বিবেচনায় নিয়ে আইটেম তৈরি করতে হবে।

চিন্তন দক্ষতার স্তর	বহুনির্বাচনি প্রশ্ন উত্তর দানে বিবেচ্য সময় (সেকেন্ড)	সৃজনশীল প্রশ্ন উত্তর দানে বিবেচ্য সময় (মিনিট)
কঠিন মান	৬০ – ৯০	৯ – ১১
মধ্যম মান	৪০ – ৬০	৬ – ৮
সহজ মান	১০ – ৪০	১ – ৩

সূত্র: *সৃজনশীল প্রশ্ন প্রশিক্ষণ ম্যানুয়্যাল*

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

বহু নির্বাচনি প্রশ্ন অন্যান্য প্রকারের নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নের তুলনায় বেশি ব্যবহৃত হয়ে থাকে। দক্ষতার বিভিন্ন স্তরের উপযোগী বহু নির্বাচনি প্রশ্ন তৈরি করা সম্ভব।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের গঠন কাঠামো ও বৈশিষ্ট্য

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের একটি উদ্দীপক (Stem) বা তথ্য (Information) ও নির্দেশনা(Instruction) থাকে এবং কতগুলো বিকল্প উত্তর (Options) দেওয়া থাকে। বিকল্প উত্তরসমূহের মধ্যে একটি সঠিক উত্তর(Key) এবং অপরগুলি বিক্ষেপক (Distractors)। বিক্ষেপকগুলো এমনভাবে প্রণয়ন করা হয় যেন বিষয়টি সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা নেই এমন পরীক্ষার্থীরা বিক্ষেপকগুলোর দিকে ধাবিত হওয়ার সম্ভাবনা থাকবে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন প্রণয়নের জন্য কিছু নীতিমালা

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উদ্দীপক তৈরিতে নিম্নোক্ত বিষয় বিবেচনায় আনতে হবে -

- প্রয়োজনীয় সব তথ্য সরবরাহ করবে
- সহজ ভাষায় সংক্ষিপ্ত আকারে হবে
- অপ্রাসঙ্গিক উপাদানমুক্ত হবে
- প্রয়োজনীয় শব্দ অন্তর্ভুক্ত করতে হবে (উত্তরসমূহে কোনো শব্দের পুনরাবৃত্তি থাকবে না)
- হ্যাঁ' বোধক হতে হবে ('না' বোধক শব্দের ব্যবহার অনিবার্য হলে শিক্ষার্থীর দৃষ্টি আকর্ষণ করে এমনভাবে লিখতে হবে)
- এমন কোনো ইঙ্গিত দিবেন না যাতে পরীক্ষার্থী উত্তরগুচ্ছ থেকে সঠিক উত্তর বাছাই করতে এবং ভুল উত্তর বাদ দিতে পারে
- নেতিবাচক ধারণার সৃষ্টি করবে না, অর্থাৎ ইতিবাচক হবে

বিকল্প উত্তর লিখন (Key ও Distractors)

- বিষয়বস্তু এবং ব্যাকরণগত গঠনের দিক থেকে প্রশ্নের সংগে সাদৃশ্যপূর্ণ হবে
- প্রশ্নের অসম্পূর্ণ বাক্যকে অর্থপূর্ণ করে তুলবে
- পরীক্ষার্থীদের দ্বারা নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা থাকতে হবে। (প্রতিটি বিকল্প উত্তর মোট পরীক্ষার্থীর কমপক্ষে ৫% পরীক্ষার্থীর পছন্দ করার সম্ভাবনা থাকতে হবে)
- সংখ্যাবাচক হলে ক্রমানুযায়ী তালিকাভুক্ত হবে
- দৈর্ঘ্যে প্রায় পরস্পর সমান হবে (মনে রাখতে হবে যে বাক্যে শব্দ বেশি হলে তা সঠিক উত্তর হবার সম্ভাবনা থাকে)
- Mutually exclusive/inclusive বিকল্প উত্তর যথাসম্ভব পরিহার করা (সে ক্ষেত্রে বিকল্প উত্তরের সংখ্যা কমে যায়)
- 'উপরের সবগুলো সঠিক'/'উপরের কোনটি সঠিক নয়' এরূপ বাক্য যথাসম্ভব পরিহার করতে হবে
- একটি বহুনির্বাচনি প্রশ্নপত্রের বিভিন্ন প্রশ্নের বিকল্প উত্তর বা উত্তরগুচ্ছে সঠিক উত্তরের(Answer Key) ক্রমিক সংখ্যা (Serial Number)এমনভাবে পরিবর্তন করতে হবে যেন সঠিক উত্তরের কোনো নির্দিষ্ট ক্রম (Sequence) না থাকে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের প্রকারভেদ

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন তিন ধরনের। এগুলো হলো:

১. সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন(Simple MCQ)
২. বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্ন(Multiple Completion MCQ)
৩. অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্ন(Situation Set MCQ)
৪.

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন (Simple MCQ)

এ ধরণের প্রশ্ন শুরু হয়ে থাকে প্রশ্নের আকারে অথবা অসম্পূর্ণ বাক্য হিসেবে। প্রশ্ন অথবা অসম্পূর্ণ বাক্য উদ্দীপকের কাজ করে। তবে যথাসম্ভব অসম্পূর্ণ বাক্য পরিহার করা উত্তম। এর পরে থাকে ৪টি বিকল্প উত্তর, যার মধ্যে একটি মাত্র সঠিক উত্তর। এ ধরণের প্রশ্ন শিক্ষক-শিক্ষার্থী এবং প্রশ্ন প্রণেতাদের কাছে যথেষ্ট পরিচিত। সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নে উদ্দীপক/ নির্দেশনা একই সাথে থাকে। এর মাধ্যমে চিন্তন দক্ষতার জ্ঞান ও অনুধাবন স্তর যাচাই করা হয় বিধায় উদ্দীপকে নতুন পরিস্থিতি থাকে না।

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্ন (Multiple Completion MCQ)

এ ধরনের MCQ ব্যবহারে প্রশ্নে বৈচিত্র্য আসে। স্মৃতিনির্ভর নয় এমন প্রশ্ন তৈরি করার জন্য এ ধরনের প্রশ্ন ব্যবহার করা যায়। এ ধরনের প্রশ্নের শুরুতে একটি অসমাপ্ত বাক্য থাকে এবং এর পর পরই নিচে ৩টি তথ্য/বিবৃতি/ধারণা দেওয়া হয়। ৩টি তথ্য/বিবৃতি/ধারণার ১টি/২টি/৩টি সঠিক হতে পারে। এ তথ্যসমূহকে সাজিয়ে ৪টি বিকল্প উত্তর তৈরি করা হয়। ৪টি বিকল্প উত্তর থেকে শিক্ষার্থীকে একটি বাছাই করতে হয়। এ ধরনের প্রশ্নের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের অনুধাবন, প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতা যাচাই করা সম্ভব। বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নে তথ্য/বিবৃতি/ধারণা উদ্দীপক হিসেবে বিবেচিত হয়। নির্দেশনা ভিন্নভাবে থাকে। প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতা যাচাইয়ের জন্য এ ধরনের প্রশ্ন করা হলে উদ্দীপকে নতুন পরিস্থিতি থাকতে হবে। কোন প্রশ্নের উত্তরে একাধিক ধারণার সমন্বয় হওয়ার সম্ভাবনা থাকলে বা শিক্ষার্থীদের আকৃষ্ট করতে পারে এমন ৪টি বিকল্প উত্তর না পাওয়া গেলে অথবা অনুধাবন বা আরও উচ্চতর স্তরের প্রশ্ন প্রণয়নের ক্ষেত্রে বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্ন প্রণয়ন করা হয়।

প্রশ্নপত্রে এ ধরনের প্রশ্নের সংখ্যা কম থাকাই ভাল। প্রয়োজনের ভিত্তিতে এ ধরনের কিছু সংখ্যক প্রশ্ন প্রণয়ন করা যায়। তবে কোনভাবেই তা ২০% এর বেশি হবে না।

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্ন (Situation Set MCQ)

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক প্রশ্ন একটি উদ্দীপক/দৃশ্যকল্প/সূচনা বক্তব্য(Stem/Scenario/Situation) দিয়ে শুরু হবে। এ ধরনের বহুনির্বাচনি প্রশ্নে একই উদ্দীপক/তথ্য/দৃশ্যকল্প থেকে কয়েকটি প্রশ্ন করা যায়। প্রশ্নগুলো পরস্পরের সাথে সম্পর্কিত হবে।

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নের ক্ষেত্রে, উদ্দীপক শিক্ষার্থীর সামনে একটি নতুন পরিস্থিতি উপস্থাপন করে, যে পরিস্থিতিতে শিক্ষার্থী তার পাঠ্যপুস্তকের জ্ঞান প্রয়োগ করতে পারে। পাঠ্যপুস্তকের জ্ঞান ব্যবহার করে নতুন পরিস্থিতি বিশ্লেষণ, নতুন পরিস্থিতিতে যুক্তি প্রদর্শন, সিদ্ধান্ত গ্রহণ এবং মূল্যায়ন করতে পারে। এ ক্ষেত্রে উদ্দীপক ও নির্দেশনা আলাদাভাবে সুনির্দিষ্ট থাকে।

মূলতঃ প্রয়োগ এবং উচ্চতর দক্ষতা স্তরের প্রশ্ন তৈরির জন্য অভিন্ন তথ্যের ব্যবহার করা হয়। কখনো কখনো অনুধাবন স্তরের প্রশ্ন অভিন্ন তথ্য থেকে তৈরি করা যেতে পারে। উদ্দীপকের দৈর্ঘ্য বড় হলে শিক্ষার্থীর পড়ার সময়ের বিষয়টি বিবেচনা করে উদ্দীপকের আলোকে উচ্চতর দক্ষতা স্তর/ প্রয়োগ দক্ষতা স্তর/ অনুধাবন দক্ষতা স্তরের প্রশ্নের সংগে অনেক সময় জ্ঞান দক্ষতা স্তরের প্রশ্নও তৈরি করা হয়। তবে অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নের আওতায় সাধারণত জ্ঞান স্তরের প্রশ্ন তৈরি না করাই ভালো। শিক্ষার্থীদের জ্ঞান স্তর যাচাই করার জন্য সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নই যথেষ্ট, এর জন্য কোন জটিল কাঠামো অনুসরণ করার প্রয়োজন নেই।

নমুনা প্রশ্নের প্রথম প্রশ্নটি 'সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন', দ্বিতীয়টি 'বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্ন' এবং প্রশ্ন দু'টি একত্রে 'অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্ন'-এর উদাহরণ।

প্রশ্নের উদ্দীপক (নতুন পরিস্থিতি) তৈরির কৌশল

- পাঠ্যপুস্তক থেকে অর্জিত জ্ঞানকে কোনো ঘটনার সাথে সম্পৃক্ত করে উদ্দীপক প্রণয়ন করতে হবে এবং
- উদ্দীপক প্রণয়নের সময় বিষয়বস্তুর ভিত্তিতে দক্ষতার স্তরকে বিবেচনায় রেখে পরিস্থিতি নির্বাচন করতে হবে।
- উদ্দীপকে তথ্যের বহুমুখিতা থাকতে হবে।
- উদ্দীপক হবে মৌলিক(Unique), এটি পাঠ্যপুস্তকে সরাসরি থাকবে না। উদ্দীপক হিসেবে সরাসরি পাঠ্যপুস্তকের কোনো অংশ/অনুচ্ছেদ ব্যবহৃত হবে না।
- কখনও কখনও সিলেবাস বহির্ভূত কোন প্রবন্ধ, গল্প, ছোট গল্প এবং কবিতা থেকে সরাসরি উদ্ধৃতি দেওয়া যেতে পারে। তবে এক্ষেত্রে লক্ষ রাখতে হবে উদ্দীপকটি যেন প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতার প্রশ্ন তৈরির চাহিদা পূরণে সক্ষম হয়।
- উদ্দীপকের ভাষা হবে আকর্ষণীয়, সহজে বোধগম্য এবং যতদুর সম্ভব সংক্ষিপ্ত (উদ্দীপক ৬/৭ বাক্যের মধ্যে হওয়া বাঞ্ছনীয়)।
- অপ্রয়োজনীয় শব্দ/বাক্য পরিহার করতে হবে।
- উদ্দীপক পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তুর সাথে সম্পৃক্ত হতে হবে এবং বিষয়বস্তুর উপর ভিত্তি করে প্রণীত হবে।
- পাঠ্যপুস্তকের **একাধিক অধ্যায় সমন্বয়** করেও উদ্দীপক তৈরি করা যাবে।
- পাঠ্যপুস্তক থেকে অর্জিত জ্ঞানকে কোনো ঘটনার সাথে সম্পৃক্ত করে উদ্দীপক প্রণয়ন করতে হবে।
- পত্রপত্রিকা, রেফারেন্স বই, প্রবন্ধ, গল্প, ছোটগল্প, উপন্যাস, নাটক, রেডিও ও টেলিভিশনে প্রচারিত বিভিন্ন তথ্য বা ঘটনা, প্রামাণ্য চিত্র, বিজ্ঞাপন ও বিজ্ঞাপন চিত্র, চলচ্চিত্র ইত্যাদি উদ্দীপকের উৎস হিসেবে ব্যবহৃত হতে পারে।
- সংক্ষিপ্ত অনুচ্ছেদ, মানচিত্র, সারণি, গ্রাফ, ডায়াগ্রাম, লেখচিত্র, ছবি ইত্যাদি অথবা এগুলোর সমন্বয়ে উদ্দীপক তৈরি হবে।
- দৃশ্যকল্পে প্রশ্নের উত্তর সরাসরি থাকবে না, তবে উত্তর করার ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীকে সাহায্য করবে।
- একটি প্রশ্নের উত্তর/উত্তরের ইঙ্গিত অন্য কোনো প্রশ্নের উদ্দীপকে থাকবে না।
- প্রশ্ন প্রণেতা উদ্দীপক নিজে তৈরি করতে পারেন। নিজে উদ্দীপক তৈরির ক্ষেত্রে শিক্ষা মন্ত্রণালয়ের ২২ নভেম্বর ২০০৯ খ্রি. তারিখের প্রজ্ঞাপন নং- শিম/শাঃ১১/বিবিধ-৬/সেসিপ/২০০৪(অংশ-১)/১১৪৮ পত্রের মর্ম অবশ্যই অনুসরণযোগ্য। উক্ত প্রজ্ঞাপন অনুযায়ী

  (ক) পাঠ্যপুস্তকে রাজনৈতিক, ধর্মীয় ও সামাজিকভাবে গুরুত্বপূর্ণ ব্যক্তিবর্গের নাম না থাকলে প্রশ্নে উদ্দীপক হিসাবে রাজনৈতিক, ধর্মীয়, সামাজিকভাবে গুরুত্বপূর্ণ ব্যক্তিদের নাম ব্যবহার করা যাবে না।

  (খ) বাংলাদেশের সার্বভৌমত্ব, সরকার, কোন জনগোষ্ঠী, আদিবাসী এবং কোন অঞ্চলকে নেতিবাচকভাবে উপস্থাপন করে কোন উদ্দীপক ও প্রশ্ন তৈরি করা যাবে না।

  (গ) বাংলাদেশের ধর্ম, বর্ণ, গোত্র, গোষ্ঠী, ভাষা, সংস্কৃতি, ঐতিহ্য এবং জাতীয় অনুষ্ঠানকে অমর্যাদা করে কোন উদ্দীপক ও প্রশ্ন তৈরি করা যাবে না।

  (ঘ) রাষ্ট্র ও জাতিকে অমর্যাদা করে কোন উদ্দীপক ও প্রশ্ন তৈরি করা যাবে না।

  (ঙ) সংবিধান পরিপন্থী ও রাষ্ট্র বিরোধী কোন উদ্দীপক ও প্রশ্ন প্রণয়ন করা যাবে না।

(চ) কারিকুলামের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য অনুযায়ী পাঠ্যপুস্তকের তথ্যের আলোকে শিক্ষার্থীর চিন্তা করার দক্ষতা কোন স্তরে অবস্থান করছে তা মূল্যায়ন করাই প্রশ্নপত্র প্রণয়ন ও পরীক্ষার উদ্দেশ্য। অতএব, হিংসা বা বিদ্বেষ ছড়াতে পারে, মানহানির ঘটনা ঘটতে পারে এমন উদ্দীপক বা প্রশ্ন কোনোভাবেই প্রণয়ন করা যাবে না।

(ছ) ধর্ম, তীর্থস্থান, ধর্মীয় স্থাপনা, ঐতিহাসিক স্থান ইত্যাদিকে অসম্মান করে কোন উদ্দীপক ও প্রশ্ন তৈরি/প্রণয়ন করা যাবে না।

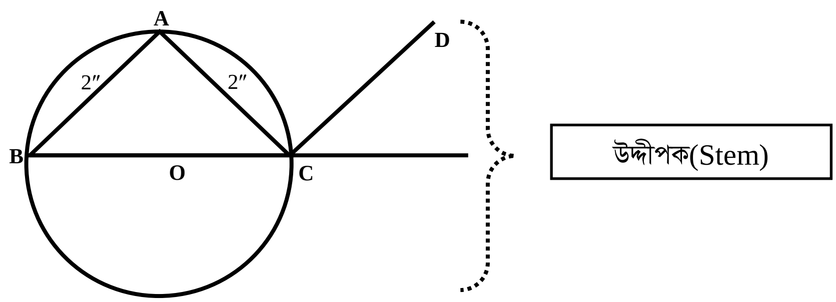
(জ) কোন অশোভনীয় বা আপত্তিকর ছবি উদ্দীপক হিসাবে ব্যবহার করা যাবে না।

(ঝ) সরকার এবং সমাজ কর্তৃক অননুমোদিত বা অগ্রহণযোগ্য বিষয়সমূহ (যেমনঃ বাল্য বিবাহ, যৌতুক) ইতিবাচক অর্থে ব্যবহার করা যাবে না।

সূত্রঃ *শিক্ষা মন্ত্রণালয়ের ২২ নভেম্বর ২০০৯ খ্রি. তারিখের প্রজ্ঞাপন (প্রজ্ঞাপনে 'চ'-এর উল্লেখ ছিল না)*

নমুনা বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

নিচের চিত্রটি লক্ষ করুন এবং ১ নং ও ২ নং প্রশ্নের উত্তর দিন :



CD||AB

নির্দেশনা(Instruction) ও তথ্য (Information)

প্রশ্ন ১ঃ $\angle ABC$ এর পরিমাণ কত?

ক) $90°$

খ) $75°$

গ) $60°$

ঘ) $45°$

বিক্ষেপক(Distractors)

সঠিক উত্তর(Key)

প্রশ্ন ২ঃ

i) $BC = 2\sqrt{2}''$

ii) ΔABC-এর পরিসীমা $4\sqrt{2}''$

iii) $\angle ACD = 90°$

উদ্দীপকের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii

খ) i ও iii

গ) ii ও iii

ঘ) i, ii ও iii

বিক্ষেপক(Distractors)

সঠিক উত্তর(Key)

সৃজনশীল প্রশ্ন

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন হিসেবে বহুনির্বাচনি প্রশ্নের পাশাপাশি বিস্তৃত উত্তরের সৃজনশীল প্রশ্নপত্র থাকবে। নিম্নে সৃজনশীল প্রশ্নের বিষয়গুলো সংক্ষেপে আলোচিত হলো :

সৃজনশীল প্রশ্নের গঠন কাঠামো

একটি সৃজনশীল প্রশ্নের শুরুতে একটি নতুন পরিস্থিতিযুক্ত উদ্দীপক এবং উদ্দীপক সংশ্লিষ্ট চারটি প্রশ্ন থাকে (গণিত ও হিসাববিজ্ঞান ব্যতীত)। প্রশ্ন চারটি কাঠিন্যের ক্রমানুসারে থাকে। একটি সৃজনশীল প্রশ্ন চিন্তন দক্ষতার বিভিন্ন স্তর যাচাই করতে পারে। প্রতিটি সৃজনশীল প্রশ্নের জন্য ১০ নম্বর বরাদ্দ থাকবে।

সৃজনশীল প্রশ্নের প্রথম অংশটি (ক) জ্ঞান স্তরের যা সহজ ও নিতান্তই স্মৃতিনির্ভর। প্রশ্নটি স্মৃতিনির্ভর হলেও তা যেন অর্থবহ এবং শিক্ষণীয় হয়। এ অংশটির জন্য ১ নম্বর বরাদ্দ থাকবে।

সৃজনশীল প্রশ্নের দ্বিতীয় অংশ (খ) হল অনুধাবন স্তরের প্রশ্ন। এর মাধ্যমে শিক্ষাক্রমের আওতায় পাঠ্যবইয়ের বিষয়বস্তু অনুধাবন করার ক্ষমতা যাচাই করা হয়। পাঠ্যবইয়ে বিভিন্ন ঘটনা বা বিষয়বস্তুর বিবরণ দেওয়া থাকে। এ ধরনের প্রশ্নে সরাসরি পাঠ্যবইয়ের অনুরূপ বিবরণ জানতে চাওয়া হয় না। এক্ষেত্রে শিক্ষার্থীকে বিষয়বস্তু সম্পর্কে ব্যাখ্যা বা বর্ণনা দিতে বলা হয়। প্রশ্নের এ অংশের জন্য ২ নম্বর বরাদ্দ থাকবে।

প্রশ্নের তৃতীয় অংশটি (গ) হল প্রয়োগ স্তরের প্রশ্ন। সৃজনশীল প্রশ্নের এ অংশটি ভালোমানের নতুন পরিস্থিতিযুক্ত উদ্দীপকের উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ উদ্দীপক যদি খুব মানসম্পন্ন হয় তবে প্রয়োগ দক্ষতার প্রশ্নটি প্রণয়ন করা সম্ভব। এ প্রশ্নের উত্তর প্রদানের জন্য প্রয়োজনীয় তথ্য পাঠ্যপুস্তকে থাকবে। পাঠ্যপুস্তকের তথ্য এবং এর অনুধাবন উদ্দীপকে বর্ণিত নতুন পরিস্থিতিতে শিক্ষার্থী প্রয়োগ করবে। পাঠ্যবইয়ের বিষয়বস্তু শিক্ষার্থী ভালোভাবে পড়লে সে বিষয়ে তার স্পষ্ট ধারণা হবে এবং সেটা নতুন ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর প্রয়োগ করার ক্ষমতাই প্রয়োগ দক্ষতা। প্রশ্নের এ অংশের জন্য ৩ নম্বর বরাদ্দ থাকবে।

সৃজনশীল প্রশ্নের চতুর্থ অংশটি (ঘ) হচ্ছে উচ্চতর দক্ষতার প্রশ্ন। এ স্তরের প্রশ্নের মাধ্যমে শিক্ষার্থীর বিচার-বিবেচনা করার দক্ষতা, কোনো বিষয় বা ঘটনা বিশ্লেষণ করার দক্ষতা, সিদ্ধান্ত নেওয়ার দক্ষতা ইত্যাদি যাচাই করা হয়। এ প্রশ্নের উত্তর করার জন্য প্রয়োজনীয় তথ্য পাঠ্যপুস্তকে থাকবে এবং সংশ্লিষ্ট তথ্য নতুন পরিস্থিতিতে ব্যবহার করে শিক্ষার্থী তার বিচার-বিশ্লেষণের, সিদ্ধান্ত গ্রহণের ও মূল্যায়নের দক্ষতা প্রকাশের সুযোগ পাবে। প্রশ্নের চতুর্থ অংশটির জন্য ৪ নম্বর বরাদ্দ থাকবে।

গণিত এবং হিসাববিজ্ঞান বিষয়ে কাঠামোবদ্ধ প্রশ্নের গঠন কাঠামো ৩ টি অংশে বিভক্ত।

(ক) সহজ মান (খ) মধ্যম মান (গ) কঠিন মান।

গঠন কাঠামো অনুযায়ী মান বন্টন নিম্নরূপ:

ক .	জ্ঞান/অনুধাবন অথবা সাধারণ প্রয়োগ দক্ষতা যাচাই (সহজ প্রশ্ন)	২ নম্বর
খ.	প্রয়োগ দক্ষতা যাচাই (মোটামুটি কঠিন প্রশ্ন)	৪ নম্বর
গ.	প্রয়োগ দক্ষতা যাচাই (অধিক কঠিন প্রশ্ন)	৪ নম্বর
		১০ নম্বর

গণিতের একটি সৃজনশীল প্রশ্নের অংশসমূহ (ক, খ, গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রণয়ন করতে হবে। উদ্দীপক না পড়ে বা না দেখে প্রশ্নের উত্তর দেওয়া সম্ভব হবে না। যে বিষয় বা বিষয়সমূহের উপর ভিত্তি করে উদ্দীপক তৈরি করা হয় সে বিষয় বা বিষয়সমূহের আলোকেই প্রশ্নসমূহ করা হয়। উল্লেখ্য, একটি সৃজনশীল প্রশ্নের বিভিন্ন অংশের উত্তরে পুনরাবৃত্তি পরিহার করতে হবে।

যেহেতু একটি সৃজনশীল প্রশ্নের মাধ্যমে জ্ঞান ও অনুধাবন দক্ষতার পাশাপাশি প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতা পরিমাপ করা হয় সেহেতু সৃজনশীল প্রশ্নের শুরুতে অবশ্যই একটি উদ্দীপক/নতুন পরিস্থিতি থাকতে হবে। উদ্দীপকটি অবশ্যই মৌলিক হতে হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়নে নিচের নির্দেশনাসমূহ অনুসরণে সচেষ্ট হতে হবে-

- যে বিষয়বস্তুকে নিয়ে প্রশ্ন করবেন তা শিক্ষাক্রমের অন্তর্ভুক্ত হতে হবে।
- গুরুত্বহীন(Trivial) বিষয় জানার জন্য প্রশ্ন করা যাবে না।
- প্রশ্নের শুরুতে একটি মৌলিক, আকর্ষণীয় ও সংক্ষিপ্ত উদ্দীপক তৈরি করতে হবে। উদ্দীপক পাঠ্যপুস্তক থেকে সরাসরি নেওয়া যাবে না। তবে উদ্দীপক অবশ্যই শিক্ষাক্রম/সিলেবাস/পাঠ্যপুস্তকের কোনো বিষয়বস্তুর আলোকে প্রণীত হতে হবে।
- উদ্দীপকে বর্ণিত বিষয়স্তুর আলোকেই প্রশ্নের অংশগুলো তৈরি করতে হবে।
- উদ্দীপকে কোনো প্রশ্নের উত্তর থাকবে না। বরং উদ্দীপক শিক্ষার্থীকে বিভিন্নভাবে চিন্তা করতে উৎসাহিত করবে।
- উদ্দীপক বিবেচনায় না রেখে 'ক' অংশের উত্তর দেওয়া সম্ভব হতে পারে।
- উদ্দীপক বিবেচনায় না রেখে 'খ' ও 'গ' অংশের উত্তর দেওয়া কোন ক্রমেই সম্ভব হবে না।

- একটি সৃজনশীল প্রশ্নের প্রতিটি অংশ তার সাথে সংশ্লিষ্ট দক্ষতা পরিমাপের উপযোগী হতে হবে।
- একটি সৃজনশীল প্রশ্নের বিভিন্ন অংশ উদ্দীপকের আলোকে গঠিত হলেও অংশসমূহ সংশ্লিষ্ট দক্ষতা পরিমাপের উপযোগী নাও হতে পারে। এ ক্ষেত্রে উদ্দীপক/প্রশ্ন সংশোধনের প্রয়োজন হয়।
- একটি সৃজনশীল প্রশ্নের বিভিন্ন অংশ এমনভাবে প্রণয়ন করতে হবে যেন বিভিন্ন অংশের উত্তরে পুনরাবৃত্তি না ঘটে।
- একটি সৃজনশীল প্রশ্নপত্র এমনভাবে প্রণয়ন করতে হবে যেন প্রশ্নপত্রের বিভিন্ন প্রশ্নের বিভিন্ন অংশের উত্তরেও পুনরাবৃত্তি না ঘটে।
- একটি সৃজনশীল প্রশ্নের বিভিন্ন অংশের পূর্ণ বা আংশিক উত্তরে (পূর্ণ বা আংশিক উত্তর বিভিন্নভাবে লেখা যেতে পারে) নম্বর প্রদান কী হবে তা প্রশ্ন প্রণয়নের সময় আগাম বিবেচনা করে নম্বর প্রদান নির্দেশিকা ঠিক করে নিতে হয়।
- সৃজনশীল প্রশ্নের কোনো অংশের উত্তর প্রদানের জন্য প্রয়োজনীয় জ্ঞান, অর্থাৎ তথ্য, তত্ত্ব, ধারণা, সূত্র ইত্যাদি অবশ্যই শিক্ষাক্রমের আলোকে পাঠ্যপুস্তকে থাকতে হবে।
- সৃজনশীল প্রশ্ন তৈরির সময়ে কিছু ত্রুটি দৃষ্টিগোচর নাও হতে পারে। সৃজনশীল প্রশ্নের নম্বর প্রদান নির্দেশিকা ও নমুনা উত্তর তৈরি করার সময়ে প্রশ্নের সবলতা ও দুর্বলতা (ত্রুটি-বিচ্যুতি) দৃশ্যমান হবে এবং এর ভিত্তিতে প্রশ্ন সংশোধন করতে হবে।

নমুনা প্রশ্ন ১ :

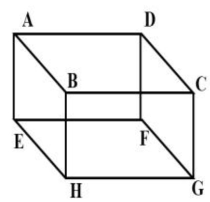
$A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$

(ক) $A \cup B$ কত?

