দ্বিঘাত সমীকরণ
Quadratic Equation

১০

ভূমিকা
Introduction

দ্বিঘাত সমীকরণ বীজগণিতে বহুল আলোচিত একটি বিষয়। ব্যবসায় ও অর্থনীতিতে ব্যবহারিক দিক বিবেচনায় অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে দ্বিঘাত সমীকরণের গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রয়েছে। বীজগণিতীয় সমীকরণের সমাধান প্রাচীনতম সমস্যাগুলির মধ্যে অন্যতম। পঞ্চদশ শতকের প্রথমদিকে সমীকরণকে গণিতিক ভাষায় না লিখে কথায় লেখা হতো। গণিত ও বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় সমীকরণের মূল নির্ণয় একটি অপরিহার্য অংশ হিসেবে বিবেচিত হয়। ব্যবসার ক্ষেত্রে একটি প্রকল্পের দুটি গ্রহণযোগ্য দিক থাকতে পারে। মুনাফা সর্বাধিকরণে একটি কোম্পানির দুইটি উৎপাদন বিন্দু থাকতে পারে। এ সকল সমস্যা সমাধানে দ্বিঘাত সমীকরণ ব্যপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৪ দিন

এ ইউনিটের পাঠসমূহ
পাঠ-১০.১: অসমতা
পাঠ-১০.২: দ্বিঘাত সমীকরণ
পাঠ-১০.৩: দ্বিঘাত সমীকরণের মূল এবং সহগ এর সম্পর্ক এবং পৃথায়ক
পাঠ-১০.৪: মূলের প্রতিসম ফাংশন

মূখ্য শব্দ	অসমতা, দ্বিঘাত সমীকরণ, সমীকরণের মূল, সমীকরণের সহগ, পৃথায়ক, প্রতিসম ফাংশন ইত্যাদি।

পাঠ-১০.১ অসমতা
Inequalities

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অসমতা কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- অসমতা সম্পর্কিত প্রমাণ করতে পারবেন;
- এক চলক সম্বলিত অসমতার সমাধান করতে পারবেন।

অসমতা
Inequalities

অসমতা বাস্তব সংখ্যার সেটে বিদ্যমান একটি গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক। দুইটি রাশির মধ্যে একটি অপেক্ষা আরেকটি রাশি বড় বা ছোট হলে রাশি দুইটিকে অসমান বলা হয়। রাশি দুইটির এই অসমান হবার বৈশিষ্ট্যকে গাণিতিক প্রতীকের [>অথবা<] মাধ্যমে প্রকাশ করে একটি সম্পর্ক দেখানো হলে একেই অসমতা বলা হয়। অর্থাৎ a এবং b সংখ্যা দুটি অসমান হলে a এর চেয়ে b বড় বা ছোট হবার বৈশিষ্ট্য বা ধর্মকে অসমতা বলা হয়।

গাণিতিকভাবে অসমতাকে প্রকাশ করলে পাই,

(i) a সংখ্যাটি b এর চেয়ে বড়: $a > b$ অথবা b সংখ্যাটি a চেয়ে ছোট: $b < a$ উল্লেখিত দুটি বিবৃতিই সমার্থক কিন্তু প্রকাশ ভঙ্গি ভিন্ন।

(ii) a সংখ্যাটি b এর চেয়ে ছোট: $a < b$ অথবা b সংখ্যাটি a চেয়ে বড়: $b > a$ উল্লেখিত দুটি বিবৃতিই সমার্থক কিন্তু উপস্থাপন ভিন্ন।

সমতা এবং অসমতার একত্রিত প্রকাশ (Combined Expression of Inequalities and Equalities):

(i) দুটি সংখ্যা a এবং b এর মধ্যে−

(ক) a, b-এর চেয়ে বড় অথবা b-এর সমান হলে $a>b$ অথবা $a=b$; একত্রে $a \geq b$

(খ) a, b-এর চেয়ে ছোট অথবা b-এর সমান হলে $a<b$ অথবা $a=b$; একত্রে $a \leq b$

(ii) a ধনাত্মক অথবা শূন্যের সমান হলে−$a>0$ অথবা $a=0$; একত্রে $a \geq 0$

(iii) a ঋণাত্মকঅথবা শূন্যের সমান হলে−$a<0$ অথবা $a=0$; একত্রে $a \leq 0$

অসমতার বৈশিষ্ট্যসমূহ (Properties of Inequalities):

(i) $a, b \in R$ এর জন্য $a<b$ অথবা $a=b$ অথবা $a>b$

(ii) $a, b \in R$ এবং $a<b$ হলে যেকোনো c এর জন্য $a+c<b+c$ এবং $a-c<b-c$

(iii) $a, b \in R$ এবং $a>b$ হলে (ক) $ac>bc$ যেখানে $c>0$,(খ) $ac<bc$ যেখানে $c<0$

(iv) $a, b \in R$ এবং $a>0, b>0$ হলে $a+b>0$ এবং $ab>0$

(v) $a,b \in R$ এবং $a>0, b<0$ হলে $ab<0$

(vi) $a,b,c,d \in R$ এবং $a<b$ ও $c<d$ হলে $a+c<b+d$

(vii) $a, b \in R$ এবং $a>0, b>0$ ও $a<b$ হলে $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(viii) $a, b, c \in R$এবং $a>b$ হলে $a=b+c$ হবে, যেখানে $c>0$ আবার যদি $a<b$ হয়, তাহলে $b=a+c$ হবে; যেখানে $c>0$।

(ix) $a>0$ এবং $b>0$, $a \neq b$ হলে a,b এর গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean AM), জ্যামিতিক গড় (Geometric Mean GM) এর মধ্যকার সম্পর্ক হবে $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

