দ্বিপদী বিস্তৃতি
Binomial Expansions

৪

ভূমিকা
Introduction

যে সকল বীজগাণিতিক রাশি দুইটি পদ দ্বারা গঠিত তাদেরকে দ্বিপদী রাশি বলা হয়। যেমনঃ $a+x$, $3x+y$, $2x-5y$, $(2x+y)^3$ ইত্যাদি হচ্ছে দ্বিপদী রাশি। রাশির ঘাত যদি 2 এবং 3 হয় তবে খুব সহজেই তার মান নির্ণয় করা যায়। কিন্তু এর অধিক হলে বার বার গুণ করতে অনেক সময় নেয় এবং কষ্ট সাধ্যও বটে। এই কষ্ট লাঘবের জন্য ১৬৭৬ সালে দ্বিপদী উপপাদ্যের আবিষ্কারক **স্যার আইজাক নিউটন (Sir Isaac Newton, 1642-1726)**, যে কোনো মানের ঘাত বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশিকে ধারাবাহিক ভাবে প্রকাশের জন্য একটি সূত্র আকিষ্কার করেন, উক্ত সূত্রকে দ্বিপদী উপপাদ্য বলা হয়। ফরাসি পদার্থ বিজ্ঞানী **ব্লেইজ প্যাসকেল (Blaise Pascal, 1623-1662)** 1653 সালে তিনি দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগের সারণি প্রস্তুত করেন যা প্যাসকেলের ত্রিভুজ নামে পরিচিত। দ্বিপদী উপপাদ্যটির বিভিন্ন দিকে গণিত বিদ ওমর খৈয়ামেরও যথেষ্ট অবদান রয়েছে। দ্বিপদী উপপাদ্যটি গণিত শাস্ত্রে যথেষ্ট গুরুত্বপূর্ণ এবং প্রয়োজনীয়। এ ইউনিটে প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র, দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতি, দ্বিপদী বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয়, দ্বিপদী বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় পদ্ধতি ইত্যাদি বিষয়গুলো নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ২ দিন

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৪.১: প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র

পাঠ ৪.২: দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতি

মূখ্য শব্দ	প্যাসকেলের ত্রিভুজ আকৃতির বিস্তৃতি, দ্বিপদী বিস্তৃতি, দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ, দ্বিপদী রাশি, দ্বিপদী উপপাদ্য, আরোহ বিধি, দ্বিঘাত সমীকরণ ইত্যাদি।

পাঠ-৪.১ প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র
Pascal's Triangle

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে দ্বিপদী বিস্তৃতি করতে পারবেন;
- প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ নির্ণয় করতে পারবেন।

ব্লেইজ প্যাসকেল
Blaise Pascal

ফরাসি পদার্থ বিজ্ঞানী ব্লেইজ প্যাসকেল (Blaise Pascal, 1623-1662) ছোটবেলা থেকেই অসামান্য মেধাবী ছিলেন। 1653 সালে তিনি দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগের সারণি প্রস্তুত করেন যা প্যাসকেলের ত্রিভুজ নামে পরিচিত।

দ্বিপদী $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি: দুইটি পদ দ্বারা গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী (Binomial) রাশি বলা হয়। কয়েকটি দ্বিপদী রাশির উদাহরণ $(a+x),(a-b),(x+y),(1-y),(x^2-y^2)$ ইত্যাদি।

মনে করুন, $(1+x)$ একটি দ্বিপদী রাশি। এখন $(1+x)$ কে যদি $(1+x)$ দ্বারা বার বার গুণ করা হয় তাহলে, $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, $(1+x)^4$, $(1+x)^5$,........... ইত্যাদি হয়।