(খ) B কে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

(গ) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ হলে A' কে ভেন চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

নমুনা প্রশ্ন ২:



চিত্রটি একটি সুষম ঘনক:

(ক) ABCD পৃষ্ঠের কয়টি প্রতিসাম্য রেখা আছে?

(খ) ঘনকটির প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য 4 সেমি হলে এর সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত?

(গ) ঘনকটির প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য 1 সেমি করে বৃদ্ধি করলে এর কর্ণের দৈর্ঘ্য কত হবে নির্ণয় কর।

নির্দেশক ছক (Specification Grid)

পাবলিক পরীক্ষা ও প্রতিষ্ঠানের অভ্যন্তরীণ পরীক্ষার প্রশ্ন প্রণেতাগণকে বহুনির্বাচনি প্রশ্নপত্র তৈরি করে তা একটি নির্দেশক ছকে স্থাপন করতে হবে। এর ফলে বহুনির্বাচনি প্রশ্নপত্রে শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য এবং পরীক্ষা সংস্কার সংক্রান্ত সরকারের নীতিমালা যথাযথভাবে প্রতিফলিত হয়েছে কি না তা সহজে বোঝা যাবে।

১. বহুনির্বাচনি প্রশ্নপত্রে যে বিষয়বস্তু এবং চিন্তন দক্ষতার উপর জোর দেওয়া হয়েছে নির্দেশক ছক তা ব্যাখ্যা করে।
২. নির্দেশক ছকের কলামে পাঠ্যপুস্তকের অধ্যায়গুলো উল্লেখ থাকে।
৩. দক্ষতার স্তর ক্রমানুযায়ী সারিতে(Row)সাজানো হয়।
৪. বিষয়বস্তু এবং দক্ষতার স্তর অনুযায়ী প্রশ্নের ক্রমিক সংখ্যা উল্লেখ করে নির্দেশক ছকটি পূরণ করা হয়। প্রশ্নের ক্রমিক সংখ্যাটি ছকের যথাযথ ঘর(Box)-এ বসানো হয়।
৫. শিক্ষাক্রমে যে বিষয়টিতে জোর দেওয়া হয়েছে তার সংগে সম্পর্ক রেখে প্রশ্নের সংখ্যা স্থির করা হয়। যদি প্রতিটি ক্ষেত্রকেই সমান গুরুত্ব দেওয়া হয়ে থাকে তবে প্রশ্নের সংখ্যা প্রতিটি ক্ষেত্রেই সমভাবে বণ্টন করা উচিত।
৬. উচ্চতর দক্ষতার প্রশ্ন যত বেশি হয়, পরীক্ষার্থীদের উত্তরের মধ্যে তত বেশি পার্থক্য প্রত্যাশা করা যায়। প্রশ্নপত্রে চিন্তন দক্ষতার বিভিন্ন স্তরের ভিত্তিতে বহুনির্বাচনি প্রশ্নের শতকরা হার নির্ধারিত আছে।

নির্দেশক ছকের উদ্দেশ্য

১. বিষয়বস্তু ও চিন্তন দক্ষতার স্তর বহুনির্বাচনি প্রশ্নপত্রে কীভাবে বিন্যস্ত রয়েছে তা টেবুলার ফরম্যাটে ব্যাখ্যা করা।
২. একটি প্রত্যাশিত মানের সঙ্গে নির্দেশক ছকটি তুলনা করে কোথায় সংশোধন দরকার সে বিষয়ে সুপারিশ করা।
৩. নির্দেশক ছকের প্রতিটি ঘরে (Box) উল্লিখিত প্রশ্নসংখ্যা শিক্ষাক্রমকে যথাযথ প্রতিফলন করে কিনা তা নিশ্চিত করা।

নির্দেশক ছকের গুরুত্ব

১. শিক্ষাক্রমে উল্লিখিত সমগ্র বিষয়বস্তু এবং চিন্তন দক্ষতার বিভিন্ন স্তরের প্রশ্ন আনুপাতিক হারে প্রশ্নপত্রে অন্তর্ভুক্ত হয়েছে কি না তা নির্দেশক ছকের মাধ্যমে খুব সহজেই এবং দ্রুত বুঝা যায়।

২. পরীক্ষার উত্তরপত্র বিশ্লেষণের (Post exam. analysis) মাধ্যমে প্রতিটি প্রশ্নের যথার্থতা নির্ণয় করতে নির্দেশক ছক প্রয়োজন।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নপত্রের নির্দেশক ছকের নমুনা
মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষাবোর্ড, ...
পরীক্ষার নাম : ... ... ২০১... খ্রিস্টাব্দ
বিষয় : গণিত বিষয় কোড : ...

চিন্তন দক্ষতার স্তর	অধ্যায়										মোট প্রশ্নসংখ্যা	%
	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	১০		
কঠিন মান	১০		২৫			১৬	১২	১৭	৬		**০৬**	**২০%**
মধ্যম মান	১৩	২ ২১	৭ ২৯	১৪ ২৩	৫	২৮	৯	৩	২৪ ৩০	১৮ ২৭	**১৫**	**৫০%**
সহজ মান	২৬	২০	৪	১	১৫	২২	১১	৮	১৯		**৯**	**৩০%**
মোট	**৩**	**৩**	**৪**	**৩**	**২**	**৩**	**৩**	**৩**	**৪**	**২**	**৩০**	**১০০%**

অনুরূপভাবে, সৃজনশীল প্রশ্নের জন্যও নির্দেশক ছক তৈরি করা হয়।

সঠিক উত্তর উপস্থাপনের ছকের নমুনা
মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষাবোর্ড, ...
পরীক্ষার নাম : ... ... ২০১... খ্রিস্টাব্দ
বিষয় : গণিত বিষয় কোড : ... ...

এমসিকিউ আইটেম নম্বর	সঠিক উত্তর (Answer key)
১	
২	
৩	
৪	
৫	
৬	
৭	
৮	
৯	
১০	

এমসিকিউ আইটেম নম্বর	সঠিক উত্তর (Answer key)
১১	
১২	
১৩	
১৪	
১৫	
১৬	
১৭	
১৮	
১৯	
২০	

এমসিকিউ আইটেম নম্বর	সঠিক উত্তর (Answer key)
২১	
২২	
২৩	
২৪	
২৫	
২৬	
২৭	
২৮	
২৯	
৩০	

প্রশ্নপত্র পরিশোধন

প্রশ্ন পরিশোধন এমন একটি প্রক্রিয়া যার মাধ্যমে প্রতিটি প্রশ্ন যথাযথভাবে লিখিত কিনা, পরীক্ষার জন্য উপযোগী কিনা এবং একটি সুসামঞ্জস্যপূর্ণ অবস্থা প্রশ্নপত্রে অন্তর্ভুক্ত করা যাবে কিনা তা যাচাই করা হয়। পরিশোধনের মাধ্যমে প্রশ্ন যাচাই বাছাই করা হয় যাতে সুসমন্বিত ও যথাযথ প্রশ্নপত্র তৈরি করা যায়। কোনো রকম প্রকৃত পরিশোধন ছাড়া প্রশ্নপত্রে দুর্বলভাবে লিখিত প্রশ্ন, একই ধারণা ও বিষয়বস্তুর পুনরাবৃত্তি অথবা সম্পূর্ণভাবে দুর্বোধ্য প্রশ্ন সন্নিবেশিত হতে পারে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সৃজনশীল প্রশ্ন উভয়ই প্রশ্ন পরিশোধন অন্তর্ভুক্ত থাকবে। এটি একটি জটিল কাজ। পরিশোধন প্রক্রিয়ার মাধ্যমে নিশ্চিত হওয়া যায় যে প্রতিটি প্রশ্ন এবং চূড়ান্তভাবে প্রণীত প্রশ্নপত্র পরীক্ষা নেওয়ার উদ্দেশ্যের সাথে সঙ্গতিপূর্ণ এবং উচ্চ গুণগত মানসম্পন্ন কি না। পরীক্ষার প্রশ্নপত্র নির্দিষ্ট কোনো শিক্ষার্থীদের জন্য পক্ষপাতদুষ্ট হবে না। মন্দ প্রশ্নপত্রে দুর্বল পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়ে থাকে।

পরিশোধন বলতে বোঝায় -

ক. প্রতিটি প্রশ্ন কারিকুলামের আলোকে প্রণীত কিনা তা পরীক্ষা করে দেখা (বহুনির্বাচনি প্রশ্নের ক্ষেত্রে বিক্ষেপকগুলোও (distractors) পরীক্ষা করে দেখা);

খ. ভাষার সঠিকতা, বিশেষ করে দ্ব্যর্থকতা/অস্পষ্টতা, বানান, যতিচিহ্নের ব্যবহার, পুনরাবৃত্তি ও উপযুক্ত শব্দের ব্যবহার - এসব বিষয় পরীক্ষা করে দেখা;

গ. ডায়াগ্রাম, চার্ট, গ্রাফ, সারণি সঠিকভাবে অঙ্কন করা হয়েছে কিনা এবং এগুলোর আলোকে তৈরি প্রশ্নের সাথে সঙ্গতিপূর্ণ কিনা তা পরীক্ষা করা;

ঘ. যে দক্ষতা যাচাইয়ের জন্য প্রশ্ন তৈরি করা হয়েছে প্রশ্নটি সে দক্ষতা পরিমাপের জন্য উপযোগী কিনা তা পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে দেখা;

ঙ. মডেল উত্তর (সম্ভাব্য উত্তর) প্রশ্নের সাথে সম্পর্কিত কিনা এবং উত্তর সঠিক, সম্পূর্ণ ও উপযুক্ত দক্ষতার সাথে সঙ্গতিপূর্ণ কিনা তা পরীক্ষা করা;

চ. প্রশ্নপত্রের সার্বিক ভারসাম্য উপযুক্ত ও সঠিকভাবে বিন্যস্ত কিনা, অন্যান্য প্রশ্নের সাথে প্রাবরণ(Overlap) করেছে কিনা অথবা বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সৃজনশীল প্রশ্নের মধ্যে প্রাবরণ হচ্ছে কিনা তা পরীক্ষা করে দেখা।

যেহেতু পরিশোধন প্রক্রিয়া সুলিখিত এবং ভারসাম্যপূর্ণ প্রশ্ন প্রণয়নের লক্ষে পরিচালিত হয়, সেহেতু পরিশোধনের একটি গুরুত্বপূর্ণ কাজ হলো কয়েকটি প্রকৃত ও সঠিক প্রশ্নপত্র থেকে নির্দিষ্ট সংখ্যক প্রশ্নপত্র তৈরি করা। এর অর্থ প্রশ্ন প্রণেতা প্রথমে প্রশ্নাবলি ও এর উত্তর নির্ধারণ করেন (কোনো পত্রের বিশেষ সেকশনের জন্য অথবা নির্দেশনার উপর ভিত্তি করে সকল সেকশনের জন্য)। এর পর মডারেটরগণ সকল প্রশ্ন বিবেচনা করে একটি ভারসাম্যপূর্ণ প্রশ্নপত্র তৈরি করেন (বিবেচনায় গৃহীত প্রশ্নগুলো একটি প্রশ্নপত্রে একত্রিত করা হয়)।

প্যানেল মডারেশন

কার্যকরভাবে প্রশ্ন পরিশোধনের ক্ষেত্রে শিক্ষাক্রমের উদ্দেশ্যের সাথে সামঞ্জস্য রেখে পাবলিক পরীক্ষার প্রশ্নপত্রের সেট তৈরিতে মডারেটরগণের উচিত পরস্পরকে সহযোগিতা করা। একাধিক ব্যক্তির চিন্তা একজনের চিন্তার চেয়ে উৎকৃষ্ট !

যেহেতু প্রশ্নপত্র প্রণেতাগণ তাঁদের নিজ নিজ তৈরি প্রশ্নের উদ্দেশ্য ভালোভাবে জানেন সেহেতু তাঁদেরকে পরিশোধন প্রক্রিয়ায় অন্তর্ভুক্ত করলে ভাল ফল পাওয়া যায়। এর অর্থ হল পরিশোধনের উদ্দেশ্যে একদল সংশ্লিষ্ট ব্যক্তি একত্রিত হয়ে প্যানেল গঠন করতে পারেন। একটি প্যানেলে প্রশ্ন প্রণেতাগণ এবং এক বা একাধিক স্বতন্ত্র মডারেটর থাকতে পারেন।

একজন স্বতন্ত্র সদস্যের সভাপতিত্বে এ প্যানেল সকল প্রশ্ন যাচাই-বাছাই এবং পরীক্ষা-নিরীক্ষা করেন। কার্যকর পরিশোধনের জন্য একজন মডারেটরকে নিম্নলিখিত মূলনীতির সাথে পরিচিত থাকতে হয় :

- ভাল এবং যথার্থ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন প্রণয়ন;
- ভাল এবং যথার্থ সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়ন;
- বহুনির্বাচনি প্রশ্নের নির্দেশক ছক (Specification Grid) তৈরি এবং মূল্যায়ন করা;
- যথাযথ ও পরিপূর্ণ মূল্যায়নের জন্য সৃজনশীল প্রশ্নের নম্বর প্রদান নির্দেশিকা (Rubric) ও প্রস্তাবিত নমুনা উত্তর (Suggested Model Answer) পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে দেখা;
- নমুনা উত্তরসহ পরীক্ষায় ভারসাম্যপূর্ণ প্রশ্নপত্র তৈরি করা।

শিক্ষাক্রমের উদ্দেশ্য, ভাষাগত সহজীকরণ এবং বহুনির্বাচনি প্রশ্নের যে কোনো অস্পষ্টতা দূর করার বিষয়ে মডারেটরগণকে সচেতন হতে হবে।

প্রত্যাশা করা হয় যে, মডারেটরদের নিয়ে গঠিত প্যানেল ঐকমত্যের ভিত্তিতে কাজ করবে। সব ক্ষেত্রে ঐকমত্যে পৌঁছানো নাও সম্ভব হতে পারে। এ কথা মনে রেখেই বিজোড় সংখ্যক (Odd number) মডারেটরদের সমন্বয়ে প্যানেল গঠিত হয়। অর্থাৎ মডারেটরদের প্যানেলে মতানৈক্য দেখা দিলে সংখ্যাগরিষ্ঠের ভোটে সিদ্ধান্ত গৃহীত হবে। প্যানেল চেয়ারম্যান সংখ্যাগরিষ্ঠের ভোটে যে সিদ্ধান্ত আসবে তা মেনে নিবেন।

পরীক্ষার মাধ্যমে যে মূল্যায়ন তার যথার্থতার (Validity) মানোন্নয়নের জন্য মডারেটরগণ একটি প্যানেল হিসাবে প্রশ্নসমূহ পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে দেখবেন এবং পরস্পরের সাথে মত বিনিময় করবেন। প্যানেলের প্রত্যেক সদস্যকে প্রতিটি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন/অন্যান্য ধরনের প্রশ্ন সতর্কতার সাথে যাচাই করে দেখতে হবে এবং যে কোনো পরিবর্তন বা কোনো প্রশ্ন বাতিলের ক্ষেত্রে সুস্পষ্ট পরামর্শ রাখবেন।

যদি প্রশ্ন প্রণেতাদের কাজ প্রশ্ন তৈরি করা হয় তাহলে মডারেটরদের কাজ হবে প্রশ্নসমূহ একত্রিত করে একটি সম্পূর্ণ প্রশ্নপত্র তৈরি করা। তাঁরা এ কাজটি বিভিন্ন প্রশ্ন প্রণেতাদের তৈরি প্রশ্নসমূহ থেকে প্রশ্ন বাছাই করে করতে পারেন। এর ফলে চূড়ান্তভাবে প্রণীত প্রশ্নপত্রটি ভারসাম্যপূর্ণ, সু-সামঞ্জস্যপূর্ণ এবং যথার্থ (Valid) হতে পারে। যদি কোনো বিষয়ে একাধিক প্রশ্নপত্র তৈরি করা হয় তাহলে প্রশ্নপত্রসমূহের মধ্যে সামঞ্জস্যতা আনয়নের ক্ষেত্রে সমতা থাকতে হবে এবং মডারেটরদের বিচারে প্রশ্নপত্রসমূহের কাঠিন্যের মাত্রা সাদৃশ্যপূর্ণ হতে হবে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন পরিশোধন

বহুনির্বাচনি প্রশ্নপত্র একা চূড়ান্ত করলে অনেক ত্রুটি থেকে যেতে পারে। ত্রুটিমুক্ত প্রশ্নপত্র প্রণয়নের জন্য প্রশ্নপত্র পরিশোধন করার প্রয়োজন হয়। প্রশ্নপ্রণেতা ও পরিশোধকগণ এক সঙ্গে বসে বিশ্লেষণের মাধ্যমে প্রশ্নপত্র চূড়ান্ত করলে পরীক্ষার প্রশ্নপত্র যথার্থ হওয়ার সম্ভাবনা বেড়ে যায়। সংশ্লিষ্ট বিষয়ে অভিজ্ঞ একজনের চিন্তার চেয়ে একাধিক ব্যক্তির চিন্তা থেকে ভালো ফল পাওয়া যায়। তাই,

- প্রতিটি প্রশ্ন অবশ্যই সিলেবাস এবং কারিকুলামের নির্দেশনার আলোকে বিষয়বস্তু ও দক্ষতা যাচাইয়ের উপযোগী হবে।
- বহুনির্বাচনি প্রশ্নপত্রে চিন্তন দক্ষতার বিভিন্ন স্তরের প্রশ্ন অবশ্যই অন্তর্ভুক্ত হতে হবে এবং একটি নির্দেশক ছকে দক্ষতা ও বিষয়বস্তু অনুযায়ী প্রশ্নের/আইটেমের বণ্টন দেখাতে হবে।
- প্রশ্নের উত্তরে ব্যবহৃতব্য যে সকল **তথ্য/সংখ্যা পরিবর্তনশীল** সে সকল তথ্য জানার প্রশ্ন না করাই বাঞ্ছনীয়।
- অনুমোদিত পাঠ্যপুস্তকে তথ্যের ভিন্নতা আছে এমন প্রশ্ন করা যাবে না ।
- বিভিন্ন ধরণের বহুনির্বাচনি প্রশ্ন (সাধারণ, বহুপদী সমাপ্তিসূচক এবং অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্ন) প্রশ্নপত্রে অন্তর্ভুক্ত হবে। তবে বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্ন যথাসম্ভব কম থাকবে।
- প্রশ্ন সুস্পষ্টভাবে লিখতে হবে অর্থাৎ শিক্ষার্থীর মধ্যে অবশ্যই কোনো রকম অস্পষ্টতা/দ্ব্যর্থকতা সৃষ্টি করবে না।
- প্রশ্নে অবশ্যই একটি মাত্র সঠিক উত্তর থাকবে।
- প্রশ্নপত্রের প্রতিটি প্রশ্নের উত্তরগুচ্ছে সঠিক উত্তরের ক্রমবিন্যাস এমনভাবে করতে হবে যেন অনুমান করে সঠিক উত্তর প্রদানের সুযোগ হ্রাস পায়।
- প্রতিটি বহুনির্বাচনি প্রশ্নে অবশ্যই এমন ৩টি বিক্ষেপক(Distractors)থাকবে যেগুলো শিক্ষার্থীদের নির্বাচন করার সম্ভাবনা থাকবে। প্রতিটি বিকল্প উত্তর মোট পরীক্ষার্থীর অন্তত শতকরা ৫% পরীক্ষার্থীদের নির্বাচন করার সম্ভাবনা থাকতে হবে।
- উদ্দীপকে কোনভাবেই যেন উত্তর/'উত্তর পাওয়ার নির্দেশনা বা ইঙ্গিত' না থাকে।
- বর্তমান সময়ের বিবেচনায় কম গুরুত্বপূর্ণ বিষয়বস্তু/শিখনফল মূল্যায়ন করার জন্য কোনো প্রশ্ন করা ঠিক হবে না। অর্থপূর্ণ শিক্ষা অর্থাৎ সুনির্দিষ্ট শিখনফল অর্জন পরিমাপে প্রতিটি প্রশ্নের উপযোগিতা থাকতে হবে।
- একটি প্রশ্নপত্রের সেটের শুরুতে যেন কঠিন প্রশ্ন না থাকে। একাধিক প্রশ্নপত্র সেট তৈরির ক্ষেত্রে লক্ষ রাখতে হবে যেন প্রশ্নপত্রে প্রশ্নের কাঠিন্যের বিন্যাসে ও অন্যান্য ক্ষেত্রে বিভিন্ন সেটের মধ্যে ভারসাম্য নিশ্চিত হয়।
- সমাজে বা জনগোষ্ঠীর কোনো অংশে বিরূপ এবং নেতিবাচক ধারণা সৃষ্টি হতে পারে এমন কোনো উদ্দীপক বা প্রশ্ন প্রণয়ন করা যাবে না।

পরিশোধকগণ আরো নিশ্চিত করবেন যেন প্রশ্নপত্রের ৩০% সহজ স্তর, ৫০% মধ্যম এবং ২০% কঠিন স্তর যাচাই উপযোগী হয়।

গণিত বিষয়ের বহুনির্বাচনী প্রশ্নপত্র হবে প্রয়োগ দক্ষতা যাচাই উপযোগী, তবে প্রশ্নসমূহ প্রয়োগ দক্ষতার বিভিন্ন কাঠিন্য স্তরের হবে (সহজ, মধ্যম এবং কঠিন)। গণিতের নির্দেশক ছকে প্রয়োগ দক্ষতার তিনটি স্তর, যথা সহজ, মধ্যমান এবং কঠিন উল্লেখ করতে হবে। তিনটি স্তরের প্রশ্নের অনুপাত হবে নিম্নরূপঃ

সহজ	-	৩০%
মধ্যমান	-	৫০%
কঠিন	-	২০%

প্রতিষ্ঠানের অভ্যন্তরীণ পরীক্ষায় ব্যবহৃত প্রশ্নপত্র কতটুকু যথার্থ হয়েছে তা বিবেচনা করা খুবই প্রয়োজন। কারণ পাবলিক পরীক্ষার প্রস্তুতিতে অভ্যন্তরীণ পরীক্ষার প্রভাব খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

নম্বর প্রদান নির্দেশিকা ও নমুনা উত্তর

সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়নের সময়ে প্রশ্ন প্রণয়নকারীকে সম্ভাব্য নম্বর প্রদান নির্দেশিকা ও নমুনা উত্তর(Marking Guideline and Model Answer) তৈরি করতে হবে। নম্বর প্রদান নির্দেশিকা ও নমুনা উত্তরে একটি প্রশ্নের বিভিন্ন অংশের দক্ষতা স্তর একটি কলামে উল্লেখ করা হয় এবং পাশের কলামে প্রত্যাশিত উত্তরের নমুনা দেওয়া হয়ে থাকে।

পরীক্ষার্থীর উত্তর প্রত্যাশিত দক্ষতা স্তরের না হয়ে নিম্নতর দক্ষতা স্তরের হতে পারে সে কারণেই নম্বর প্রদান নির্দেশিকায় আংশিক নম্বর পাওয়ার উপযোগী উত্তর উল্লেখ করা হয়। পরীক্ষার্থী প্রশ্নের অংশ 'ক' তে ১ অথবা ২ নম্বর পেতে পারে। 'খ ও গ' অংশে ৪ অথবা ৩ অথবা ২ অথবা ১ নম্বর পেতে পারে। ভগ্নাংশ নম্বর দেওয়ার কোন সুযোগ নেই। কোন উত্তর না দিলে অথবা দেওয়া উত্তর গ্রহণযোগ্য না হলে শূন্য (০) পাবে।

সৃজনশীল প্রশ্নের নমুনা উত্তর প্রস্তুতকরণ প্রশ্ন প্রণয়নকারীকে ত্রুটিমুক্ত প্রশ্ন তৈরিতে সাহায্য করে, পরীক্ষককে নির্ভুল ও নির্ভরযোগ্য নম্বর প্রদানে নির্দেশনা দেয়।

উত্তর প্রদানে পরীক্ষার্থীদের স্বাধীনতা ও পরীক্ষকগণের নম্বর প্রদান

- প্রশ্নপ্রণয়নকারীর তৈরি নমুনা উত্তর হুবহু একই হবে এমনটা আশা করা যায় না। উত্তর লেখার ক্ষেত্রে পরীক্ষার্থীর উপস্থাপনা কৌশল স্বাভাবিকভাবেই ভিন্নতর হবে। প্রশ্নপ্রণয়ণকারীর লেখা নমুনা উত্তরের কোনো বিকল্প সঠিক উত্তরও থাকতে পারে যা প্রশ্নপ্রণয়ণকারী হয়ত চিন্তা করেন নি। তাই পরীক্ষার্থীর উত্তর কতটুকু সঠিক এবং সে দক্ষতার কোন স্তরে অবস্থান করছে তা বিবেচনা করে উত্তরপত্র থেকে ধারণা নিয়ে নমুনা উত্তরে সংযোজন, বিয়োজন বা নমুনা উত্তরের পাশাপাশি নতুন কোনো উত্তর নমুনা উত্তর হিসেবে আবির্ভূত হতে পারে।
- মধ্যম বা কঠিন (প্রয়োগ বা উচ্চতর চিন্তন দক্ষতা) স্তরের প্রশ্নের উত্তর লেখার সময় পরীক্ষার্থী প্রথমে জ্ঞান তারপর অনুধাবন, প্রয়োগ ও উচ্চতর দক্ষতা স্তরের উত্তর লিখবে - এমনটা ভাবা যাবে না বা ক্রমান্বয়ে উচ্চতর দক্ষতা স্তরের উত্তর নাও লিখতে পারে। পরীক্ষার্থীর উত্তর থেকে পরীক্ষক চিন্তার স্তর নির্ণয় করবেন।
- পরীক্ষার্থীরা ইচ্ছা অনুযায়ী একটি সৃজনশীল প্রশ্নের বিভিন্ন অংশের উত্তর আগে বা পরে লিখতে পারবে। আবার তারা কোনো একটি সৃজনশীল প্রশ্নের কোনো অংশ লিখে আর একটি প্রশ্নের কোনো অংশ লিখতে পারে। যেমন- কোনো একটি প্রশ্নের 'ক' অংশের উত্তর লিখে অন্য কোনো প্রশ্নের উত্তর দিতে পারে এবং পূর্বের প্রশ্নটির 'খ' অংশের উত্তর পরে দিতে পারে। এ ধরনের ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীকে সতর্কতার সাথে প্রশ্নের ক্রমিক নম্বর এবং অংশ শনাক্তকরণ বর্ণটি (ক, খ, গ) সুস্পষ্টভাবে উল্লেখ করতে হবে।

অনুশীলনী-৮

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

নিচের প্রশ্নের চারটি করে উত্তর দেওয়া আছে। সর্বাধিক প্রযোজ্য উত্তরের ক্রমিক বর্ণটি বৃত্তস্থ করুন।

১) ১০ + ৫ = কত? –এ প্রশ্নটি কী ধরনের প্রশ্ন?