যেমনঃ (i) অসমতার উভয়পক্ষকে যেকোন অশূন্য ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা যোগ বা বিয়োগ করলে অসমতাটি অপরিবর্তিত থাকবে। যেমন, $11>7$, অসমতাটিতে উভয়পক্ষে $+4$ যোগ করে পাই, $11+4>7+4 \Rightarrow 15>11$ অসমতাটি অপরিবর্তিত রইল, আবার, অসমতাটির উভয়পক্ষে -5 যোগ করা হলে কিংবা 5 বিয়োগ করা হলে পাই, $11-5>7-5 \Rightarrow 6>11$ অসমতাটি অপরিবর্তিত রইল,

(ii) অসমতার উভয়পক্ষকে একটি ধনাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করা হলে, অসমতাটি অপরিবর্তিত থাকবে। যেমন, $12>10$

অসমতাটির উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা গুণ করলে পাই, $12\times5>10\times5 \Rightarrow 60>50$, অসমতাটি অপরিবর্তিত রইল।

আবার, উভয়ক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{12}{2} > \frac{10}{2} \Rightarrow 6>5$ এক্ষেত্রেও অসমতাটি অপরিবর্তিত রইল।

(iii) অসমতার সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য যা সমীকরণ থেকে অসমতাকে পৃথকীকরণে বীজগাণিতিক কার্যক্রমে বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়, তা হলোঃ

একটি অসমতার উভয়পক্ষকে একই ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করা হলে, অসমতাটি পরিবর্তিত হয়ে যায় অর্থাৎ অসমতার ধারণা বদলে যায়।

উদাহরণ স্বরূপঃ পূর্বোক্ত $12>10$ অসমতাটির উভয়পক্ষকে দ্বারা -5 গুণ করে পাই,

বামপক্ষ $= 12\times(-5)=-60$

এবং ডানপক্ষ $= 10\times(-5)=-50$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে $-60<-50$

ফলে অসমতাটির মূল Direction বদলে গেল।

আবার, উভয়পক্ষকে (-2) দ্বারা ভাগ করলে পাই,

বামপক্ষ $=\frac{12}{-2}=-6$

ডানপক্ষ $=\frac{10}{-2}=-5$

এখানে $-6<-5$ অসমতাটি পরিবর্তিত হল।

এক চলক সম্বলিত অসমতা এবং সমাধানঃ এই প্রকারের অসমতাগুলিতে একটিমাত্র চলক বা অজ্ঞাত রাশি থাকে। একজন ছাত্রের উচ্চতর গণিত ২য় পত্র পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর x দ্বারা সূচিত হলে এক চলক সম্বলিত অসমতা হবে $0\le x\le 100$ এছাড়াও $2x-5<0$, $x^2<1$ এবং $(x-1)(x-2)\ge 0$ প্রত্যেকটি এক চলক সম্বলিত অসমতার উদাহরণ।

উদাহরণ 1: সমাধান করুন, $x^2-2x>0$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $x^2-2x>0$ বা, $x(x-2)>0$....................(1)

(1) নং সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি x এবং $(x-2)$ এর উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।

$x<0 \;|\leftarrow 0<x<2 \rightarrow|\; x>2$

যখন	xএর চিহ্ন	$(x-2)$এর চিহ্ন
$x<0$	–	–
$0<x<2$	+	–
$x>2$	+	+

সুতরাং(1)নং সমীকরণ সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি$x<0$অথবা $x>2$হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\{x\in : x<0$ অথবা $x>2\}$

উদাহরণ 2: সমাধান করুন $\frac{x-3}{x-4}<\frac{x-2}{x-1}$

সমাধানঃ $\frac{x-3}{x-4}<\frac{x-2}{x-1}$ এবং $\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-2}{x-1}<0$

বা, $\frac{(x-3)(x-1)-(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}<0$

বা, $\frac{x^2-4x+3-x^2+6x-8}{(x-1)(x-4)} < 0$

বা, $\frac{2x-5}{(x-1)(x-4)} < 0$

বা, $\frac{(x-\frac{5}{2})}{(x-1)(x-4)} < 0$............ (i)

সমীকরণ (i) নং সত্য হবে যদি কেবল যদি $(x-1), (x-\frac{5}{2})$ এবং $(x-4)$ রাশিগুলোর যেকোনো দুইটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক অথবা তিনটিই ঋণাত্মক হয়।

$x<1$ /$\leftarrow 1<x<\frac{5}{2}\rightarrow$ /$\leftarrow\frac{5}{2}<x<4\rightarrow$ / $x>4$

যখন	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(x-\frac{5}{2})$এর চিহ্ন	$(x-4)$ এর চিহ্ন
$x<1$	–	–	–
$1<x<\frac{5}{2}$	+	–	–
$\frac{5}{2}<x<4$	+	+	–
$x>4$	+	+	+

সুতরাং (i) নং সত্য হবে যদি ও কেবল যদি $x<1$ অথবা $\frac{5}{2} < x < 4$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট $S=\{x \in : x<1$ অথবা $\frac{5}{2} < x < 4\}$

অসমতা সম্পর্কিত কতিপয় প্রমাণ (Some Inequality Relations)

প্রমাণ 1: যদি a এবং b ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে, AM ≥ GM ≥ HM অর্থাৎ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

সমাধান: a, b,∈ ***R*** হয় $a>b$, তখন $\left\{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2\right\}^2 > 0$...........(1)

অথবা, $a<b$, তখন $\left\{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2\right\}^2 > 0$......................(2)

অথবা, $a=b$, তখন $\left\{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2\right\}^2 = 0$......................(3)

অসমতার, (1), (2) ও (3) নং থেকে পাই $\left\{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2\right\}^2 \geq 0.$

$$\Rightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$$

$$\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\text{......................(4)}$$

এখন, (4) নং থেকে $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{2ab} \geq \frac{\sqrt{ab}}{ab}$ [উভয় পক্ষকে $\frac{1}{ab}$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}}$ [Inequality Property]

$\Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{\sqrt{ab}.\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$