আমরা জানি, $(1+x)^2=(1+x)(1+x)=1+2x+x^2$,

$(1+x)^3=(1+x)(1+x)(1+x)=(1+2x+x^2)(1+x)=1+2x+x^2+x+2x^2+x^3=1+3x+3x^2+x^3$

একই পদ্ধিতিতে $(1+x)^4,(1+x)^5,(1+x)^6$,........... ইত্যাদি রাশির বিস্তৃতি নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু $(1+x)$ এর ঘাত বা শক্তি যত বাড়বে গুণফল তত বড় হবে এবং সময় তত বেশি লাগবে। মনে করুন, $(1+x)$ দ্বিপদী রাশির ঘাত বা শক্তি n এর জন্য $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করতে হবে। যেখানে, $n=0,1,2,3,4,$......... অর্থাৎ, অঋণাত্মক মানের জন্য সীমাবদ্ধ। এই সমস্যা সমাধানের জন্য ব্লেইজ প্যাসকেল দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগের সারণি প্রস্তুত করেন যা প্যাসকেলের ত্রিভুজ নামে পরিচিত।

প্যাসকেলের ত্রিভুজ আকৃতির বিস্তৃতি এবং দ্বিপদী রাশির সাথে সহগের সম্পর্ক
Pascal's Triangle and Relation between Power and Coefficient

নিম্নের ত্রিভুজাকার সংখ্যা বিন্যাসকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ বলা হয়। ১ম ও ২য় সারির পর যে কোনো সারির পদের সহগগুলো নির্ণয় পদ্ধতি নিম্নরূপ:

সারি	ত্রিভুজীয় ছক	দ্বিপদী রাশির বিস্তার
১ম সারি $\rightarrow n=0$	1	$\rightarrow (a+x)^0=1$
২য় সারি $\rightarrow n=1$	1 1	$\rightarrow (a+x)^1=1.a+1.x$
৩য় সারি $\rightarrow n=2$	1 2 1	$\rightarrow (a+x)^2=1.a^2+2.ax+1.x^2$
৪র্থ সারি $\rightarrow n=3$	1 3 3 1	$\rightarrow (a+x)^3=1.a^3+3.a^2x+3.ax^2+1.x^3$
৫ম সারি $\rightarrow n=4$	1 4 6 4 1	$\rightarrow (a+x)^4=1.a^4+4.a^3x+6.a^2x^2+4.ax^3+1.x^4$
৬ষ্ঠ সারি $\rightarrow n=5$	1 5 10 10 5 1	$\rightarrow (a+x)^5=1.a^5+5.a^4x+10.a^3x^2+10.a^2x^3+5.ax^4+1.x^5$
৭ম সারি $\rightarrow n=6$	1 6 15 20 15 6 1	$\rightarrow (a+x)^6=1.a^6+6.a^5x+15.a^4x^2+20.a^3x^3+15.a^2x^4+6.ax^5+1.x^6$

ব্যাখ্যাঃ

- উপরোক্ত সারির দ্বিপদী বিস্তৃতি $(1+x)^n$ এ n=0,1,2,3,4,5 এবং 6 নেওয়া হয়েছে।
- প্রত্যেক সারির প্রান্তিক পদের সহগদ্বয় 1।
- কোনো সারির ১ম ও ২য় পদের সহগদ্বয়ের যোগফল ঐ সারির পরবর্তী সারির ২য় পদের সহগ।
- কোনো সারির ২য় ও ৩য় পদের সহগ দ্বয়ের যোগফল ঐ সারির পরবর্তী সারির ৩য় পদের সহগ।
- যেকোনো সারি হতে পরবর্তী সারির সহগগুলো নির্ণয় করা যায়।

মনে করুন, ৭ম সারির পদের সহগগুলো নির্ণয় করতে হবে। আমরা জানি, প্রথম পদ ও শেষ পদের সহগ 1। ৭ম সারির ২য় পদের সহগ হবে ৬ষ্ঠ সারির ১ম ও ২য় পদের সহগ দ্বয়ের যোগফল, অর্থাৎ $1 + 5 = 6$। ৭ম সারির ৩য় পদের সহগ হবে ৬ষ্ঠ সারির ২য় ও ৩য় পদের সহগদ্বয়ের সমষ্টি, অর্থাৎ $5 + 10 = 15$। ৭ম সারির ৪র্থ, ৫ম ও ৬ষ্ঠ পদের সহগগুলো হবে যথাক্রমে, $10 + 10 = 20$, $10 + 5 = 15$ ও $5 + 1 = 6$ যা প্যাসকেল ত্রিভুজের ৭ম সারিতে বিদ্যমান।

