৬

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

Coordinate Geomitry

ভূমিকা

Introduction

জ্যামিতি (Geomerty) গণিতের একটি অতি সুপ্রাচীন শাখা। গ্রীক শব্দ (geo) মানে ভূমি বা স্থান আর মিতি (metron) মানে পরিমাপ অর্থাৎ জ্যামিতি হলো ভুমি বা স্থানের পরিমাপ। মূলত স্থানের পরিমাপের ধারণা থেকেই জ্যামিতির উৎপত্তি। প্রাচীন ইরাক, মিশর এবং সিন্ধু উপত্যাকায় খ্রিষ্টপূর্ব ৩০০০ অব্দ থেকে জ্যামিতির ব্যবহার হতো বলে প্রমাণ পাওয়া যায়। ফরাসি গণিতবিদ ও দার্শনিক Renatus Cartesius (1595-1650) জ্যামিতির নতুন শাখা স্থানাংক জ্যামিতি উদ্ধাবন করেন। তার নামের ল্যাটিন ভার্সন অনুযায়ী তার আবিষ্কৃত জ্যামিতিকে কার্তেসীয় স্থানাংক জ্যামিতি বলা হয়। এ ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে জ্যামিতির বিভিন্ন সমস্যার যেমন: দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়, ভুজ ও কোটি নির্ণয়, ত্রিভুজ বা চতুর্ভুজের বা সামন্তরিকের শীর্ষবিন্দু, সরলরেখার ঢাল, সরলরেখার সমীকরণ ইত্যাদি সমস্যার সমাধান করা হয়।

ব্যবসায় বাণিজ্যের জটিল সমস্যা সমাধানে এবং দীর্ঘমেয়াদি সিদ্ধান্ত গ্রহণে জ্যামিতির প্রয়োগ খুবই সহায়ক ও গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। যেমন: জ্যামিতির দ্বারা একক প্রতি পরিবর্তনশীল ব্যয়, আয় ও ব্যয়ের মধ্যে সম্পর্ক নিরূপণ, মোট ব্যয় নিরূপণ, লক্ষ্যমাত্রার মুনাফা নিরূপণ ইত্যাদি অতি সহজেই জানা যায়। এ ছাড়া ব্যবস্থাপকেরনির্ধারিত লক্ষ্যমাত্রার উৎপাদন করার জন্য ব্যয়ের পরিমাণ কত হবে এবং তা হতে অর্জিত মুনাফাই বা কত হবে এ সংক্রান্ত সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে জ্যামিতি খুবই গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। এ ইউনিটে সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক, রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক, সরলরেখা, বৃত্তের সমীকরণ ইত্যাদি বিষয় নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৪ দিন

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৬.১: সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক

পাঠ-৬.২: রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক

পাঠ-৬.৩: সরলরেখা

পাঠ-৬.৪: বৃত্ত ও বৃত্তের সমীকরণ

মূখ্য শব্দ	স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, সমতলে পোলার স্থানাঙ্ক, সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক, ধনাত্মক ও ঋণাত্মক স্থানাঙ্ক, বহির্বিভক্তকরণ, অন্তর্বিভক্তকরণ, সরলরেখা, ছেদবিন্দু, মূলবিন্দু, স্পর্শক, ছেদক, লম্ব, লম্ব দূরত্ব ঢাল, বৃত্ত ইত্যাদি।

পাঠ-৬.১ সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক
Cartesian and Polar Co-ordinates in the Plane

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন;
- সরলরেখায় বিভিন্ন আকার ও তাদের প্রয়োগ করতে পারবেন;
- সমান্তরাল নয় এরূপ দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করতে পারবেন;
- দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবেন।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি
Co-ordinates geometry

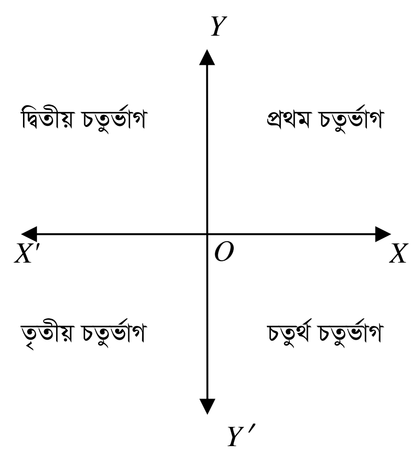
স্থানাঙ্ক জ্যামিতি হলো জ্যামিতি ও বীজগণিতের এক সুসম গঠিত রূপ। এই শাখায় জ্যামতির বিভিন্ন সমস্যাগুলোকে বীজগণিতের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে। প্রখ্যাত ফরাসি দার্শনিক ও গণিতবিদ রেনে দেকার্তে (Rene De-cartes) কে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির জনক বলা হয়। স্থানাস্ক জ্যামিতিকে বিশ্লেষণী জ্যামিতিও (Analytical Geometry) বলা হয়। স্থানাঙ্ক জ্যামিতির দুটো শাখা আছে। যথা:

(i) দ্বিঘাত জ্যামিতি বা সমতিলক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (Two dimensional geometry or plane Co-ordinates geometry)

(ii) ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি বা ঘন স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (Three dimensional geometry on solid co-ordinate geometry)

সমতলে কোনো বিন্দুর লম্ব কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Rectangular Cartesian Co-ordinates of a point in a plane)

মনে করুন, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (চিত্র-৬.১.১)। O বিন্দুর মধ্য দিয়ে ঐ সমতলে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুটি সরলরেখা XOX' ও YOY' টানা হলো। এখানে, XOX' সরলরেখাটিকে ভুজ-অক্ষ বা x-অক্ষ এবং YOY' রেখাটিকে কোটি অক্ষ বা y-কোটি অক্ষ বলা হয়। Oবিন্দুকে মূলবিন্দু বলা হয়। স্পষ্টতই, x ও y অক্ষদ্বয় সমতলটিকে চারটি অংশে ভাগ করে। যাদের প্রত্যেক অংশকে একটি চতুর্ভাগ (quadrant) বল হয়। পাশের চিত্র-৬.১.১-এ সমগ্র তলটি XOY, YOX', $X'OY'$ও $Y'OX$ এই চারটি চতুর্ভাগে বিভক্ত। এদের যথাক্রমে ১ম চতুর্ভাগ (First Quadrant), দ্বিতীয় চতুর্ভাগ (Second Quadrant), তৃতীয় চতুর্ভাগ (Third Quadrant) ও চতুর্থ চতুর্ভাগ (Fourth Quadrant) বলা হয়। এই সম্পূর্ণ সমতলটিকে কার্তেসীয় সমতল বলা হয়। রেনে দেকার্তের নামানুসারে এর নামকরণ করা হয়েছে।

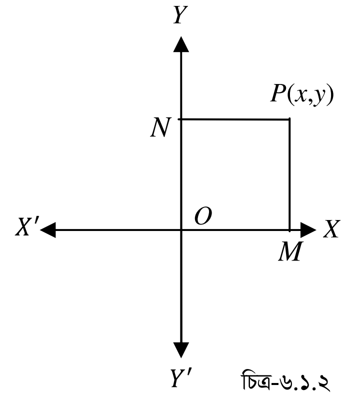


চিত্র-৬.১.১

সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক (Contesion and Ploar Co-ordinates in Plane): সংখ্যারেখায় অবস্থিত কোনো বিন্দুকে প্রকাশ করতে একটি মাত্র সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। কিন্তু সমতলস্থ কোনো বিন্দুকে নির্দেশ করতে হলে একটি যুগল (Ordered Pair) সংখ্যার প্রয়োজন হয়। সুতরাং সমতলের উপরস্থ কোনো বিন্দু নির্দেশকারী সংখ্যার সেটকে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলা হয়। ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিতে এরূপ কোনো বিন্দু নির্দেশ করতে ক্রমত্রয়ী তিনটি সংখ্যার সেট প্রয়োজন। অতএব, দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিতে দিক নির্দেশিত যে সংখ্যা যুগল কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করে সেই সংখ্যা যুগলকে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Co-ordinates) বলা হয়। সংখ্যা যুগলের প্রথমটিকে ভুজ

(Abscissa) এবং দ্বিতীয়টিকে কোটি (Ordinate) বলা হয়। বিশ্লেষণীয় জ্যামিতিতে বিভিন্ন প্রকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা আছে। যেমন: (ক) আয়তকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Rectangular Cartesian Co-ordinates) ও (খ) পোলার স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates).

(ক) আয়তকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Rectangular Cartesian Co-ordinates): মনে করুন, কার্তেসীয় সমতলে P যেকোনো বিন্দু। যেখানে XOX' ও YOY' যথাক্রমে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ এবং O বিন্দুটি মূলবিন্দু। P বিন্দু থেকে XOX' এর উপর PM এবং YOY' এর উপর PN লম্ব টানা হলো। PM ও PN যথাক্রমে P বিন্দু থেকে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ এর উপর লম্ব দূরত্ব সূচিত করে। চিত্র-৬.১.২-এ P বিন্দুটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।এখানে, Y-অক্ষ থেকে P বিন্দু দূরত্ব $= PN = OM = x$ একক এবং X অক্ষ থেকে P বিন্দুর দূরত্ব $= PM = ON = y$ একক। x কে P বিন্দুর ভুজ (abscissa) এবং y কে P বিন্দুর কোটি (ordinate) বলা হয়। সুতরাং ভুজ ও কোটির মাধ্যমে সমতলে P বিন্দুটিকে নির্দিষ্ট করার পদ্ধতিই হলো P বিন্দুর স্থানাঙ্ক। অর্থাৎ কোনো স্থির স্থানাঙ্ক (2, 3) বলতে ঐ বিন্দুর ভুজ 2 এবং কোটি 3 কে বুঝাবে।



চিত্র-৬.১.২

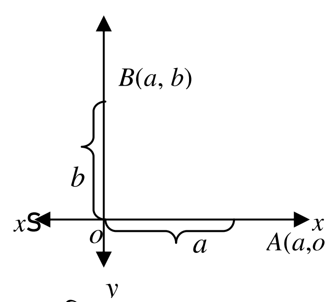
ধনাত্মক ও ঋণাত্মক স্থানাঙ্ক (Positive and Negative Co-ordinates)

রেনে দেকার্তে প্রদত্ত স্থানাস্ক ব্যবস্থায় কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের চিহ্ননিম্নলিখিত প্রথা অনুসারে নির্ধারিত হয়–প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত কোনো বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক, দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত কোনো বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ধনাত্মক; তৃতীয় চতুর্ভাগে ঐ বিন্দু থাকলে ভুজ ও কোটি উভয়েই ঋণাত্মক হবে। আবার চতুর্থ চতুর্ভাগে বিন্দুটি অবস্থিত হলে এর ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক হবে। পাশের সারণি থেকে কোনো বিন্দুর অবস্থান ও তার স্থানাঙ্ক পরিস্কার হবে।

	১ম চতুর্ভাগ	২য় চতুর্ভাগ	৩য় চতুর্ভাগ	৪র্থ চতুর্ভাগ
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-
স্থানাঙ্ক	(+,+)	(-, +)	(-, -)	(+, -)

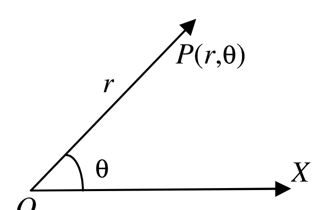
সারণি-১

সুতরাং কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকলে সেটা কোন চতুর্ভাগে তা সুনির্দিষ্ট হয়ে যায়। আবার, কোনো বিন্দুর ভুজ ও কোটির মান জানা থাকলে তার স্থানাঙ্ক ও কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত তা নির্দিষ্ট করা যাবে। মন্তব্য: x-অক্ষের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর কোটির মান শূন্য হবে। আবার, y-অক্ষের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর ভুজ এর মান শূন্য। অতএব, x-অক্ষের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a,0)$ এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, b)$।