ক. খোলা প্রশ্ন খ. বদ্ধ প্রশ্ন গ. অনুসন্ধানী প্রশ্ন ঘ. স্মৃতিচয়ন প্রশ্ন

২) শিক্ষক শ্রেণিতে একটি প্রশ্ন করে ভাল সাড়া না পেলে, কী করবেন?

ক. উত্তর বলে দিবেন খ. স্মৃতিচয়ন প্রশ্ন করবেন

গ. অনুসন্ধানী প্রশ্ন করবেন ঘ. ব্যাখ্যামূলক প্রশ্ন করবেন

৩) মূল্যায়ক যদি শিখন-শেখানো প্রক্রিয়ার উন্নয়ন কাজে মূল্যায়নের ফল ব্যবহার করেন সে মূল্যায়ন হবে–

ক. প্রান্তিক মূল্যায়ন খ. গাঠনিক মূল্যায়ন গ. আনুষ্ঠানিক মূল্যায়ন ঘ. অনানুষ্ঠানিক মূল্যায়ন

৪) মূল্যায়ন সম্পর্কে কিছু তথ্য দেওয়া হল

i. গঠনমূলক মূল্যযাচাই হয় পাঠ চলা কালে

ii. প্রান্তিক মূল্যায়ন হয় পাঠ শেষে বা কোর্স শেষে

iii.নির্ণায়ক মূল্যযাচাই হয় পাঠের আগে বা শুরুতে।

এসব তথ্যের সত্যতার আলোকে নিচের কোনটি সর্বাধিক প্রযোজ্য?

ক. i ও ii. খ. ii ও iii. গ. iii ও i ঘ. i, ii ও iii.

৫) নিচের কোনটি পদ বিশ্লেষণ প্রক্রিয়ার অন্তর্ভুক্ত নয়?

ক. কাঠিন্য মান খ. বিভেদক শক্তি গ. অভ্যন্তরীণ সামঞ্জস্য ঘ. পদ বিনির্দেশ ছক

৬) অভীক্ষার কোন বৈশিষ্ট্য কেবল গাণিতিকভাবে নির্ণীত হয়?

ক. যথার্থতা খ. নির্ভরযোগ্যতা গ. নৈর্ব্যক্তিকতা ঘ. ব্যবহার উপযোগিতা

রচনামূলক প্রশ্ন

১) সৃজনশীল প্রশ্ন পদ্ধতিতে ব্যবহৃত চিন্তন দক্ষতার স্তরসমূহ ব্যাখ্যা করুন।

২) একটি সৃজনশীল প্রশ্ন তৈরি করুন।

সৃজনশীল প্রশ্ন

১) শিক্ষক শ্রেণিতে প্রশ্ন করে করে পাঠে অগ্রসর হচ্ছেন।

ক. শ্রেণিতে প্রশ্ন করার প্রধান লক্ষ্য কী?

খ. অনুসন্ধানী প্রশ্ন বলতে কী বোঝায় –ব্যাখ্যা দিন।

গ. প্রতিফলন ও সঠিকতা যাচাইমূলক চারটি নমুনা প্রশ্ন গঠন করুন।

২) শিক্ষা মূল্যায়নের ক্ষেত্রে গাঠনিক, সামষ্টিক, আনুষ্ঠানিক, অনানুষ্ঠানিক ও নির্ণায়ক মূল্যায়নের কথা বলা হয়।

ক. শিক্ষা ক্ষেত্রে মূল্যায়ন বলতে কী বোঝায়?

খ. গাঠনিক, সামষ্টিক, আনুষ্ঠানিক ও অনানুষ্ঠানিক মূল্যায়নের সংক্ষিপ্ত পরিচয় দিন।

গ. কোন কোন ক্ষেত্রে নির্ণায়ক মূল্যায়ন কৌশল ব্যবহার করবেন এবং কেন করবেন – ব্যাখ্যা করুন।

৩) একজন শিক্ষক একটি অভীক্ষা আদর্শায়নের জন্য প্রকল্প গ্রহণ করেছেন।

ক. অভীক্ষা আদর্শায়ন করা হয় কেন?

খ. আদর্শায়নের স্তরসমূহের সংক্ষিপ্ত পরিচয় দিন।

গ. একটি যথার্থ উদাহরণসহ পদ বিশ্লেষণ ব্যাখ্যা করুন।

রেফারেন্স-৮

শিক্ষায় পরিমাপ ও মূল্যায়ন -মোঃ রমিজ উদ্দীন আহমদ, মোঃ মফিজুর রহমান ও মোঃ মোশাররররফ হোসেন; **স্মৃতি প্রকাশনী, নীলক্ষেত, ঢাকা।**

ইউনিট ৯ : গণিতে আইসিটি ব্যবহার ও স্বশিখন

তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি বা আইসিটি (Information and Communications Technology) সাধারণভাবে তথ্য প্রযুক্তির সমার্থক শব্দ হিসেবে ব্যবহৃত হয়। প্রকৃতপক্ষে তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি এক ধরনের একীভূত যোগাযোগ ব্যবস্থা এবং টেলিযোগাযোগ, কম্পিউটার নেটওয়ার্ক ও তৎসম্পর্কিত এন্টারপ্রাইজ সফটওয়্যার, মিডলওয়্যার তথ্য সংরক্ষণ, অডিও-ভিডিও সিস্টেম ইত্যাদির সমন্বয়ে গঠিত এমন এক ধরনের ব্যবস্থা যার মাধ্যমে একজন ব্যবহারকারী খুব সহজে তথ্য গ্রহণ, সংরক্ষণ, সঞ্চালন ও বিশ্লেষণ করতে পারেন। প্রযুক্তিতে আইসিটি শব্দটির ব্যবহার শুরু করে একাডেমিক গবেষকরা ১৯৮০ সালের দিকে। কিন্তু শব্দটি জনপ্রিয়তা পায় ১৯৯৭ সাল থেকে। স্টিভেনসন ১৯৯৭ সালে যুক্তরাজ্য সরকারকে দেওয়া এক প্রতিবেদনে এই শব্দটি উল্লেখ করেন, যা পরবর্তীতে ২০০০ সালে যুক্তরাজ্যের নতুন জাতীয় পাঠ্যপুস্তকে সংযোজন করা হয়।

বর্তমান সময়ে তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি দ্বারা একক তার বা একক লিঙ্ক সিস্টেমের মাধ্যমে টেলিফোন, অডিও-ভিজুয়াল ও কম্পিউটার নেটওয়ার্কের সমন্বয় প্রযুক্তিকে প্রকাশ করা হয়। একক লিঙ্ক সিস্টেমের মাধ্যমে টেলিফোন, অডিও-ভিজুয়াল ও কম্পিউটার নেটওয়ার্কের সমন্বয়ের ফলে বিশাল অঙ্কের অর্থনৈতিক খরচ কমে গিয়েছে। তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি (ICT) বলতে তথ্য সংগ্রহ, সংরক্ষণ, বিশ্লেষণ, প্রক্রিয়াকরণ, উৎপাদন ও বিস্তরণ তথা যোগাযোগের কাজে ব্যবহৃত বিভিন্ন ধরনের আধুনিক প্রযুক্তিগত উপকরণকে বোঝায়। তথ্য আদান-প্রদান ও যোগাযোগের জন্য প্রতিনিয়ত নতুন নতুন প্রযুক্তি আবিষ্কৃত হচ্ছে, তবে বর্তমানে বহুল ব্যবহৃত উপকরণগুলোর মধ্যে কম্পিউটার, ইন্টারনেট, মাল্টিমিডিয়া সিস্টেম, মোবাইল ফোন, রেডিও, টেলিভিশন উল্লেখযোগ্য।

৯.১ গণিত শিক্ষণে আইসিটি ব্যবহারের ধারণা, প্রতিবন্ধকতা ও তা দূরীকরণের উপায়; গণিত শিক্ষণে শ্রেণিকক্ষে কম্পিউটার, ট্যাব, স্মার্টফোন ইত্যাদির ব্যবহার

৯.২ গণিত শিক্ষণে Visual Learning Environment (classroom without wall), Computer Assisted Instruction(CAI), Computer Aided Learning (CAL) এর ধারণা

৯.৩
- **WebQuest-এর ধারণা, ব্যবহার কৌশল, সমালোচনা**
- **অফ-লাইন ও অন-লাইনে ওয়ার্কশীট তৈরির সফ্‌টওয়্যার ব্যবহার**
- **গণিত অ্যাপ্‌স**
- **গণিতে স্বশিখন**

৯.১ গণিত শিক্ষণে আইসিটি ব্যবহারের ধারণা, প্রতিবন্ধকতা ও তা দূরীকরণের উপায়

এই সাব ইউনিটে পর্যায়ক্রমে গণিত শিক্ষণে আইসিটি ব্যবহারের ধারণা; প্রতিবন্ধকতা ও তা দূরীকরণের উপায়; গণিত শিক্ষণে শ্রেণিকক্ষে কম্পিউটার, ট্যাব, স্মার্টফোন ইত্যাদির ব্যবহার ধারাবাহিকভাবে নিম্নে আলোচনা করা হয়েছে।

গণিত শিক্ষণে আইসিটি ব্যবহারের ধারণা

বহু বছর ধরে শ্রেণিকক্ষে বিভিন্ন শিক্ষণ পদ্ধতি-কৌশল ও উপকরণ ব্যবহার করে গণিত পাঠদান কার্যক্রম চলে আসছে। গণিত ক্লাসে সঠিকভাবে পদ্ধতি-কৌশল ব্যবহার করে পাঠদান করলে শিক্ষার্থীরা উপকৃত হয় এবং শিক্ষকও পাঠদানে আনন্দ পান। পদ্ধতি-কৌশল প্রয়োগের পাশাপাশি যদি উপকরণ ব্যবহার করেন তাহলে গণিত ক্লাস হয় আকর্ষণীয় ও প্রাণবন্ত এবং শিক্ষার্থীদের কাছে পাঠটি স্থায়ী প্রভাব ফেলে। আবহমান কাল থেকে যে পদ্ধতি-কৌশল ও উপকরণ শিক্ষক গণিত ক্লাসে ব্যবহার করেছেন তা বর্তমানেও চলছে এবং ভবিষ্যতেও চলবে। বর্তমানে গতানুগতিক উপকরণের সাথে যুক্ত হয়েছে আইসিটি। গণিত ক্লাসে আইসিটির ব্যবহার ক্রমেই বেড়ে চলেছে। কারণ আগের শ্রবণভিত্তিক, দর্শনভিত্তিক ও শ্রবণ-দর্শনভিত্তিক উপকরণ সংগ্রহ এবং তৈরি করতে শিক্ষকের জন্য শ্রমসাধ্য ও কষ্টকর হত, সময় লাগত অনেক বেশি, সংরক্ষণ করতে ঝামেলা হত, টেকসই কম হত। বর্তমানে ইন্টারনেট ব্যবহার করে সে সকল উপকরণ সংগ্রহ ও প্রদর্শন করা অনেক সহজ। শিক্ষা ক্ষেত্রে বিশেষভাবে গণিতে আইসিটির ব্যবহার ভিন্নমাত্রা পেয়েছে। এখন প্রয়োজন আইসিটির সাথে গণিত শিক্ষা বিজ্ঞানের সঠিক

সমন্বয় সাধন। শ্রেণিকক্ষে শিক্ষক আগে যে শিক্ষণ পদ্ধতি-কৌশল ও উপকরণ ব্যবহার করেছেন বর্তমানেও তাই করবেন তবে এর সাথে উপকরণ হিসাবে থাকবে আইসিটি সামগ্রী যেমন- প্রজেক্টর, কম্পিউটার, ইন্টারনেট, স্পীকার, স্ক্রীন, অফলাইন ও অনলাইন রিসোর্স, বিভিন্ন সফটওয়্যার। এসকল উপকরণসহ সজ্জিত ক্লাসরুম হল মাল্টিমিডিয়া ক্লাসরুম। মাল্টিমিডিয়া ক্লাসরুম ব্যবহার করে শ্রেণি কার্যক্রম পরিচালনা করলে শিক্ষকের যেমন ক্লাস তৈরি ও পরিচালনা করতে সহজ হয় তেমনি শিক্ষার্থীদের কাছেও ক্লাসটি বোধগম্য এবং আকর্ষণীয় হয়।

A2I প্রকল্প কর্তৃক পরিচালিত ডিজিটাল কনটেন্ট ডেভেলপমেন্ট কার্যক্রম শুরু হয় ২০১০ সাল থেকে। তখন শিক্ষকদের এ বিষয়ে প্রশিক্ষণ দেয়া শুরু হয়। শিক্ষকদের তৈরিকৃত ক্লাস আপলোড করা ও ডাউনলোড করে ব্যবহার করার জন্য পরবর্তীতে চালু হয় শিক্ষক বাতায়নের। বর্তমানে শিক্ষক বাতায়ন ডিজিটাল কনটেন্টসহ অন্যান্য উপকরণের এক সমৃদ্ধ ভান্ডার। শিক্ষক মাইক্রোসফ্ট পাওয়ার পয়েন্ট প্রেজেন্টেশন ব্যবহার করে গণিতে ডিজিটাল কনটেন্ট ব্যবহার করতে পারেন ক্লাসে প্রদর্শনের জন্য। ছবি, এ্যানিমেশন, সেপ, গাণিতিক সমীকরণ, অ্যালজেবরা টাইল্স, বিভিন্ন বীজগাণিতিক রাশির জ্যামিতিক আকৃতি, ত্রিকোণমিতি, পরিমিতি, ভেক্টর, গাণিতিক সমস্যায় ব্যবহৃত কাল্পনিক বিষয়ের বাস্তব আকৃতি ইত্যাদি তৈরি করতে পারেন মাইক্রোসফ্ট পাওয়ার পয়েন্ট প্রেজেন্টেশন ব্যবহার করে। এছাড়া বিভিন্ন অডিও এবং ভিডিও তৈরি বা ডাউনলোড করে ব্যবহার করা যায়। গাণিতের জন্য তৈরি বিভিন্ন সফ্টওয়্যার যেমন- জিওজেবরা, জিনিয়াস মেকার, অ্যালজেবরা-৩.০ ইত্যাদি গণিত শ্রেণিকক্ষে শিক্ষক ব্যবহার করতে পারেন।

UNESCO কর্তৃক গঠিত International Commission on Education for Twenty-First Century-এর প্রতিবেদনে ICT-কে একবিংশ শতাব্দীর জন্য একটি আবশ্যকীয় দক্ষতা হিসেবে স্বীকৃতি দেয়া হয়েছে। আইসিটি ব্যবহার করে আকর্ষণীয় ডিজিটাল শিক্ষা উপকরণ প্রস্তুত করা যায়, যা গতানুগতিক গণিত শিক্ষা উপকরণের চেয়ে যথেষ্ট কার্যকর। গণিত শিক্ষকগণ ডিজিটাল শিক্ষা উপকরণ ব্যবহার করে সফলভাবে শ্রেণিতে পাঠদান করতে পারেন। ২০০৯ সালে জাতীয় তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি নীতিমালা ও ২০১০ সালে জাতীয় শিক্ষানীতি গ্রহণ করা হয় যেখানে, শিক্ষার সকল স্তরে আইসিটিকে অন্তর্ভুক্ত করার নির্দেশনা দেয়া হয়েছে।

২০১২ সালে জাতীয় শিক্ষাক্রম পরিমার্জন করে তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তিকে আবশ্যকীয় বিষয় হিসেবে মাধমিক স্তরে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে।জাতীয় তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি নীতিমালা-২০০৯ এর অন্যতম উদ্দেশ্য হলো, “আইসিটি ব্যবহারের মাধ্যমে শিক্ষার পরিধি এবং মান দেশব্যাপী সম্প্রসারণ করা; শিক্ষার সর্বস্তরে এবং সরকারি পর্যায়ে কম্পিউটার সাক্ষরতা নিশ্চিত করা; যথোপযুক্ত গবেষণা ও উন্নয়নের মাধ্যমে সৃষ্টিশীলতা উৎসাহিত করা; মেধাসম্পদ সৃষ্টি করা এবং জীবনের সকল ক্ষেত্রে আইসিটি অন্তর্ভুক্তকরণ।” উক্ত নীতিমালায় প্রাথমিক ও মাধ্যমিক শিক্ষায় এবং কারিগরি ও বৃত্তিমূলক শিক্ষা ও প্রশিক্ষণে আইসিটি কোর্স অন্তর্ভুক্ত করে দেশব্যাপী আইসিটি সাক্ষরতা সম্প্রসারণ করার উপর জোর দেয়া হয়েছে।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০১২ উন্নয়নের ক্ষেত্রে যে নীতিমালা অনুসরণ করা হয়েছে তার অন্যতম একটি নীতি হলো, “আধুনিক প্রযুক্তি ব্যবহারের যোগ্যতা অর্জনের সুযোগ সৃষ্টি করা” এবং সেখানে উল্লেখিত বৈশিষ্ট্যের একটি হলো “শ্রেণি কার্যক্রমে প্রযুক্তির ব্যবহার বৃদ্ধি করা”। শিক্ষাক্রমের তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি অংশের উদ্দেশ্যে বলা হয়েছে, “শিক্ষার্থীকে প্রযুক্তির প্রতি আগ্রহী করে তোলা এবং তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি ব্যবহারে আত্মবিশ্বাসী, উৎপাদনশীল এবং সৃজনশীল হিসাবে তৈরি করা।'' গণিত শিক্ষণ কার্যক্রমে কঠিন, দুর্বোধ্য ও বিমূর্ত বিষয়সমূহকে শিক্ষকগণ ছবি, অ্যানিমেশন ও ভিডিও ক্লিপের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের সামনে সহজবোধ্য করে উপস্থাপন করার মাধ্যমে শ্রেণি কার্যক্রমকে আনন্দময় করে তুলতে পারেন। গণিতের প্রতিটি বিষয়ের তাত্ত্বিক ধারণা শিক্ষার্থীদের কাছে মাল্টিমিডিয়া ক্লাসের মাধ্যমে মূর্ত করা সম্ভব।

২০১৩ সালে পার্টিসিপেটরি ম্যানেজমেন্ট ইনিশিয়েটিভ ফর ডেভেলপমেন্ট (পিএমআইডি)-এর মাধ্যমে ১৫৮টি শিক্ষা প্রতিষ্ঠানকে নিয়ে মাল্টিমিডিয়া ক্লাসরুমের একটি ইমপ্যাক্ট স্টাডি করা হয়েছিল। গবেষণার ফলাফলে দেখা যায় যে, যে সকল শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে মাল্টিমিডিয়া ক্লাসরুমের মাধ্যমে শ্রেণি কার্যক্রম পরিচালনা করা হয়, সেখানে শিক্ষার্থীরা ক্লাস ভালভাবে বুঝতে পারে এবং তাদের মুখস্থ বিদ্যার প্রবণতা কমেছে। এ সকল শিক্ষার্থীদের শেখার প্রতি আগ্রহ বেড়েছে এবং ক্লাসে তাদের একঘেয়েমি ভাবও দূর হয়েছে। এ সকল শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের বিষয়ভিত্তিক শিক্ষকগণের সাক্ষাৎকার গ্রহণ করে জানা যায় যে, ইন্টারনেট সার্চ করে বিভিন্ন দেশের শিখন-শেখানো উপকরণ ডাউনলোড করে নিজ সংস্কৃতি, বিষয় ও শ্রেণি উপযোগী কনটেন্ট তৈরি করার মাধ্যমে শিক্ষকদের পেশাগত দক্ষতা ও জ্ঞান বৃদ্ধি পেয়েছে। মাল্টিমিডিয়া ক্লাসরুমে শ্রেণি কার্যক্রম পরিচালনার মাধ্যমে তাদের আত্মবিশ্বাস বহুগুণে বেড়েছে। তারা শিক্ষার্থীদের সাথে খুব সাবলিলভাবে যোগাযোগ স্থাপন ও অতি সহজেই ক্লাস পরিচালনা করতে পারছেন।

প্রতিবন্ধকতা ও তা দূরীকরণের উপায়

আইসিটি ও মাল্টিমিডিয়া ক্লাসরুম সম্পর্কে অনেক শিক্ষকদের মধ্যে কিছু ভুল ধারণা রয়েছে। অনেক শিক্ষক মনে করেন, আইসিটি ও মাল্টিমিডিয়া ক্লাসরুম মানে কম্পিউটার শিক্ষা; শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে কম্পিউটার ল্যাব স্থাপন করতে হবে, শিক্ষকদের ক্ষমতায়িত না করে প্রযুক্তিকে মূল ফোকাস করতে হবে, সকল শিক্ষককে ডিজিটাল কনটেন্ট তৈরি করতে হবে ইত্যাদি। এ ধারণাগুলো আসলে সঠিক নয়। শিক্ষকের সদিচ্ছা, আন্তরিকতা ও সচেতনতা থাকলে আইসিটি ব্যবহার করে শ্রেণি কার্যক্রম পরিচালনা করা সম্ভব। সরকার একটি করে ল্যাপটপ, প্রজেক্টর, মডেম, পেনড্রাইভ, সাউন্ডবক্স, প্রজেক্টর স্ক্রীন ইত্যাদি সরবরাহ করেছেন, অনেক বিদ্যালয়ে নিজস্ব ব্যবস্থাপনায় এ উপকরণগুলো ক্রয় করেছেন, অনেক স্কুলে বিদ্যোৎসাহী অবস্থাপন্ন ব্যক্তি এ উপকরণগুলো সরবরাহ করেছেন।

অনেক শিক্ষকও নিজের টাকায় কম্পিউটার ক্রয় করেছেন। সুতরাং এ ধরনের ভুল ধারণা পরিহার করা উচিৎ। বাস্তবে কিছু প্রতিবন্ধকতা আছে, সেগুলো হল- ইন্টারনেট স্পীড, আইসিটি সামগ্রীর অপ্রতুলতা, আইসিটি উপকরণের যথাযথভাবে ব্যবহার দক্ষতার অভাব, বিদ্যালয়ে যথাযথ পরিকল্পনার অভাব, কিছু কিছু ক্ষেত্রে ভালো অবকাঠামোর অভাব, কিছু কিছু প্রতিষ্ঠানে বিদ্যুৎ সংযোগ না থাকা, কিছু কিছু প্রতিষ্ঠান পরিচালনা কমিটি ও প্রতিষ্ঠান প্রধানের উদ্যোগ ও আন্তরিকতার অভাব, শিক্ষকের আন্তরিকতা ও সচেতনতার অভাব, আইসিটি সামগ্রীর ভালো রক্ষণাবেক্ষণের অভাব, যথাযথভাবে মনিটরিং ও মেন্টরিং এর অভাব। তবে কিছু সমস্যা সমাধানে আন্তরিকতা থাকলে সমস্যার সমাধান সহজ হয়; যেমন- আইসিটি ব্যবহারে শিক্ষকের আন্তরিকতা।

প্রতিষ্ঠানে আইসিটি সামগ্রী ব্যবহারে সুষ্ঠু পরিকল্পনা থাকলে সুচারু রূপে শ্রেণিকার্যক্রম পরিচালনা করা যায়। শিক্ষকের সহায়তায় প্রতিষ্ঠান প্রধান যথাযথ পরিকল্পনা প্রণয়ন করবেন। প্রতিষ্ঠান পরিচালনা কমিটি ও প্রতিষ্ঠান প্রধান যদি উদ্যোগ গ্রহণ করেন এবং আন্তরিক হন তাহলে খুব সহজেই আইসিটি সামগ্রী ব্যবহার করে শ্রেণিকার্যক্রম পরিচালনা করা সম্ভব। পরিচালনা কমিটির সদিচ্ছা থাকলে নিজেরা বা এলাকার অবস্থাপন্ন বিদ্যোৎসাহী ব্যক্তিদের নিকট থেকে আইসিটি সামগ্রী সংগ্রহ করতে পারেন। সরকার অধিকাংশ শিক্ষকের আইসিটি বিষয়ক প্রশিক্ষণের ব্যবস্থা করেছেন, এখনও অনেক শিক্ষককে প্রশিক্ষণ দেয়া সম্ভব হয়নি।

পরিচালনা কমিটি ও প্রধান শিক্ষক ইচ্ছা করলে বা আন্তরিক হলে প্রশিক্ষণ প্রাপ্ত শিক্ষকের মাধ্যমে প্রশিক্ষণবিহীন শিক্ষকদের ইনহাউস প্রশিক্ষণের ব্যবস্থা করতে পারেন। পরিচালনা কমিটি ও প্রতিষ্ঠান প্রধানগণ প্রতিনিয়ত যদি ক্লাস মনিটরিং করেন এবং প্রয়োজনে অভিজ্ঞ প্রশিক্ষণ প্রাপ্ত শিক্ষক বা তথ্যজ্ঞ ব্যক্তির সাহায্যে মনিটরিং ও মেন্টরিং এর ব্যবস্থা করেন, তাহলে শিক্ষক আইসিটি ব্যবহারে উৎসাহিত হবেন। এছাড়াও সরকারীভাবে বিদ্যালয় মনিটরিং ও মেন্টরিং এর দায়িত্বে নিয়োজিত কর্মকর্তাগণ সঠিকভাবে এ কাজে সহযোগিতা করা উচিৎ। প্রতিষ্ঠানে আইসিটি সামগ্রীর যথাযথ রক্ষণাবেক্ষণের ব্যবস্থা করা উচিৎ। এ বিষয়ে প্রতিষ্ঠান প্রধানকে অগ্রণী ভূমিকা পালন করতে হবে।