$\Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$

$\Rightarrow \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$

$\Rightarrow \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{a}{ab}+\dfrac{b}{ab}}$

$\Rightarrow \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}}$

$\therefore \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ ....(5)

From, Inequality (4) and (5) আমরা লিখতে পারি, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

$\therefore$ AM $\geq$ GM $\geq$ HM

উদাহরণ 3: যদি $a, b, c \in R$ হয়, তাহলে দেখান যে, $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq 6$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a, b, c \in R$

আমরা জানি, AM$\geq$ GM, $\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\Rightarrow \frac{2(a+b)}{2} \geq 2\sqrt{ab}$

$\Rightarrow (a+b) \geq 2\sqrt{ab}$

$\Rightarrow \frac{(a+b)}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$

$\Rightarrow \frac{(a+b)}{\sqrt{ab}} \geq 2$ ....(1)

এখন, $a=\frac{a}{b}$ এবং $b=\frac{b}{a}$বসিয়ে পাই, $\frac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})}{\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}} \geq 2$

$\Rightarrow \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\sqrt{1}} \geq 2$

$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ ....(2)

আবার, $a=\frac{c}{a}$ এবং $b=\frac{a}{c}$ বসিয়ে পাই, $\frac{\frac{c}{a}+\frac{a}{c}}{\sqrt{\frac{ca}{ac}}} \geq 2$

$\Rightarrow \frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geq 2$............. (3)

পুনঃরায় আবার, $a=\frac{b}{c}$ এবং $b=\frac{c}{b}$ বসিয়ে পাই,

$\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2$ ....(4)

(2), (3)and (4)যোগ করে পাই, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2+2+2$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}) \geq 6$

$\Rightarrow \frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq 6$

উদাহরণ 4: যদি a, b এবং c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়,তবে প্রমাণ করুন যে, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a, b, c \in$R,

যদি $a>b$ হয়, তখন $(a-b)^2>0$......................(1)

অথবা, $a<b$, তখন $(a-b)^2>0$.......................(2)

অথবা, $a=b$, তখন $(a-b)^2>0$.......................(3)

এখন,(4), (5)এবং (6) যোগ করে পাই,

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$

$\Rightarrow a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2 \geq 0$

$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \geq 0$

অসমতার, (1), (2) ও (3)নং থেকে পাই,

$(a-b)^2 \geq 0$ ....(4)

একইভাবে, $(b-c)^2 \geq 0$ ....(5)

$(c-a)^2 \geq 0$ ....(6)

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{2} \geq \frac{2(ab+bc+ca)}{2}$ [(2) দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2) \geq (ab+bc+ca)$

উদাহরণ 5: সমাধান করুন$5x+7 \geq 22$

সমাধান: দেওয়া আছে,$5x+7 \geq 22$

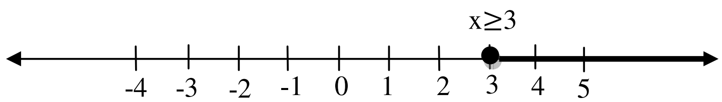
$\Rightarrow 5x+7-7 \geq 22-7$[উভয়পক্ষে (–7) যোগ করে পাই]

$\Rightarrow 5x \geq 15$

$\Rightarrow \frac{5x}{5} \geq \frac{15}{5}$,[উভয়পক্ষকে (5) দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore x \geq 3$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান, $x \geq 3$



উদাহরণ 6:সমাধান করুন $|x|+|x+1|>5$

সমাধান:দেওয়া আছে,$|x|+|x+1|>5$

যদি x এবং $(x+1)$ধনাত্মক হয়,তখন $x+(x+1)>5$

$\Rightarrow 2x + 1>5$

$\Rightarrow 2x>5-1$

$\Rightarrow 2x>4$

$\therefore x>2$∴সমাধান সেট$S_1=\{x: x>2\}$

যদি x এবং$(x+1)$ঋণাত্মক হয়, তখন$-(x)+\{-(x+1)\}>5$

$\Rightarrow -x-x-1>5$

$\Rightarrow -2x>5+1$

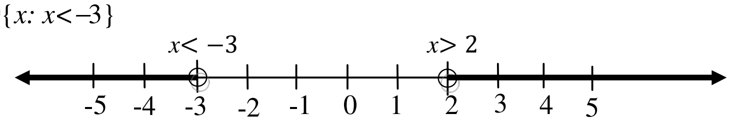
$\Rightarrow -2x>6$

$\Rightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{6}{-2}$ [উভয়পক্ষকে (-2) দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore x<-3$

∴নির্ণেয় সমাধান$S_2=\{x: x<-3\}$

∴সমাধান সেট = $S_1 \cup S_2=\{x: x>2\} \cup \{x: x<-3\}$



উদাহরণ 7: সমাধান করুন:$|2x+3|>7$

সমাধান: $(2x+3)$ ধনাত্মক হলে $|2x+3|=2x+3$

প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $|2x+3|>7$

$\Rightarrow 2x+3>7$

$\Rightarrow 2x>7-3$

$\Rightarrow 2x>4$

$\therefore \frac{2x}{2} > \frac{4}{2} \Rightarrow x>2$

$(2x+3)$ ঋণাত্মক হলে, $|2x+3|=-(2x+3)$

প্রদত্ত অসমতা হতে পাই,$-(2x+3)>7$

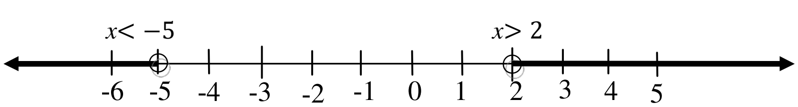
$\Rightarrow 2x+3<-7$

$\Rightarrow 2x<-7-3$

$\Rightarrow 2x<-10$

$\therefore x < \frac{-10}{2} \Rightarrow x<-5$

∴নির্ণেয় সমাধান $x<-5$ অথবা $x>2$ এবং সমাধান সেট =$\{x\ ;\ x<-5$অথবা $x>2\}$



উদাহরণ 8: x এর জন্য সমাধান সেট নির্ণয় করুন, $|x+1|+|x-1| \leq 3$

সমাধান: $x+1=0$ হলে $x=-1$এবং$x-1=0$ হলে $x=1$

$x+1<0,\ x-1<0,\ x+1>0,\ x-1<0,\ x+1>0,\ x-1>0$

$-1 \qquad 0 \qquad 1$

কিন্তু দুইটি সংখ্যারেখাকে (i) $x<-1$ এবং (ii) $-1<x<1$ এবং (iii) $x>1$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