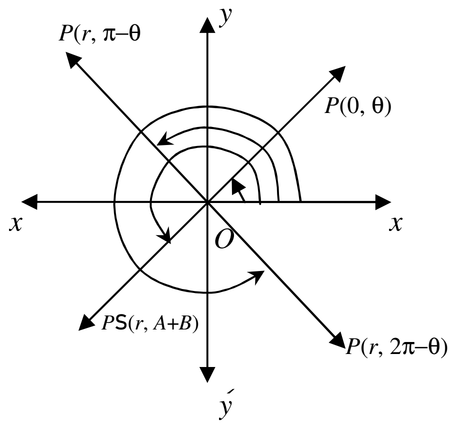
চিত্র-৬.১.৩

(খ) পোলার স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates): সমতলস্থ কোনো বিন্দুর সঠিক অবস্থার নির্ণয়ের জন্য কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ছাড়াও অন্য এক প্রকার স্থানাঙ্ক ব্যবহৃত হয়। এই পদ্ধতিতে উক্ত সমতলের উপর যেকোনো একটি বিন্দু এবং ঐ বিন্দুগামী একটি অর্ধরেখার সাহায্যে সমতলের উপর সব বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়। এটি হলো পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা। মনে করুন, OX একটি O বিন্দু থেকে নির্গত রশ্মি বা অর্ধরেখা এবং P ঐ সমতলের উপর যেকোনো বিন্দু। OX ও OP দিয়ে সৃষ্ঠ কোণ θ ধরা হলো। মনে করুন, P থেকে প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্বকে r দ্বারা প্রকাশ করা হলো। অর্থাৎ $OP = r$ এখানে, r ধনাত্মক। O বিন্দুকে বলা হয় মেরু বিন্দু (Pole)। OX অর্ধ রেখাকে বলা হয় আদি বা প্রারম্ভিক রেখা (Initial line)। অনেক সময় OX কে মেরু অক্ষও (Polar



চিত্র-৬.১.৪

axis) বলা হয়। মেরু বিন্দু থেকে সমতলের উপরস্থ যেকোনো বিন্দু P এর দূরত্বকে r দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই r কে বলা হয় ব্যাসার্ধ ভেক্টর (Radius Vector) যা একটি স্কেলার রাশির দূরত্ব প্রকাশ করে। অর্ধরেখার P বিন্দু এবং মেরুবিন্দুর সংযোগ রেখা বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে θ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। একে (θ) ভিক্টোরিয়াল কোণ (Vectorial/Angle) বলা হয়। এখন, r এবং θ সংখ্যা দুটিকে একত্রে (r,θ) আকারে লিখলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়। এই স্থানাঙ্ককেই পোলার স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinate) বলা হয়।



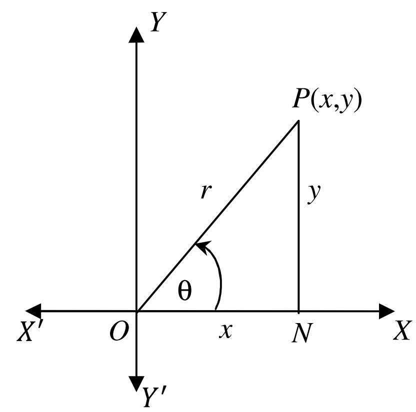
চিত্র-৬.১.৫

সমতলে কোনো বিন্দুর অবস্থান সঠিকভাবে নির্দেশ করার ক্ষেত্রে ভেক্টোরিয়াল কোণ বিশেষ গুরুত্ব বহন করে। যদিও ব্যাসার্ধ ভেক্টর পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কেবলমাত্র ধনাত্মক পূরুত্বই প্রকাশ করে। ভেক্টরিয়াল কোণ এর মান ধনাত্মক হবে যখন আদি রেখা ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে মেরু ও প্রদত্ত বিন্দুর সংযোগ রেখার সঙ্গে কোণ উৎপন্ন করে; আর যদি ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে কোণ উৎপন্ন করে তবে ভেক্টোরিয়াল কোণ ঋণাত্মক হবে। বিভিন্ন চতুর্ভাগে পোলার স্থানাঙ্ক এর সারণি নিম্নরূপ:

P এর অবস্থান	**ভিক্টোরিয়াল কোণ (ধনাত্মক)**	**ভিক্টোরিয়াল কোণ (ঋণাত্মক)**
১ম চতুর্ভাগ	(r,θ)	$(r,-2\pi\theta)$
২য় চতুর্ভাগ	$(r,\pi-\theta)$	$(r,-\pi-\theta)$
৩য় চতুর্ভাগ	$(r,\ \pi+\theta)$	$(r,-\pi+\theta)$
৪র্থ চতুর্ভাগ	$(r,\ 2\pi-\theta)$	$(r,-\theta)$

সারনি-২

সমতলে কোনো বিন্দুর লম্ব কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Relation between Cartesian and Ploar Co-ordinates): মনে করুন, XOX' এবং YOY' কার্তেসীয় সমতলে x অক্ষ ও y অক্ষ। যেখানে, O বিন্দুটি মূলবিন্দু এবং পোলার স্থানাঙ্কে মেরু বিন্দু (Pole)। ধরুন, কার্তেসীয় সমতলে $P(x,y)$ যেকোনো বিন্দু, যার পোলার স্থানাঙ্ক $(r,\ \theta)$। P থেকে OX এর উপর PN লম্ব টানুন ও OP যোগ করুন। তাহলে, $ON = x$ এবং $PN = y$; যেখানে, $OP = r$ এবং $\angle PON = \theta$.



চিত্র-৬.১.৬

এখন, $\dfrac{PN}{OP} = \sin\,\theta$ এবং $\dfrac{ON}{OP} = \cos\theta$

বা, $\dfrac{y}{r} = \sin\,\theta$ বা, $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$

বা, $y = r\sin\theta$ ....(i) বা, $x = r\cos\theta$ ....(ii)

এখন, $(\text{i})^2 + (\text{ii})^2$ $r^2\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = x^2 + y^2$

বা, $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$ [$\therefore r$, দূরত্ব নির্দেশ করে]

এবং (i) ÷ (ii) $\Rightarrow tan\theta = \dfrac{y}{x}$ বা, $\theta = tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

সুতরাং $P\,(x,y)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক হবে $(r,\ \theta)$

বা, $\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$

মন্তব্যঃ (x, y) দ্বারা গঠিত স্থানাঙ্ক হলো কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক এবং (x, y) দ্বারা গঠিত সমীকরণটি হলো কার্তেসীয় সমীকরণ।
1. (r, θ) দ্বারা গঠিত স্থানাঙ্ক পোলার স্থানাঙ্ক ও সমীকরণ হলো পোলার সমীকরণ।

উদাহরণ 1: কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \frac{\pi}{3})$ হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন, বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y)
আমরা জানি,

$x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$

$\Rightarrow x = 2\cos\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow y = 2\sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2.\frac{1}{2} = 1$ $= 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(1, \sqrt{3})$

উদাহরণ 2: $(1, -\sqrt{3})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
সমাধানঃ মনে করুন, বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ)

$\therefore r^2 = x^2 + y^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 1+3 = 4$

বা, $r = \sqrt{4} = 2$, এবং $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$\therefore \theta = tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $(2, -\frac{\pi}{3})$

উদাহরণ 3: $r = 6\cos\theta - 2\sin\theta$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $r = 6\cos\theta - 2\sin\theta$

$\Rightarrow r^2 = 6\,r\cos\theta - 2r\sin\theta$ [উভয় পক্ষকে r দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 6x - 2y$ $[x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta]$

$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$

উদাহরণ 4: $x^2 + y^2 - 6x = 0$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 6x = 0$

বা, $x^2 + y^2 = 6x$

বা, $r^2 = 6r\cos\theta$, $[\because x^2 + y^2 = r^2$ এবং $x = r\cos\theta]$

বা, $r = 6\cos\theta$

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার সমীকরণ $r = 6\cos\theta$.

দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two Points): মনে করুন, কার্তেসীয় সমতলে $P(x_1,y_1)$ এবং $Q(x_2,y_2)$ যেকোনা দুইটি বিন্দু। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব, PQ নির্ণয় করতে হবে। P ও Q বিন্দুদ্বয় থেকে OX এর উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টানুন।

$\therefore OM = x_1,\ PM = y_1$ এবং $ON = x_2,\ QN = y_2$

এখন, P, Q যোগ করুন ও P থেকে QN এর উপর PT লম্ব টানুন।

তাহলে ΔPQT থেকে, $PQ^2 = PT^2 + QT^2$

$= MN^2 + QT^2$

কিন্তু চিত্র-৬.১.৭ থেকে,

$MN = ON - OM = x_2 - x_1$

$QT = QN - TN = QN - PM$

$= y_2 - y_1$

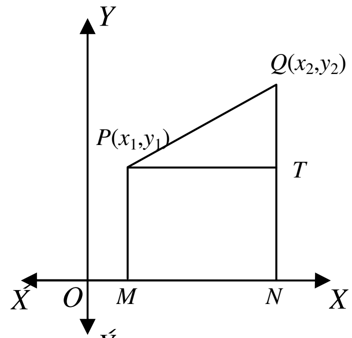
$PQ^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$

$\therefore PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

সুতরাং $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

যা বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্দেশ করে।

অর্থাৎ,দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$



চিত্র:৬.১.৭

উদাহরণ 5: (4, 5) এবং (–2, –3) বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

সমাধান: মনে করুন,P= (4,5) এবং Q = (–2, –3)

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(4+2)^2 + (5+3)^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$$

$\therefore PQ = 10$, $\therefore$ নির্ণেয় মধ্যবর্তী দূরত্ব = 10.

পোলার স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বের সূত্র : (Distance between two Points in terms of Polar Co-ordinates): ধরা যাক xy সমতলে P ও Q যেকোনো দুটি বিন্দু; সেখানে O বিন্দুটি মেরুবিন্দু। প্রারম্ভিক রেখা OX এর সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুদ্বয়ের পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (r_1, θ_1) ও (r_2, θ_2)। P, Q যোগ করা হলো। P, Q এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।

চিত্র-৬.১.৮ থেকে পাই, $OP = r_1$, $OQ = r_2$

$\angle POX = \theta_1$, $\angle QOX = \theta_2$

$\therefore \angle POQ = \angle POX - \angle QOX$

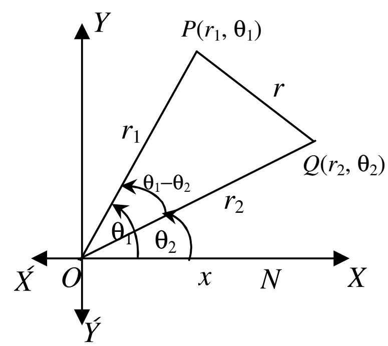
$= \theta_1 - \theta_2$ এবং $PQ = r$

$\therefore \Delta OPQ$ ত্রিভুজ থেকে পাই, $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ\cos\angle POQ$

$\therefore r^2 = r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$

অতএব, $r = \text{OP} = \sqrt{r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

সুতরাং P ও Q এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $r = \sqrt{r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$



চিত্র-৬.১.৮

উদাহরণ 6: (5, 7), (–1, –1) ও (–2, 6) বিন্দুত্রয় একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হলে এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় যথাক্রমে $A(5, 7)$, $B(-1, -1)$, $C(-2, 6)$ এবং বৃত্তের কেন্দ্র $P(x, y)$

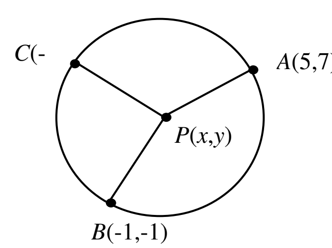
সুতরাং $PA = PB = PC$.

এখন, $PA = PB$ থেকে

$PA^2 = PB^2$

বা, $(x-5)^2 + (y-7)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$

বা, $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 74 = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2$



চিত্র:৬.১.৯

বা, $12x + 16y - 72 = 0$

$\therefore\ 3x + 4y - 18 = 0$...................(1)

আবার, $PA = PC$ থেকে, $PA^2 = PC^2$

বা, $(x-5)^2 + (y-7)^2 = (x+1)^2 + (y-6)^2$

বা, $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 74 = x^2 + y^2 + 2x - 12y + 40$

বা, $12x + 2y - 34 = 0$

$\therefore\ 28x + 4y - 68 = 0$ ....(2)

$\therefore (2) - (1)$ থেকে পাই, $25x = 50\ \therefore x = 2$

এখন, (1) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই $6+4y = 18$

$\Rightarrow 4y = 12\ \ \therefore y = 3$

সুতরাং নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3)

উদাহরণ 7: x-অক্ষ এবং $(2, -3)$) বিন্দু থেকে $(6, K)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান। K এর মান কত?