আপনারা লক্ষ্য করছেন যে, এই পদ্ধতিতে একটি বিশেষ সমস্যা রয়েছে। $(1+x)^6$ এর বিস্তৃতি জানতে চাইলে $(1+x)^5$ এর বিস্তৃতি জানা প্রয়োজন। আবার যে কোনো দ্বিপদী সহগ জানার জন্য তার ঠিক উপরের পূর্ববর্তী দুইটি সহগ জানা প্রয়োজন।

এই সমস্যা থেকে উত্তোরণের জন্য প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে ঘাত 'n' এবং পদের অবস্থান 'r' ধরে নতুন একটি সাংকেতিক চিহ্ন $\binom{n}{r}$ বিবেচনা করতে হবে।

উদাহরণ হিসেবে যদি $n = 5$ হয় তাহলে পদসংখ্যা হবে $5 + 1 = 6$টি।

মনে করুন, পদ ছয়টি যথাক্রমে, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 এবং T_6

নতুন চিহ্ন ব্যবহার করে সহগ: $T_1 = \binom{5}{0},\ T_2 = \binom{5}{1},\ T_3 = \binom{5}{2},\ T_4 = \binom{5}{3},\ T_5 = \binom{5}{4},\ T_6 = \binom{5}{5}$

$$\text{এখানে, } \binom{5}{0} = 1,\quad \binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5,\quad \binom{5}{2} = \frac{5\times(5-1)}{1\times 2} = \frac{5\times 4}{2} = 10,$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3} = 10,\quad \binom{5}{4} = \frac{5\times 4\times 3\times 2}{1\times 2\times 3\times 4} = 5,\quad \binom{5}{5} = \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = 1$$

তাহলে সহগগুলো হলোঃ 1 5 10 10 5 1

উল্লেখিত নতুন চিহ্নের সাহায্যে প্যাসকেলের ত্রিভুজ (n = 1, 2, 3,......) এর জন্য হবে:

$n = 1$ $$\binom{1}{0}\quad \binom{1}{1}$$

$n = 2$ $$\binom{2}{0}\quad \binom{2}{1}\quad \binom{2}{2}$$

$n = 3$ $$\binom{3}{0}\quad \binom{3}{1}\quad \binom{3}{2}\quad \binom{3}{3}$$

$n = 4$ $$\binom{4}{0}\quad \binom{3}{1}\quad \binom{4}{2}\quad \binom{4}{3}\quad \binom{4}{4}$$

$n = 5$ $$\binom{5}{0}\quad \binom{5}{1}\quad \binom{5}{2}\quad \binom{5}{3}\quad \binom{5}{4}\quad \binom{5}{5}$$

$n = 6$ $$\binom{6}{0}\quad \binom{6}{1}\quad \binom{6}{2}\quad \binom{6}{3}\quad \binom{6}{4}\quad \binom{6}{5}\quad \binom{6}{6}$$

$n = 7$ $$\binom{7}{0}\quad \binom{7}{1}\quad \binom{7}{2}\quad \binom{7}{3}\quad \binom{7}{4}\quad \binom{7}{5}\quad \binom{7}{6}\quad \binom{7}{7}$$

উপরের ত্রিভুজ থেকে $(1+x)^5$ এর বিস্তৃতির চতুর্থ পদের সহগ $T_{3+1}=\binom{5}{3}$

$(1+x)^6$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ $T_{2+1}=\binom{6}{2}$