(i) $x<-1$ হলে $|x+1|=-(x+1)$ এবং $|x-1|=-(x-1)$

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $-(x+1)+\{-(x-1)\}\leq 3$

$\Rightarrow -x-1-x+1\leq 3$

$\Rightarrow -2x\leq 3$

$\therefore \frac{2x}{2}\geq\frac{-3}{2}$, [উভয়পক্ষকে (2) দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore x\geq\frac{-3}{2}$

(ii) $-1<x<1$ হলে $|x+1|=x+1$ এবং $|x-1|=-(x-1)$

প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $x+1+\{-(x-1)\}\leq 3$

$\Rightarrow x+1-(x-1)\leq 3$

$\Rightarrow x+1-x+1\leq 3$

$\Rightarrow 2\leq 3$ যা সত্য

(iii) $x>1$ হলে $|x+1|=x+1$ এবং $|x-1|=x-1$

প্রদত্ত অসমতা হতে পাই, $x+1+x-1\leq 3$

$\Rightarrow 2x\leq 3$, $\therefore x\leq\frac{3}{2}$

নির্ণেয় সমাধান $x\geq\frac{-3}{2}$ এবং $x\leq\frac{3}{2}$, অর্থাৎ $-\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$

দুই চলকের যোগাশ্রয়ী অসমতা: একজন লোক সর্বাধিক 500 টাকা খরচ করে xটি চায়ের কাপ ও y টি প্লেট উভয় জিনিস কিনতে চান। প্রতিটি কাপ 30 টাকা এবং প্রতিটি প্লেটের দাম 20 টাকা।

সুতরাং আমরা গাণিতিকভাবে লিখতে পারি $30x+20y\leq 500$

দুই চলকের যোগাশ্রয়ী অসমতার সমাধান আকার $ax+by>c,\quad ax+by<c$

$ax+by\geq c,\quad ax+by\leq c$

দ্বারা সূচিত চারটির যেকোনো একটি হতে পারে।

সারসংক্ষেপ:

- a এবং b সংখ্যা দুটি অসমান হলে a এর চেয়ে b বড় বা ছোট হবার বৈশিষ্ট্য বা ধর্মকে অসমতা বলা হয়।
- $AM\geq GM\geq HM$ অর্থাৎ $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

পাঠ-১০.২ দ্বিঘাত সমীকরণ Quadratic Equation

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত সমীকরণ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- উৎপদকের সাহয্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমস্যার সমাধান করতে পারবেন;
- পূর্ণবর্গ পদ্ধতিতে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন।

দ্বিঘাত সমীকরণ Quadratic Equation

যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির সর্বোচ্চ শক্তি বা ঘাত (Power) দুই তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equation) বলা হয়। এক চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ: $ax^2+bx+c=0$ যেখানে $a\neq 0$, x একটি অজ্ঞাত রাশি (চলক) (Variable) যার সর্বোচ্চ সূচক (Power) 2. a এবং b হলো যথাক্রমে x^2 এবং x এর সহগ (Coefficient) এবং c হলো ধ্রুব পদ (Constant Term)।

যেমন: (i) $x^2-1=0$ (ii) $x^2-5x+6=0$ (iii) $2x^2-5x+11=0$ ইত্যাদি।

(ক) উৎপাদকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান (Quadratic equations solve by middle term break): দ্বিঘাত সমীকরণকে আদর্শ আকারে লিখে তার দ্বিঘাত রাশিটিকে দুইটি উৎপদকের গুণফল আকারে প্রকাশ করা হয়।উৎপাদক দুইটির প্রত্যেকটির মান শূন্য ধরে অজ্ঞাত চলক রাশির দুইটি মান নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ 1: সমাধান করুন $x^2-5x-6=0$

সমাধান: $x^2-5x-6=0$

বা, $x^2-6x+x-6=0$

বা, $x(x-6)+1(x-6)=0$

বা, $(x-6)(x+1)=0$

$\therefore x=-1,6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=-1$ এবং $x=6$

উদাহরণ 2: সমাধান করুন $x^2-7x+12=0$

সমাধান: $x^2-7x+12=0$

বা, $x^2-4x-3x+12=0$

বা, $x(x-4)-3(x-4)=0$

বা, $(x-4)(x-3)=0$

$\therefore x=3,4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=3$ এবং $x=4$

উদাহরণ 3: সমাধান করুন

$3(2x^2+x)=2(3x^2-x+5)$

সমাধান: $3(2x^2+x)=2(3x^2-x+5)$

বা, $6x^2+3x=6x^2-2x+10$

বা, $6x^2-6x^2+3x+2x=10$

বা, $5x=10$

$\therefore x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=2$

উদাহরণ 4: সমাধান করুন

$x^2-(\sqrt{3}+3)x+(\sqrt{3}+2)=0$

সমাধান: $x^2-(\sqrt{3}+3)x+(\sqrt{3}+2)=0$

বা, $x^2-\sqrt{3}x-3x+\sqrt{3}+2=0$

বা, $x^2-3x+2-\sqrt{3}x+\sqrt{3}=0$

বা, $x^2-2x-x+2-\sqrt{3}(x-1)=0$

বা, $x(x-2)-1(x-2)-\sqrt{3}(x-1)=0$

বা, $(x-2)(x-1)-\sqrt{3}(x-1)=0$

বা, $(x-2-\sqrt{3})(x-1)=0$

$\therefore x=1,2+\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=1$ এবং $x=2+\sqrt{3}$