সমাধান: মনে করুন, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $P(2, -3)$ ও $Q(6, K)$.

Q থেকে x-অক্ষের উপর QR লম্ব টানুন।

এখন x-অক্ষ থেকে $Q(6, K)$ বিন্দুর দূরত্ব, $QR = |K|$

প্রশ্নানুসারে $PQ = QR$

বা, $PQ = |K|$

বা, $PQ^2 = K^2$

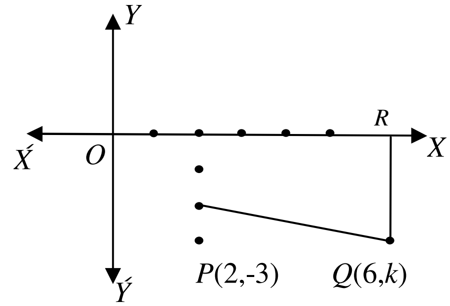
বা, $(6-2)^2 + (K+3)^2 = K^2$

বা, $16 + K^2 + 6K + 9 = K^2$

বা, $6K = -25$

$\therefore K = -\frac{25}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় K এর মান $-\frac{25}{6}$



চিত্র:৬.১.১০

সারসংক্ষেপ:

- দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
- $P(x,y)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক হবে (r, θ) বা, $\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$
- পোলার স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বের সূত্র, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

পাঠ-৬.২ রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক
Co-ordinates of a line dividing point

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

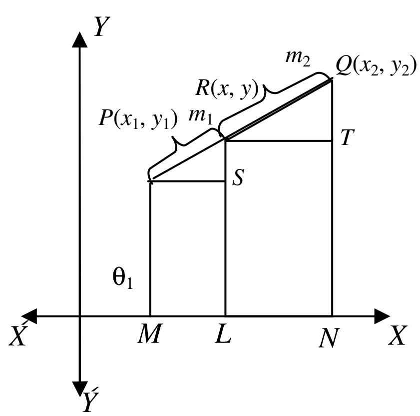
- যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখার অন্তবিভক্তকরণ বিন্দু নির্ণয় করতে পারবেন;
- যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোগ বহির্বিভক্তকারী বিন্দু নির্ণয় করতে পারবেন;
- ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় করতে পারবেন;
- ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন;
- শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।

রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক
The Co-ordinate of the line dividing point

দুটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে অপর কোনো একটি বিন্দু একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে দুইভাবে বিভক্ত করতে পারে।

যথাঃ (ক) অন্তর্বিভক্তকরণ (Internal section) (খ) বহির্বিভক্তকরণ (External section)

(ক) অন্তর্বিভক্তকরণ (Internal Section): যদি কোনো সমতলের দুটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে অপর যেকোনো একটি বিন্দু নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে তবে তাকে অন্তর্বিভক্তকরণ বলা হয়।



চিত্র-৬.২.১

মনে করুন, কোনো সমতলে $P(x_1,y_1)$ এবং $Q(x_2,y_2)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশ $R(x,y)$ বিন্দুতে $m_1:m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে। R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। যেখানে, $PR : RQ = m_1:m_2$. চিত্র-৬.২.১ থেকে, P, Q ও R বিন্দুত্রয় থেকে OX এর উপর যথাক্রমে PM, QN ও RL লম্ব টানা হলো। অতঃপর $PS\perp RL$ ও $RT\perp QN$ অংকন করা হলো।

$\therefore\ OM= x_1,\ OL = x,\ ON = x_2$

$PM = y_1,\ RL = y,\ QN = y_2$

তাহলে, $PS = ML = OL - OM = x- x_1$

$RT= LN = ON - OL = x_2 - x$

আবার, $RS = RL - SL = RL - PM = y- y_1$

$QT = QN - TN = QN - RL = y_2- y.$

এখন ΔPRS ও ΔQRT সাদৃশ্য বলে

$$\frac{PS}{RT} = \frac{RS}{QT} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2} \text{.............}(1)$$

(1) থেকে পাই, $\dfrac{PS}{RT} = \dfrac{m_1}{m_2}$

$$\Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{m_1}{m_2}$$

বা, $m_2x - m_2x_1 = m_1x_2 - m_1x$

বা, $m_2x + m_1x = m_1x_2 + m_2x_1$

বা, $x(m_1 + m_2) = m_1x_2 + m_2x_1$

$\therefore x = \dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

আবার, (1) থেকে পাই, $\dfrac{RS}{QT} = \dfrac{m_1}{m_2}$

বা, $\dfrac{y-y_1}{y_2-y} = \dfrac{m_1}{m_2}$

বা, $m_2y - m_2y_1 = m_1y_2 - m_1y$

বা, $m_2y + m_1y = m_1y_2 + m_2y_1$

বা, $y(m_1 + m_2) + m_1y = m_1y_2 + m_2y_1$

$\therefore y = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

$\therefore$অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দু R এর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত ১: যদি R, PQ এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে $m_1 = m_2$ হবে।

$\therefore P(x_1, y_1)$ এবং $P(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

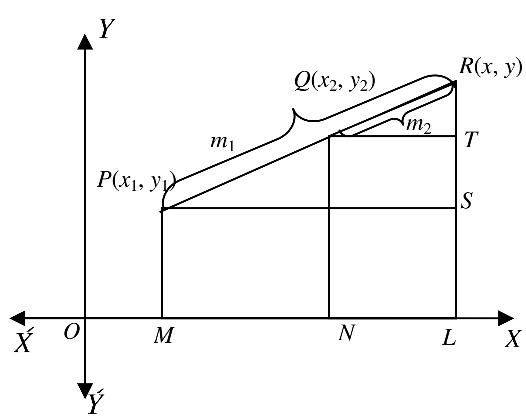
অনুসিদ্ধান্ত ২: যদি R বিন্দুটি PQ কে K: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে অর্থাৎ $PR : RQ = K:1$ হয়; তাহলে

$$x = \frac{Kx_2 + 1.x_1}{K + 1} \text{ এবং } y = \frac{Ky_2 + 1.y_1}{K + 1}$$

এমতাবস্থায় P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{Kx_2 + 1.x_1}{K + 1}, \dfrac{Ky_2 + y_1}{K + 1}\right)$ হবে।

(খ) বহির্বিভক্তকরণ (External Section): যদি কোনো সমতলের যেকোনো দুটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে অপর একটি বিন্দু নির্দিষ্ট অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে, তবে তাকে বহির্বিভক্তকরণ বলে।

মনে করুন, কোনো সমতলে $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ যেকোনো দুটি বিন্দু। P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $R(x, y)$ বিন্দুটি $m_1{:}m_2$ অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে। R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। যেখানে, $PR{:}RQ = m_1{:}m_2$ চিত্র:৬.২.২-এP, Q ও R বিন্দুত্রয় থেকে OX এর উপর যথাক্রমে PM, QN ও RL লম্ব টানুন। অতঃপর $PS \perp RL$ ও $QT \perp RL$ অঙ্কন করা হলো।



চিত্র: ৬.২.২

এখন, $OM = x_1$, $ON = x_2$, $OL = x$

$PM = y_1$, $QN = y_2$, $RL = y$

$\therefore PS = ML = OL - OM = x - x_1$

$QT = NL = OL - ON = x - x_2$

আবার, $RS = RL - SL = RL - PM = y - y_1$

$RT = RL - TL = RL - QN = y - y_2$

এখানে ΔPRS ও RQT সদৃশ্য

$\therefore \quad \dfrac{PS}{QT} = \dfrac{RS}{RT} = \dfrac{PR}{QR} = \dfrac{m_1}{m_2}$ ....(1)

(1) নং হতে $\dfrac{PS}{QT} = \dfrac{m_1}{m_2}$

বা, $\dfrac{x-x_1}{x-x_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$

বা, $m_2x - m_2x_1 = m_1x - m_1x_2$

বা, $m_2x - m_1x = m_2x_1 - m_1x_2$

বা, $x(m_2 - m_1) = m_2x_1 - m_1x_2$

$\therefore x = \dfrac{m_2x_1 - m_1x_2}{m_2 - m_1} = \dfrac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$

অনুরূপভাবে, (1) নং হতে $\dfrac{RS}{RT} = \dfrac{m_1}{m_2}$ নিয়ে পাই $y = \dfrac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

সুতরাং বিভক্তকারী বিন্দু R এর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \dfrac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$

উদাহরণ 1: (3, 1) বিন্দুটি (1, –3) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করুন, (3, 1) বিন্দুটি প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $m_1{:}m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore \quad (3, 1) = \left(\dfrac{6m_1+1.m_2}{m_1+m_2}, \dfrac{7m_1-3m_2}{m_1+m_2}\right)$

তাহলে, $3 = \dfrac{6m_1 + m_2}{m_1 + m_2}$

বা, $3m_1 + 3m_2 = 6m_1 + m_2$

বা, $3m_2 - m_2 = 6m_1 - 3m_1$

বা, $2m_2 = 3m_1$

বা, $\dfrac{2}{3} = \dfrac{m_1}{m_2}$

$\therefore m_1 : m_2 = 2{:}3$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত, 2 : 3

উদাহরণ 2: (7, –8) বিন্দুটি (3, –5) এবং (–3, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করুন, (7, –8) বিন্দুটি (3, –2) এবং (–3, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে। সুতরাং, $(7, -8) = \left(\dfrac{-3m_1 - 3m_2}{m_1 - m_2}, \dfrac{7m_1 + 2m_2}{m_1 - m_2}\right)$ তাহলে, $7 = \dfrac{-3m_1 - 3m_2}{m_1 - m_2}$

বা, $7m_1 - 7m_2 = -3m_1 - 3m_2$

বা, $7m_1 + 3m_1 = -3m_2 + 7m_2$

বা, $10m_1 = 4m_2$

বা, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} \quad \therefore m_1{:}m_2 = 2{:}5$

$\therefore$ নির্ণেয় বিভক্তকারী অনুপাত 2 : 5

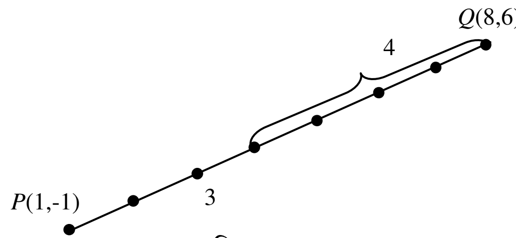
উদাহরণ 3: $P(1,-1)$ এবং $Q(8, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি 3:4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করুন, R বিন্দুটি PQ রেখাংশকে 3:4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। যেখানে, $PR : QR = 3:4$

$\therefore R$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{3\cdot 8+4\cdot 1}{3+4}, \dfrac{3\cdot 6-4\cdot 1}{3+4}\right)$

$$= \left(\frac{24+4}{7}, \frac{18-4}{7}\right) = (4, 2)$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাংক (4,2)



চিত্র:৬.২.৩

উদাহরণ 4: $P(3, 4)$ এবং $Q(5, 9)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি 2:3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

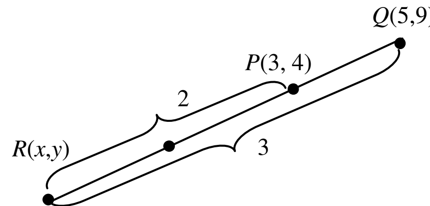
সমাধান: মনে করি, বহির্বিভক্তকারী বিন্দু R এর স্থানাঙ্ক (x, y),

যেখানে $PR : QR = 2:3$

$\therefore R$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

$$= \left(\frac{3.3-2.5}{3-2}, \frac{3.4-2.9}{3-2}\right) = \frac{9-10}{1}, \frac{12-18}{1} = (-1, -6)$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিভক্তকারী বিন্দু $(-1, -6)$



চিত্র:৬.২.৪

উদাহরণ 5: $P(-2, 3)$ ও $Q(4, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করুন, P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটি $m_1{:}m_2$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

তাহলে বিভক্তকারী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(x, y) = \left(\dfrac{4m_1-2m_2}{m_1+m_2}, \dfrac{-7m_1+3m_2}{m_1+m_2}\right)$

এখানে বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি $y = 0$ হবে।

সুতরাং $y = \dfrac{-7m_1+3m_2}{m_1+m_2}$

তাহলে, $0 = \dfrac{-7m_1+3m_2}{m_1+m_2}$

বা, $0= -7m_1 + 3m_2$

বা, $7m_1 = 3m_2$

বা, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{3}{7}$

$\therefore m_1 : m_2 = 3 : 7$

অতএব, x-অক্ষ PQ রেখাকে 3:7 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

আবার, বিভক্তকারী বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে ছেদবিন্দুর ভুজ $x = 0$ হবে।