সাধারণ ভাবে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির r তম পদের সহগ $T_{r+1}=\binom{n}{r}$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের দুইটি হেলানো পার্শ্ব থেকে পাওয়া যাবে,

$$\binom{1}{0}=1,\quad \binom{2}{0}=1,\quad \binom{3}{0}=1,\quad \binom{4}{0}=1,\quad \binom{5}{0}=1,\quad \binom{6}{0}=1,\ldots,\binom{n}{0}=1$$

$$\binom{1}{1}=1,\quad \binom{2}{2}=1,\quad \binom{3}{3}=1,\quad \binom{4}{4}=1,\quad \binom{5}{5}=1,\binom{6}{6}=1,\ldots,\quad \binom{n}{n}=1$$

আবার, $\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{1\times 2}=\frac{4(4-1)}{1\times 2}$, $\quad \binom{5}{3}=\frac{5\times(5-1)(5-2)}{1\times 2\times 3}=\frac{5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3}=10$,

$$\binom{6}{4}=\frac{6\times(6-5)\times(6-4)(6-3)}{1\times 2\times 3\times 4}=\frac{6\times 5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3\times 4}=15$$

সাধারণভাবে লেখা যায়, $\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\ .....\ (n-r+1)}{1\times 2\times 3\times ....\times r}$

উদাহরণ 1: প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে $(1-x)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান:

সারি	ত্রিভুজীয় ছক	দ্বিপদী রাশির বিস্তার
১ম সারি $\to n=0$	1	$\to (1-x)^0 = 1$
২য় সারি $\to n=1$	1 1	$\to (1-x)^1 = 1.1 - 1.x$
৩য় সারি $\to n=2$	1 2 1	$\to (1-x)^2 = 1.1^2 - 2.1.x + 1.x^2$
৪র্থ সারি $\to n=3$	1 3 3 1	$\to (1-x)^3 = 1.1^3 - 3.1^2.x + 3.1.x^2 - 1.x^3$
৫ম সারি $\to n=4$	1 4 6 4 1	$\to (1-x)^4 = 1.1^4 - 4.1^3.x + 6.1^2.x^2 - 4.1^3.x + 1.x^4$
৬ষ্ঠ সারি $\to n=5$	1 5 10 10 5 1	$\to (1-x)^5 = 1.1^5 - 5.1^4.x + 10.1^3.x^2 - 10.1^2.x^3 + 5.1.x^4 - 1.x^5$
৭ম সারি $\to n=6$	1 6 15 20 15 6 1	$\to (1-x)^6 = 1.1^6 - 6.1^5x + 15.1^4x^2 - 20.1^3x^3 + 15.1^2x^4 - 6.1x^5 + x^6$

অতএব, $(1-x)^6 = 1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$

$\therefore$ নির্ণেয় x^5 এর সহগ $= -6$

উদাহরণ 2: প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে $(1-2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

সমাধান:

সারি	ত্রিভুজীয় ছক	দ্বিপদী রাশির বিস্তার
১ম সারি $\to n=0$	1	$\to (1-2x)^0 = 1$
২য় সারি $\to n=1$	1 1	$\to (1-2x)^1 = 1 + 1.(-2x)$
৩য় সারি $\to n=2$	1 2 1	$\to (1-2x)^2 = 1 + 2.1.(-2x) + 1.(-2x)^2$
৪র্থ সারি $\to n=3$	1 3 3 1	$\to (1-2x)^3 = 1 + 3.(-2x) + 3.(-2x)^2 + 1.(-2x)^3$
৫ম সারি $\to n=4$	1 4 6 4 1	$\to (1-2x)^4 = 1 + 4.(-2x) + 6.(-2x)^2 + 4.(-2x)^3 + 1.(-2x)^4$
৬ষ্ঠ সারি $\to n=5$	1 5 10 10 5 1	$\to (1-2x)^5 = 1 + 5.(-2x) + 10.(-2x)^2 + 10.(-2x)^3 + 5.(-2x)^4 + 1.(-2x)^5$

$\therefore$ নির্ণেয় $(1-2x)^5 = 1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5$