গণিত শিক্ষণে শ্রেণিকক্ষে কম্পিউটার, ট্যাব, স্মার্টফোন ইত্যাদির ব্যবহার

ডিজিটাল গণিত শিক্ষা উপকরণ বিভিন্ন রকমের হতে পারে যেমন- একটি সাধারণ ডিজিটাল ফটোগ্রাফ/ছবি থেকে শুরু করে শব্দ, ছবি, ভিডিও, এ্যানিমেশন ইত্যাদির সমন্বয়ে গঠিত জটিল সফটওয়্যার পর্যন্ত সবকিছুই ডিজিটাল শিক্ষা উপকরণ হতে পারে, যদি তা শিক্ষণ-শিখন কার্যক্রমের উদ্দেশ্য পূরণে সহায়ক হয়। শিক্ষক কম্পিউটার ব্যবহার করেই মাল্টিমিডিয়ার সাহায্যে শ্রেণিকার্যক্রম পরিচালনা করেন। গণিত শিক্ষণের ক্ষেত্রে কম্পিউটার একটি শক্তিশালী উপকরণ। কম্পিউটারের সাহায্যে শিক্ষক গণিত বিষয়ের বিমূর্ত ধারণাকে সুন্দরভাবে শিক্ষার্থীদের মাঝে ফুটিয়ে তুলতে পারেন যা গাণিতিক চিন্তা ও বোধগম্যতা বাড়াতে সাহায্য করে।

মাল্টিমিডিয়ার সাহায্যে শ্রেণিকার্যক্রম পরিচালনা করলে ক্লাসকে অধিকতর ইন্টারেকটিভ করা যায়। কম্পিউটার ব্যবহার করে শিক্ষক বিভিন্ন দেশের শিক্ষকদের গণিত ক্লাস শিক্ষার্থীদের দেখাতে পারেন। এতে করে বিশ্ব পরিমন্ডলে গাণিতিক অত্যাধুনিক তথ্য জানার সুযোগ সৃষ্টি হয়। মাইক্রোসফ্ট পাওয়ার পয়েন্ট প্রেজেন্টেশন ব্যবহার করে শ্রেণিকার্যক্রম পরিচালনা করতে পারেন। কারণ মাইক্রোসফ্ট পাওয়ার পয়েন্ট প্রেজেন্টেশন একটি শক্তিশালী প্রোগ্রাম যার সাহায্যে খুব সুন্দর ও সাবলিলভাবে বিষয়বস্তু তৈরি এবং প্রদর্শন করা যায়। মাইক্রোসফ্ট পাওয়ার পয়েন্ট প্রেজেন্টেশনের মাধ্যমে কনটেন্ট তৈরি করে এতে বিভিন্ন ধরণের এ্যানিমেশন দেয়া যায় যার ফলে কনটেন্টগুলো হয় প্রাণবন্ত ও আকর্ষণীয়।

শিক্ষক কম্পিউটারের সাহায্যে বিভিন্ন গাণিতিক প্রোগ্রাম ইনস্টল করে গণিতের বিভিন্ন বিষয়বস্তু ব্যাখ্যা করতে পারেন। শিক্ষার্থী নিজেরাও এ ধরনের প্রোগ্রাম ব্যবহার করে চিন্তা শক্তিকে বিকশিত করার ও সৃজনশীলতা প্রকাশের সুযোগ পায়। অনলাইন ও অফলাইন উভয় ধরনের সফ্টওয়্যার ব্যবহার করে শিক্ষক ও শিক্ষার্থী গাণিতিক বিমূর্ত বিষয়বস্তুকে নিজের মত করে ধারণা লাভের সুযোগ সৃষ্টি করতে পারেন। কম্পিউটারের সাহায্যে শিক্ষক গণিত সংক্রান্ত বিভিন্ন ভিডিও, অডিও, ছবি ইত্যাদি সংগ্রহ বা তৈরি করে গণিত ক্লাসে প্রদর্শন করতে পারেন।

বর্তমানে ট্যাব ও স্মার্টফোন গুরুত্বপূর্ণ ডিভাইস যার সাহায্যে বিভিন্ন ধরনের অ্যাপস্ ব্যবহার করে গণিতের ধারণাকে সৃজনশীলভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। ট্যাব বা স্মার্টফোন ব্যবহার করে শিক্ষার্থীরা ই-বুক সংগ্রহ করে পড়তে পারে। ট্যাব বা স্মার্টফোন বা কম্পিউটার ব্যবহার করে শিক্ষার্থীরা টেক্সট বইগুলো সংগ্রহ করে সংরক্ষণ করতে পারে। ডিভাইসগুলোতে রক্ষিত তথ্য বা বই প্রয়োজন মত যেখানে খুশি সেখানে পড়তে পারে। গণিত সংক্রান্ত বিভিন্ন সাইটগুলোতে প্রবেশ করে প্রয়োজনীয় তথ্য পড়তে ও সংগ্রহ করতে পারেন। ট্যাব বা স্মার্টফোন ব্যবহার করে শিক্ষক গাঠনিক মূল্যায়ন খুব সহজেই পরিচালনা করতে পারেন। গণিতের প্রজেক্টভিত্তিক কাজগুলো কম্পিউটারের সাহায্যে শিক্ষক শিক্ষার্থীদের দিতে পারেন।

মাইক্রোসফ্ট পাওয়ার পয়েন্ট প্রেজেন্টেশন ছাড়াও ক্লাসের প্রেজেন্টেশনকে আকর্ষণীয় করার জন্য বর্তমানে স্লাইড রকেট (Slide rocket), প্রেজি প্রেজেন্টেশন (Prezi), গ্লজস্টার (Glogster), এ্যানিমোটো (Animoto), ম্যাজিক মেগনিফাই (Magic Magnify) ইত্যাদি অফলাইন ও অনলাইন প্রোগ্রাম বিদ্যমান। শিক্ষার্থীরা গণিত সংক্রান্ত বিভিন্ন ব্লগের মাধ্যমে নিজের চিন্তা, এ্যাসাইনমেন্ট, মতামত ইত্যাদি পরস্পর আদান প্রদান করতে পারে। কম্পিউটারভিত্তিক সফ্টওয়্যার যেমন- গ্রাফিক ক্যালকুলেটর, ডাইনামিক গ্রাফিং টুলস্, মাইক্রোসফ্ট এক্সেল/প্রেডসীট, মাইক্রোসফ্ট ম্যাথমেটিক্স, অটো সেপ, মেট ল্যাব ইত্যাদি শিক্ষক ব্যবহার করতে পারেন।

অর্পিত কাজ

শিক্ষক হিসাবে আপনি গণিত শিক্ষণে কিভাবে কম্পিউটার ব্যবহার করবেন?

৯.২ গণিত শিক্ষণে Virtual Learning Environment (Classroom without wall), Computer Assisted Instruction (CAI), Computer Aided Learning (CAL) এর ধারণা

বর্তমানে গণিত শিক্ষণে ডিজিটাল পদ্ধতি অত্যন্ত ফলপ্রসূ। আইসিটি ব্যবহার করে শিক্ষার্থীরা স্বাধীনভাবে গণিত শিখতে পারে। শিক্ষার্থীর সহজ উপায়ে শিখনের জন্য VLE, Computer Assisted Instruction (CIA), Computer Aided Learning (CAL)এর ধারণা নিম্নে আলোচনা করা হলো।

Virtual Learning Environment (Classroom without wall)

শিক্ষার্থীর নিকট বিভিন্ন শিখন সামগ্রী ওয়েবের মাধ্যমে সরবরাহ করার পদ্ধতি হল Virtual Learning Environment যাকে সংক্ষেপে বলা হয় VLE; শিক্ষার্থীর শিখনযাচাই, তাদের কোর্স অনুসরণ, যোগাযোগ এবং সহযোগিতাপূর্ণ শিখনের বিভিন্ন সরঞ্জাম এই শিখন পদ্ধতির মধ্যে রয়েছে। প্রতিষ্ঠান এবং প্রতিষ্ঠানের বাইরে যে কোন অবস্থায় শিক্ষার্থী এই ওয়েবে প্রবেশ করতে পারে। অর্থাৎ শিক্ষার্থী শ্রেণির বাইরেও দিন-রাত 24 ঘন্টাই এই ওয়েবের মাধ্যমে শিখন কার্যক্রমের সাথে জড়িত হতে পারে। এই পদ্ধতি শুধুমাত্র গতানুগতিক সার্বক্ষণিক শিক্ষার্থীদের শিক্ষাদান করে তা নয়, সে সাথে যে সব শিক্ষার্থী সময় স্বল্পতা বা ভৌগলিক কারণে নিয়মিত শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে যেতে পারেন না তাদেরও শিক্ষাদান করে।

উদাহরণ স্বরূপ দূরশিক্ষণ কোর্স, সান্ধ্যকালীন কোর্স বা কর্মীদের জন্য বিভিন্ন পার্ট টাইম কোর্স। VLE আবার বিভিন্ন নামেও পরিচিতি রয়েছে। যেমন, Course Management System (CMS), Learning Management System(LMS) ইত্যাদি বিভিন্ন VLE রয়েছে। তবে সবগুলোই মোটামুটি একই ধরনের কাজ করে এবং একই ধরনের শিখন সামগ্রী সরবরাহ করে। সর্বাধিক ব্যবহৃত হয় এরকম তিনটি VLE হল,

- Blackboard
- Moodle
- Universities’ own bespoke systems

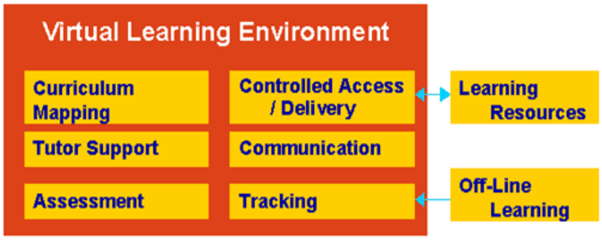
VLE Content Package File

VLE হল একটি প্যাকেজ যা অনলাইন রিসোর্স সেন্টার এর নির্দিষ্ট টেক্সটবুক থেকে সকল লেকচার এবং শিক্ষার্থীর শিখন সরঞ্জামের সমন্বয়। এই VLE Content Package File-টি ডাউনলোড করে নিতে হবে। শিখন কার্যক্রম অনেক বেশি দক্ষ ও কার্যকর করার জন্য অনলাইন রিসোর্স সেন্টার থেকে বিভিন্ন কনটেন্ট সহজেই এবং একসাথে VLE তে নেয়া যায়।

- টেক্সট বইয়ের সাথে সম্পর্কিত কনটেন্টসমূহ সহজেই পাওয়া যায়
- শিক্ষার্থীকে এই প্রতিষ্ঠানের নেটওয়ার্ক ত্যাগের প্রয়োজন হয় না
- একটি প্যাকেজএ একসাথে সব কনটেন্ট পাওয়া যায়। তাই সময় কম লাগে
- লেকচারগুলো টেক্সট বইএর কোর্স ম্যাটেরিয়ালের সাথে সমন্বিত হওয়ায় শিক্ষার্থী এক জায়গা থেকেই সব পেয়ে যাবে।

নিচের লিংকগুলোতে গিয়ে গাইডলাইন অনুযায়ী গেলে আপনার Virtual Learning Environment এ VLE content package file ইমপোর্ট করা যাবে।

- Blackboard version 6, 7, and 8
- Blackboard version 9
- WebCT 4
- WebCT 6
- WebCT Vista
- Moodle
- SCORM



Note that only ORCs for some older titles will be available in WebCT format.

Computer Assisted Instruction (CAI)

Computer Assisted Instruction (**CAI**) একটি ইন্টারেকটিভ শিখন কার্যক্রম কৌশল যেখানে নির্দেশনাসমূহ কম্পিউটারে উপস্থাপন হয় এবং মনিটরে শিখন হয়। Computer Assisted Instruction (**CAI**) একটি অনলাইন ও অফলাইন স্ব-শিখন কৌশল যেখানে শিক্ষার্থীর সাথে প্রোগ্রাম করা নির্দেশনা ম্যাটেরিয়ালের মিথস্ক্রিয় (ইন্টারেকশন) হয়। শিক্ষাক্রমের সব ক্ষেত্রেই শিক্ষার্থীকে সহায়তা করে। **CAI** তে শিখন প্রক্রিয়ার উন্নতকরণে টেক্সট, গ্রাফিক্স, ভিডিও, সাউন্ড ইত্যাদির সমন্বয় করা হয়। এখানে কম্পিউটার একটি যন্ত্র যা নির্দেশনাসমূহের উন্নতিতে ফ্যাসিলিটেড করে। আবার **CAI** program টিউটরিয়াল, ড্রিল ও অনুশীলন, সিমুলেশন, সমস্যা সমাধানের উপায় ইত্যাদি ব্যবহার করে এবং শিক্ষার্থীর চিন্তণ দক্ষতা পরিমাপ করে।

সাধারণভাবে **CAI** তে যেগুলো পাওয়া যায়,

- টেক্সট বা মালটিমিডিয়া কনটেন্ট
- বহু-নির্বাচনী প্রশ্ন
- বিভিন্ন প্রশ্ন/সমস্যা
- তাৎক্ষণিক ফলাবর্তন
- ভুল উত্তরের জন্য নোট প্রদান
- শিক্ষার্থীর পারদর্শিতা যাচাই
- অনুশীলনী
- ওয়ার্কশীট ও প্রশ্নপত্র।

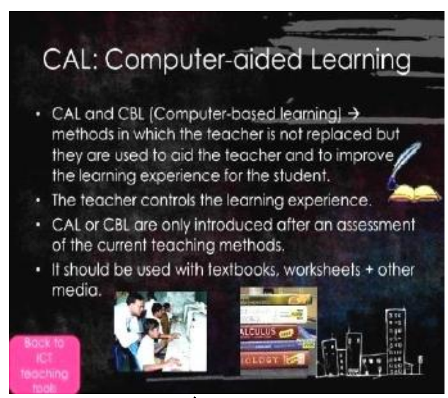
CAI এর সুবিধাসমূহ

- একের সাথে-এক মিথস্ক্রিয়া
- অনেক বেশি অনুপ্রেরণা মূলক
- স্বাধীনভাবে বিভিন্ন পরীক্ষা-নিরীক্ষা করা
- প্রকাশিত উত্তরের তাৎক্ষণিক ফলাবর্তন
- শিক্ষার্থীকে নিজে নিজে এগিয়ে যেতে সহায়তা করা
- প্রত্যেক শিক্ষার্থীকে অনেক সময় দিতে শিক্ষককে সহায়তা করা
- লাজুক এবং পিছিয়ে পড়া শিক্ষার্থী একান্তে কাজ করতে পারে
- প্রত্যেক শিক্ষার্থী মনযোগ পায়
- অনেক তাড়াতাড়ি শিখন হয়
- কঠিন ও বিমূর্ত বিষয় বুঝতে মালটিমিডিয়া সহায়তা করে
- শিক্ষার্থী নিজে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করতে পারে।

CAI এর অসুবিধাসমূহ

- বেশি তথ্য ও রিসোর্সের কারণে আচ্ছন্ন হতে পারে
- মালটিমিডিয়ার অতি ব্যবহার কনটেন্ট এর প্রতি অমনযোগী করে তুলতে পারে
- শিখন ধীরে ধীরে যান্ত্রিক হয়ে যেতে পারে
- প্যাকেজ এর উন্নত মানের কনটেন্ট যদি সহজে পাওয়া না যায়
- পরিকাঠামোর অভাব।

Computer Aided Learning (CAL)



শিখন কার্যক্রমে আইসিটির ব্যবহারের মাধ্যমে যে শিখন পরিবেশ তৈরি হয় সেটাকে Computer Aided Learning (CAL) বলা যায়। শিখন কার্যক্রম অনেক বেশি আকর্ষণীয়, আনন্দদায়ক ও টেকসই করার জন্য কম্পিউটার প্রোগ্রাম ব্যবহারের মাধ্যমে শিখন পরিবেশ তৈরি করাই হল Computer Aided Learning (CAL)। শিক্ষককে শিখন কার্যক্রমে সহায়তা করার জন্য BRAC এনসিটিবি-র টেক্সটবই অনুসরণ করে গণিত, বিজ্ঞান ও ইংরেজি বিষয়ের উপর বেশকিছু CALম্যাটেরিয়াল তৈরি করেছে। এগুলো সিডি করে ব্র্যাক স্কুলের শিক্ষকদের দেওয়া হয়েছে এবং ব্র্যাকের ওয়েব পোর্টালে (e-education.brac.net)ও দেওয়া আছে। BRAC স্কুলের শিক্ষকগণ তাদের প্রতিষ্ঠানে এই ম্যাটেরিয়ালসমূহ সাফল্যের সাথে ব্যবহার করে আসছেন। গণিত বিষয়ের সিডিতে এনসিটিবি এর ৬ষ্ঠ থেকে ১০ম শ্রেণির গণিত বইয়ের ২২টি ধারণার উপর ৩১টি লেসন আছে। কার্টুন, এনিমেশন, গেম ইত্যাদি ব্যবহার করে গণিত, বিজ্ঞান ও ইংরেজি বিষয়ের লেসনগুলো আনন্দদায়ক করা হয়েছে। এবং অংশগ্রহণ মূলক যেন হয় সেদিকেও লক্ষ রাখা হয়েছে। শিক্ষার্থী অনুশীলনের জন্য নিজের মত বাসায় এই সিডি ব্যবহার করতে পারে।

৯.৩ ✍ WebQuest-এর ধারণা, ব্যবহার কৌশল, সমালোচনা

✍ অফ-লাইন ও অন-লাইনে ওয়ার্কশীট তৈরির সফ্টওয়্যার ব্যবহার

✍ গণিত অ্যাপ্‌স

✍ গণিতে স্বশিখন

WebQuest-এর ধারণা, ব্যবহার কৌশল, সমালোচনা

শাব্দিক অর্থে Quest দ্বারা খোঁজা, তালাশ করা, অনুসন্ধান করা বোঝায়। ১৯৯৫ সালের ফেব্রুয়ারিতে San Diego State University-এর Educational Technology বিভাগের অধ্যাপক Dr. Bernie Dodge ওয়েবকোয়েস্টের ধারণার সুত্রপাত করেন। San Diego Unified School District এর Educational Technology এর স্টাফ এবং SDSU/Pacific Bell এর ফেলো Tom Marchএর কাজের সূত্র ধরেই Dodge ওয়েবকোয়েস্টের যাত্রা শুরু হয়। ওয়েবকোয়েস্ট সম্পর্কে Dr. Bernie Dodge (১৯৯৫) বলেনঃ *œA WebQuest is an inquiry-oriented activity or lesson formation which most or all of the information that learners interact with comes from resources on the internet, optionally supplemented with video conferencing. There are at least two levels of WebQuests that should be distinguished from one another.”*

পৃথিবী ব্যাপী শিক্ষণ-শিখনে ওয়েবকোয়েস্টের ব্যবহার দিন দিন বেড়েই চলেছে। বর্তমানে ব্রাজিল, জার্মানী, বেলজিয়াম, স্পেন, চীন, অস্ট্রেলিয়ায় এর ব্যাপক ব্যবহার হচ্ছে। আমেরিকার প্রায় ৪০ টি স্টেটে ওয়েবকোয়েস্টের মাধ্যমে শিক্ষণ-শিখন কার্যক্রম পরিচালিত হচ্ছে।

দুই ধরনের ওয়েবকোয়েস্টের ব্যবহার লক্ষ্য করা যায়; যথাঃ ১. স্বল্প মেয়াদি ওয়েবকোয়েস্ট ও ২. দীর্ঘ মেয়াদি ওয়েবকোয়েস্ট। Marzano (১৯৯২)এর ‘ডাইমেনশন অব থিংকিং মডেলের’ ডাইমেনশন-২ (knowledge acquisition and integration) তে বর্ণিত বিষয় অনুসন্ধানে স্বল্প মেয়াদি ওয়েবকোয়েস্ট ব্যবহার করা হয়। সাধারণত ১ থেকে ৩ ক্লাসে শেষ করা যায় এমন কাজে স্বল্প মেয়াদি ওয়েবকোয়েস্ট ব্যবহার করা হয়ে থাকে। ডাইমেনশন-৩ (extending and refining knowledge) এ বর্ণিত বিষয় অনুসন্ধানে দীর্ঘ মেয়াদি ওয়েবকোয়েস্ট ব্যবহার করা হয়। ১ সপ্তাহ থেকে ১ মাসে শেষ করা যায় এমন বিষয়বস্তু শিক্ষণে দীর্ঘ মেয়াদি ওয়েবকোয়েস্ট ব্যবহার করা হয়।

ওয়েবকোয়েস্টের কন্টেন্ট

একটি ওয়েবকোয়েস্টে কমপক্ষে ৬ টি আবশ্যকীয় অংশ থাকা দরকার। এগুলো হচ্ছেঃ

সূচনা (Introduction):ওয়েবকোয়েস্টের শুরুতে একটি ভূমিকা প্রদান করা থাকে যেন শিক্ষার্থীরা উক্ত কাজটি সম্পর্কে একটি স্বচ্ছ ধারণা পায়। এখানে কাজটির প্রাথমিক কিছু তথ্যও থাকতে পারে। একটি ছোট অনুচ্ছেদে পাঠ ও পাঠ সংশ্লিষ্ট কার্যক্রম সম্পর্কে বিবরণ প্রদান করা হয়। এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা অনুসন্ধান প্রক্রিয়া শুরু করতে পারবে।

কাজ (Task)ঃ এ পর্যায়ে একটি প্রশ্নের অবতারণা করা হয় যেন শিক্ষার্থীরা তথ্যানুসন্ধান ও বিশ্লেষণ করতে পারে। কাজটি শিক্ষার্থীদের পক্ষে করা সম্ভব এবং আগ্রহের উদ্রেক করে এমন হতে হবে। একই সাথে শিক্ষার্থীদেরকে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে দৃষ্টি আকর্ষণ করতে হবেঃ

- সমাধানযোগ্য সমস্যাবলি সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা
- সমস্যার সমাধান সম্পর্কে মতামত বা অভিমত
- কি কি বিষয়ে মতামত বা অভিমত দিতে হবে তা ঠিক করা
- কি কি দুর্বোধ্যতা বিশ্লেষণ করতে হবে তা উল্লেখ থাকতে হবে

প্রক্রিয়া (Process)ঃ এ অংশে শিক্ষক শিক্ষার্থীদেরকে কাজে নিয়োজিত করেন। তিনি সময় ব্যবস্থাপনা, তথ্য সংগ্রহ, দলীয় কাজ পরিচালনার কৌশলগত পরামর্শ ইত্যাদি বিষয়ে প্রয়োজনীয় নির্দেশনা ও পরামর্শ প্রদান করেন। একই সাথে শিক্ষক কাজকে বিভিন্ন ধাপে (Step) ভাগ করে নেন।

রিসোর্স (Resources)ঃ এ পর্যায়ে শিক্ষক শিক্ষার্থীদেরকে কাজটি সম্পাদনের জন্য বিভিন্ন রিসোর্স বা তথ্য সূত্র সরবরাহ করেন। এ ক্ষেত্রে সাধারণত ওয়েব সাইটের ঠিকানা সংবলিত তালিকা প্রদান করা হয় অথবা সংশ্লিষ্ট ওয়েব সাইটে প্রবেশের নির্দেশনা সরবরাহ করা হয়। তবে, শিক্ষককে অবশ্যই রিসোর্স বা তথ্য সূত্রগুলোর প্রত্যেকটিকে পর্যালোচনা পূর্বক প্রদান করতে হবে যেন তা নির্ভেরযোগ্য, প্রমাণসিদ্ধ ও লক্ষ্য অর্জন উপযোগী হয়।ওয়েবকোয়েস্ট ডকুমেন্টে সকল লিংক সর্বদা দেওয়া হয় না বিধায় অন্যান্য ওয়েব ডকুমেন্ট সার্স করা, বিষয় বিশেষজ্ঞগণের সাথে ইমেইল যোগাযোগ, ভিডিও কন্ফারেন্স বা ওয়েবিনার (Webinar) ইত্যাদির মাধ্যমেও প্রয়োজনীয় রিসোর্স প্রাপ্তি নিশ্চিত করা হয়। এ ছাড়া, বই, লিখিত অন্যান্য ডকুমেন্ট ইত্যাদিও সরবরাহ করা হতে পারে। মূল কথা হচ্ছে, শিক্ষার্থীকে যেন কোন মতে কাজ সম্পাদনে ওয়বে ইতস্ততঃ সার্ফিং করে সময় নষ্ট করতে না হয় তা নিশ্চিত করতে হবে।

মূল্যায়ন (Evaluation)ঃওয়েবকোয়েস্টের মাধ্যমে কাজ প্রদান করা হলে তা কোন লিখিত বা মৌখিক রিপোর্ট অথবা মাল্টিমিডিয়া প্রেজেন্টেশন আকারে মূল্যায়ন করা হয়। রিপোর্ট বা প্রেজেন্টেশন তৈরির জন্য চেকলিস্ট বা রুব্রিক (Rubric) ব্যবহার করতে হয়। তথ্যগুলো কীভাবে সাজানো হবে এর একটি নির্দেশনা প্রদান করা যেতে পারে। এ জন্য Marzano (১৯৮৮, ১৯৯২) ও Clarke (১৯৯০)বর্ণিত গাইডিং প্রশ্ন (Guiding Questions), টাইম লাইন, কনসেপ্ট ম্যাপ, ডায়াগ্রাম ইত্যাদি ব্যবহার করা যেতে পারে। এ কারণে অনেক সময় পর্যায়টিকে নির্দেশনা (Guidance) পর্যায় নামেও অভিহিত করা হয়।

উপসংহার (Conclusion)ঃ শিক্ষার্থীদের আত্ম প্রতিফলন ওয়েবকোয়েস্টের একটি প্রধান বৈশিষ্ট্য। ওয়েবকোয়েস্টের সাহায্যে শিক্ষার্থীরা ফিডব্যাক পেতে পারে। শিক্ষক-শিক্ষার্থীরা ইমেইল, ফোরাম ইত্যাদি ব্যবহার করে অভিজ্ঞতা শেয়ার করতে বা অভিজ্ঞতা জরিপ কার্যক্রম পরিচালনা করতে পারে। এ পর্যায়ে নির্ধারিত কাজটি শেষ হলেও শিক্ষার্থীর শিখন ডোমেনকে বর্ধিতকরণ ও উন্নয়নের সুযোগ তৈরি হয় এবং শিক্ষার্থী উৎসাহিত বোধ করে।

ওয়েবকোয়েস্টের বৈশিষ্ট্য

ওয়েবকোয়েস্টের কতগুলো সাধারণ ও অত্যাবশ্যকীয় বৈশিষ্ট্য থাকে। নিম্নে এর কতিপয় উল্লেখ করা হলোঃ

- একটি ওয়েবকোয়েস্ট বিভিন্ন ফরমেটে তৈরি হতে পারে। এগুলোর মধ্যে রয়েছেঃ এইচটিএমএল, ওয়ার্ড ডকুমেন্ট, পাওয়ার পয়েন্ট, এক্সেল, ভিডিও, অডিও, ফ্লাশ ইত্যাদি।
- উচ্চতর চিন্তন দক্ষতা যথাঃ বিশ্লেষণ, সংশ্লেষণ, সমস্যা সমাধান, সৃজনশীলতা, বিচার-বিবেচনামূলক কাজ প্রদান করতে হবে।
- শুধু ওয়েব সাইটের পরিবর্তে বই, জার্নাল, সাময়িকী ইত্যাদির ব্যবহারকেও উৎসাহিত করার ব্যবস্থা থাকতে হবে।

- এটির ফলে গবেষণাধর্মী রিপোর্ট বা শুধু ওয়েব কন্টেন্টের সার-সংক্ষেপ যেন না হয় তা নিশ্চিত করতে হবে।
- ওয়েবকোয়েস্টের সাহায্যে দলগত কাজ প্রদানের যেমন সুযোগ থাকে তেমনি দূর শিক্ষণে এককভাবে ও স্বশিখনে এর ব্যবহার লক্ষ্য করা যায়।
- এতে ভূমিকাভিনয়ের সুযোগ থাকতে পারে
- 'ফ্লিপিং ক্লাস' কার্যক্রম পরিচালনায় ওয়েবকোয়েস্ট ব্যবহার করা যাবে।

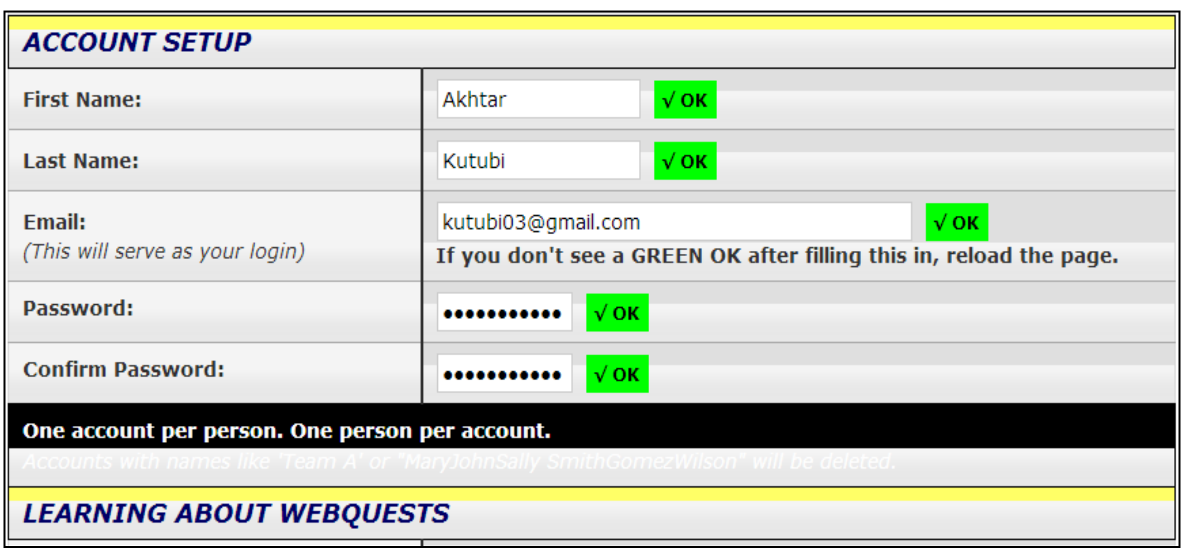
ওয়েবকোয়েস্ট তৈরি

ওয়েবকোয়েস্ট তৈরির জন্য কতগুলো টুল্‌স পাওয়া যায়। এ গুলোর কিছু অর্থের বিনিময়ে এবং কিছু ফ্রি। Dr. Bernie Dodge দীর্ঘ ২২ বছরের অভিজ্ঞতায় QuestGarden(http://questgarden.com/) নামে একটি অনলাইন টুল্‌স তৈরি করেছেন। বর্তমানে ১৭৫ টি দেশে এটি ৩০ দিনের ফ্রি ট্রায়াল ও ১ বা ২ বছরের সাবস্ক্রিপশন আকারে পাওয়া যায়। এ ছাড়া উল্লেখযোগ্য একটি ওয়েবকোয়েস্ট হল:

http://zunal.com/,http://teacherweb.com/, https://createwebquest.com/

নিম্নে http://questgarden.com/ এর সাহায্যে ওয়েবকোয়েস্ট তৈরির স্ক্রীনশট দেখানো হলো:

QuestGarden
where great WebQuests grow


ACCOUNT SETUP

First Name:	Akhtar √ OK
Last Name:	Kutubi √ OK
Email: (This will serve as your login)	kutubi03@gmail.com √ OK If you don't see a GREEN OK after filling this in, reload the page.
Password:	••••••••••• √ OK
Confirm Password:	••••••••••• √ OK

One account per person. One person per account.
Accounts with names like "Team A" or "MaryJohnSally SmithGomezWilson" will be deleted.