$\therefore x = \dfrac{4m_1-2m_2}{m_1+m_2}$

বা, $0= 4m_1 - 2m_2$

বা, $4m_1 = 2m_2$

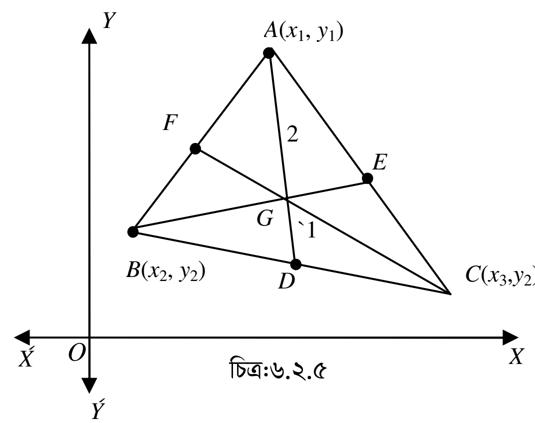
বা, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore m_1 : m_2 = 1 : 2$

সুতরাং y-অক্ষ PQ সংযোগ রেখাকে 1:2 অন্তর্বিভক্ত করে।

ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়(Determination of the co-ordinate of the centroild of a Triagle)

মনে করুন, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1,y_1)$ ও $B(x_2,y_2)$ এবং $C(x_3,y_3)$; BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F এখন AD, BE, CF মধ্যমাত্রয় অঙ্কন করা হলে তারা পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করবে এবং G ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র। G বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র:৬.২.৫

আমরা জানি, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র প্রত্যেক মধ্যমাকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore BC$এর মধ্যবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$

মনে করুন, G বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ; যেহেতু $AG : GD = 2:1$

$$\text{সুতরাং } (x, y) = \left(\frac{2.\frac{x_2+x_3}{2}+1.x_1}{2+1}, \frac{2.\frac{y_2+y_3}{2}+1.y_1}{2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{x_2+x_3+x_1}{3}, \frac{y_2+y_3+y_1}{3}\right)$$

অতএব, ΔABC এর ভরকেন্দ্র $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

উদাহরণ 6: একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(at_1^2, 2at_1\right), \left(at_2^2, 2at_2\right)$ এবং $\left(at_3^2, 2at_3\right)$ । যদি এর ভরকেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তবে দেখান যে, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$

সমাধান: মনে করুন, ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (x, y)

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{at_1^2+at_2^2+at_3^2}{3}, \frac{2at_1+2at_2+2at_3}{3}\right)$$

যদি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তবে ভরকেন্দ্রের কোটি $y = 0$ হবে। সুতরাং

$$0 = \frac{2at_1+2at_2+2at_3}{3}$$

বা, $0 = \dfrac{2a}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$ $\therefore t_1 + t_2 + t_3 = 0$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 7: একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (2, 7) এবং (6, 1) এবং এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (6, 4) ; ত্রিভুজটির তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করুন, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

যেহেতু ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রে (6, 4)

$$\therefore\ (6, 4) = \left(\frac{2+6+x}{3}, \frac{7+1+y}{3}\right) \qquad \text{বা, } (6, 4) = \left(\frac{8+x}{3}, \frac{8+y}{3}\right)$$

তাহলে, $6 = \dfrac{8+x}{3}$ এবং $4 = \dfrac{8+y}{3}$

বা, $6\times3 = 8+x$ বা, $12 = 8+y$

বা, $18-8 = x$ বা, $y = 12-8$

$\therefore\ x = 10$ $\therefore\ y = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (10, 4)

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় (Determination of area of a Triangle): মনে করুন, ΔABC এর শীর্ষ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$। ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

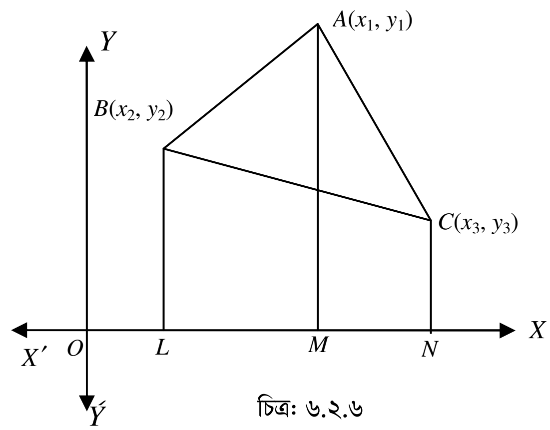
A, B ও C বিন্দুত্রয় থেকে OX এর উপর যথাক্রমে AM, BL ও CL লম্ব টানি। তাহলে,

$LN = ON - OL = x_3 - x_2$

$LM = OM - OL = x_1 - x_2$

এবং $MN = ON - OM = x_3 - x_1$

$\therefore\ \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল = ট্রাপিজিয়াম $ABLM$ এর ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়াম $AMNC$ এর ক্ষেত্রফল- ট্রাপিজিয়াম $BLNC$ এর ক্ষেত্রফল।



চিত্র: ৬.২.৬

$$\frac{1}{2}(AM+BL).LM + \frac{1}{2}(AM+CN).MN - \frac{1}{2}(BL+CN).LN$$

$$= \frac{1}{2}\{(y_1+y_2)(x_1-x_2) + (y_1+y_3)(x_3-x_1) - (y_2+y_3)(x_3-x_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_1+y_2-y_1-y_3) + x_2(y_2+y_3-y_1-y_2) + x_3(y_1+y_3-y_2-y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\}$$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল= $\dfrac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\}$ ....(1)

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{......................(2)}$$

উদাহরণ 8: a এর মান কত হলে $A(a, 2-2a)$, $B(1-a, 2a)$ এবং $C(-4-a, 6-2a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখা হবে?

সমাধান: মনে করুন, A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ। তাহলে বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ ΔABC এর ক্ষেত্রফল = 0 হবে।

বা, $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 2-2a & 1 \\ 1-a & 2a & 1 \\ -4-a & 6-2a & 1 \end{vmatrix} = 0$

বা, $\dfrac{1}{2}\{a(2a-6+2a) - (2-2a)(1-a+4+a) + 1(6-6a-2a+2a^2+8a+2a^2)\} = 0$

বা, $4a^2 - 6a - (2-2a)5 + 6 + 4a^2 = 0$

বা, $4a^2 - 6a - 10 + 10a + 6 + 4a^2 = 0$

বা, $8a^2 + 4a - 4 = 0$

বা, $2a^2 + a - 1 = 0$

বা, $2a^2 + 2a - a - 1 = 0$

বা, $2a(a+1) - 1(a+1) = 0$

বা, $(a+1)\,(2a-1) = 0$

অতএব, $a+1 = 0$ অথবা, $2a - 1 = 0$

$\therefore a = -1$ বা, $a = \dfrac{1}{2}$

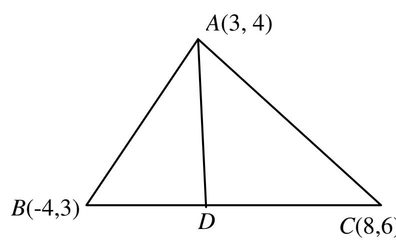
$\therefore$ নির্ণেয় a এর মান -1 অথবা, $\dfrac{1}{2}$

উদাহরণ 9: ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় A, B ও C এর স্থানাংক যথাক্রমে $(3, 4), (-4, 3)$ ও $(8, 6)$। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন এবং A থেকে BC বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\{3(3-6) - 4(-4-8) + 1(-24-24)\} = \frac{1}{2}(-9 + 48 - 48) = -\frac{9}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \dfrac{9}{2}$ বর্গ একক



চিত্র: ৬.২.৭

মনে করুন, A থেকে BC এর উপর লম্ব AD তাহলে $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times BC \times AD$

এখানে $BC = \sqrt{(8+4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(12)^2 + 3^2}$

$= \sqrt{144+9} = \sqrt{153} = \sqrt{9\times17} = 3\sqrt{17}$

$\therefore \dfrac{9}{2} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{17} \times AD$

$\Rightarrow 9 = 3 \times \sqrt{17} \times AD$

$\therefore AD = \dfrac{9}{3\times\sqrt{17}} = \dfrac{3}{\sqrt{17}} = \dfrac{3\times\sqrt{17}}{\sqrt{17}.\sqrt{17}} = \dfrac{3\times\sqrt{17}}{17}$

$\therefore$ নির্ণেয় A থেকে BC বাহুর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $\dfrac{3\times\sqrt{17}}{17}$ একক।

সারসংক্ষেপ:

- অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দু R এর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$
- ΔABC এর ভরকেন্দ্র $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

পাঠ - ৬.৩ সরলরেখা
Straight Line

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সরলরেখার ঢাল ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সরলরেখার সমীকরণের বিভিন্ন আকার ও তাদের প্রয়োগ করতে পারবেন;
- সমান্তরাল নয় এরূপ দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় ও এ অন্তর্ভুক্ত কোণের বিভিন্ন প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- কোনো দুইটি সরলরেখা অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় ও তাদের বিভিন্ন প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

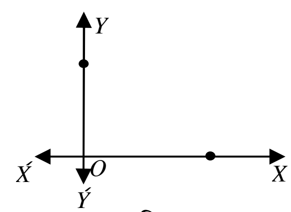
সরলরেখা
Straight Line

কোনো সমতলে অবস্থিত একটি চলমান বিন্দু যদি কোনো অবস্থানে দিক পরিবর্তন না করে চলে, তবে চলমান বিন্দুর পথকে সরলরেখা বলে। বিভিন্ন শর্তসাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণের বিভিন্ন আকার পাওয়া যায়।

1. অক্ষদ্বয়ের সমীকরণ (Equation of the axes): আমরা জানি, x-অক্ষের উপর অবস্থিত সকল বিন্দুর কোটি অর্থাৎ y এর মান $= 0$ সুতরাং x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$

আবার, y-অক্ষের উপর অবস্থিত সকল বিন্দুর ভুজ অর্থাৎ x এর মান $= 0$

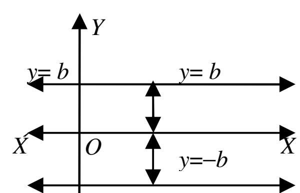
সুতরাং y-অক্ষের সমীকরণ $x = 0$



চিত্র:৬.৩.১

2. **x-অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ (Equation of any straight line parallel to x-axies):** মনে করুন, x-অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল কোনো একটি সরলরেখার x-অক্ষ থেকে দূরত্ব সর্বদা সমান। যদি দূরত্ব $= b$ হয় তবে এই সরলরেখাটি হবে $y = b =$ (ধ্রুবক), অথবা, $y = -b =$ (ধ্রুবক)

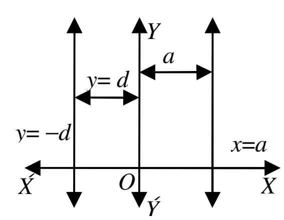
সরলরেখাটির এই সমীকরণকে ঢাল বাহু বলা হয়।



চিত্র:৬.৩.২

3. **y-অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখার সমীকরণ (Equation ofany straight line parallel to y-axis):** আমরা জানি, y-অক্ষের সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখার y-অক্ষ থেকে দূরত্ব ধ্রুবক। যদি এই দূরত্ব $= a$ হয়। তবে x-অক্ষের ধনাত্মক পাশে অবস্থিত যেকোনো y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $x = a =$ (ধ্রুবক)

আবার, x-অক্ষের ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখার সমীকরণ হবে $x = -a =$ (ধ্রুবক)



চিত্র: ৬.৩.৩

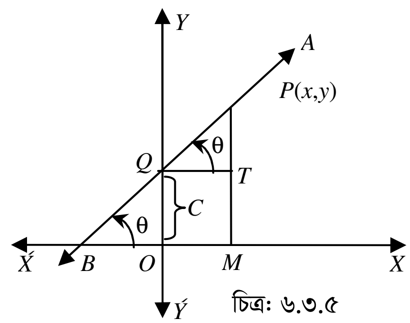
4. **মূলবিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখার সমীকরণ (Equation of any straight line pasing through the origin):** মনে করুন, PQ সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী। রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটি উপর যেকোনো বিন্দু $R(x, y)$, $RM \perp OX$ টানুন।

$\therefore\ OM = x$ এবং $RM = y$.