উদাহরণ 5: সমাধান করুন, $\frac{x+b}{a}+\frac{a}{x+b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a}{a+b}$

সমাধান: $\frac{x+b}{a}+\frac{a}{x+b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a}{a+b}$

বা, $\frac{x+b}{a}-\frac{a+b}{a}=\frac{a}{a+b}-\frac{a}{x+b}$

বা, $\frac{x+b-a-b}{a}=\frac{a(x+b)-a(a+b)}{(a+b)(x+b)}$

বা, $\frac{x-a}{a}=\frac{a(x+b-a-b)}{(a+b)(x+b)}$

বা, $\frac{x-a}{a}=\frac{a(x-a)}{(a+b)(x+b)}$

বা, $(x-a)\left\{\frac{1}{a}-\frac{a}{(a+b)(x+b)}\right\}=0$

হয় $(x-a)=0$ অথবা $\left\{\frac{1}{a}-\frac{a}{(a+b)(x+b)}\right\}=0$

$\therefore (x-a)=0$ অথবা $\left\{\frac{1}{a}-\frac{a}{(a+b)(x+b)}\right\}=0$

$\therefore x=a$ অথবা $\frac{a}{(a+b)(x+b)}=\frac{1}{a}$

এখন, $\frac{a}{(a+b)(x+b)}=\frac{1}{a}$

বা, $(x+b)=\frac{a^2}{(a+b)}$

বা, $x=\frac{a^2}{(a+b)}-b$

বা, $x=\frac{a^2-ab-b^2}{a+b}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=a$

এবং $x=\frac{a^2-ab-b^2}{a+b}$

উদাহরণ 6: সমাধান করুন, $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$

সমাধান: $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$

বা, $\frac{(x+3)(x-2)+(x-3)(x+2)}{x^2-4}=\frac{2x-3}{x-1}$

বা,

$\frac{(x^2+3x-2x-6)+(x^2-3x+2x-6)}{x^2-4}=\frac{2x-3}{x-1}$

বা, $\frac{x^2+x-6+x^2-x-6}{x^2-4}=\frac{2x-3}{x-1}$

বা, $\frac{2x^2-12}{x^2-4}=\frac{2x-3}{x-1}$

বা, $\frac{2(x^2-4)-4}{x^2-4}=\frac{2x-3}{x-1}$

বা, $2-\frac{4}{x^2-4}=\frac{2x-3}{x-1}$

বা, $\frac{2x-3}{x-1}+\frac{4}{x^2-4}=2$

বা, $\frac{(2x-3)(x^2-4)+4(x-1)}{(x-1)(x^2-4)}=2$

বা, $\frac{2x^3-8x-3x^2+12+4x-4}{(x-1)(x^2-4)}=2$

বা, $\frac{2x^3-4x-3x^2+8}{x^3-4x-x^2+4}=2$

বা, $2x^3-4x-3x^2+8=2x^3-8x-2x^2+8$

বা, $-x^2+4x=0$

বা, $-x(x-4)=0$

$\therefore x=0,4$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=0,4$

(খ) পূর্ণবর্গ পদ্ধতিতে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান নির্ণয় (Quadratic equations solve by square root):

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2+bx+c=0,\ \ a\neq 0$

$\therefore 4a^2x^2+4abx+4ac=0$ [উভয়পক্ষকে $4a$ দ্বারা গুণ করে পাই]

$\Rightarrow (2ax)^2+2.2ax.b+b^2-b^2+4ac=0$

$\Rightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac$

$\Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $x = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

উদাহরণ 7: সমাধান করুন, $6x^2+13x-5=0$ এখানে, $a=6, b=13, c=-5$

সমাধান: আমরা জানি, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

এখন, $x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{13^2-4.6(-5)}}{2\times 6}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169+120}}{12}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{289}}{12}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-13 \pm 17}{12}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-13+17}{12}$ এবং $x = \dfrac{-13-17}{12}$

$\Rightarrow x = \dfrac{4}{12}$ এবং $x = \dfrac{-30}{12}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ এবং $x = \dfrac{-5}{2}$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{1}{3}$ এবং $x = \dfrac{-5}{2}$ ।

উদাহরণ 8: সমাধান করুন, $3x^2-14x+8=0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x^2-14x+8=0$, এখানে $a=3, b=-14, c=8$

এখন, $x = \dfrac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2-4.3.8}}{2.3}$

$\Rightarrow x = \dfrac{14 \pm \sqrt{196-96}}{6}$

$\Rightarrow x = \dfrac{14 \pm \sqrt{100}}{6}$

$\Rightarrow x = \dfrac{14 \pm 10}{6}$

$\Rightarrow x = \dfrac{14+10}{6} = 4$ এবং $x = \dfrac{14-10}{6} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 4$ এবং $x = \dfrac{2}{2}$ ।

সারসংক্ষেপ:

- দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ: $ax^2+bx+c=0$ যেখানে $a \neq 0$
- পূর্ণবর্গ পদ্ধতিতে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

পাঠ-১০.৩ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল এবং সহগ এর সম্পর্ক এবং পৃথায়ক

The relation between the roots and coefficients of the quadratic equation and Discriminant

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত সমীকরণ থেকে মূলদ্বয়ের যোগফল এবং গুণফল নির্ণয় করতে পারবেন;
- দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করতে পারবেন;
- দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় থেকে উক্ত সমীকরণ গঠন করতে পারবেন।

দ্বিঘাত সমীকরণের মূল এবং সহগ সম্পর্ক

The relation between the roots and coefficients of the quadratic equation

(i) মনে করুন, $ax^2+bx+c=0$ যেখানে $a\neq 0$ দ্বিঘাত সমীকণরে মূলদ্বয় α, β .