LEARNING ABOUT WEBQUESTS

কয়েকটি নমুনা ওয়েবকোয়েস্টের ওয়েব লিংক

QuestGarden দ্বারা তৈরিকৃত নমুনা ওয়েবকোয়েস্ট	ওয়েব **URL**
Dinosaurs Before Dark	http://questgarden.com/52/36/4/070612201403/index.htm
Museum of Mesopotamia	http://questgarden.com/52/41/5/070613164641/index.htm
Gimme Shelter: Homeless in America	http://questgarden.com/51/22/4/070608090111/index.htm
I Want YOU for the U. S. Army	http://questgarden.com/52/16/0/070606152240/index.htm

ওয়েবকোয়েস্টের সুবিধা :

- শিক্ষার্থীর চিন্তন দক্ষতা ও সৃজনশীলতা বৃদ্ধিতে সহায়তা করে
- অনেক রিসোর্স ব্যবহারের সুযোগ থাকে
- একক কাজ, দলগত কাজ প্রদানে সহায়ক
- স্বশিখনের একটি উত্তম উপায়।

ওয়েবকোয়েস্টের অসুবিধা :

- ইন্টারনেট ছাড়া ব্যবহার প্রায় অসম্ভব
- প্রযুক্তি ব্যবহারের দক্ষতা ছাড়া ব্যবহার সম্ভব নয়।

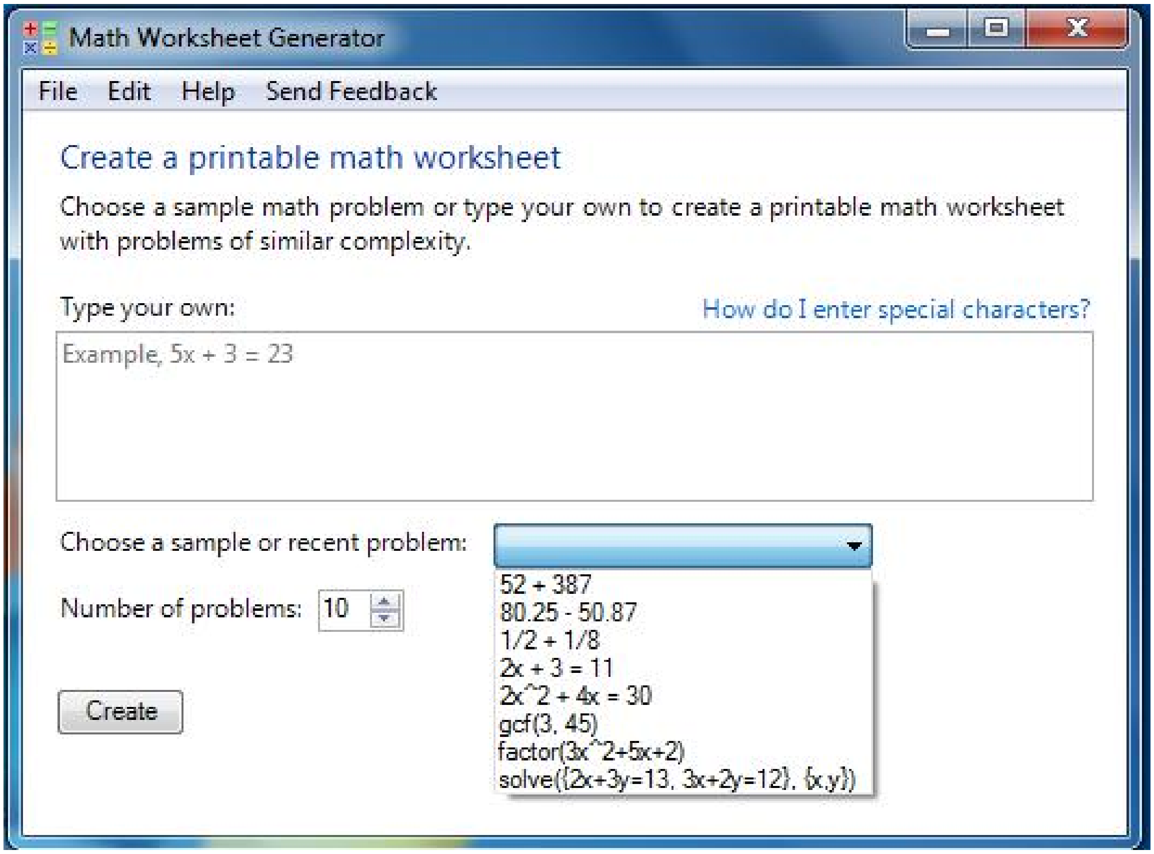
অফ-লাইন ও অন-লাইনে ওয়ার্কশীট তৈরির সফ্টওয়্যার ব্যবহার

গণিতে অফ-লাইন ও অন-লাইনে ওয়ার্কশীট তৈরির বিভিন্ন সফ্টওয়্যার পাওয়া যায়। এ ধরনের সফ্টওয়্যার কোন সুনির্দিষ্ট কাজ করার জন্য পাওয়া যায়; আবার একটি সফ্টওয়্যার দিয়ে বেশ কিছু কাজ সম্পাদন করা যায়। নিম্নে এগুলোর কয়েকটি উল্লেখ করা হলো।

Microsoft Math Worksheet Generator

প্রথমে Choose a sample or recent problem: থেকে কি ধরনের সমস্যা সমাধান করা হবে তা ঠিক করে নিতে হবে। এরপর, Type your own এর নিচে সমস্যাটি নিজের মত করে এডিট করে নিয়ে Number of problems এ সংখ্যাটি ঠিক

করে দিতে হবে। শ্রেণির প্রয়োজন এবং শিক্ষার্থী সংখ্যা অনুসারে এটি ঠিক করা যেতে পারে। শেষে Create বাটনে ক্লিক করলে প্রয়োজনীয় সংখ্যক সমস্যা তৈরি হবে এবং একই সাথে উত্তরও পাওয়া যাবে।



KUTA Test and Worksheet Generator

KUTA Test and Worksheet Generator একটি ফ্রি ও উন্মুক্ত সফ্টওয়্যার। সফ্টওয়্যারটির ট্রায়্যাল ভার্সন (১৪ দিনের) https://www.kutasoftware.com/থেকে এটি ডাউনলোড করা যাবে। ১৪ দিন পরে পুনরায় আন্‌ইন্সটল করে আবার ইন্সটল করতে হবে। ছয়টি প্রধান বিষয় অনুযায়ী সফ্টওয়্যারটি ব্যবহার করতে হয়। বিষয়গুলো হচ্ছে: Pre-Algebra, Algebra 1, Geometry, Algebra 2, Precalculus, Calculus।

KUTA দ্বারা ওয়ার্কশীট সৃজনের পদ্ধতি

১. প্রথমে বিষয় নির্বাচন করে উক্ত সফ্টওয়্যারটি চালু করতে হয়।

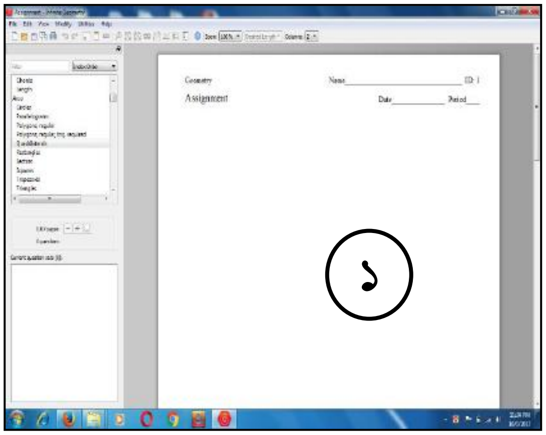
২. সেখান থেকে সুনির্দিষ্ট বিষয়বস্তু ঠিক করে প্রশ্ন সংখ্যা, কাঠিন্য লেভেল, প্রশ্নের ধরন (ফ্রি উত্তর বা এমসিকিউ) ও অন্যান্য অপশন ঠিক করে নিতে হয়। এ ছাড়া ডানে উপরের কোনায় More samples-এ ক্লিক করে নুতন নুতন প্রশ্ন পাওয়া যাবে।

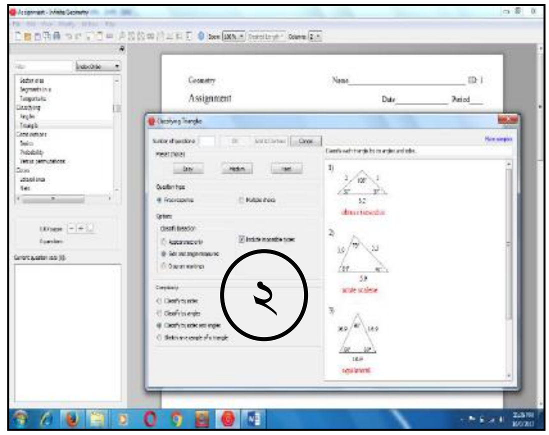
৩. Number of questions -এর পাশের OK বাটনে ক্লিক করে ওয়ার্কশীটটি সৃজন করা হয়। ওয়ার্কশীট সৃজনের পর ইচ্ছা করলে প্রত্যেকটি প্রশ্ন কাস্টমাইজ করে নেওয়া যাবে। এ জন্য সংশ্লিষ্ট প্রশ্নের উপর মাউসের রাইট বাটন ক্লিক করলে একটি পপ-আপ মেন্যু আসে। উক্ত মেন্যু থেকে প্রশ্ন প্রয়োজন মত এডিট ও কাস্টমাইজ করে নিতে হয়।

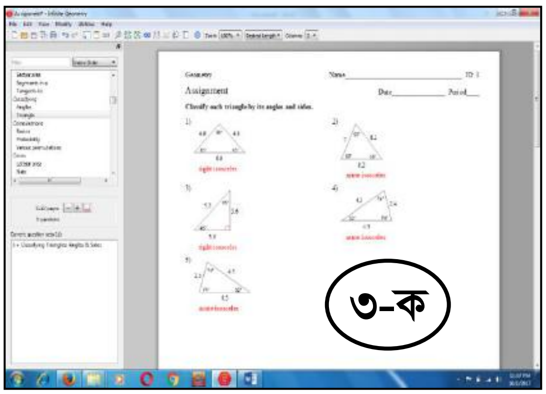
৪. সব শেষে হেডিং অংশে মাউস ডাবল ক্লিক করে প্রয়োজনমত এডিট করে নেওয়া যায়।

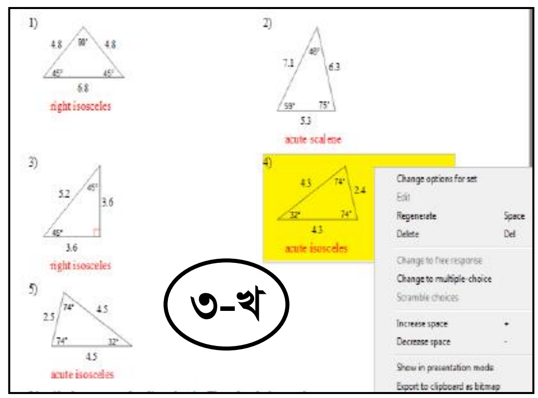
এ ছাড়া KUTA ওয়েব সাইটে ফ্রি নমুনা ওয়ার্কশীট দেওয়া আছে।

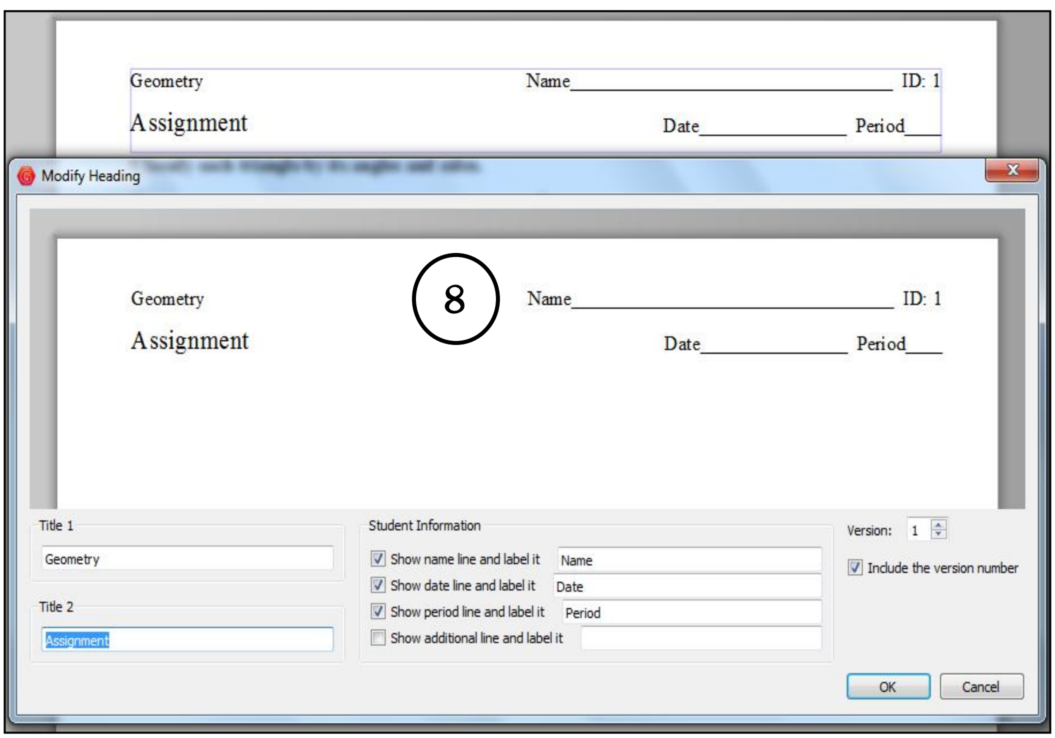
নিচে ওয়ার্কশীট সৃজনের স্ক্রীনশট দেওয়া হলো :











গণিত অ্যাপ্স

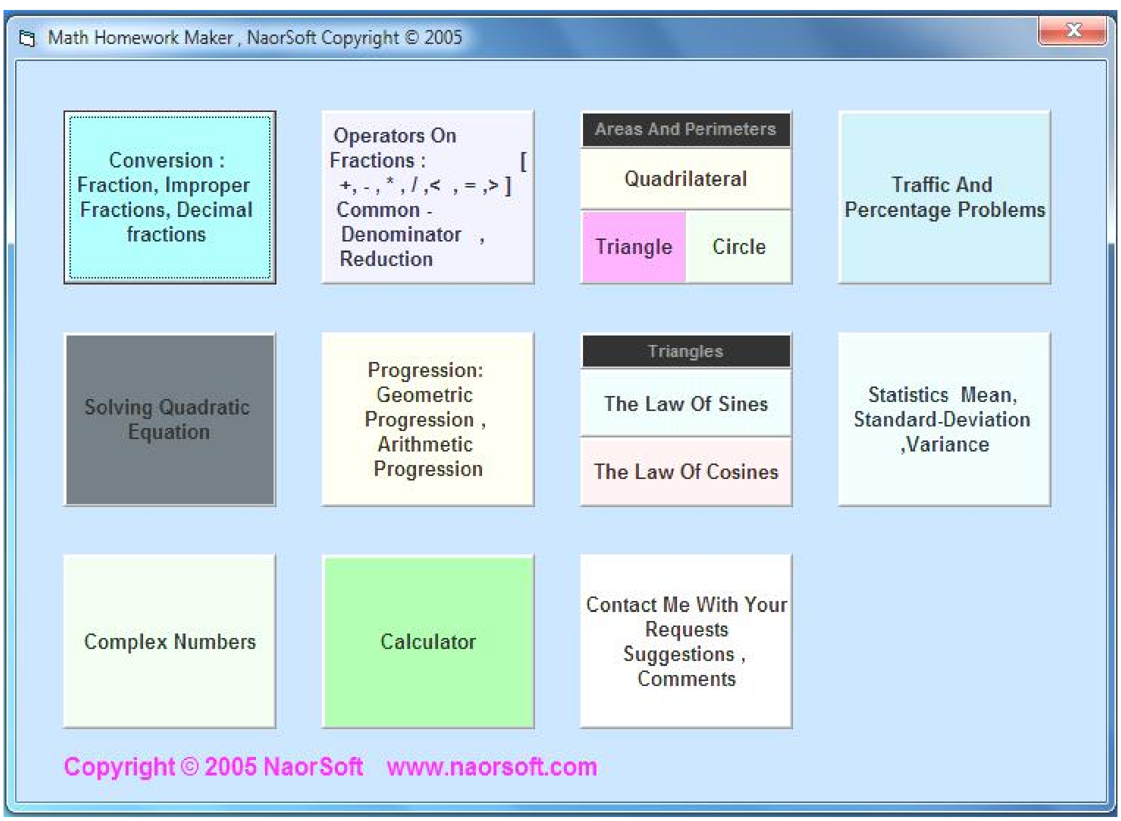
গণিত অ্যাপ্স অফ-লাইন ও অন-লাইন উভয় ফরম্যাটে পাওয়া যায়। এগুলো সুনির্দিষ্ট কাজ সম্পাদনের এক ধরনের সফ্টওয়্যার। ল্যাপটপ বা পিসি ও মোবাইল উভয় ভার্সনে এ ধরনের সফ্টওয়্যার ব্যবহার করা যায়। নিম্নে এগুলোর কয়েকটি উল্লেখ করা হলো।

Math HomeWork Maker

Math HomeWork Makerএকটি ফ্রি এবং অফ-লাইন সফ্টওয়্যার। প্রাথমিক থেকে কলেজ পর্যায় পর্যন্ত অনেক বিষয়বস্তু এর মাধ্যমে সমাধান করা যায়। এ সফ্টওয়্যারের সাহায্যে নিচের কাজগুলো করা যায়:

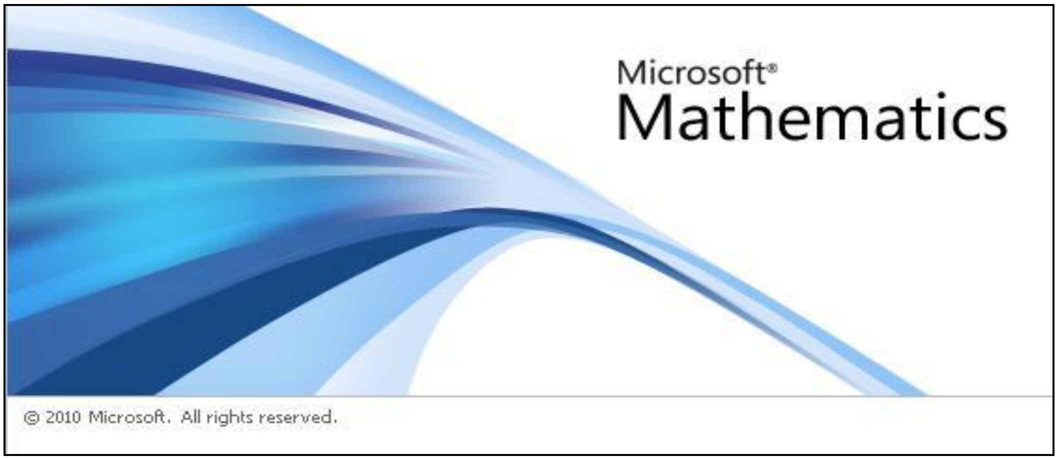
- Conversion: Fraction, Improper Fractions, Decimal fractions.
- Operators on Fractions [add, subtraction, multiplication, division, bigger, equals, smaller], Common-Denominator, Reduction.
- Areas and Perimeters: Quadrilaterals, Triangles, Circles.
- Traffics and Percentages Problems.
- Solving Quadratic Equation.
- Progression: Geometric Progression, Arithmetic Progression.
- Triangles: The Law of Sines, The Law of Cosines.
- Statistics Mean, Standard-Deviation, Variance.
- Complex Numbers.
- Calculators.