$\therefore$ রেখাটির ঢাল $m = \tan\theta = \tan ROM = \dfrac{RM}{OM}$

$\Rightarrow m = \dfrac{y}{x}$ $\therefore y = mx$. যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

5. y **অক্ষকে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতেছেদকরে এবং x-অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে এমন সরল রেখার সমীকরণ (Equation of a straight line which cuts off a given intercept from the *y* axis and makes a positive angle with the *x*-axis):** মনে করুন, AB যেকোনো সরলরেখা যার ঢাল $=M$.যেখানে, রেখাটির x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের θ কোণ উৎপন্ন করেছে। যদি AB রেখা y-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে $OQ = C$ ধরি।AB এর উপর যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ এখন $PM \perp OX$ এবং $QT \perp PM$ টানুন।



চিত্র: ৬.৩.৫

এখানে $\angle PQT = \angle QBO = \theta$

সুতরাং $m = \tan\theta = \tan\angle PQT = \dfrac{PT}{QT} = \dfrac{PM - TM}{OM} = \dfrac{PM - QO}{OM}$

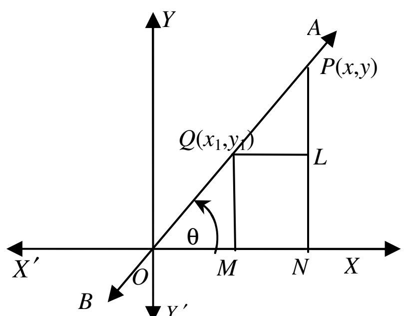
$$\Rightarrow m = \frac{y - C}{x}$$

সরলরেখাটির এই সমীকরণকে ঢাল বিন্দু আকার সমীকরণ বলে।

বা, $mx = y - C$

বা, $y = mx + C$, এটাই নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

6. m **ঢাল বিশিষ্ট একটি সরলরেখা যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ (Equation of *m* slpoe straight line which passes through the point (x_1, y_1)):** মনে করুন, AB যেকোনো একটি সরলরেখা। রেখাটি X অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে। তাহলে, $m = \tan\theta$. রেখাটির উপর যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $Q(x_1, y_1)$, AB সরলরেখাটি Q বিন্দুগামী। তাহলে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে। ধরুন, রেখাটির উপর যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ এখন $PN \perp OX$ ও $QM \perp OX$ টানুন। অতঃপর Q থেকে PN এর উপর QL লম্ব টানুন।



চিত্র: ৬.৩.৬

$\therefore \Delta PQL$ হতে পাই, $\tan\theta = \dfrac{PL}{QL} = \dfrac{PN - LN}{MN} = \dfrac{PN - QM}{ON - OM}$

বা, $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

বা, $m(x - x_1) = y - y_1$

$\therefore$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

7. **দুইটি নির্দিষ্ট (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ (Equation of straight line which passes through two given points (x_1, y_1) and (x_2, y_2)):** মনে করুন, AB যেকোনো সরলরেখা যা $P(x_1, y_2)$ ও $Q(x_2, y_2)$ যেকোনো দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী।

$\therefore$ সরলরেখাটির ঢাল, $y = mx + c$..........(i)

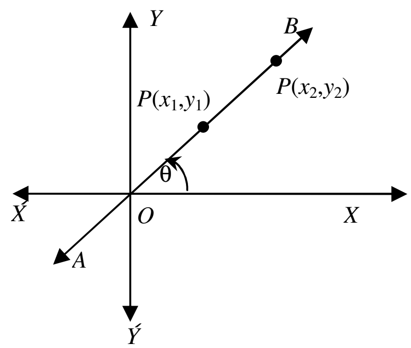
যেহেতু (i) নং রেখাটি (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী। তাহলে,

$\therefore y_1 = mx_1 + c$..........(ii) এবং $y_2 = mx_2 + c$..........(iii)

এখন, (i) – (ii) $\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$...........(iv)

এবং (ii) – (iii) $\Rightarrow y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$............(v)

(iv) নং হতে পাই $m = \dfrac{y - y_1}{(x - x_1)}$



চিত্র: ৬.৩.৭

এখন m এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই, $y_1 - y_2 = \dfrac{y - y_1}{(x - x_1)}(x_1 - x_2)$

বা, $(x - x_1)(y_1 - y_2) = (y - y_1)(x_1 - x_2)$

বা, $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_{2\,1}} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$ যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

8. দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় (Find the angles between two particular straight lines):

চিত্র: ৬.৩.৮ অনুযায়ী AB এবং AC নির্দিষ্ট সরলরেখারদ্বয়, যাদের সমীকরণ যথাক্রমে $y = m_1 x + c_1$ এবং $y = m_2 x + c_2$ ।

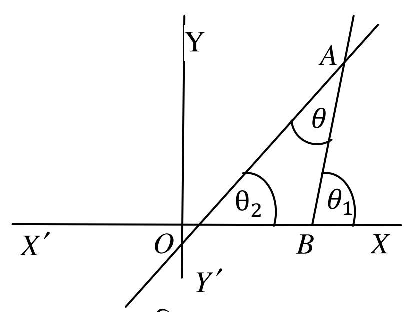
মনে করুন, সরলরেখা দুটি অক্ষদ্বয়ের যোগবোধক দিকের সাথে যথাক্রমে θ_1 এবং θ_2 কোণদ্বয় উৎপন্ন করে, $\therefore m_1 = \tan\theta_1$ এবং $m_2 = \tan\theta_2$

মনে করুন, সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ

চিত্র: ৬.৩.৮ হতে পাই, $\theta + \theta_2 = \theta_1 \therefore \theta = \theta_1 - \theta_2$

আবার, $\therefore \theta = \theta_2 - \theta_1 = -(\theta_1 - \theta_2)$ যখন $\theta_2 > \theta_1$

$\therefore \theta = \pm(\theta_1 - \theta_2)$



চিত্র: ৬.৩.৮

$$\therefore \tan\theta = \pm\tan(\theta_1 - \theta_2) = \pm\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

বা, $\tan\theta = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$$\therefore \theta = \pm\tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

উল্লেখ্য যে, দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত এবং দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত

$\tan\theta = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

বা, $\tan 0^0 = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

বা, $\dfrac{0}{1} = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

বা, $m_1 - m_2 = 0$

$\therefore m_1 = m_2$

$\tan\theta = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

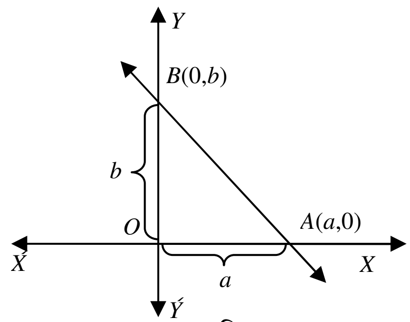
বা, $\cot 90^0 = \pm\dfrac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2}$

বা, $0 = \pm\dfrac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2}$

বা, $1 + m_1 m_2 = 0$

$\therefore m_1 m_2 = -1$

9. **অক্ষদ্বয়ের ছেদক অংশ দেয়া থাকলে সরলরেখার সমীকরণ (Equation of a straight line when the intercepting part of the two axes are given):** মনে করুন, AB যেকোনো একটি সরলরেখা। সরলরেখাটি x-অক্ষ থেকে a এবং y-অক্ষ থেকে b পরিমাণ অংশ ছেদ করে। যেহেতু, রেখাটি x-অক্ষ থেকে a পরিমাণ অংশ ছেদ করে। সুতরাং x-অক্ষের ছেদবিন্দু A এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$। আবার, অনুরূপভাবে y-অক্ষের ছেদবিন্দুর B এর স্থানাঙ্ক $(0, b)$.



চিত্র:৬.৩.৯

$\therefore A$ও B বিন্দুগামী AB সরলরেখাটির সমীকরণ, $\dfrac{y-0}{0-b}=\dfrac{x-a}{a-0}$

বা, $\dfrac{y}{-b}=\dfrac{x-a}{a}$

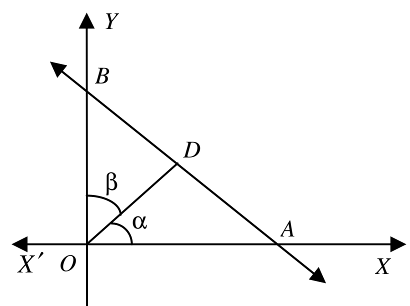
বা, $\dfrac{y}{-b}=\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{a}$

বা, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,$

অর্থাৎ, $\dfrac{x}{x-\text{অক্ষের ছেদক অংশ}}+\dfrac{y}{y-\text{অক্ষের ছেদক অংশ}}=1$

10. **লম্ব আকার সমীকরণ (Equation of Perpendiculuar form):** মনে করুন, চিত্র: ৬.৩.১০-এ মূলবিন্দু O থেকে AB যেকোনো সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য P অর্থাৎ $OD = P$ এবং $\angle AOD=\alpha$ তাহলে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র: ৬.৩.১০

ΔAOD থেকে পাই, $\cos\alpha=\dfrac{OD}{AO}$

বা, $OA=\dfrac{OD}{\cos\alpha}$

$\therefore\ OA=\dfrac{P}{\cos\alpha}$

তাহলে AB রেখার x-অক্ষের ছেদবিন্দু A এর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{P}{\cos\alpha},0\right)$

আবার, ΔBOD থেকে পাই, $\cos(90°-\alpha)=\dfrac{OD}{\cos\alpha}$

বা, $OB=\dfrac{OD}{\cos(90°-\alpha)}$

$\therefore OB=\dfrac{OD}{\sin\alpha}$

$\therefore AB$ রেখা দ্বারা y-অক্ষের ছেদবিন্দু B এর স্থানাঙ্ক $B\left(0,\dfrac{P}{\sin\alpha}\right)$

এখন A ও B বিন্দুগামী AB সরলরেখার সমীকরণটি, $\dfrac{x}{\dfrac{P}{\cos\alpha}}+\dfrac{y}{\dfrac{P}{\sin\alpha}}=1$

বা, $\dfrac{x\cos\alpha}{P}+\dfrac{y\sin\alpha}{P}=1$

$\therefore x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ একে লম্ব আকারের সরলরেখার সমীকরণ বলা হয়।

উদাহরণ 1: $\dfrac{2}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট কোনো একটি সরলরেখা $(-2, 3)$ বিন্দুগামী হলে সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, সরলরেখার ঢাল, $m = \dfrac{2}{3}$ ও প্রদত্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1, y_1) = (-2, 3)$

আমরা জানি, m ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখা (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\therefore y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

বা, $3y - 9 = 2x - 4$

বা, $2x - 3y + 13 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ. $2x - 3y + 13 = 0$

উদাহরণ 2: $x + y - 5 = 0$ ও $3x - 2y = 6$ সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী যে সরলরেখাটি $(1, -1)$ বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধন: প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়- $x + y - 5 = 0$ ....(i)

$3x - 2y - 6 = 0$ ....(ii)

(i) নং ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখার সমীকরণ-

$(x+y - 5) + K(3x - 2y - 6) = 0$..................(iii)

(iii) নং সরলরেখাটি $(1, -1)$ বিন্দুগামী।

সুতরাং $(1-1-5) + K(3.1+2.1-6) = 0$

বা, $-5 + K(-1) = 0$

বা, $K = -5$

এখন, K এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই–

$(x + y - 5) - 5(3x - 2y - 6) = 0$

বা, $x + y - 5 - 15x + 10y + 30 = 0$

বা, $-14x + 11y + 25 = 0$

$\therefore 14x - 11y - 25 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $14x - 11y - 25 = 0$

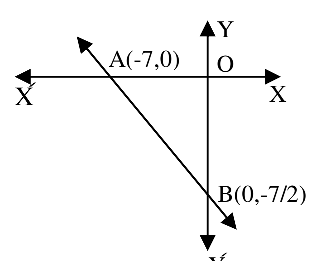
উদাহরণ 3: $x+2y+7 = 0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। উপরিউক্ত খণ্ডিতাংশ কোণের বর্গের বাহু হলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ,