সুতরাং, $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

সুতরাং, মূলদ্বয়ের যোগফল $=-\dfrac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

এবং $\alpha\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

সুতরাং, মূলদ্বয়ের গুণফল $=\dfrac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

উদাহরণ 1: সমীকরণ $6x^2-3x+2=0$ হতে $m+n$ এবং mn নির্ণয় করুন, যেখানে সমীকরণের মূলদ্বয় m ও n ।

সমাধান: দেওয়া আছে, $6x^2-3x+5=0$,এখানে $a=6, b=-3, c=5$

সুতরাং, মূলদ্বয়ের যোগফল $m+n=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $mn=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{6}$

পৃথায়ক (Discriminant) এবং দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি:

$ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ।

সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি b^2-4ac রাশিটি দ্বারা নির্ধারিত হয় বিধায় রাশিটিকে দ্বিঘাত সমীকরণের পৃথায়ক(Discriminant) বলে। একে D দ্বারা সূচিত করা হয়।

(i) যদি $\sqrt{b^2-4ac}=0$ বা, $b^2-4ac=0$ বা, $D=0$ হয়তবে সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে ।এখানে সমান মূলদ্বয়: $x=\frac{-b\pm 0}{2a}$ $\therefore x=\frac{-b}{2a},\frac{-b}{2a}$ ।

(ii) যদি $b^2-4ac>0$ বা $D>0$ হয়তবে সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে ।

(iii) যদি $b^2-4ac<0$ বা $D<0$ হয়তবে সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল (কাল্পনিক সংখ্যা) হবে । এখানে, $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{-\left(4ac-b^2\right)}=\pm i\sqrt{\left(4ac-b^2\right)}$ এক্ষেত্রে মূলদ্বয় অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

(iv) a,b,c প্রত্যেকে মূলদ সংখ্যা কিন্তু b^2-4ac পূর্ণবর্গ সংখ্যা না হলে মূল দুইটি অমূলদ এবং অনুবন্ধী হবে অর্থাৎ $p+\sqrt{q}$ এবং $p-\sqrt{q}$ আকারের হবে। যেখানে p মূলদ সংখ্যা এবং q ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা।

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি(Natuer of the roots of the quadratic equation):

নিশ্চায়ক	মূলের প্রকৃতি
(i) নিশ্চয়ক, $D=b^2-4ac$ ধনাত্মক	(i) মূল দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং অসমান হবে $\alpha,\beta\in R,\alpha\neq\beta$
(ii) নিশ্চয়ক $D=b^2-4ac$ ধনাত্মক এবং পূর্ণবর্গ	(ii) মূল দুইটি বাস্তব সংখ্যা, অসমান এবং মূলদ হবে। $\alpha,\beta\in R,\alpha,\beta\in Q,\alpha\neq\beta$
(iii) নিশ্চয়ক $D=b^2-4ac$ ধনাত্মক এবং পূর্ণবর্গ নয়।	(iii) মূল দুইটি বাস্তব সংখ্যা, অসমান এবং অমূলদ হবে। $\alpha,\beta\in R,\alpha,\beta\in Q^c;\alpha\neq\beta$
(iv) নিশ্চয়ক $D=b^2-4ac$ ঋণাত্মক	(iv) মূল দুইটি জটিল সংখ্যা,অসমান হবে। $\alpha,\beta\in Z;\alpha\neq\beta$
(v) নিশ্চয়ক $D=b^2-4ac$ শূন্য	(v) মূল দুইটি বাস্তব সংখ্যা, সমান এবং মূলদ হবে। $\alpha,\beta\in R;\alpha,\beta\in Q,\alpha=\beta$

উদাহরণ 2: $x^2+2x+3=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2+2x+3=0$ এখানে, $a=1,b=2,c=3$

$D=b^2-4ac$

$=4-4.1.3=4-12=-8$, $D=-8<0$

সুতরাং, দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলদ্বয় কাল্পনিক এবং অসমান।

উদাহরণ 3: $(x-a)(x-b)=h^2$ দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলদয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(x-a)(x-b)=h^2$

$\Rightarrow x^2-(a+b)x+ab=h^2$

$\Rightarrow x^2-(a+b)x+\left(ab-h^2\right)=0$

এখানে, $a=1,b=-(a+b),c=(ab-h^2)$

$\therefore D=\{-(a+b)\}^2-4.1.(ab-h^2)$

$\Rightarrow D=a^2+2ab+b^2-4.1.(ab-h^2)$

$\Rightarrow D=a^2+2ab+b^2-4ab+4h^2$

$\Rightarrow D=a^2-2ab+b^2+4h^2\Rightarrow D=(a-b)^2+4h^2>0$

দুইটি বর্গের যোগফল সর্বদা ধনাত্মক।

সুতরাং,দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব সংখ্যা এবং অসমান

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় থেকে উক্ত সমীকরণ গঠন (Formation of a quadratic equation from their given roots): $ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$, $\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

$\Rightarrow x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$

$\Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলদ্বয় জানা থাকলে সমীকরণটি হবে, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

মূলদ্বয় x^2- (মূলদ্বয়ের যোগফল) x +মূলদ্বয়ের গুণফল $=0$

সমাধান না করে সরাসরি বীজ বা মূলদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল নির্ণয়:

উদাহরণ 4: $4x^2-9x+3=0$ সমাধান না করে সরাসরি বীজ বা মূলদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $4x^2-9x+3=0$ এখানে, $a=4, b=-9, c=3$

মনে করুন, বীজদ্বয়/মূলদ্বয় α,β

সুতরাং, মূলদ্বয়ের সমষ্টি, $(\alpha+\beta)=-\frac{b}{a}=-\frac{-9}{4}$ এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$