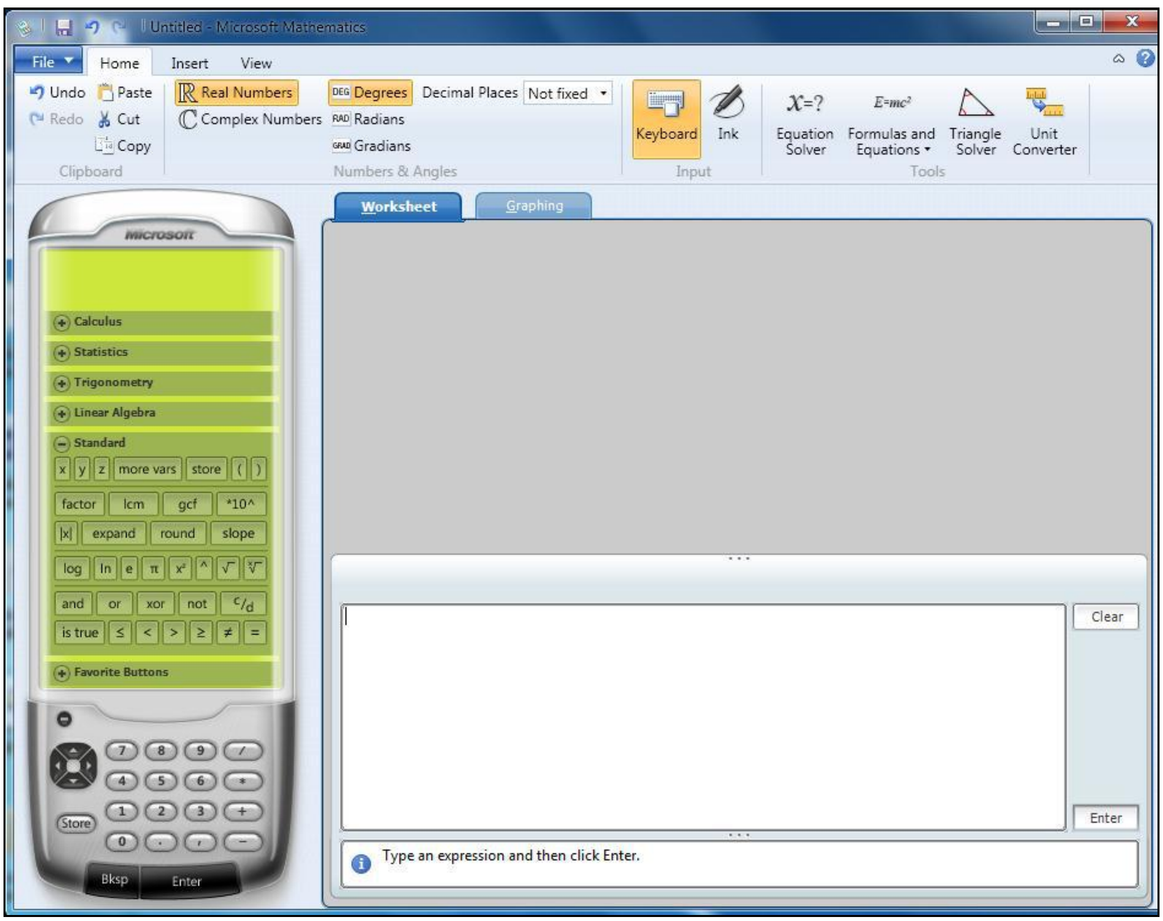
সফ্টওয়্যারটি ইন্সটল করে নিয়ে নির্দিষ্ট কাজটি করার জন্য বাটন প্রেস করে প্রয়োজনীয় ডাটা ইনপুট দিতে হয়। নিচে সফ্টওয়্যারটির স্ক্রীনশট দেওয়া হলো:



Microsoft Mathematics

এটি মাইক্রোসফ্ট ওয়ার্ড ভিত্তিক একটি প্রোগ্রাম। এর সাহায্যে হাই স্কুল ও কলেজ পর্যায়ের বেশ কিছু কাজ করা যায়। যেমন: ক্যালকুলাস, পরিসংখ্যান, ত্রিকোণমিতি, লিনিয়ার এ্যালজেব্রা, বিভিন্ন স্ট্যান্ডার্ড কাজ যথা: উৎপাদক, লসাগু, গসাগু, নির্ণায়ক, সেটের বিভিন্ন অপারেশন, লজিক গেটসহ বেশ কিছু কাজ সম্পাদন করা যায়। বিশেষত: Equation Solver-এর সাহায্যে ধাপে ধাপে কীভাবে সমীকরণ সমাধান করা যায় এর বিস্তারিত বিবরণসহ গ্রাফ দেখার সুযোগ আছে।





মাইক্রোসফ্ট অফিসে এড-অন্স আকারেও MicrosoftMathematicsপাওয়া যায়। এর ওয়েব লিংক দেওয়া হলো:

http://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=17786

Genius Maker Free Edition

এটি একটি গণিত ও বিজ্ঞানের সফ্‌টওয়্যার যা Free edition ও Premium editionআকারে পাওয়া যায়। এর ডেভলপার হচ্ছে গোল্ডেন কে স্টার (www.goldenkstar.com) নামে একটি সফ্‌টওয়্যার নির্মাতা প্রতিষ্ঠান। মোট ৩৪ টি ফিচারের মধ্যে ৯টি ফ্রি। বাকীগুলো ট্রায়াল ভার্সনে আছে যা নির্দিষ্ট সময় পরে আর কাজ করে না। গণিতে মোট ১৬টি ফিচার যুক্ত হয়েছে। এগুলো হচ্ছে: Graph Software, Geometry Solver, Triangle Solver, Equation Solver, Curve Fitting, Analytical Geometry, Matrix Algebra, Complex Algebra, Determinant, Number System, Prime Numbers, Progressions, Polynomial Expansion, Form Polynomial Equations, Roots of Polynomial, Permutation Combinationতন্মধ্যে ৫টি ফ্রি ফিচার।

Photomath - Camera Calculator

PhotoMath- Camera Calculatorসমীকরণ সমাধানসহ যে কোন গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য একটি মোবাইল ভিত্তিক গণিত অ্যাপ্‌স। এটিকে PhotoMath for PC ভার্সন চালানোর জন্য Android Emulator ইন্সটল করে নিতে হবে। এ জাতীয় একটি সফ্‌টওয়্যার Bluestacks-এর ওয়েব সাইট

(https://www.bluestacks.com/) থেকে ডাউনলোড করা যাবে। মোবাইলে চালানোর জন্য প্রথমে অ্যাপ্‌সটি স্টোর থেকে ডাউনলোড করে ইন্সটল করে নিতে হয়। অ্যাপ্‌সটি চালু করে সমীকরণটি কোন কাগজে লিখে স্ক্যান করে নিতে হয় বা কী-প্যাড ব্যবহার করে লিখে নিতে বা পূর্বে লিখিত কোন সমীকরণ এডিটর নিতে হয়।

Photomath - Camera Calculator ব্যবহারের পদ্ধতি

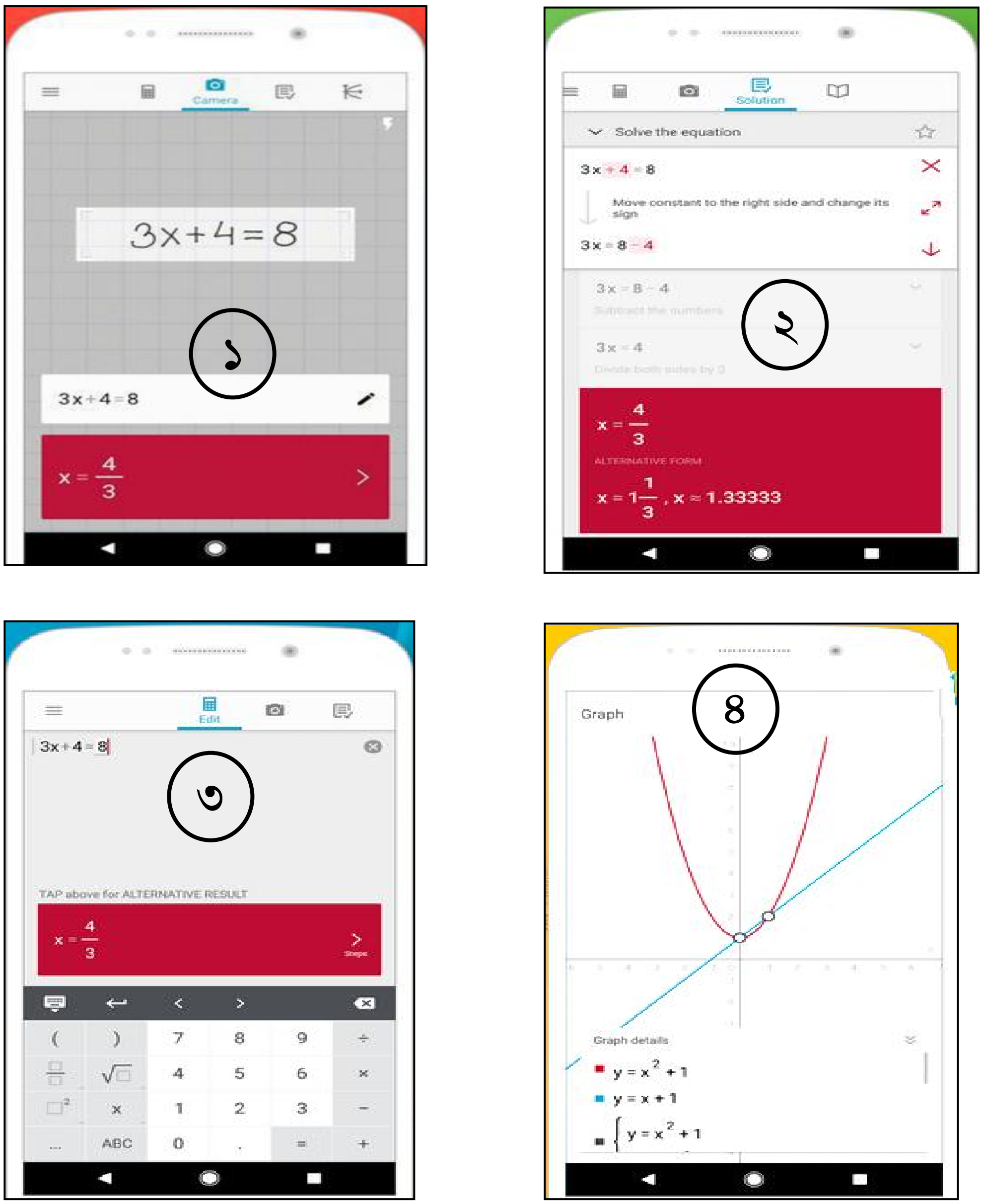
১. প্রথমে আইকনে ক্লিক করে অ্যাপ্‌সটি চালু করতে হয়।

২. এবার গাণিতিক সমস্যাটি ইনপুট করতে হয়। ইনপুট করার জন্য বিভিন্ন উপায় আছে। সরাসরি বই থেকে ছাপানো সমস্যাটি বা হাতে লিখা সমস্যাটি ইনপুট করার জন্য অ্যাপ্‌স-এর 'ক্যামেরা বাটন' অন করে স্ক্যান করে নিতে হয়। অথবা'টেক্সট এডিটর ' ব্যবহার করে সমস্যাটি ইনপুট দিতে হয়।

৩. সমস্যাটি ইনপুট দেওয়ার সাথে সাথে এর সমাধান প্রদর্শন করে। সমাধান প্রদর্শন করলে ‘সল্যুশন’ বাটনে ক্লিক করে সমাধান দেখা সম্ভব। সল্যুশন বাটনের নিচে সমস্যাটি ধাপে ধাপে কিভাবে সমাধান করা হয়েছে তা দেখার এবং গ্রাফ দেখার সুযোগ আছে।

৪. সল্যুশন বাটনের বামে ‘নোট বুক’ বাটনে ‘মাই ফেভারিট’ ও ‘হিস্ট্রি’ থাকে।

নিচে অ্যাপ্সটির স্ক্রীনশট দেওয়া হলো :



এ ছাড়াও বিভিন্ন সফ্‌টওয়্যার এবং অ্যাপ্‌স গণিতে ব্যবহৃত হয়ে আসছে। নিচে এ ধরনের কয়েকটি সফ্‌টওয়্যার ও অ্যাপ্‌স-এর নাম দেওয়া হলো :

- iMathematics
- MyScript Calculator
- GeoGebra
- Algeo graphing calculator
- Mathway

গণিতে স্বশিখনের উপায় ও গুরুত্ব

স্বশিখনকে বিভিন্ন জন বিভিন্নভাবে সংজ্ঞায়িত করেছেন। এর বিভিন্ন অনুগামী পদ (Terminology) পাওয়া যায়। যেমন: Self Learning, Self-Directed Learning, Autodidact, Self-Education, Self-teaching, Self-regulated learning ইত্যাদি। অনেকে Discovery Learning-কে এর আওতাভুক্ত করেছেন। দূর শিক্ষণে এর ব্যাপক ব্যবহার লক্ষ্য করা যায়। স্বশিখন একটি উত্তম শিখন কৌশল হিসাবে শিক্ষা ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়ে আসছে।

Malcolm Knowles স্বশিখন সম্পর্কে বলেন :

> *œIn its broadest meaning, 'self-directed learning' describes a process by which individuals take the initiative, without the assistance of others, in diagnosing their learning needs, formulating learning goals, identify human and material resources for learning, choosing and implement appropriate learning strategies, and evaluating learning outcomes."* (Knowles, 1975, p. 18)

স্বশিখনে ব্যক্তিগত প্রস্তুতি, শিখনের সামর্থ্য, খরচ, রিসোর্সের যথার্থতা অবশ্যই বিবেচনা যোগ্য।

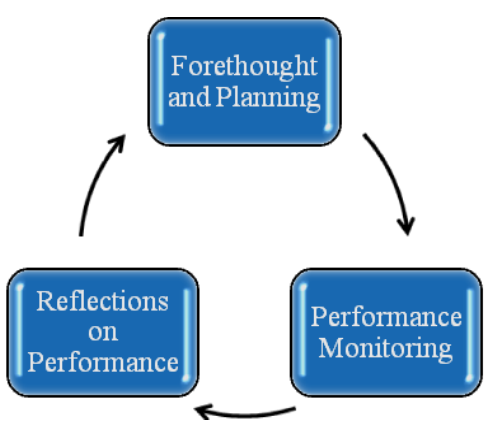
স্বশিখনের উপায়

Gibbons, M. (2012), Zimmerman (২০০৪) ও অন্যান্য শিক্ষাবিদগণ স্বশিখনের কতিপয় কৌশল উল্লেখ করেছেন।

- লক্ষ্য নির্ধারণ (Goal Setting): কী শিখতে হবে তা ঠিক করা
- পরিকল্পনা (Planning): লক্ষ্য অনুযায়ী শিখন ও রিসোর্স সংগ্রহের পরিকল্পনা তৈরি করা
- আত্ম-প্রণোদনা (Self-Motivation): উপযুক্ত সময় নির্বাচন পূর্বক নিজের প্রয়োজনমত শিখন
- মনোযোগ নিয়ন্ত্রণ (Attention Control): লক্ষ্য অনুযায়ী ও পরিকল্পনা মাফিক শিখনের জন্য মনোনিবেশ
- কৌশলের নমনীয় ব্যবহার (Flexible Use of Strategies): প্রয়োজনমত কৌশল পরিবর্তন ও ব্যবহার
- স্ব-পর্যবেক্ষণ (Self-Monitoring): নিজের কাজের তদারকি ও অগ্রগতি সম্পর্কে সজাগ থাকা এবং অধীত বা পঠিত বিষয়ের রেকর্ড সংরক্ষণ ও নোট করা
- সাহায্য চাওয়া (Help-Seeking): প্রয়োজনমত সাহায্য গ্রহণ
- আত্ম-মূল্যায়ন (Self-Evaluation): পরিশেষে লক্ষ্য অনুযায়ী শিখন সম্পন্ন হয়েছে কিনা তা মূল্যায়ন করা

স্বশিখনে ব্যবহৃত শিখন মডেল

Pintrich ও Zusho (২০০২) এবং Zimmerman (২০০০) স্বশিখনে ব্যবহৃত তিন ধাপের একটি শিখন মডেলের উল্লেখ করেছেন।



গণিত শিক্ষণে স্ব-শিখনের গুরুত্ব

শিক্ষণ-শিখনে পঠন একটি কাজ ও অভ্যাস। কোন বিষয়বস্তু আয়ত্ত করার জন্য এর কোন বিকল্প নেই। শ্রেণি কক্ষে ও শ্রেণি কক্ষের বাইরে বিষয়গত কাজ সম্পাদন, অনুশীলন করে কোন কঠিন ও জটিল বিষয় নিজে নিজে বা অপরের সহায়তায় সম্পন্ন করতে স্ব-শিখন একটি উত্তম প্রক্রিয়া। বিশেষত গণিতে প্রযুক্তিগত জ্ঞানের ব্যবহার ও অনুশীলনে এর ব্যবহার উল্লেখ করার মত। তাছাড়া, পছন্দের শিখন বিষয়বস্তুর উপর ব্যুৎপত্তি অর্জন করতে হলে স্ব-শিখন অভ্যাস গঠন অপরিহার্য্য। এর মাধ্যমে শিক্ষক ও শিক্ষার্থী উভয়েই স্বাচ্ছন্দ্য বোধ করবে। অনুসন্ধিৎসূ মন সৃষ্টি, পর্যবেক্ষণ ও পরিবীক্ষণ দক্ষতা অর্জন, নুতন নুতন বিষয়ে জ্ঞানার্জন, চিন্তা শক্তির বিকাশে স্ব-শিখনের ভূমিকা অনন্য।

অনুশীলনী-৯

১. WebQuest বলতে কি বোঝায়? WebQuest ব্যবহারে কৌশল বর্ণনা করুন। WebQuest ব্যবহারের সুবিধা ও অসুবিধা কী?

২. ওয়ার্কশীট কী? কি কি উপায়ে ওয়ার্কশীট তৈরি করা যায়? ওয়ার্কশীট তৈরির উপায় ব্যখ্যা করুন।

৩. গণিত শিক্ষণে অফ-লাইন ও অন-লাইনে ওয়ার্কশীট তৈরির সফ্টওয়্যার ব্যবহারের গুরুত্ব লিখুন।

৪. গণিত অ্যাপস কী? অন্তত দুইটি গণিত অ্যাপসের বর্ণনা দিন। আপনি কিভাবে গণিত অ্যাপস ব্যবহার করবেন?

৫. VLE, CAI, CAL কিভাবে শিখন কার্যক্রম ইন্টারেকটিভ করে তার ব্যাখ্যা দিন।

৬. স্বশিখন বলতে কি বোঝায? স্বশিখনের আধুনিক কৌশল/উপায় বর্ণনা করুন।গণিত শিক্ষায় স্বশিখন প্রক্রিয়ার গুরুত্ব ব্যাখ্যা করুন।

রেফারেন্স-৯

Clarke, J. H. (1990). *Patterns of thinking: Integrating learning skills in content teaching*. Needham Heights MA: Allyn and Bacon.

Marzano, R. J., Brandt, R.S., Hughes, C.S., Jones, B. F., Presseisen, B, Z., Rankin, S. C., & Suhor, C. (1988). *Dimensions of thinking: A framework for curriculum and instruction.* Alexandria VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Marzano, R. J. (1992). *A different kind of classroom: Teaching with dimensions of learning*. Alexandria VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Grow, G. O. (1991). Teaching Learners To Be Self-Directed. *Adult Education Quarterly, 41*(3), 125-149.

Gibbons, M. (2012). *The self-directed learning handbook: Challenging adolescent students to excel.* CA: Jossey-Bass.

Knowles, M. S.(1975).*Self-Directed Learning: A Guide forLearners and Teachers*. Association Press, New York, NY.

ভিডিও লিংক: http://www.teachertube.com/video/history-of-webquest-172252

জাতীয় তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি নীতিমালা-২০০৯, বিজ্ঞান এবং তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি মন্ত্রণালয়, বাংলাদেশ।

জাতীয় শিক্ষানীতি-২০১০, শিক্ষা মন্ত্রণালয়, বাংলাদেশ।

জাতীয় শিক্ষাক্রম-২০১২, জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ।

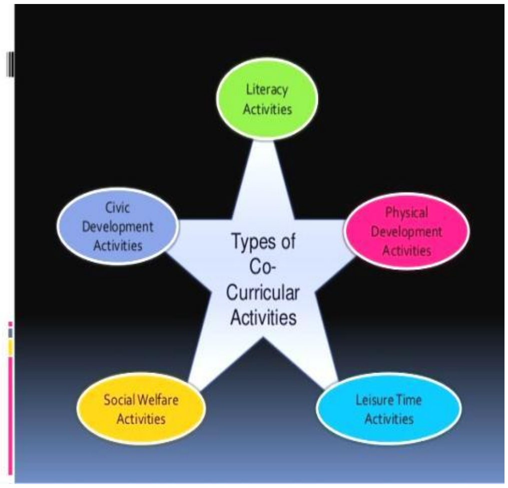
https://www.brac.net/education-programme/item/778-computer-aided-learning-cal

ইউনিট ১০ : গণিতে সহপাঠক্রমিক কার্যাবলি

শিক্ষার্থীরা গণিত শুধু শ্রেণিকক্ষে শিখে না, শ্রেণিক্ষের বাহিরেও শিখে। শ্রেণিকক্ষে শেখা গাণিতিক জ্ঞানকে বাস্তব ক্ষেত্রে বিভিন্ন জায়গায় প্রয়োগ করতে হলে অবশ্যই সহশিক্ষাক্রমিক কার্যাবলির সাথে বিষয় জ্ঞানের সংযোগ ঘটাতে হবে। আর এটি সম্ভব যদি আমরা শিক্ষার্থীদের গণিত ক্লাব, গণিত গবেষণাগার, গণিত কক্ষ ও গণিত প্রদর্শনীর সাহায্যে সহশিক্ষাক্রমিক কার্যাবলিতে অংশগ্রহণের সুযোগ সৃষ্টি করতে পারি। এই বইয়ে নিম্নে গণিত ক্লাব, গণিত গবেষণাগার, গণিত কক্ষ ও গণিত প্রদর্শনী বিষয়বস্তুগুলো পর্যায়ক্রমে আলোচনা করা হল।

১০.১ গণিত ক্লাব, গণিত গবেষণাগার ও গণিত কক্ষ এবং গণিত প্রদর্শনী

১০.২ গণিত অলিম্পিয়াড, গণিতে ধাঁধাঁ, যুক্তিমূলক ও প্যাটার্ন গেম ইত্যাদি, TIMSS



১০.১ গণিত ক্লাব, গণিত গবেষণাগার ও গণিত কক্ষ এবং গণিত প্রদর্শনী

শিক্ষার্থীরা গণিত শুধু শ্রেণিকক্ষে শিখে না, শ্রেণিকক্ষের বাহিরেও শিখে। শ্রেণিকক্ষে শেখা গাণিতিক জ্ঞানকে বাস্তব ক্ষেত্রে বিভিন্ন জায়গায় প্রয়োগ করতে হলে অবশ্যই সহশিক্ষাক্রমিক কার্যাবলির সাথে বিষয়বস্তু জ্ঞানের সংযোগ ঘটাতে হবে। আর এটি সম্ভব যদি আমরা শিক্ষার্থীদের গণিত ক্লাব, গণিত গবেষণাগার, গণিত কক্ষ ও গণিত প্রদর্শনীর সাহায্যে সহশিক্ষাক্রমিক কার্যাবলিতে অংশগ্রহণের সুযোগ সৃষ্টি করতে পারি। এই বইয়ে নিম্নে গণিত ক্লাব, গণিত গবেষণাগার, গণিত কক্ষ ও গণিত প্রদর্শনী বিষয়বস্তুগুলো পর্যায়ক্রমে আলোচনা করা হল।

গণিত ক্লাব

গণিত ক্লাব হলো বিদ্যালয়ের ক্যাম্পাসে গণিতে আগ্রহী শিক্ষার্থীদের গণিত উন্নয়নের জন্য একটি সংগঠন। গণিতের দিকে তরুণ শিক্ষার্থীদেরআগ্রহী করার জন্য গণিত শিক্ষকের নির্দেশনায় শিক্ষার্থী কর্তৃক পরিচালিত একটি ক্লাব। এটি গণিত শিক্ষার্থীদের দ্বারা পরিচালিত এবং শিক্ষক ও একাডেমিক গ্রূপ কর্তৃক সমর্থিত সংগঠন যা গণিতে আগ্রহী সকল শিক্ষার্থীদের চাহিদা এবং স্বার্থ পরিবেশন করার জন্য নিবেদিত।

গণিত শেখার জন্য গুরুত্বপূর্ণ কার্যকরী কৌশলগুলো প্রয়োগের মাধ্যমে সুনির্দিষ্ট দক্ষতা অর্জনে সহায়তা করে। গণিত শেখার জন্য সৃজনশীলতা এবং কল্পনাকে কার্যকরভাবে ব্যবহার করার জন্য সহায়তা করে।গণিত ক্লাব একটি মজার এবং প্রতিযোগিতামূলক কার্যকলাপ পরিচালনার ক্ষেত্র যেখানে যে কোন শিক্ষার্থী অংশগ্রহণ করতে পারেন। এটি একটি ছাত্রছাত্রীদের সৃজনশীল চিন্তন দক্ষতা, সমস্যা সমাধান দক্ষতা, সামাজিক দক্ষতার বিকাশ এবং নতুন ধরনের গণিত শেখার জন্য এটি একটি দুর্দান্ত ক্ষেত্র। গণিত ক্লাব সহপাঠ্যক্রমিক কার্যাবলির অংশ।

গণিত ক্লাবের বিভিন্ন কার্যক্রমের মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের চিন্তন দক্ষতা, সামাজিক দক্ষতা, ব্যাক্তিক দক্ষতা, যোগাযোগ দক্ষতা, সমস্যা সমাধান দক্ষতা ও সহযোগিতামূলক শিখন দক্ষতা বৃদ্ধি করা সম্ভব। গণিত ক্লাব গঠনের সময় এর একটি গঠনতন্ত্র বা সংবিধান থাকা প্রয়োজন। শিক্ষার্থীদের দ্বারা গঠিত একটি পরিচালনা কমিটি থাকবে। বিষয় সংশ্লিষ্ট পাঠ্যপুস্তক, রেফারেন্স বই, উপকরণ ইত্যাদি প্রয়োজন। এই সংবিধানে ক্লাবের নাম, ক্লাবের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য, সদস্যতা এবং ফি ইত্যাদি সম্পর্কে বিস্তারিত তথ্য প্রদান করে।গণিতে আগ্রহ বৃদ্ধি এবং মনোযোগ ধরে রাখার জন্য এটি দরকারী।

শিক্ষার্থীদের পাঠে সক্রিয় অংশগ্রহণকে উৎসাহিত করে। এটি শিক্ষার্থীদের গণিতের সুনির্দিষ্ট বিষয়বস্তু অধ্যয়নের অভ্যাস গড়ে তুলতে সাহায্য করে এবং এটি প্রাসঙ্গিক ও অপ্রাসঙ্গিক উপাদানগুলির মধ্যে একটি পার্থক্য তৈরি করতে সহায়তা করে। শ্রেণিকক্ষে অর্জিত জ্ঞানকে সমৃদ্ধ করতে সহায়তা করে। গণিত ক্লাব মুক্ত আলোচনা এবং পরস্পর মতামত আদান প্রদানের ক্ষেত্র। শিক্ষার্থীরা কিছু সুপরিচিত এবং বিশিষ্ট গণিতবিদদের কথা শোনার সুযোগ পায়। ভালো শিক্ষার্থীদের চাহিদাপূরণ করা সম্ভব হয় এবং ক্লাবের সৃজনশীল কাজে সক্রিয় অংশগ্রহণে সুযোগ সৃষ্টি হয়। অবসর সময়কে কাজে লাগানো সম্ভব হয়।

গণিত ক্লাবের উদ্দেশ্য

১. গণিতের প্রতি ইতিবাচক মনোভাব তৈরিতে শিক্ষার্থীদের সাহায্য করা
২. শিক্ষার্থীদের গাণিতিক কৌতূহল সৃষ্টিতে উদ্দীপিত করা
৩. গেমস এবং পাজল এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীদের একটি সামগ্রিক প্রমিত মানে উন্নীত করা
৪. শ্রেণীকক্ষের বাইরেও গণিত চর্চায় উদ্বুদ্ধ করা এবং গণিতকে তাদের জীবনের অবিচ্ছেদ্য অঙ্গ হিসাবে বিবেচনা করা
৫. গণিতের প্রতি শিক্ষার্থীদের আগ্রহ বৃদ্ধি, প্রয়োজনীয় সহায়তা এবং গণিতের জ্ঞানের বিকাশ সাধন করা
৬. গণিতে সৃজনশীল চিন্তা করতে উদ্দীপনা সৃষ্টি করা।

গণিত ক্লাবের একটিভিটি

১. গণিত পাজল, ক্রসওয়ার্ড পাজল, কৌতূক, কৌশলগত প্রশ্ন
২. গণিত গেম, একটি চতুর্ভুজের কৌণিক দূরত্ব পরিমাপ
৩. গুণের সহজ পদ্ধতি, ম্যাজিক বর্গ, বিভিন্ন এককের পরিমাপ পদ্ধতি
৪. কম্পাস ব্যবহার, ক্যালকুলেটর ব্যবহার, বিভিন্ন হিসাব
৫. বিভিন্ন পদ্ধতি বা ধারণা ব্যবহার করে নদীর প্রস্থ অনুসন্ধান
৬. সদৃস ত্রিভুজের ধারণা ব্যবহার করে প্রকৃত উচ্চতা খুঁজে বের করা
৭. পরিমাপ স্কেল ব্যবহার করে বা না করে দৈর্ঘ্য খুঁজে বের করা (হাত স্প্যান, হাত ও পায়ের ব্যবহার)
৮. সেক্সট্যান্ট ব্যবহার করে উচ্চতা এবং দূরত্ব খুঁজা।

গণিত গবেষণাগার

গণিত গবেষণাগার এমন একটি স্থান যেখানে শিক্ষার্থীরা গভীর মনোযোগ সহকারে বিভিন্ন ধারণা পরীক্ষা-নিরীক্ষা এবং অনুসন্ধান করতে পারে। গণিতের ব্যবহারিক কাজগুলোর জন্য গণিত ল্যাবরেটরি ব্যবহার করা হয়। এখানে শিক্ষার্থীরা অনানুষ্ঠানিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে গণিতকে উপভোগ করে। এটি একটি জায়গা যেখানে কেউ একটি উত্তর পেতে সমস্যা তৈরি করতে পারেন এবং তা সমাধানের প্রচেষ্টা করতে পারেন। এটি একটি সুসজ্জিত কক্ষ যেখানে শিক্ষার্থী ও শিক্ষক গেম, পাজল এবং অন্যান্য শিক্ষণ ও শিখনের বহু উপাদানের বা উপকরণের একটি সংগ্রহ খুঁজে পেতে পারেন। উপকরণ বলতে সেই সমস্ত বাস্তব ও মূর্ত উপাদানগুলোকে বোঝায় যা শিক্ষক এবং শিক্ষার্থী উভয়ে গণিতে সার্বিক অনুসন্ধান, আবিষ্কার, বিষয়বস্তু শিখতে এবং গণিত বিষয়ে আগ্রহ তৈরি করতে ব্যবহার করবেন। শিক্ষার্থীরা বা অন্য যে ব্যক্তি যারা অনুসন্ধান করতে চান, নিজের গণিতের জ্ঞান বা ধারণা বা বিশ্বাসকে পরখ করে দেখতে চান তারা গণিত ল্যাবরেটরিতে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করতে বিশেষভাবে আগ্রহী হয়ে উঠেন।