$x+2y+7 = 0$

বা, $x + 2y = -7$

$\therefore \dfrac{x}{-7}+\dfrac{y}{\frac{-7}{2}}=1$



চিত্র:৬.৩.১

সুতরাং, রেখাটি দ্বারা x-অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$A\ (-7,0)$ ও y-অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $B\left(0,-\frac{7}{2}\right)$

$\therefore AB$ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-7+0}{2},\frac{0-\frac{7}{2}}{2}\right) = \left(\frac{-7}{2},\frac{-7}{4}\right)$

উপরিউক্ত খণ্ডিতাংশ AB কোনো বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল

$= AB^2 = (-7-0)^2 + \left(0+\frac{7}{2}\right)^2 = 49 + \frac{49}{4} = \frac{196+49}{4} = \frac{245}{4} = 61\frac{1}{4}$ বর্গ একক।

উদাহরণ 4: $3x - 4y - 12 = 0$ সরলরেখার সমীকরণটিকে নিম্নলিখিত আকারগুলোতে রূপান্তর করুন:

(i) $y = mx + c$ (ii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (iii) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$

সমাধান: (i) প্রদত্ত সমীকরণটি $3x - 4y - 12 = 0$

বা, $4y = 3x - 12$

$\therefore y = \frac{3}{4}x - 3,$ যা $y = mx + c$ এর

অনুরূপ, যেখানে, $m = \frac{3}{4}$ এবং $C = -3$

(ii) প্রদত্ত সমীকরণ $3x - 4y - 12 = 0$

বা, $3x - 4y = 12$

বা, $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$ যা $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এর অনুরূপ আকার।

যেখানে x-অক্ষের ছেদতাংশ $a = 4$ এবং

y অক্ষের ছেদিতাংশ $b = -3$

(iii) প্রদত্ত সমীকরণ $3x - 4y = 12$

বা, $\frac{3}{5}x - \frac{4y}{5} = \frac{12}{5}$

বা, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$, যেখানে, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ এবং $P = \frac{12}{5}$

তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত (The condition for three straight lines to be concurrent): মনে করুন,তিনটি সরলরেখার সমীকরণ যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এবং $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হওয়ার শর্ত নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে, যদি যেকোনো দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু দিয়ে অপর সরলরেখাটি অতিক্রম করে অর্থাৎ তৃতীয় রেখাটি সিদ্ধ হয়।

এখন, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

সমীকরণদ্বয় এ বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\therefore x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ এবং } y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

তাহলে প্রথম ও দ্বিতীয় রেখার ছেদবিন্দু $(x, y) = \left(\dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \dfrac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$

এখন ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দিয়ে তৃতীয় সমীকরণ $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ সিদ্ধ হলে সমীকরণত্রয় সমবিন্দু হবে।

সুতরাং ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক তৃতীয় সমীকরণে বসিয়ে পাই–

$$a_3\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + c_3 = 0$$

বা, $a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - a_1c_2) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$

বা, $a_3(b_1c_2 - b_2c_1) - b_3(a_1c_2 - c_1a_2) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ যা তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত।

দুইটি সরলরেখা অভিন্ন হওয়ার শর্ত (Condition for two straight lines to be identical): মনে করুন, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ যেকোনা দুইটি সরলরেখার সমীকরণ। সরলরেখাদ্বয় অভিন্ন হওয়ার শর্ত নির্ণয় করতে হবে।

১ম সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ থেকে পাই,

$$a_1x + b_1y = -c_1$$

বা, $\dfrac{a_1x - b_1y}{-c_1} = 1$

বা, $\dfrac{a_1}{-c_1}x + \dfrac{b_1}{-c_1}y = 1$

$\therefore \dfrac{x}{\frac{-c_1}{a_1}} + \dfrac{y}{\frac{-c_1}{b_1}} = 1$ ....(i)

আবার, ২য় সমীকরণ থেকে পাই,

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

বা, $a_2x + b_2y = -c_2$

বা, $\dfrac{a_2}{-c_2}x + \dfrac{b_2}{-c_2}y = 1$

বা, $\dfrac{x}{\frac{-c_2}{a_2}} + \dfrac{y}{\frac{-c_2}{b_2}} = 1$ ....(ii)

যেহেতু (i) ও (ii) সমীকরণ একই সরলরেখা নির্দেশ করে, সুতরাং রেখাদ্বয়ের x ও y-অক্ষের ছেদতাংশের পরিমাণ সমান হবে। অর্থাৎ, $-\dfrac{c_1}{a_1} = -\dfrac{c_2}{a_2}$ এবং $-\dfrac{c_1}{b_1} = -\dfrac{c_2}{b_2}$

বা, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ ....(iii) বা, $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ ....(iv)

সুতরাং (iii) নং ও (iv) নং থেকে পাই

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

অতএব, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় অভিন্ন হবে যদি $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ হয়।

উদাহরণ 5: $ax + by + c = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে P এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$..............(i)

$ax + by = -C$ ....(ii)

যেহেতু (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করে।

সুতরাং $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\ \alpha}{b} = \frac{P}{-c}$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{Pa}{-c}\ ,\ \sin\alpha = \frac{Pb}{-c}$$

আমরা জানি, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

বা, $\frac{P^2a^2}{c^2} + \frac{P^2b^2}{c^2} = 1$

বা, $P^2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) = 1$

$$\therefore\ P^2 = \frac{c^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow P = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

উদাহরণ 6: $ax + by + c = 0$ রেখাটি $bx + cy + a = 0$ এবং $cx + ay + b = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে গেলে প্রমাণ করুন যে, $a+b+c = 0$.

সমাধান: প্রদত্ত সরলরেখাত্রয়, $ax + by + c = 0$ ....(i)

$bx + cy + a = 0$..............(ii)

এবং $cx + ay + b = 0$ ....(iii)

(i) নং রেখাটি (ii) নং ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী হলে, রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে।

সুতরাং $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$ হবে

বা, $a(bc - a^2) - b(b^2 - ac) + c(ab - c^2) = 0$

বা, $abc - a^3 - b^3 + abc + abc - c^3 = 0$

বা, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

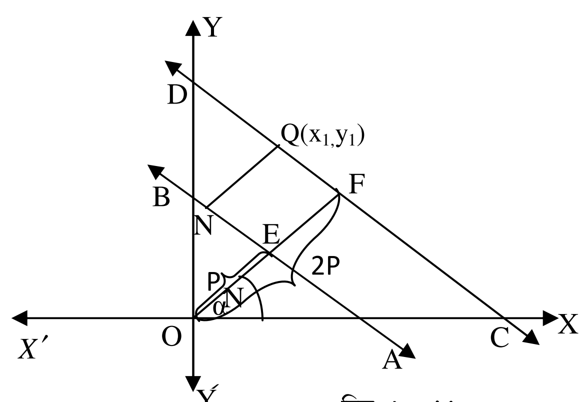
বা, $(a+b+c)^3 = 0$, $\therefore a+b+c = 0$

লম্ব দূরত্ব (Perpendicular distance): (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $Ax+By+C=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।

মনে করুন, AB সরলরেখাটির সমীকরণ

$Ax+By+C=0$.........(i)

AB সরলরেখার সমতলে $Q(x_1,y_1)$ যেকোনো বিন্দু। Q থেকে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব QN নির্ণয় করতে হবে। ধরুন, AB সররেখাটি x-অক্ষের সঙ্গে α কোণ তৈরি করে ও মূলবিন্দু থেকে এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য P তাহলে AB সরলরেখাটির লম্ব আকারের সমীকরণ হবে, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - P = 0$ ....(ii)



চিত্র: ৬.৩.১২

যেহেতু (i) নং ও (ii) নং সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করে। সুতরাং, $\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = \frac{-P}{C} = K$ (ধরুন)

$\therefore \cos\alpha = AK,\ \sin\alpha = BK$ এবং $P = -CK$

$\therefore \cos^2\alpha = (AK)^2,\ \sin^2\alpha = (BK)^2$

আমরা জানি, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

বা, $(AK)^2 + (BK)^2 = 1$

বা, $K^2(A^2+B^2) = 1$

বা, $\left(-\dfrac{P}{C}\right)^2 (A^2+B^2) = 1$

বা, $\dfrac{P^2}{C^2}\ (A^2+B^2) = 1\ X'$

বা, $P^2 = \dfrac{C^2}{A^2+B^2}$

$\therefore\ P = \pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

সুতরাং, মূলবিন্দু O থেকে AB রেখায় লম্ব দূরত্ব $= \left|\pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

$$P = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

এখন Q বিন্দুর মধ্যে AB এর সমান্তরাল CD রেখা অঙ্কন করুন, যার সমীকরণ হবে $Ax + By + K' = 0$ ....(ii)

রেখাটি $Q(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী বলে, $Ax_1 + By_1 + K' = 0$

বা, $K' = -(Ax_1 + By_1)$

অতএব, মূলবিন্দু O থেকে (ii) এবং রেখার লম্ব দূরত্ব P' হলে,

$$P' = \frac{K'}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$\therefore\quad QN = FE = OF - OE$

$$= P' - P = \frac{K'}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{K'-C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-(Ax_1+By_1)-C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-(Ax_1+By_1+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{-(Ax_1+By_1+C)}{\sqrt{A^2+B^2}} = \left|\dfrac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

উদাহরণ 7: (2,3) বিন্দু থেকে $4x + 3y - 9 = 0$ সরলরেখাটির লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ লম্ব দূরত্ব= $\left|\dfrac{4.2+3.3-9}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\dfrac{8+9-9}{5}\right| = \dfrac{8}{5}$

দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় (To determine the perpendicular distance between two parallel straight lines): **১ম ক্ষেত্রেঃ** যখন সরলরেখাদ্বয় মূলবিন্দুর একই পার্শ্বে থাকে চিত্রঃ ৬.৩.১৩।

মনে করুন, সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$

এখন মূলবিন্দু থেকে $ax + by + c_1 = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব d_1 হলে, $d_1 = \dfrac{c_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ যখন $c_1 > 0$

অথবা, $d_1 = \dfrac{-c_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$; যখন $c_1 < 0$

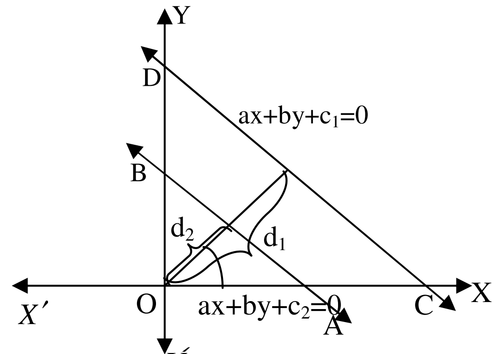
আবার মূলবিন্দু থেকে $ax + by + c_2 = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব d_2

হলে, $d_2 = \dfrac{c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, যখন $c_2 > 0$

অথবা, $d_2 = \dfrac{-c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; যখন $c_2 < 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= | d_1 - d_2 | = \frac{c_1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{c_2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



চিত্র: ৬.৩.১৩

২য় ক্ষেত্রে: যখন সরলরেখাদ্বয় মূলবিন্দুর দুই পার্শ্বে অবস্থিত চিত্রঃ ৬.৩.১৪ মনে করি, $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ সরলরেখা। যেহেতু সরলরেখাদ্বয় মূলবিন্দুর দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত সুতরাং c_1 ও c_2 বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

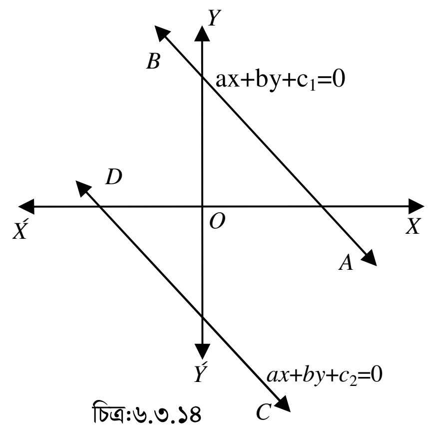
ধরুন $c_1 > 0$ ও $c_2 < 0$, এখন $d_1 = \dfrac{c_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং $d_2 = \dfrac{-c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

সুতরাং সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= d_1 + d_2 =$

$$\frac{c_1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{c_2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Remark: $c_1 < 0$ ও $c_2 > 0$ হলে, $d_1 = \dfrac{-c_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং $d_2 = \dfrac{c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব $d_1 + d_2$