উদাহরণ 5: কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় $4+i\sqrt{2}, 4-i\sqrt{2}$ দেওয়া আছে সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, মূলদ্বয় $4+i\sqrt{2}, 4-i\sqrt{2}$

আমরা জানি, দ্বিঘাত সমীকরণটি হবে,

x^2- (সমীকরণটির মূলদ্বয়ের যোগফল) x +সমীকরণটির মূলদ্বয়ের যোগফল $=0$

$\Rightarrow x^2-(4+i\sqrt{2}+4-i\sqrt{2})x+(4+i\sqrt{2})(4-i\sqrt{2})=0$

$\Rightarrow x^2-(4+4)x+\left\{4^2-(i\sqrt{2})^2\right\}=0$

$\Rightarrow x^2-8x+\{16-(-1)2\}=0 \quad [\because i^2=-1]$

$\Rightarrow x^2-8x+16-(-1)2=0 \Rightarrow x^2-8x+16+2=0 \Rightarrow x^2-8x+18=0$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ $x^2-8x+18=0$

দ্বিঘাত সমীকরণের কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র:

(i) $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণে $c=0$ হলে একটি মূল 0 (শূন্য) হবে, $ax^2+bx=0$

$\therefore x=0$ অথবা $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

সুতরাং, নির্ণেয় মূলদ্বয় $x=0,-\frac{b}{a}$

(ii) $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণে $b=0$ হলেমূল দুইটির মান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে

অর্থাৎ $b=0$ হলে সমীকরণটি হবে $ax^2+c=0$

বা, $ax^2=-c$

বা, $x^2=\frac{-c}{a}$ $\therefore x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

অর্থাৎ, মূলদুইটির সংখ্যা সূচক মান সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

উল্লেখ্য যে, a এবং c একই চিহ্নবিশিষ্ট হলে মূল দুইটি জটিল সংখ্যা হবে। আবার a এবং c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে মূলদ্বয় বাস্তব সংখ্যা হবে।

(iii) $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ সমীকরণ দুইটির সাধারণ মূল α হলে

$a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1=0$ .... (i) এবং

$a_2\alpha^2+b_2\alpha+c_2=0$ .... (ii)

বজ্রগুণন সূত্রানুসারে, $\dfrac{\alpha^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{\alpha}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$

$\therefore \alpha^2=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ এবং $\alpha=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

বা, $\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\left(\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)^2$

বা, $(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)=(c_1a_2-c_2a_1)^2$

সারসংক্ষেপ:

- দ্বিঘাত সমীকরণটির মূলদ্বয় জানা থাকলে সমীকরণটি হবে, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
- $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণে $b=0$ হলে মূল দুইটির মান সমান কিন্তু **বিপরীত** চিহ্নযুক্ত হবে।

পাঠ-১০.৪ মূলের প্রতিসম ফাংশন
Symmetrical function of roots

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- প্রতিসম ফাংশন কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- প্রতিসম ফাংশনবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন।

মূলের প্রতিসম ফাংশন
Symmetrical function of roots

একটি সমীকরণের ধ্রুবক বা চলক দ্বারা সৃষ্ট কোনো রাশিমালায় এদের অবস্থান পরিবর্তন বা বিনিময় করা সত্ত্বেও যদি রাশিটি একই রকম থাকে, তবে একে প্রতিসম ফাংশন বলা হয়। একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল যথাক্রমে α ও β ধরা হলে এদের প্রতিসম ফাংশনের সাধারণ নিয়ম হলো:

(ক) প্রদত্ত ফাশনটিকে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে হয়।

(খ) সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ এর মান ফাংশনটিতে বসাতে হয়।

উদাহরণ 1: যদি $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α ও β হয় তাহলে নিচের রাশিগুলোর মান নির্ণয় করতে হবে- (i) $\alpha-\beta$ (ii) $\alpha^2+\beta^2$

সমাধান: দেওয়া আছে, $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α ও β হয় তাহলে মূলদ্বয়ের সমষ্টি $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(i) $\alpha-\beta$

$$=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4.\frac{c}{a}}$$

$$=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4.\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

(ii) $\alpha^2+\beta^2$

$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

উদাহরণ 2: $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে প্রমাণ করুন যে, $a^2c+ac^2+b^3=3abc$.

সমাধান: মনে করুন, প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল α তাহলে অপর মূলটি α^2

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+\alpha^2=-\frac{b}{a}$.............(i) এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\cdot\alpha^2=\alpha^3=\frac{c}{a}$...............(ii)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে ঘন করে পাই, $(\alpha+\alpha^2)^3=\left(-\frac{b}{a}\right)^3$

$$\Rightarrow \alpha^3+\alpha^6+3\alpha\alpha^2(\alpha+\alpha^2)=\left(-\frac{b}{a}\right)^3$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + (\alpha^3)^2 + 3\alpha^3(\alpha + \alpha^2) = \left(-\frac{b}{a}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(-\frac{b}{a}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - 3\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a} = -\frac{b^3}{a^3}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{3bc}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} = 0 \Rightarrow a^2c + c^2a - 3abc + b^3 = 0 \therefore a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$$

উদাহরণ 3: যদি $x^2 - 2x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α এবং β হয়, তাহলে $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \frac{\beta-1}{\beta+1}$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $x^2 - 2x + 3 = 0$ সমীকরণেরমূলদয়যথাক্রমে α ও β হয় তাহলে,

মূলদ্বয়ের সমষ্টি $\alpha + \beta = -\frac{-2}{1} = 2$.........(i) এবং

মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha\beta = 3$................(ii)

নতুন মূলদ্বয়ের সমষ্টি অর্থাৎ, $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{(\alpha-1)(\beta+1) + (\beta-1)(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