গণিত ল্যাবের সকল ক্রিয়াকলাপ বিভিন্ন বিষয়ের ও বিভিন্ন শ্রেণির শিক্ষার্থীদের এবং বিভিন্ন গাণিতিক দক্ষতার জন্য আকর্ষণীয় হতে হবে। প্রাথমিকভাবে অংশগ্রহণকারী শিক্ষার্থীদের গণিতের প্রতি আবেদনের মাত্রা বিস্তৃত হলেও পরে বয়সভেদে তা ভিন্ন হতে পারে। গণিত ল্যাবরেটরি শিক্ষার্থীদের জন্য গণিতকে আবিষ্কার করার সুযোগ করে দেয়। গাণিতিক সত্য প্রমাণের ভিত্তিতে শুধুমাত্র গৃহীত হয়, পরীক্ষার মাধ্যমে নয়। গণিত ল্যাবরেটরির আকার শিক্ষার্থী অনুপাতে হবে। তবে সাধারণত তা গণিত কক্ষের দ্বিগুণ হয়। এতে জ্যামিতি বাক্স, টেপ, মিটার স্কেল, টেনগ্রাম, চার্ট, মডেল, ছুরি, কাঁচি, ব্লেড, আঠা, সিরিস কাগজ, সূতা, দড়ি, কম্পিউটার, বাটালি, ব্লক, হাতুড়ি, করাত, গেমস, এ্যাপস, সূঁচ, কাঠ, এ্যাবাকাস, ক্যালকুলেটর, ব্যারোমিটার, রবার ব্যান্ড, বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক টেবিল, পিচবোর্ড, মাস্কিন টেপ, পোস্টার, মার্কার, হোয়াইট বোর্ড, আর্ট পেপার, ফ্লানেল বোর্ড, বুলেটিন বোর্ড, আলমারি, মাল্টিমিডিয়া প্রজেক্টর, থার্মোমিটার, কক সিট, প্রয়োজনীয় উপকরণ, ড্রয়ার, টেক্সট্‌বই, রেফারেন্স বই, জরিপের যন্ত্রপাতি ইত্যাদি থাকবে।

গণিত কক্ষ

শ্রেণিকক্ষ একটি শিখন-শেখানো কক্ষ যেখানে শিক্ষার্থীরা বিষয় সংশ্লিষ্ট জ্ঞান অর্জন করে থাকে। শ্রেণিকক্ষ বিদ্যালয় বা কলেজের বা বিশ্ববিদ্যালয়ের এমন একটি কক্ষ যেখানে একদল শিক্ষার্থী একটি নির্দিষ্ট বিষয়ের সুনির্দিষ্ট বিষয়বস্তু শিখে থাকে। শিক্ষকের তত্ত্বাবধানে পরিচালিত গণিত বিষয় অধ্যয়ন করার জন্য প্রতিদিন নির্ধারিত সময়ে অনুষ্ঠিত নির্দিষ্ট শ্রেণির একদল শিক্ষার্থীদের জন্য নির্ধারিত কক্ষই হলো গণিত কক্ষ।শিক্ষার্থীদের গণিত বিষয়ে শিক্ষাক্রমের আলোকে মূল পাঠটি দেয়া হয় মূলত গণিত কক্ষে। শিক্ষার্থীরা গণিতের সমৃদ্ধ তথ্য উপাত্ত গণিত শ্রেণিকক্ষ থেকে পেয়ে থাকে। শিক্ষার্থীদের গণিত শিক্ষার সর্বোচ্চ অর্জন হয় গণিত কক্ষে। একটি গণিত কক্ষে শিক্ষক গণিত শ্রেণি কার্যক্রম চালিয়ে থাকেন, গণিতের গুরুত্বপূর্ণ তথ্য দিয়ে থাকেন, বিভিন্ন প্রকার গাঠনিক মূল্যায়ন পরিচালনা করেন, বিভিন্ন প্রকার কাজ দিয়ে তা আদায় করেন ইত্যাদি বহুবিধ কাজ গণিত কক্ষে অনুষ্ঠিত হয়। তাই আমরা বলতে পারি যে, একটি গণিত কক্ষ একই সাথে গণিত শ্রেণিকক্ষ, গণিত উপকরণ কক্ষ, গণিত লাইব্রেরী ইত্যাদি।

শিক্ষার্থীদের বিদ্যালয় বা স্কুলে দিনের অনেকটা সময় কাটে। শিক্ষক-শিক্ষিকা ও সহপাঠী বন্ধুদের সঙ্গে ভাব-বিনিময় হয় আর কখনো খেলার ছলে হরেক বিষয় শিখে নেয় তারা। গণিত শ্রেণিকক্ষ বা ক্লাসরুমটা তাদের মনের মতো হওয়া চাই। তাই সেখানে সুন্দর পরিবেশ নিশ্চিত করতে পারলে পড়াশোনায় আনন্দের পাশাপাশি সাফল্যও পাওয়া যাবে। গণিত শ্রেণিকক্ষ সুন্দর করে সাজানো থাকলে এবং পড়াশোনার জায়গাটার বিন্যাস, নির্মাণকৌশল ও সাজসজ্জা ভাল থাকলে তা শিক্ষার্থীদের ওপর তাৎপর্যপূর্ণ প্রভাব ফেলে। গণিত শ্রেণিকক্ষের সুন্দর নকশা তৈরির ক্ষেত্রে তিনটি প্রভাবক বা বৈশিষ্ট্য গুরুত্বপূর্ণ যেমন স্বাতন্ত্র, উদ্দীপনা ও স্বাভাবিকতা। শিক্ষার্থীদের মস্তিষ্ক বা মন সুন্দর প্রাকৃতিক পরিবেশে স্বভাবতই ভালো কাজ করে সে হিসাবে গণিত শ্রেণিকক্ষটাই একটা জগতের সমতুল্য।

গণিত শ্রেণিকক্ষের সামগ্রিক পরিবেশ বা রূপটাকে উদ্দীপনার উৎস হিসেবে তৈরি করতে হবে। গণিত কক্ষ হবে গণিত রিসোর্সে ভরা সমৃদ্ধ একটি কক্ষ। গণিত শিক্ষাক্রমের সাথে সঙ্গতি রেখে শিক্ষাক্রমের আলোকে সকল প্রকার তথ্যের একটি সমৃদ্ধ ভান্ডার হলো গণিত কক্ষ। গণিতের এই রিসোর্স যথাযথভাবে ব্যবহার করার জন্য প্রয়োজন শিখন-শেখানো কলাকৌশল জানা একজন দক্ষ প্রশিক্ষণ প্রাপ্ত শিক্ষক। ঐতিহ্যগতভাবে, একটি গণিত শ্রেণিকক্ষে একটি ব্ল্যাকবোর্ড, চক, ডাস্টার, চেয়ার, টেবিল এগুলো ছিল। বর্তমানে একটি আধুনিক গণিত কক্ষে থাকবে একটি হোয়াইটবোর্ড বা ইন্টারেক্টিভ বোর্ড, পুশপিন বোর্ড, প্রদর্শনী বোর্ড/ডিসপ্লে বোর্ড, ফ্লিপচার্ট, পোস্টার পেপার, চার পাশে পোস্টার ঝুলানোর ব্যবস্থা, পাঠ্যপুস্তক, রেফারেন্স বই, জার্নাল, গণিত পত্রিকা, বই রাখার জন্য দুইপাশে দেয়াল সমান তাক, কম্পিউটার,সূত্রের চার্ট, বিভিন্ন গণিতবিদগণের ছবি ও অন্যান্য ছবি, মানচিত্র, জ্যামিতি বক্স, মডেল, পেন্সিল, মনোগ্রাম এবং মাল্টিমিডিয়া প্রজেক্টর, জিওবোর্ড, ট্যানগ্রাম, এ্যালজেবরা টাইলস, ব্লক, ইন্টারনেট, বিভিন্ন প্রকার কাঠামো, গেম, অফলাইন ও অনলাইন সফটওয়্যার, গাণিতিক পাজল্ ইত্যাদি।

জাতীয় শিক্ষানীতি ২০১০ অনুসারে শিক্ষক-শিক্ষার্থীর অনুপাত ১ : ৩০। সে হিসাবে গণিত কক্ষে শিক্ষকের পাশাপাশি ৩০ জন গণিত ক্লাসের শিক্ষার্থী বসার ব্যবস্থা থাকবে। শ্রেণিকক্ষের নকশার মধ্যে ছাত্রছাত্রীর জন্য বসার ব্যবস্থা অনুসরণ করে ক্লাসের সাজসজ্জা এবং ডিজাইনের জন্য ডেস্ক ব্যবস্থা অপরিহার্য। টেবিলগুলো হওয়া উচিত ট্রাপিজিয়াম আকৃতির এবং শিক্ষার্থীরা যাতে বই ও ব্যাগ রাখতে পারে সে ব্যবস্থা থাকতে হবে। শিক্ষার্থীদের বসার জন্য দুইটি ট্রাপিজিয়াম টেবিল একত্রে একটি ৪-৬ জন শিক্ষার্থীর বৃত্তাকারে বসার সুযোগ সৃষ্টি হয়। আবার এই ট্রাপিজিয়াম টেবিলগুলো দিয়ে "U" আকৃতির বসার ব্যবস্থা খুব সহজে করা যায়। শিক্ষার্থীদের বসার চেয়ার ও টেবিলগুলো রঙ্গীন হলে ভালো হয়।

শ্রেণিকক্ষটিতে পর্যাপ্ত প্রাকৃতিক আলো-বাতাসের এবং তাপমাত্রার ব্যবস্থা থাকতে হবে। শিক্ষক ও শিক্ষার্থীদের সহজে শ্রেণিতে মুভমেন্ট করার প্রয়োজনীয় জায়গা থাকতে হবে। ৩০ জন শিক্ষার্থী নিয়ে ন্যূনতম মান বজায় রেখে শিখন-শেখানো কার্যক্রম পরিচালনার জন্য কমপক্ষে ২৫০ বর্গফুট মাপের একটি শ্রেণিকক্ষের প্রয়োজন।পর্যাপ্ত শিক্ষা উপকরণ দ্বারা সুসজ্জিত শ্রেণি কক্ষ যাতে ভ্যান্টিলেশনের এবং প্রয়োজনে পানীয় জলের ব্যবস্থাও থাকবে। এছাড়া আসবাবপত্র ও ফার্নিচারগুলো যাতে সহজে নাড়াছাড়া করা যায় তার জন্যও পর্যাপ্ত জায়গা থাকতে হবে। বিভিন্ন ধরনের শ্রেণির কাজ করানো, ওয়ার্কিং ওয়ালের কাজগুলো করানোর মত জায়গা থাকবে। দেয়াল থেকে শুরু করে আসবাব ও অন্যান্য উপকরণ হবে আকর্ষণীয় ও মনোমুগ্ধকর।

আমাদের দেশে গণিত শিক্ষার্থীরা গণিত বিষয়কে ভয়ের বিষয় হিসাবে দেখে। তাই সঠিকভাবে গণিত শিক্ষার দেয়ার জন্য একজন শিক্ষককে অধিকতর সদয় ও মানবিক হওয়া উচিত। শিক্ষার্থীরা ভুল করবে এটাই স্বাভাবিক। কিভাবে বার বার চর্চার মাধ্যমে এসকল ভুল থেকে সঠিকভাবে গণিত শেখা যায় শিক্ষক সেদিকে জোর দিবেন। গাণিতিক সমস্যা সমাধানে শিক্ষার্থীদের

আত্মবিশ্বাসী হতে উৎসাহিত করার জন্য শিক্ষককে ইতিবাচক দৃষ্টিভঙ্গি পোষণ করতে হবে এবং গণিত কক্ষে উৎসাহ সৃষ্টিকারী শারীরিক অঙ্গভঙ্গী বা ভাষা ব্যবহার করতে হবে। ভাষা দক্ষতার চারটি উপাদানঃ বল, শ্রবণ, পড়া এবং লেখা। মিথস্ক্রিয়া আসলে গণিত শ্রেণীকক্ষের হৃদস্পন্দন। যখন শিক্ষার্থীরা ঐ শিক্ষায় সক্রিয়ভাবে অংশগ্রহণ করছে তখন গণিত ভাল শিখেছে।

গণিত প্রদর্শনী

সাধারণ অর্থে প্রদর্শনী হলো একটি সংগঠিত উপস্থাপনা এবং তৈরিকৃত কিছু প্রদর্শন করা হয়। আমরা সাধারণত প্রদর্শনী বলতে জাদুঘর, গ্যালারি, ছোট গ্যালারী, ব্যাখ্যামূলক প্রদর্শনী, প্রাকৃতিক ইতিহাসের যাদুঘর, বাণিজ্যিকভাবে উল্লেখযোগ্য প্রদর্শনী , বাণিজ্য মেলা ইত্যাদি প্রদর্শনীগুলো বুঝে থাকি। শিক্ষায় প্রদর্শনী বলতে বোঝায়-শিক্ষার্থীরা যা শিখেছে তা প্রদর্শন বা প্রকল্পের মাধ্যমে উপস্থাপন করা। প্রদর্শনী সাধারণত একটি শেখার অভিজ্ঞতা এবং একাডেমিক অগ্রগতি ও কৃতিত্ব মূল্যায়নের একটি উপায়। কর্মপত্র, কুইজ, পরীক্ষা এবং মূল্যায়নের অন্যান্য প্রথাগত কৌশলের বিপরীতে একটি প্রদর্শনী প্রতিষ্ঠানে বিভিন্ন ধরনের আকার নিতে পারে, যেমন- মৌখিক উপস্থাপনা, বক্তৃতা, ভিডিও ডকুমেন্টারি, মাল্টিমিডিয়া উপস্থাপনা, অডিও রেকর্ডিং বা পডকাস্ট শিল্পকর্ম, দৃষ্টান্ত, সঙ্গীত, নাটক, নাচ, ওয়েবসাইট বা অনলাইন প্রকাশনা, রচনা, কবিতা, ছোট গল্প, প্রিন্ট বা ডিজিটাল ফটোগ্রাফির গ্যালারি, বৈজ্ঞানিক পরীক্ষা, গবেষণা এবং রিপোর্ট, বিভিন্ন মডেল, ভাস্কর্য, প্রকল্প ইত্যাদি।

বিদ্যালয় বিভিন্ন ধরনের শিক্ষাগত এবং নির্দেশনামূলক কৌশলগুলির অংশ হিসাবে প্রদর্শনী ব্যবহার করতে পারে, যেমন সম্প্রদায় ভিত্তিক শিক্ষা, প্রকল্প-ভিত্তিক শিক্ষা, অথবা দক্ষতা-ভিত্তিক শিক্ষা ইত্যাদি। বিষয়বস্তু এবং কার্য সম্পাদনেরক্ষেত্রেএকেকটি প্রদর্শনী একেক রকম হতে পারে। তবে শিক্ষার্থীদের দ্বারা প্রস্তুতকৃত প্রদর্শনী প্রদর্শনের সময় মূল্যায়ন প্রক্রিয়ার ধারাবাহিকতা বজায় রাখাতে হয়। একটি সাধারণ সেট মানদন্ডের ভিত্তিতে মূল্যায়ন করা হয়। কোনো নির্দিষ্ট বিষয় সংশ্লিষ্ট কাজের, পাঠ্য বিষয়ের, প্রকল্প বা কোর্সের জন্য শিক্ষার্থীরা কীভাবে প্রত্যাশিত শেখার মান অর্জন করেছে তা পরখ করা হয়।

প্রদর্শনী একজন শিক্ষক বা শিক্ষক পেনেল দ্বারা মূল্যায়ন করা যেতে পারে, কিন্তু কিছু ক্ষেত্রে বাইরের বিশেষজ্ঞদের দ্বারা পর্যালোচনা প্যানেল গঠন করা যেতে পারে। শিক্ষার্থীরা যা শিখেছে এবং তৈরি করেছে তার উপর একটি আনুষ্ঠানিক প্রতিচ্ছবি প্রদান করতে বলা যেতে পারে যেগুলো প্রত্যাশিত বা আত্মনির্ভরশীলভাবে শেখার লক্ষ্যে তারা কতটা ভালভাবে করেছেন তা বর্ণনা করে।প্রদর্শনীগুলো সাধারণত শিক্ষার্থীদেরকে সমালোচনামূলক চিন্তা করতে, চ্যালেঞ্জিং সমস্যার সমাধান করতে, বিষয়ভিত্তিক দক্ষতা অনুশীলন করতে এবং মৌখিক যোগাযোগ, জনসচেতনতা, গবেষণা, দলবদ্ধ কাজ, পরিকল্পনা, স্বয়ংসম্পূর্ণতা, লক্ষ্যস্থল, প্রযুক্তিগত এবং অনলাইন শিক্ষার দক্ষতা অর্জনের জন্য উৎসাহিত করতে সাহায্য করে। প্রদর্শনীগুলো অন্তর্বর্তীকালীন হতে পারে, এই অর্থে যে শিক্ষকগণশিক্ষার্থীদের দক্ষতা প্রয়োগ করতে বা জ্ঞানমূলক ডোমেন জুড়ে বিষয়গুলো পরীক্ষা করতে চান। গণিত প্রদর্শনী বলতে বোঝায়-শিক্ষার্থীরা গণিত বিষয়ে যা শিখেছে তা বিভিন্নভাবে প্রদর্শন বা প্রকল্পের মাধ্যমে উপস্থাপনকরা।

গণিত প্রদর্শনীর উদ্দেশ্য

ক) গাণিতিক জ্ঞানের মূর্ত বা বাস্তব প্রয়োগ

খ) গাণিতিক জ্ঞান ও দক্ষতার প্রয়োগ

গ) শিক্ষার্থীদের গণিত ভীতি দূর করে গণিতের প্রতি আগ্রহ সৃষ্টি

ঘ) শ্রেণিকক্ষের বাহিরে গণিত চর্চার ক্ষেত্র সৃষ্টি

ঙ) মডেল তৈরি ও ব্যাখ্যা করার দক্ষতা অর্জন

চ) গণিতের সাথে অন্যান্য বিষয়ের সম্পর্ক তৈরি

ছ) বিদ্যালয়ের সাথে সমাজের যোগাযোগ স্থাপন এবং গণিতকে সবার মাঝে ছড়িয়ে দেয়া

জ) গণিতের অন্তর্নিহিত মূল্যবোধ সৃষ্টি।

শিক্ষক প্রতিনিয়ত শিক্ষার্থীদের গণিত সংক্রান্ত বিভিন্ন তথ্য, সূত্র, অনুসিদ্ধান্ত, গাণিতিক সমস্যার সমাধান ইত্যাদি শিখিয়ে থাকেন। পাশাপাশি বিভিন্নভাবে এ অর্জিত জ্ঞানকে মূল্যায়ন করে থাকেন। গণিত বিষয়ের অর্জিত জ্ঞান ও দক্ষতা শিক্ষার্থীরা কতটুকু সুচারু রুপে বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে পারে তা যাচাই করার জন্য গণিত প্রদর্শনী একটি উল্লেখযোগ্য ক্ষেত্র হিসাবে বিবেচিত। গণিত প্রদর্শনীর সাহায্যে শিক্ষক অর্জিত গাণিতিক জ্ঞানের প্রায়োগিক দিকগুলো মূল্যায়ন করতে পারেন।

বছরে কমপক্ষে একবার গণিত প্রদর্শনীর আয়োজন করা উচিত। বছরের শেষের দিকে গণিত প্রদর্শনী আয়োজন করলে ভাল হয়। গণিত প্রদর্শনীর মূলত ৫টি ধাপ রয়েছে, সেগুলো হল- পরিকল্পনা, কার্যবন্টন, সম্পাদন, মূল্যায়ন, ফলাবর্তন। পরিকল্পনার মধ্যে রয়েছে কয়েকটি ধাপ যেমন- গণিত প্রদর্শনীর উদ্দেশ্য, বিষয়বস্তু সম্পর্কে নির্দেশনা, আমন্ত্রণ, মূল্যায়ন নির্দেশিকা তৈরি,

প্রদর্শনীর বিশেষ আকর্ষণ বা সুবিধা, বাজেট প্রণয়ন, স্থান ও সময় নির্ধারণ। নিজ প্রতিষ্ঠান ছাড়াও নিকটবর্তী অন্যান্য প্রতিষ্ঠানকে গণিত প্রদর্শনীতে অংশগ্রহণ করালে প্রদর্শনীর আকর্ষণ অনেকগুণ বাড়ে। গণিত প্রদর্শনীতে শিক্ষক গাণিতিক জ্ঞান, দক্ষতা ও দৃষ্টিভঙ্গী যাচাইয়ের জন্য যে সকল কাজ দিতে পারেন-

- বিভিন্ন মডেল তৈরি ও ব্যাখ্যা
- বীজগণিতীয় রাশির জ্যামিতিক মডেল তৈরি ও ব্যাখ্যা
- গ্রাফিং ক্যালকুলেটরের সাহায্যে বিভিন্ন ধরণের গ্রাফের জন্য বীজগণিতীয় রাশি অংকন
- একই আয়তক্ষেত্রের দৈঘ্য ও প্রস্থ দ্বারা তৈরিকৃত দুইটি সিলিন্ডারের মধ্যে আয়তনের সম্পর্ক নির্ণয় ও ব্যাখ্যা
- একটি সিলিন্ডার ও একটি কোনকের উচ্চতা একই হলে দুই আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় ও ব্যাখ্যা
- বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের সম্পর্ক নির্ণয়
- সূত্রের মডেল তৈরি ও ব্যাখ্যা
- কিছু প্রাকৃতিক ঘটনার গাণিতিক ব্যাখ্যা
- বিভিন্ন অনুসন্ধানমূলক কাজ ইত্যাদি।

কাজ: গণিত প্রদর্শনীর একটি পরিকল্পনা তৈরি করুন।

১০.২ গণিত অলিম্পিয়াড; গণিতে ধাঁধা, যুক্তিমূলক ও প্যাটার্ন গেম;TIMSS

বর্তমানে বিশ্বব্যাপী শিক্ষার্থীদের মধ্যে বিভিন্ন বিষয়ে মেধাভিত্তিক প্রতিযোগিতা অনুষ্ঠিত হয়। তার মধ্যে রয়েছে আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড (IMO),আন্তর্জাতিক বিজ্ঞান অলিম্পিয়াড, ইনফরম্যাটিক্স অলিম্পিয়াড, আন্তর্জাতিক ফিজিক্স অলিম্পিয়াড, আন্তর্জাতিক বায়োলজি অলিম্পিয়াড ইত্যাদি। এ ধরনের মেধাভিত্তিক প্রতিযোগিতার মাধ্যমে বিশ্বের বিভিন্ন দেশের শিক্ষার্থীদের মধ্যে সহযোগিতামূলক শিখন এবং পরিচিতির সুযোগ সম্ভব হয়।

গণিত অলিম্পিয়াড

আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড (IMO) হল বিশ্বের সবচেয়ে বড় এবং মর্যাদাপূর্ণ মেধার প্রতিযোগিতা যেখানে শুধুমাত্র হাইস্কুলের শিক্ষার্থীরা অংশগ্রহণ করে। ইউনিভার্সিটিতে ভর্তি হলেই সে শিক্ষার্থী আর এই প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করতে পারবে না। প্রথম IMO রুমানিয়ায় ১৯৫৯ সালে অনুষ্ঠিত হয়েছিল এবং সেখানে মাত্র ৭টি দেশ অংশগ্রহণ করেছিল। সেই থেকে ধীরে ধীরে সম্প্রসারিত হয়ে বর্তমানে প্রায় ১০০ দেশ এই প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করে। ১৯৮০ সাল ব্যতীত প্রতি বছর ভিন্ন ভিন্ন দেশে এই প্রতিযোগিতা অনুষ্ঠিত হচ্ছে। প্রতি দেশ সর্বাধিক ৬জন প্রতিযোগী, ১জন টিম লিডার, ১জন ডেপুটি লিডার এবং ১জন অবজারভার নিয়ে টিম গঠন করে IMO-তে পাঠায়। বাংলাদেশ ২০০৫ সালে ৬জন প্রতিযোগী, ১জন টিম লিডার, ১জন ডেপুটি লিডার নিয়ে টিম গঠন করে প্রথমবারের মত IMO- তে অংশগ্রহণ করে। এবং তখন ৯১টি দেশের মধ্যে বাংলাদেশের অবস্থান ছিল ৮৫তম। আর ২০১৭ সালে IMO- তে বিশ্বের মাঝে আমাদের অবস্থান ২৬তম। ২০০৬ সাল থেকেই বাংলাদেশ ‘Honourable Mansion' পেয়ে আসছে। ২০০৯ সালে ২টি ব্রোঞ্জ মেডেল এবং ২০১২সাল থেকে সিলভার মেডেল অর্জনের মাধ্যমে বাংলাদেশ এখন দক্ষিণ এশিয়ায় শীর্ষে অবস্থান করছে।

আইএমও পরীক্ষার প্রশ্নপত্রে মোট ছয়টি গাণিতিক সমস্যা দেওয়া থাকে। প্রত্যেকটি সমস্যায় ৭ করে মোট স্কোর হল ৪২। পরীক্ষায় ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যায় না। পর পর দুইদিন এই পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়। প্রথম দিন ৩টি এবং পরের দিন ৩টি গাণিতিক সমস্যা দেওয়া থাকে। তিনটি সমস্যা সমাধানের জন্য প্রতিযোগীরা প্রতিদিন সাড়ে ৪ ঘন্টা সময় পায়। গাণিতিক সমস্যাগুলো হাই স্কুল ম্যাথমেটিকস এর বিভিন্ন এরিয়া থেকে নির্বাচন করা হয়। সাধারণত জিওমেট্রি, নাম্বার থিওরি, আলজাবরা ও কম্বিনেটরিকস থেকে গাণিতিক সমস্যাগুলো নির্বাচন করা হয়ে থাকে। শিক্ষার্থী যে কোন একটি সমস্যা সম্পূর্ণ সমাধান করতে পারলে অনারেবল ম্যানশন পায় এবং নম্বরের স্কোরের উপর ভিত্তি করে ব্রোঞ্জ, সিলভার বা গোল্ড মেডেল পায়।

বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড (BDMO)

বাংলাদেশের শিক্ষার্থীদের গাণিতিক মেধার উৎকর্ষ সাধন এবং দেশের শিক্ষার্থীদের আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াডে প্রেরণের ব্যবস্থা গ্রহণ- এই দুইউদ্দেশ্যকে সামনে রেখে বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কার্যক্রমের সূচনা। ২০০১ সালের ১৭জুন প্রথম আলো পত্রিকায় বিজ্ঞান বিষয়ক সাপ্তাহিক আয়োজন বিজ্ঞান প্রজন্ম পাতায় আনুষ্ঠানিক ভাবে শুরু হয় নিউরণে অনুরণন-প্রথমআলো রেডিক্যাশ গণিত অলিম্পিয়াড।