চিত্র:৬.৩.১৪

উদাহরণ 8: $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান: সমীকরণদ্বয় $4x - 3y + 2 = 0$ এবং

$$8x - 6y - 9 = 0$$

$$\text{বা, } 4x - 3y - \frac{9}{2} = 0$$

অতএব, নির্ণেয় দূরত্ব $\left|\dfrac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\dfrac{2-\left(-\frac{9}{2}\right)}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\dfrac{\frac{4+9}{2}}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\dfrac{\frac{13}{2}}{5}\right| = \dfrac{13}{10}$

উদাহরণ 9: একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে। মূলবিন্দু হতে রেখাটির দূরত্ব 6 একক। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, সরলরেখাটির সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

যেহেতু অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের অংশ ছেদ করে। সুতরাং $a = b$

$\therefore$ সমীকরণটি $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1$ (যেখানে $a > 0$)

বা, $x + y = a$ ....(i)

আবার, মূলবিন্দু (0, 0) থেকে (i) নং এর লম্ব দূরত্ব = 6

$$\therefore \quad \left|\frac{0+0-a}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = 6, \Rightarrow \left|\frac{-a}{\sqrt{2}}\right| = 6, \quad \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$$

এখন a এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x + y = 6\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $x + y = 6\sqrt{2}$

উদাহরণ 10: (1, –2) বিন্দু থেকে 4 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 1 = 0$ রেখাটির উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $3x - 4y + 1 = 0$...........(i)

(i) নং এর উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ $3x - 4y + K = 0$.....(ii)

প্রশ্নমতে, (1, –2) বিন্দু থেকে (i) নং রেখার উপর লম্ব দূরত্ব = 4

$$\therefore \left|\frac{4.1+3.(-2)+K}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = 4$$

বা, $\left|\frac{K-2}{5}\right| = 4$

বা, $\frac{K-2}{5} = \pm 4$

বা, $K - 2 = \pm 20$

$\therefore K = 22, -18$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ $4x + 3y + 22 = 0$ এবং $4x + 3y - 18 = 0$

সারসংক্ষেপ:

- x-অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $y = b$ এবং y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $x = a$.
- একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$
- অক্ষদ্বয়ের ছেদক অংশ দেয়া থাকলে সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হবার শর্ত, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

পাঠ-৬.৪ বৃত্ত ও বৃত্তের সমীকরণ
Circle and Equation of Circles

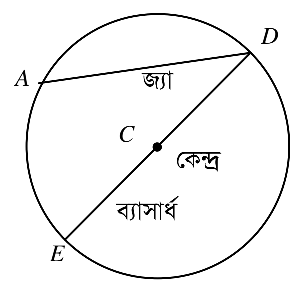
উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বৃত্ত কী বর্ণনা করতে পারবেন;
- বৃত্তের সমীকরণ ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- বৃত্তের বৈশিষ্ট্য লিখতে পারবেন;
- সংগঠক হিসেবে i কিভাবে ব্যবহৃত হয় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

বৃত্ত
Circle

কোনো সমতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সর্বদা সমান দূরত্বে চলমান বিন্দু সমূহের সঞ্চারপথকে বৃত্ত বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বৃত্তের কেন্দ্র বলা হয়। একে সাধারণত C দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নির্দিষ্ট দূরত্বটিকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলা হয়। বৃত্তের পরিধির উপরিস্থিত যে কোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ কেন্দ্রগামী না হলে রেখাংশটিকে বৃত্তের জ্যা বলা হয়। আবার, বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ কেন্দ্রগামী হলে রেখাংশটিকে ব্যাস বলা হয়। পাশের চিত্রে, C বৃত্তের কেন্দ্র, AD জ্যা এবং DE ব্যাস। ব্যাসার্ধ হলো ব্যাসের অর্ধেক দৈর্ঘ্য। অর্থাৎ, $CD = CE =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

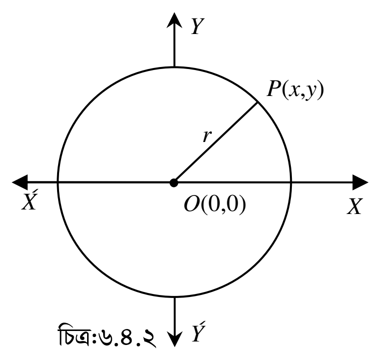


চিত্র: ৬.৪.১

বৃত্তের সমীকরণ (Equation of a circle): একটি বৃত্ত যে কয়টি শর্তের অধীনে চলে তার সমান সংখ্যক চলক নিয়ে শর্ত ও চলকের মধ্যে বীজগাণিতিক সম্পর্ক স্থাপন করা হলে যে সমীকরণ পাওয়া যায়, তাকে বৃত্তের সমীকরণ বলা হয়।

মনে করুন,কোনো সমতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (যাকে বৃত্তের কেন্দ্র বলা হয়) $O(0,0)$ এবং নির্দিষ্ট দূরত্ব $= r$ (যাকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলা হয়)। ধরা যাক, বৃত্তের পরিধির উপরস্থ যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ তাহলে $OP = r$ (বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$$\Rightarrow OP^2 = r^2$$
$$\Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$
$$\therefore (x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$; একে মূলবিন্দুতে কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ বলা হয়। যার ব্যাসার্ধ $= r$. যদি বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) বিন্দুতে ও ব্যাসার্ধ r হয় তবে বৃত্তের সমীকরণটি হবে, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$; এই আকারকে সমীকরণের বৃত্তের আদর্শ আকারও বলা হয়।



চিত্র:৬.৪.২

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ (General Equation of a Circle): একটি বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ হলো একটি বৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকারের পরিবর্তিত একটি রূপ। আমরা জানি, (h, k) কেন্দ্র ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের আদর্শ সমীকরণটি হলো– $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

বা, $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$

বা, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ....(i)

সমীকরণ (i) কে একটি বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ বলা হয়। যেখানে, $g = -h, f = -k$ এবং $c = h^2 + k^2 - r^2$

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ থেকে কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় (To find the centre and radius of a circle from the general equation of circle): আমরা জানি, একটি বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ হলো– $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বা, $x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 - g^2 - f^2 + c = 0$

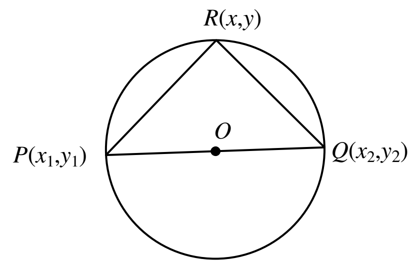
বা, $(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$

$$\therefore \{x-(-g)\}^2 + \{y-(-f)\}^2 = \left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2$$

বৃত্তের আদর্শ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ ও ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে ব্যাস ধরে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (Find the equation of a circle considering two vertices of a line as a diameter): মনে করুন, PQ রেখাংশটি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস এবং P ও Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)

ধরা যাক, বৃত্তের পরিধির উপরস্থ যেকোনো বিন্দু $R(x, y)$ এখন P, R ও Q,R যোগ করা হলো।



চিত্রঃ ৬.৪.৩

$\therefore \angle PRQ = 90°$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore PR$ রেখার ঢাল, $m_1 = \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ এবং QR রেখার ঢাল, $m_2 = \dfrac{y-y_2}{x-x_2}$

যেহেতু $\angle PRQ = 90°$ সুতরাং $m_1m_2 = -1$

বা, $\left(\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\right)\left(\dfrac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$

বা, $(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$

$\therefore$ $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$, যা নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

উদাহরণ 1: $2x^2 + 2y^2 + 3x - 5y - 2 = 0$ বৃত্তের সমীকরণ থেকে বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $2x^2 + 2y^2 + 3x - 5y - 2 = 0$

বা, $x^2 + y^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}y - 1 = 0$

বা, $x^2 + 2.x.\dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + y^2 - 2.\dfrac{5}{4}.y + \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{9}{16} - \dfrac{25}{16} - 1 = 0$

বা, $\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2 = 1 + \dfrac{9}{16} + \dfrac{25}{16} = \dfrac{16+9+25}{16}$

বা, $\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{50}{16}$

$\therefore \left\{x - \left(-\dfrac{3}{4}\right)\right\}^2 + \left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{4}\right)^2$

সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র $\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$ ও ব্যাসার্ধ $= \dfrac{2\sqrt{5}}{4}$

উদাহরণ 2: $(3,7)$ ও $(9, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $A \equiv (3, 7)$ ও $B \equiv (9, 1)$

$\therefore AB$ কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বত্তের সমীকরণ, $(x-3)(x-9) + (y-7)(y-1) = 0$

বা, $x^2 - 3x - 9x + 27 + y^2 - 7y - y + 7 = 0$

বা, $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$

উদাহরণ 3: $(2, 3)$, $(16, 1)$ এবং $(16, 3)$ বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.............(i)

যেহেতু (i) নং বৃত্তটি $(1, 3)$ $(16, 1)$ এবং$(16, 3)$ বিন্দুগামী।

সুতরাং $13 + 4g + 6f + c = 0$...................(ii)

$257 + 32g + 2f + c = 0$.............(iii)

এবং $265+32g+6f+c = 0$...............(iv)

(iii) নং সমীকরণ থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$244+28g - 4f = 0$ ....(v)

(iv) নং সমীকরণ থেকে (iii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$8+4f = 0$

$\therefore f = -2$

f এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই, $g = -9$

আবার, g ও f এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই $c = 35$

সুতরাং নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 35 = 0$

সমকেন্দ্রিক বা এককেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণ (Equation of concentric circles): যদি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র (h,k) ও ব্যাসার্ধ a হয়, তবে বৃত্তের সমীকরণ হবে $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

বা, $x^2 + y^2 - 2hx - 2yk + h^2 + k^2 = a^2$

$\therefore x^2 + y^2 - 2hx - 2yk + (h^2 + k^2 - a^2) = 0$................(i)

আবার, যদি বৃত্তের কেন্দ্র একই হয় অর্থাৎ সমকেন্দ্রিক বা এককেন্দ্রিক হয়, তবে ব্যাসার্ধ ভিন্ন হলেই অপর একটি বৃত্ত পাওয়া যাবে।

ধরি, অপর বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= b$.

$\therefore$ সমীকরণটি হবে, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = b^2$

বা, $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = b^2$

বা, $x^2 + y^2 - 2hx - 2yk + h^2 + k^2 - b^2 = 0$............ (ii)

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ থেকে লক্ষ্য করা যায় যে, সমকেন্দ্রিক বা এককেন্দ্রিক বৃত্তগুলোর সমীকরণে শুধুমাত্র ধ্রুবক রাশির পরিবর্তন হয়। অর্থাৎ

(i) নং এর ধ্রুবক রাশি $= h^2 + k^2 - a^2 = c$ (ধরি) এবং (ii) এর ধ্রুবক রাশি $= h^2 + k^2 - b^2 = c_1$ (ধরি)

$\therefore$(i) নং বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ হলে

(ii) নং সমকেন্দ্রিক বা এককেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণটি হবে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c_1 = 0$.