$= \frac{\alpha\beta - \beta + \alpha - 1 + \alpha\beta - \alpha + \beta - 1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{2\alpha\beta - 2}{\alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1} = \frac{2.3-2}{3+2+1}$ [সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে মান বসিয়ে]

$= \frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

নতুন মূলদ্বয়ের গুণফল অর্থাৎ, $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \times \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{\alpha\beta - \beta - \alpha + 1}{\alpha\beta + \beta + \alpha + 1} = \frac{\alpha\beta - (a+\beta) + 1}{\alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1} = \frac{3-2+1}{3+2+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, x^2-(নতুন মূলদ্বয়ের সমষ্টি) $x +$ নতুন মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

উদাহরণ 4: যদি কোনো সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল 2 এবং মূলদ্বয়ের ঘন এর যোগফল 5 হয় তাহলে, দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন,সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β তাহলে শর্তানুসারে,

$\alpha + \beta = 2$.........(i) $\alpha^3 + \beta^3 = 5$.......(ii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\alpha^3 + \beta^3 = 5$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 5$$

$$\Rightarrow (2)^3 - 3\alpha\beta(2) = 5$$

$$\Rightarrow 8 - 6\alpha\beta = 5$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{8-5}{6} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

সুতরাং, সমীকরণটির মূলদ্বয়ের গুণফল $\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$

উদাহরণ 5: যদি $3x^2+6x+2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে p এবং q হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে, $\frac{p^2}{q}$ এবং $\frac{q^2}{p}$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি $3x^2+18x+2=0$ ।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $3x^2+6x+2=0$ এর মূলদ্বয় p এবং q

মূলদ্বয়ের সমষ্টি $p+q=-\frac{6}{3}=-2$.............(i) এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $pq=\frac{2}{3}$................(ii)

নতুন মূলদ্বয়ের সমষ্টি, $\frac{p^2}{q}+\frac{q^2}{p}=\frac{p^3+q^3}{pq}=\frac{(p+q)^3-3pq(p+q)}{pq}$

$=\frac{(-2)^3-3.\frac{2}{3}(-2)}{\frac{2}{3}}$ [(i) ও (ii) থেকে মান বসিয়ে]

$=\frac{-8+4}{\frac{2}{3}}=-4\times\frac{3}{2}=-6$

নতুন মূলদ্বয়ের গুণফল, $\frac{p^2}{q}\times\frac{q^2}{p}=\frac{p^2q^2}{pq}=pq=\frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি: $x^2+6x+\frac{2}{3}=0\Rightarrow 3x^2+18x+2=0$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 6: কোন শর্তে $ax^2-bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর 5 হবে।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^2-bx+c=0$

শর্তানুসারে, সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং $\alpha+5$

মূলদ্বয়ের সমষ্টি, $2\alpha+5=-\frac{b}{a}$

$$\Rightarrow \alpha=-\frac{b}{2a}-\frac{5}{2}=-\frac{b+5a}{2a}\text{.....................}(i)$$

মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha(\alpha+5)=\frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \alpha^2+5\alpha=\frac{c}{a}\text{.........................}(ii)$$

(ii) নং এ (i) নং এর মান বসিয়ে পাই, $\left(-\frac{b+5a}{2a}\right)^2+5\left(-\frac{b+5a}{2a}\right)=\frac{c}{a}$

$\Rightarrow\frac{b^2+10ba+25a^2}{4a^2}-\frac{5b+25a}{2a}=\frac{c}{a}$

$\Rightarrow b^2+10ba+25a^2-10ab-50a^2=\frac{4a^2c}{a}$

$\Rightarrow b^2+10ba+25a^2-10ab-50a^2=4ac$

$\Rightarrow b^2-25a^2=4ac$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $b^2-25a^2=4ac$

সারসংক্ষেপ:

- একটি সমীকরণের ধ্রুবক বা চলক দ্বারা সৃষ্ট কোনো রাশিমালায় এদের অবস্থান পরিবর্তন বা বিনিময় করা সত্ত্বেও যদি রাশিটি একই রকম থাকে, তবে একে প্রতিসম ফাংশন বলা হয়।

ইউনিট মূল্যায়ন

1. সমাধান নির্ণয় করুন:

(i) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

(ii) $\sqrt{1-5x} + \sqrt{1-3x} = 2$

(iii) $\frac{9x-2}{3} + \frac{4x^2-7}{4x^2+3} = \frac{6x-1}{2}$

(iv) $\frac{x}{b} + \frac{b}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

(v) $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} = \sqrt{4x^2-18x+18}$

(vi) $\sqrt{\frac{x}{x+16}} + \sqrt{\frac{x+16}{x}} = \frac{25}{12}$

(vii) $y^2 - 6y + 9 = 4\sqrt{y^2-6y+6}$

2. যদি $ax^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α এবং β হয়, তাহলে $\frac{1}{\alpha+\beta}, \frac{1}{\alpha\beta}$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন।

3. যদি $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α এবং β হয়, তাহলে $\alpha\beta + \alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta - \alpha - \beta$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন।

4. যদি $ax^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত মনে করুন $m:n$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $mnb^2 : ac(m+n)^2$.

5. যদি $ax^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত মনে করুন $m:n$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $mnb^2 : ac(m+n)^2$.

6. কোন শর্তে $ax^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের একটি অপরটির n গুণ হবে।

উত্তরমালা

(i) $x = \pm3, \pm1$ (ii) $x = a, \frac{b^2}{a}$ (iii) $x = \pm\frac{3}{2}$ (iv) $x = 0, -16$ (v) $x = 3, \frac{17}{3}$ (vi) $x = -\frac{256}{7}, \frac{144}{7}$

(vii) $y = 1, 5, 3 \pm 2\sqrt{3}$ 2. $bcx^2 - a(b+c)x + a^2 = 0$ 3. $x^2 - 2qx + q^2 - p^2 = 0$ 6. $b^2n = ac(1+n)^2$