অধ্যাপক ডঃ মুহাম্মদ জাফর ইকবাল, অধ্যাপক ডঃ মোহাম্মদ কায়কোবাদ নিউরনে অনুরণন পরিচালনার দায়িত্ব নেন। সামগ্রিক তত্বাবধানের দায়িত্বে থাকেন মুনির হাসান। সেই থেকে প্রথমআলোর বিজ্ঞান প্রজন্ম পাতায় প্রতি সপ্তাহে ৫টি করে গণিতের সমস্যা ছাপা হয়। সমস্যাগুলোর সঠিক সমাধান কখনো প্রকাশ করা হয় না। ইতিমধ্যে এ কার্যক্রমে প্রকাশিত ৪০০টি গাণিতিক সমস্যা পুস্তিকা আকারে প্রকাশিত হয়েছে। এই পর্যায়ে কিছুটা বিকাশের পর ২০০২ সালে ঢাকা, নারায়নগঞ্জ ও রাজবাড়ি জেলাতে আঞ্চলিক গণিত অলিম্পিয়াডের আয়োজন করা হয়। ২০০৩ সালের ৩১ জানুয়ারি ও ১ ফেব্রুয়ারি সিলেট শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয় ক্যাম্পাসে প্রথম জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড অনুষ্ঠিত হয়।

বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড শুধুমাত্র পরীক্ষা দেওয়ার প্রতিযোগিতা নয়, এখানে গণিতকে উপভোগ করার জন্য আরো অনেক আয়োজন থাকে। তাই এর নাম দেওয়া হয় গণিত উৎসব। আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াডে কেবল প্রাকবিশ্ববিদ্যালয় পর্যায়ের একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণির শিক্ষার্থীরা অন্তর্ভুক্ত। কিন্তু বাংলাদেশে গণিতকে জনপ্রিয় করার জন্য প্রাইমারি (৩য় থেকে ৫ম), জুনিয়র (৬ষ্ঠ থেকে ৮ম), সেকেন্ডারি (৯ম ও ১০ম) এবং হায়ার সেকেন্ডারি(একাদশ ও দ্বাদশ)- এই চারটি ক্যাটাগরিতে গণিত উৎসবে পরীক্ষা নেওয়া হয়।

বর্তমানে সারা দেশকে বেশ কয়েকটি জোনে ভাগ করে আঞ্চলিক গণিত উৎসব অনুষ্ঠিত হয়। আঞ্চলিক গণিত উৎসব থেকে নির্বাচিত প্রার্থীদের নিয়ে ঢাকায় দুই দিন ব্যাপী জাতীয় গণিত উৎসব পরিচালিত হয়। জাতীয় গণিত উৎসবে নির্বাচিত সেকেন্ডারি ও হায়ার সেকেন্ডারি গ্রুপের মধ্য থেকে কিছু শিক্ষার্থীকে জাতীয় গণিত ক্যাম্পের জন্য নির্বাচন করা হয়। সে ক্যাম্প থেকে মেধার ভিত্তিতে ৬জন নির্বাচন করে আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াডে পাঠানো হয়। https://www.imo-official.org/, www.matholympiad.org.bd

গণিতে ধাঁধা, যুক্তিমূলক ও প্যাটার্ন গেম

গণিতে ধাঁধাঁ ও গেম শিক্ষার্থীর মানসিক বিকাশে সহায়তা করে। তাদের মৌলিক ও যৌক্তিক চিন্তার বিকাশ সাধনে বিভিন্ন ধাঁধাঁ, গেম, পাজল ইত্যাদি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখে। শিক্ষার্থীকে আগ্রহী ও সক্রিয়তার মাধ্যমে তাদের চিন্তন দক্ষতা সহজেই বৃদ্ধি করা সম্ভব। গাণিতিক ওয়েব সাইটে অনেক গাণিতিক গেম রয়েছে। এ ছাড়া শুধুমাত্র কাগজ ব্যবহার করে ও নিচের ছবিগুলোর মত করে গাণিতিক চ্যালেঞ্জ, পাজল, গেইম ইত্যাদি ব্যবহার করা যায়।

নিচে কিছু গাণিতিক ধাঁধাঁ ও পাজল দেওয়া হল:

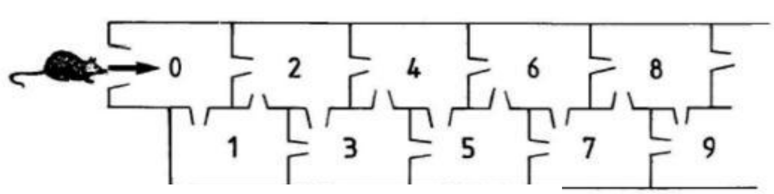
১. আকাশে এক ঝাঁক পাখিউড়ে যাচ্ছে। একজন পাখিদের কাছে কত সংখ্যক পাখি উড়ছে তা জানতে চাইছেন। পাখিরা উত্তরে বলছে,

আছি যত আরো তত
তার আধা তার পাই
তোমায় নিয়ে শত পুরাই।
তাহলে পাখির সংখ্যা কত?

২.

গাণিতিক পাজল বক্স

একটি ইঁদুর ছোট সংখ্যার একটি বক্সে প্রবেশ করে যাত্রা শুরু করে

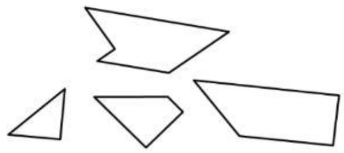


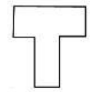
কয়টি পথ ব্যবহার করে ইঁদুরটি12 নং বক্সে পৌঁছাবে?

৩.

চার টুকরার পাজল

নিচের কাগজ চারটি সংযুক্ত করে ক্যাপিট্যাল লেটার T তৈরি কর





৪.

নিচের চারটি খন্ড ব্যবহার করে-

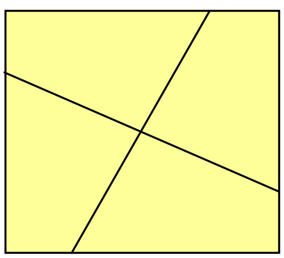
১. একটি বর্গ তৈরি করুন

২. একটি বর্গ তৈরি করুন যেন, কেন্দ্রে একটি বর্গাকার ফাঁকা স্থান থাকে

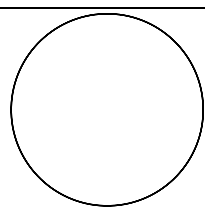
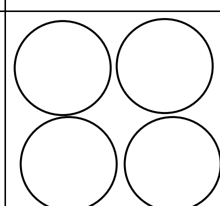
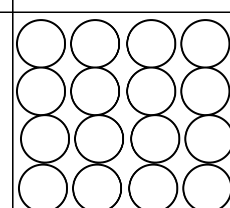
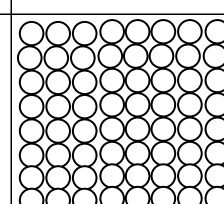
৩. একটি আয়ত তৈরি করুন যেন, কেন্দ্রে একটি আয়তাকার ফাঁকা স্থান থাকে

তিনটি খন্ড ব্যবহার করেঃ

৪. একটি ত্রিভুজ তৈরি করুন যেন, কেন্দ্রে একটি ত্রিভুজাকার ফাঁকা স্থান থাকে



৫.

	চিত্র ১	চিত্র ২	চিত্র ৪	চিত্র ৫
				
বৃত্ত সংখ্যা	১	৪	১৬	৬৪
প্রত্যেক বৃত্তের ব্যসার্ধ	১ ইঞ্চি	১/২ ইঞ্চি	১/৪ ইঞ্চি	১/৮ ইঞ্চি

১) চিত্র ৫ এ বৃত্তের সংখ্যা কত? কিভাবে উত্তর পেলে দেখাও বা ব্যাখ্যা কর।

২) চিত্র ৫ এ বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত? কিভাবে উত্তর পেলে দেখাও বা ব্যাখ্যা কর।

৩) চিত্র ৬ এর বৃত্ত সংখ্যা এবং চিত্র ৭ এর বৃত্ত সংখ্যার অনুপাত কত? কিভাবে উত্তর পেলে দেখাও বা ব্যাখ্যা কর।

৪) চিত্র n এর বৃত্ত সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য ব্যবহৃত হতে পারে এমন একটি বীজগণিতীয় সূত্র লিখ।

৫) চিত্র n এর বৃত্তের ব্যাস (ইঞ্চিতে) নির্ণয়ের জন্য ব্যবহৃত হতে পারে এমন একটি বীজগণিতীয় সূত্র লিখ।

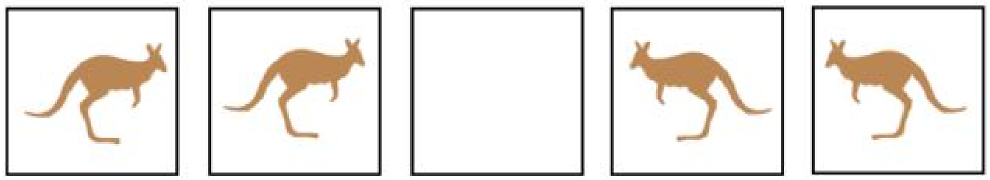
ক্যাঙ্গারুর লাফঃ

নিয়ম

প্রত্যেক খেলোয়ার তাদের দলের দিকে চলতে পারবে।

খেলোয়ার কেবল খালি ঘরে যেতে পারবে।

একজন অপর জনের উপর দিয়ে লাফ দিতে পারবে, কিন্তু কেবল একজনের উপর দিয়ে লাফ দিতে পারবে।



লক্ষ্য:

যথাসম্ভব কম সংখ্যক লাফে দুইটি দলের স্থান বদল করা।

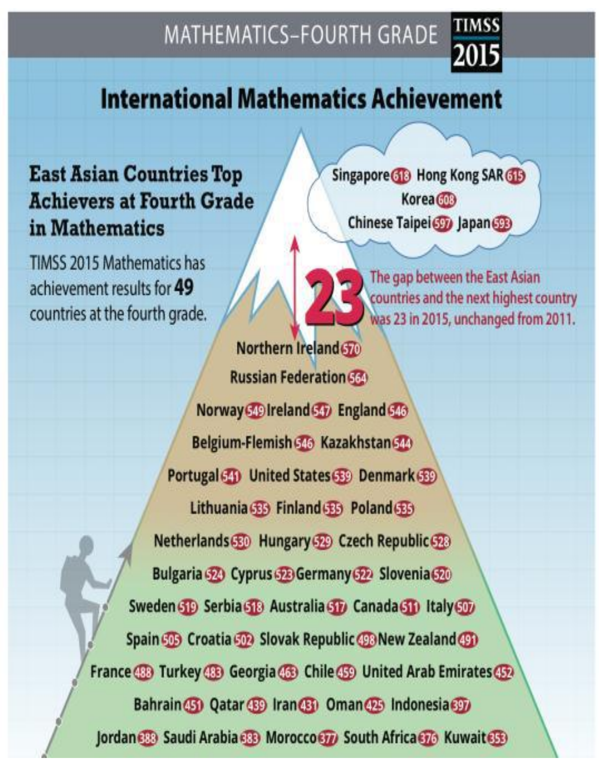
প্রশ্ন:

১. যদি প্রতি দলে ২ জন খেলোয়ার থাকে তবে ৮টি লাফের প্রয়োজন (যাচাই করে দেখতে পার); তাহলে প্রতি দলে ১০জন থাকলে কতটি লাফের প্রয়োজন? ৩০ বা ৪০ জন করে থাকলে কী হবে?
২. গণিতের সাথে এর কী সম্পর্ক ?
৩. শিক্ষাক্রমের কোথায় এর স্থান হতে পারে?
৪. আমরা কিভাবে তা ব্যবহার করতে পারি?

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study)

আন্তর্জাতিক গণিত ও বিজ্ঞান শিক্ষায় প্রবণতা

বিশ্বব্যাপি শিক্ষার্থীদের গণিত ও বিজ্ঞানের মেধা আন্তর্জাতিকভাবে যাচাই করা হয় GB Trends in International Mathematics and Science Study(TIMSS) এর মাধ্যমে। বিশ্বের বিভিন্ন দেশ এবং অঞ্চল থেকে শিক্ষার্থীরা এই মেধা যাচাই প্রক্রিয়ায় অংশগ্রহণ করে। বিভিন্ন শিক্ষা ব্যবস্থার প্রায় ৪৫০০ থেকে ৫০০০ শিক্ষার্থীকে এই প্রোগ্রামের মাধ্যমে মূল্যায়ন করা হয়। প্রশ্নপত্রের মাধ্যমে শিক্ষার্থী, তাদের শিক্ষক, প্রিন্সিপাল এবং তাদের পিতামাতার কাছ থেকে প্রাসঙ্গিক তথ্য সংগ্রহ করা হয়। TIMSS হল IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) দ্বারা প্রতিষ্ঠিত এক ধরনের গবেষণা, যার উদ্দেশ্য হচ্ছে সারা বিশ্বের শিক্ষার্থীর গণিত ও বিজ্ঞানের শিখন অর্জন যাচাই করে বিশ্বের বিভিন্ন শিক্ষা ব্যবস্থার মধ্যে তুলনার মাধ্যমে একটি ফলপ্রসূ ও আধুনিক শিক্ষা পলিসি ডিজাইন করা।



১৯৯৫ সালে প্রথম ৪১টি শিক্ষা ব্যবস্থার ৫টি শ্রেণির (৩য়, ৪র্থ, ৭ম, ৮ম এবং মাধ্যমিক স্তরের শেষ শ্রেণি) শিক্ষার্থীদের শিখন অর্জন যাচাই করা হয়েছিল। পরবর্তীতে ১৯৯৯ সালে

৩৮টি শিক্ষা ব্যবস্থায় কেবল ৮ম শ্রেণির উপর আলোকপাত করা হয়। সে বছরে ৪র্থ গ্রেডের জন্য কোন স্টাডি ছিল না। ২০০৩ সালে ২৬ টি শিক্ষা ব্যবস্থায় ৪র্থ গ্রেড এবং ৪৮টিতে ৮ম গ্রেড নিয়ে কাজ হয়। ২০০৭ সালে ৪৪টি শিক্ষা ব্যবস্থা ৪র্থ গ্রেড এবং ৫৭টি ৮ম গ্রেডের জন্য অংশগ্রহণ করে। টিআইএমএসএস ২০১১ তে ৪র্থ গ্রেডের জন্য অংশ গ্রহণকারী শিক্ষা ব্যবস্থা ছিল ৫২ এবং ৮ম গ্রেডের জন্য অংশগ্রহণকারী শিক্ষা ব্যবস্থা ছিল ৪৫। ২০১৫ সালে ৪র্থ ও ৮ম উভয় শ্রেণির শিক্ষার্থীর শিখন অর্জন যাচাই করা হয়েছিল। এই যাচাইয়ের মাধ্যমে কারিকুলাম নির্ভর পলিসি সম্পর্কিত তথ্য, টেকনোলজির ব্যবহার, শিক্ষকের প্রস্তুতি এবং ট্রেনিং অভিজ্ঞতা ইত্যাদির একটি চিত্র পাওয় যায়।

টিআইএমএসএস ২০১৫ এ ৫৭ টি দেশ জাতীয়ভাবে এবং ৭টি প্রখ্যাত সংস্থা থেকে প্রতিনিধিত্বকারী নমুনা শিক্ষার্থী ৪র্থ গ্রেডের, ৮ম গ্রেডের অথবা উভয় গ্রেডের মূল্যযাচাইয়ে অংশগ্রহণ করে।

কাজ: গাণিতিক চ্যালেঞ্জ, ধাঁধা ও গেম তৈরি করুন।

অনুশীলনী-১০

১। গণিত প্রদর্শনী আয়োজন করতে কি কি বিষয়ের প্রতি লক্ষ রাখা প্রয়োজন?

২। গণিত ক্লাব কী ? গণিত ক্লাবের সুবিধাগুলো উল্লেখ করুন।

৩। গণিত গবেষণাগার বলতে কী বোঝেন ? গণিত গবেষণাগার ব্যবহার করে শিক্ষার্থীরা কিভাবে উপকৃত হয় ?

৪। গণিত অলিম্পিয়াড শিক্ষার্থীর গণিতভীতি কমিয়ে দিচ্ছে- যুক্তির আলোকে আপনার মতামত ব্যাখ্যা করুন।

৫। TIMSS এর কার্য প্রক্রিয়া বর্ণনা করুন।

তথ্যসূত্র-১০

https://nces.ed.gov/timss/,https://en.wikipedia.org/wiki/Trends_in_International_Mathematics_and_Science_Study
https://www.mathlearningcenter.org/web-apps/pattern-shapes/
http://effectivecurriculumideas.weebly.com/integrating-ict-into-mathematics.html
http://effectivecurriculumideas.weebly.com/integrating-ict-into-mathematics.html
http://mathedu.hbcse.tifr.res.in/activities/

রেফারেন্স/ (সাধারণ)

আহমদ, মো: রমিজ উদ্দিন (২০১২), অধুনিক গণিত শিক্ষণ, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।

রহমান, মো: মুজিবুর (২০০৮), (পুনর্মুদ্রণ, এপ্রিল, ২০১০), শ্রেণি পাঠদানের আধুনিক পদ্ধতি ও কৌশল এবং শ্রেণি ব্যবস্থাপনা, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।

রহমান, মো: মুজিবুর (২০১১), (পুনর্মুদ্রণ, মার্চ, ২০১৪), মাধ্যমিক শিক্ষা, শিক্ষাক্রম ও শিশুর ক্রমবিকাশ, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।

শাহ্ , ড. ডি. এম. ফিরোজ (দ্বিতীয় প্রকাশ, ২০১৬), গণিত শিক্ষণ, মিতা ট্রেডার্স, বুকস এন্ড কম্পিউটার কমপ্লেক্স, ৩৮/৩, বাংলাবাজার,ঢাকা ।

ঘোষ, শৈলেন্দ্র কুমার (১৯৯৫), গণিত শিক্ষণ, সোমা বুক এজেন্সী, কলকাতা।

আলী, মুহম্মদ আন্ওয়ার (১৯৯৭), গণিত শিক্ষণ, বাংলা একাডেমি, ঢাকা।

ঢালী, স্বপন কুমার (২০০০), গণিত শিক্ষণ, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৪, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।

রায়, সুশীল (২০১৩), শিক্ষাতত্ত্ব ও শিক্ষাদর্শন, সোমা বুক এজেন্সী, কলকাতা।

বেগম, রাশিদা ও গিয়াসউদ্দিন আহমদ (২০০০), শিক্ষার ভিত্তি, মাধ্যমিক শিক্ষা উন্নয়ন প্রকল্প, শিক্ষা মন্ত্রণালয়, ঢাকা।

খান, মোঃ লুৎফর রহমান ও আব্দুল মালেক(২০০০), সামাজিক বিজ্ঞান শিক্ষণ, মাধ্যমিক শিক্ষা উন্নয়ন প্রকল্প, শিক্ষা মন্ত্রণালয়, ঢাকা।

মালেক, ড. আব্দুল ও অন্যান্য (ষষ্ঠ সংস্করণ,ফেব্রুয়ারি, ২০১৭), শিক্ষাবিজ্ঞান ও বাংলাদেশে শিক্ষা, র‍্যামন পাবলিশার্স, ২৬ বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০।

হোসেন, ড. শেখ আমজাদ (২০০৭), (পুনর্মুদ্রণ অক্টোবর, ২০০৮), শিখন, মূল্যযাচাই এবং প্রতিফলনমূলক অনুশীলন, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।

বানু সেলিনা ও অন্যান্য (২০০৮), মডিউল ১ ও ৩ সামাজিক বিজ্ঞান শিক্ষণ, টিচিং কোয়ালিটি ইমপ্রুভমেন্ট ইন সেকেন্ডারি এডুকেশন প্রজেক্ট, মাধ্যমিক ও উচ্চ শিক্ষা অধিদপ্তর, শিক্ষা মন্ত্রণালয়।

প্রশিক্ষণ ম্যানুয়াল (২০০৮), মাধ্যমিক গণিত, টিচিং কোয়ালিটি ইমপ্রুভমেন্ট ইন সেকেন্ডারি এডুকেশন প্রজেক্ট, মাধ্যমিক ও উচ্চ শিক্ষা অধিদপ্তর, শিক্ষা মন্ত্রণালয়।

উদ্দিন, ড. মোঃ মোহসীন ও অন্যান্য (২০০৮), গণিত শিক্ষণ, মডিউল ১ ও ৩ , টিচিং কোয়ালিটি ইমপ্রুভমেন্ট ইন সেকেন্ডারি এডুকেশন প্রজেক্ট, মাধ্যমিক ও উচ্চ শিক্ষা অধিদপ্তর, শিক্ষা মন্ত্রণালয়।

মণ্ডল, ড. অমূল্য চন্দ্র ও অন্যান্য (অক্টোবর-২০১৪), উচ্চতর গণিত,নবম দশম শ্রেণি,জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

এহসান, ড. মোঃ আবুল (১৯৯৭) , শিক্ষাক্রম উন্নয়ন : নীতি ও পদ্ধতি, ছাত্রবন্ধু লাইব্রেরি, ঢাকা।

হোসেন, ড. শেখ আমজাদ (২০০৯), আবশ্যকীয় শিক্ষণ দক্ষতা , প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।

রহমান, মোঃ মুজিবুর (২০০৫), (পুনর্মুদ্রণ, মার্চ, ২০০৮), শিক্ষার দার্শনিক সামাজিক ও মনস্তাত্ত্বিক ভিত্তি, প্রভাতী লাইব্রেরি, ৬৩, ইসলামিয়া মার্কেট, নীলক্ষেত, ঢাকা ।

আলী,মুহম্মদ আনওয়ার (১৯৯৮), গণিত শিক্ষাদান, , বাংলা একাডেমী, ঢাকা।

উদ্দিন,ড. মোঃ মোহসীন, আলী,মোঃ ইউনুছ, আল-মাহমুদ, আব্দুল্লাহ ও ঢালী,স্বপন কুমার (২০১০), গণিত শিক্ষণ মডিউল ১, টিচিং কোয়ালিটি ইম্প্রুভমেন্ট ইন সেকেন্ডারি এডুকেশন প্রজেক্ট, মধ্যমিক ও উচ্চ শিক্ষা অধিদপ্তর, শিক্ষা মন্ত্রণালয়।

হোসেন, কাজী মোতাহার, গণিতশাস্ত্রের ইতিহাস

আলী, ড. মোহাম্মদ আজহার ও বেগম, মিসেস হোসনে আরা, সফল শিক্ষক, শিক্ষা ও গবেষণা ইনস্টিটিউট, ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়।

চট্টরাজ, শ্যামা প্রসাদ, গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি, সেন্ট্রাল লাইব্রেরী, কলিকাতা (১৯৮২)।

এহসান, ডঃ মোঃ আবুল, শিক্ষাক্রম উন্নয়ন ঃ নীতি ও পদ্ধতি, ছাত্রবন্ধু লাইব্রেরী, ঢাকা (১৯৯৭)।

শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি, মাধ্যমিক স্তর, জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা (২০১২)।

সহকারী প্রধান শিক্ষকদের প্রশিক্ষণ ম্যানুয়াল, ফিমেল সেকেন্ডারী স্কুল এসিসট্যান্স প্রজেক্ট ঃ দ্বিতীয় পর্যায়, শিক্ষা মন্ত্রণালয়, ঢাকা।

আহমদ, মোঃ রমিজ উদ্দীন, রহমান,মোঃ মফিজুর ও হোসেন, মোঃ মোশাররফ,**শিক্ষায় পরিমাপ ও মূল্যায়ন; স্মৃতি প্রকাশনী, নীলক্ষেত, ঢাকা।**

জাতীয় তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি নীতিমালা-২০০৯, বিজ্ঞান এবং তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি মন্ত্রণালয়, বাংলাদেশ।

জাতীয় শিক্ষানীতি-২০১০, শিক্ষা মন্ত্রণালয়, বাংলাদেশ।

জাতীয় শিক্ষাক্রম-২০১২, জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ।

গণিত, অষ্টম শ্রেণি ও নবম শ্রেণি, জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা; গণিত, নবম-দশম শ্রেণি, জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

Rrabhakaram, K. S., & Rao, D. B. (2006). *Concept Attainment Model in Mathematics Teaching.* New Delhi: Discovery Publishing House.

Siddiqui, M. H., & Khan, M. S. (2007). *Models of Teaching-Theory and Research*. New Delhi: A P H Publishing Corporation.

Khirwadkar, A. (2007). *Teaching of Chemistry: Modern Methods*. New Delhi: Sarup & SonsFink, D. L. (2005). Integrated course design. Manhattan, KS: The IDEA Center.Retrieved from http://ideaedu.org/wpcontent/uploads/2014/11/Idea_Paper_42.pdf.

Hilda Taba, *Teacher's Handbook for Elementary Social Studies (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1967), p. 92. ,. 101.,. 109.*

Bloom, B. S., Hastings,, J. T., &Madaus, G. F. (1971). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning.*New York: McGraw-Hill.

Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Scotter, P. V., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2016). *The BSCS 5E Instructional Model: Origins and effectiveness.* Colorado: BSCS - Biological Sciences Curriculum Study.

Guskey, T. (2005, April). *Formative classroom assessment and Benjamin S. Bloom: Theory, research, and implications.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Joyce, B.; Weil, M. (2003). *Models of Teaching* (5th ed.). New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited.

Kılıç, D., Gündoğdu, K., & Kayabaşı, Y. (016). Mastery Learning Model. In C. Akdeniz, H. Bacanlı, E. Baysen, M. Çakmak, N. Çeliköz, N. Doğruer, . . . E. Karataş, *Learning And Teaching: Theories, Approaches and Models* (pp. 100-115). TÜRKİYE: Çözüm Eğitim Yayıncılık.

Siddiqui, M. H. (2013). Inductive Thinking Model of Teaching: Increase Capacity to Handle

Information. *PARIPEX - INDIAN JOURNAL OF RESEARCH, 2*(3), 71-73

Clarke, J. H. (1990). *Patterns of thinking: Integrating learning skills in content teaching*. Needham Heights MA: Allyn and Bacon.

Marzano, R. J., Brandt, R.S., Hughes, C.S., Jones, B. F., Presseisen, B, Z., Rankin, S. C., & Suhor, C. (1988). *Dimensions of thinking: A framework for curriculum and instruction.* Alexandria VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Marzano, R. J. (1992). *A different kind of classroom: Teaching with dimensions of learning*. Alexandria VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Grow, G. O. (1991). Teaching Learners To Be Self-Directed. *Adult Education Quarterly, 41*(3), 125-149.

Gibbons, M. (2012). *The self-directed learning handbook: Challenging adolescent students to excel.* CA: Jossey-Bass.

Knowles, M. S.(1975).*Self-Directed Learning: A Guide forLearners and Teachers*. Association

Press, New York, NY.

www.le.ac.uk/oerresources/ssds/presentationskills
www.indiastudychannel.com/resources
https://www.brac.net/education-programme/item/778-computer-aided-learning-cal
https://nces.ed.gov/timss/,https://en.wikipedia.org/wiki/Trends_in_International_Mathematics_and_Science_Study
https://www.mathlearningcenter.org/web-apps/pattern-shapes/
http://effectivecurriculumideas.weebly.com/integrating-ict-into-mathematics.html
http://effectivecurriculumideas.weebly.com/integrating-ict-into-mathematics.html
http://mathedu.hbcse.tifr.res.in/activities/