উদাহরণ 4: (4, 5) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়, ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র (4, 5)

প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

বা, $x^2 + 2.x.2 + 2^2 + y^2 - 2.y.3 + 3^2 - 25 = 0$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-2, 3)$

যেহেতু নির্ণেয় বৃত্তটি $(-2, 3)$, কেন্দ্রগামী।

সুতরাং নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-4)^2 + (y-5)^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2$

বা, $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 40$

$\therefore x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$

উদাহরণ 5: একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2, -1)$ বিন্দুগামী।

সমাধান: প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$..............(i)

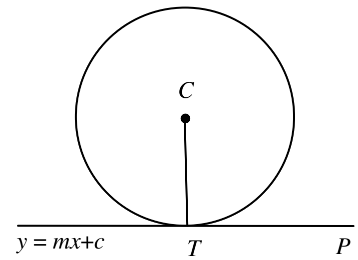
ধরা যাক, (i) নং বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 5y + c = 0$..............(ii)

(ii) নং বৃত্তটি $(2, -1)$ বিন্দুগামী।

সুতরাং $4 + 1 - 8 - 5 + c = 0$, বা, $c = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 8 = 0$

একটি সরলরেখা কোনো একটি বৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত নির্ণয় (Find the condition that any straight line be a tangent of a circle): মনে করুন, $x^2+y^2 = a^2$ যেকোনো বৃত্তের সমীকরণ এবং $y= mx+C$ যেকোনো একটি সরলরেখা। সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হবার শর্ত নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র:৬.৪.৪

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(0,0)$ ও ব্যাসার্ধ $= a$

এখানে, $y= mx+C$ সরলরেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক হবে যদি ও কেবল যদি কেন্দ্র C থেকে PT রেখার দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হয়। অর্থাৎ, $CT = a$

$$\Rightarrow \left|\frac{m.0+C}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\right| = a \quad [\because y = mx+C \Rightarrow mx - y + C = 0]$$

$$\text{বা, } \left|\frac{C}{\sqrt{1+m^2}}\right| = a$$

$$\text{বা, } C^2 = a^2(1+m^2) \qquad \therefore C = \pm a\sqrt{1+m^2}$$

অর্থাৎ $y = mx+C$ রেখাটি $x^2+y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হবে যদি $C = \pm a\sqrt{1+m^2}$ হয়।

কোনো বৃত্ত দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় (To find the length of intercept by the circle from the axes): মনে করুন, বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+ 2fy+c = 0$.................(i)

বৃত্তটি x-অক্ষকে ছেদ করলে ছেদবিন্দুর কোটি $y=0$ হবে।

তাহলে, $x^2+2gx+ c =0$.............(ii)

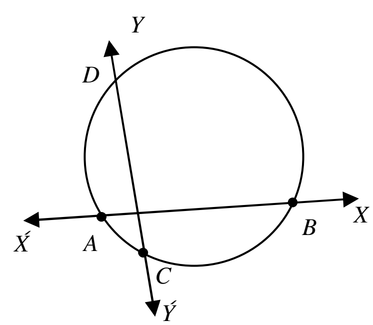
ধরুন, বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাংক $A(x_1,0)$ ও $B(x_2,0)$

$\therefore x_1+ x_2 = -2g$ এবং $x_1x_2 = c$

তাহলে x-অক্ষের দ্বারা ছেদিতাংশের পরিমাণ $= AB= |x_1 - x_2|$

$$= \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{4g^2 - 4c} \qquad = 2\sqrt{g^2 - c}$$

তাহলে বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের ছেদিতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{g^2 - c}$



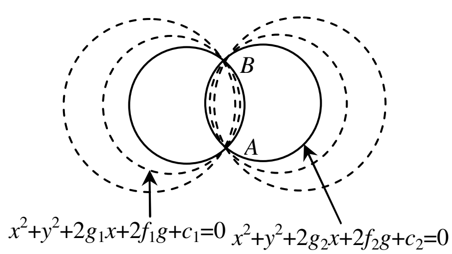
চিত্র:৬.৪.৫

অনুরূপভাবে, বৃত্ত দ্বারা y-অক্ষের ছেদিতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2 - c}$

বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (To find the equation of a circle passing through the point of intersection of two circles): মনে করুন, পরস্পরচ্ছেদী যেকোনো দুটি বৃত্তের সমীকরণ যথাক্রমে-

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0 \text{ এবং } x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$$

তাহলে বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী অসংখ্যক বৃত্ত পাওয়া যাবে।

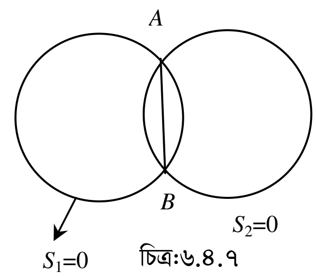


চিত্র:৬.৪.৬

ধরা যাক, বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু A ও B; তাহলে A ও B বিন্দুগামী বৃত্ত সমূহের সমীকরণটি হবে- $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1+ \lambda\,(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2) = 0$

যেখানে λ (ধ্রুবক ও $\lambda \neq -1$): এখানে, λ এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন বৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যাবে; যে সমীকরণ সমূহ ভিন্ন ভিন্ন বৃত্ত নির্দেশ করবে।

দুইটি পরস্পরছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ (Equation of common chord of two circles): দুটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এমন একটি সরলরেখা যা উভয় বৃত্তের জ্যা হিসেবে বিবেচিত হয়। চিত্রে AB বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা।



চিত্র:৬.৪.৭

মনে করুন, $s_1 \equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0$.............(i)

এবং $s_2 \equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$.............(ii)

যেকোনো দুটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্ত।

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1) - (x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2) = 0$

$\Rightarrow 2(g_1-g_2)x + 2(f_1-f_2)y + (c_1-c_2) = 0$ ....(iii)

(iii) নং সমীকরণটি x ও y এর একঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ। সুতরাং সমীকরণটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

ধরা যাক, বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু A ও B এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)

সুতরাং (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় দ্বারা (i) নং ও (ii) বৃত্ত সিদ্ধ হবে।

তাহলে, $x_1^2+y_1^2+2g_1x_1+2f_1y_1+c_1 = 0$

$x_1^2+y_1^2+2g_2x_1+2f_2y_1+c_2 = 0$; যখন বৃত্তদ্বয় (x_1, y_1) বিন্দুগামী। সমীকরণদ্বয় বিয়োগ করে,

$2(g_1-g_2)x_1 + 2(f_1-f_2)y_1 + (c_1-c_2) = 0$; যা $A(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী (iii) নং সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।

আবার, বৃত্তদ্বয় $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী হলে, $x_2^2+y_2^2+2g_1x_2+2f_1y_2+c_1 = 0$ ও $x_2^2+y_2^2+2g_2x_2+2f_2y_2+c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয় বিয়োগ করে, $2(g_1-g_2)x_2+2(f_1-f_2)y_2+(c_1-c_2) = 0$ যা $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী (iii) নং সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে। তাহলে, চিত্র থেকে দেখা যায়, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ কেবলমাত্র একটি সরলরেখা আছে এবং সেটি হলো AB জ্যা।

অতএব, AB জ্যা এর সমীকরণটি হবে, $2(g_1-g_2)x + 2(f_1-f_2)y + c_1-c_2 = 0$, অর্থাৎ, $s_1-s_2 = 0$

সারসংক্ষেপ:

- বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
- বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ x-অক্ষের ছেদিতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{g^2-c}$, y-অক্ষের ছেদতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2-c}$.
- বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1+ \lambda (x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2) = 0$

ইউনিট মূল্যায়ন

1. (ক)(1,),($\sqrt{3}$,1) বিন্দুগুলোর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।(খ)$\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$,$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুগুলোর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

2. (ক) x-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দুটি (0, 3) এবং (5, –2) বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, (1, 2), (–4, 2) এবং (–4, 7) বিন্দু তিনটি একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) (1, 2), (3, 4), এবং (5, –6) বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে, ঐ ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(ঘ) দেখাও যে, A(6,1), B(–3, 4), C(–70) এবং D(2, –3) বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

(ঙ) (x, y) বিন্দুটি (a+b, b–a) এবং (a–b, a+b) বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী হলে, প্রমাণ কর যে, $bx = ay$.

3. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3) এবং ব্যাসার্ধ 26; ঐ বৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু (2, 0) তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

4. একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, –4) ও 0, 4) হলে, এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. y অক্ষ ও (7, 2) বিন্দু থেকে (0, 5) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

6. নিম্নলিখিত বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর:

   (i) (–2, –8) এবং (2, 8) (ii) (t+2, –t + 4) এবং (t,3t) (iii) (a+b, –a, –b) এবং (a–b, a+b)

7. A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–2, 4) এবং (4, –5). AB রেখাকে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন AC = 2AB হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

8. (7, 5) ও (–2, –1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

9. (7, 7) এবং (–5, –10) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। এ থেকে ছেদবিন্দুর ভুজের মান ও নির্ণয় কর।

10. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (t, 2)। A ও B শীর্ষ দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 5) ও (7, –1) হলে, C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

11. K এর মান কত হলে (K, 3), (2, 5) এবং (–7, 0) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান করবে?

12. A, B দুইটি বিন্দুর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং O মূলবিন্দু হলে, মূল নিয়মে প্রমাণ করুন যে, ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\ (x_1y_2 - x_2y_1)$.

13. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (t+1,1), (2t+1,3) (2t+2, 2t) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, t=2 অথবা $t = -\frac{1}{2}$ হলে বিন্দুগুলো সমরেখ হবে।

14. (ক) (3, –2) বিন্দুগামী x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 135° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

   (খ) (2, 5) এবং (-4, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

   (গ) $3x - 4y + 9 = 0$ সরলরেখাদ্বয় অক্ষদ্বয় থেকে যে পরিমাণ অংশে ছেদ করে তা নির্ণয় করুন।

   (ঘ) $6x - 5y + 30 = 0$ সরলরেখাটির ঢাল এবং অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

15. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশ (6, 2) বিন্দুতে 2:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়; সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

16. $5x + 4y - 20 = 0$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশকে সমান তিনভাবে বিভক্ত করে, এমন বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

17. একটি সরলরেখা (–2, –5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y-অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে; যেন OA+2.03=0 হয়। 0 মূলবিন্দু হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

18. $A(b, K)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B(K, h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত; AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

19. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \rho$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে α কে পরিবর্তনশীল ধরে দেখান যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ $P2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$

20. $2x+by+4=0$, $4x-y-2b=0$ এবং $3x+y-1=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় করুন।

21. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x-7y+11=0$ এবং $x+3y-8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী।

22. (2, 3) বিন্দু হতে $4x+3y-7x=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করুন।

23. নিচের বৃত্তগুলোর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন: (i) $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ (ii) $4(x^2+y^2)+24x-4y-27=0$

24. (1, 5) ও (7, –3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

25. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (6, 0) এবং তা $x^2+y^2-4x=0$ বৃত্ত ও $x = 3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

26. মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক থেকে যথাক্রমে 3 ও 5 একক অংশ ছেদ করে, এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

27. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা y-অক্ষকে (0, 4) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ হতে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডন করে।

28. $x^2+y^2= 9$ এবং $x^2+y^2+2x+4y+1= 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

29. এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা মূলবিন্দু হতে 2 একক দূরত্বে x অক্ষকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক।

30. মূলবিন্দু হতে $x^2+y^2-10x+20= 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

31. $x^2+y^2-4x-6y+C= 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। C এর মান 3 স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

32. দেখান যে, $x+my=1$ রেখাটি $x^2+y^2-2ax= 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2+2al =1$ হয়।

33. মূলবিন্দু হতে (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

34. $x^2+y^2= 25$ বৃত্তের একটি স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

35. $ax+2y-1=0$ রেখাটি $x^2+y^2-8x+4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। a এর মান নির্ণয় করুন।

36. $x^2+y^2= 144$ বৃত্তের যে জ্যা (4, –6) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়; তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

---

1. (ক) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ (খ) $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (1, \sqrt{3})$ 2.(ক) (2, 0)(খ) 12.5 বর্গ একক(গ) (11, 2)

3. $6\sqrt{3}$ 4. $(\pm 4\sqrt{3}, 0)$ 5. $\frac{29}{7}$ 6. (i)(0,0) (ii) $(t+1,t+2)$ (iii)$(a,0)$ 7.(-9,-13) 8.(4,3) এবং (1,1) 9. 7:10; $\frac{35}{17}$

10. (11,2) 11. $K = -\frac{8}{5}$ 14. (ক) $x+y-1= 0$ (খ) $x-3y+13 = 0$ (গ) -3 (ঘ) ঢাল $=\frac{6}{5}$; –5 এবং $6\frac{9}{4}$ 15. $x+2y-10 = 0$ 16. $5x - 2y = 0; 5x - 8y = 0$ 17. $x - 2y - 8 = 0$ 18. $x + y - 6 = 0$. 20. $b = 3, b = -\frac{5}{3}$

21. $13x - 23 = 0$ 22. $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$ 23. (*i*) (-2, 3), 5 (*ii*) $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$, 4 24. $x^2+y^2- 8x-2y-8=0$

25. $x^2+y^2- 12x+24=0$ 26. $x^2+y^2- 3x-5y =0$ 27. $x^2+y^2\pm 10x-8y + 16 =0$ 28. $x+2y+5 = 0$, 4

29. $x^2+y^2\pm 2\sqrt{21}y-4=0$ 30. $x-2y = 0$; $x+2y=0$ 31. $c = 4$, (2, 0) 33. $x^2+y^2- 2x-4y+4 =0$

34. $y = \sqrt{3}\,x\pm10$ 35. 3, $-\frac{17}{3}$ 36. $2x-3y-26= 0$