উদাহরণ 3: $\left(1-\frac{ay^3}{2}\right)^5$ এর বিস্তৃতি করলে যদি y^6 এর সহগ $\frac{125}{2}$ পাওয়া যায়, তাহলে a এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\left(1-\frac{ay^3}{2}\right)^5=\binom{5}{0}\left(\frac{-ay^3}{2}\right)^0+\binom{5}{1}\left(\frac{-ay^3}{2}\right)^1+\binom{5}{2}\left(\frac{-ay^3}{2}\right)^2+\binom{5}{3}\left(\frac{-ay^3}{2}\right)^3+\ldots\ldots$

$$=1-\frac{5}{1}\cdot\frac{ay^3}{2}+\frac{5\times4}{1\times2}\cdot\frac{a^2y^6}{2\times2}+\ldots\ldots=1-\frac{5}{2}ay^3+\frac{5}{2}a^2y^6+\ldots\ldots\ldots$$

প্রশ্নমতে, $\frac{5}{2}a^2=\frac{125}{2}$

বা, $a^2=25$

$\therefore a=\pm\ 5$

উদাহরণ 4: y এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(1-\frac{y}{3}\right)^6$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\left(1-\frac{y}{3}\right)^6=\binom{6}{0}\left(\frac{-y}{3}\right)^0+\binom{6}{1}\left(\frac{-y}{3}\right)^1+\binom{6}{2}\left(\frac{-y}{3}\right)^2+\binom{6}{3}\left(\frac{-y}{3}\right)^3\ldots\ldots$

$$=1-\frac{6}{1}\cdot\frac{y}{3}+\frac{6\times5}{1\times2}\cdot\frac{y^2}{3\times3}-\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}\cdot\frac{y^3}{3\times3\times3}\ldots\ldots=1-2y+\frac{5}{3}y^2-\frac{20}{27}y^3\ldots\ldots\ldots$$

সারসংক্ষেপ:

প্যাসকেলের ত্রিভুজ আকৃতির বিস্তৃতিতে-

- প্রত্যেক সারির প্রান্তিক পদের সহগদ্বয় 1।
- কোনো সারির ১ম ও ২য় পদের সহগদ্বয়ের যোগফল ঐ সারির পরবর্তী সারির ২য় পদের সহগ।
- কোনো সারির ২য় ও ৩য় পদের সহগদ্বয়ের যোগফল ঐ সারির পরবর্তী সারির ৩য় পদের সহগ।
- যেকোনো সারি হতে পরবর্তী সারির সহগগুলো নির্ণয় করা যায়।

পাঠ-৪.২ দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃতি
Expansion of Binomial Theorem

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দ্বিপদী উপপাদ্যের প্রমাণ করতে পারবেন;
- দ্বিপদী বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ নির্ণয় করতে পারবেন;
- দ্বিপদী বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় করতে পারবেন।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি
Mathematical Ascending Method

স্বাভাবিক সংখ্যা $n \in \mathrm{N}$ সম্বলিত কোন রাশি যদি $n = 1$ এর জন্য সত্য হয় এবং রাশিটি $n \in \mathrm{N}$ এর জন্য সত্য ধরে যদি তা $n+1 \in \mathrm{N}$ এর জন্য সত্য হয়, তবে উক্তিটি সকল $n \in \mathrm{N}$ এর জন্য সত্য হবে।

দ্বিপদী রাশি (Binomial): দুইটি পদের যোগফল বা বিয়োগফল আকারে প্রকাশিত যে কোন রাশিকে দ্বিপদী রাশি বলা হয়। যেমন: $a+x,\ 5x-3y,\ 2x^2+3y$ ইত্যাদি দ্বিপদী রাশি।

দ্বিপদী উপপাদ্য: যে বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে একটি দ্বিপদ রাশির যে কোন শক্তি বা মূলকে একটি ধারায় প্রকাশ করা যায় তাকে দ্বিপদী উপপাদ্য বলা হয়।

$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x^1 + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \dots\dots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \dots\dots + {}^nC_n x^n$,এই সূত্রটিকে দ্বিপদী উপপাদ্য বলে।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দ্বিপদী উপপাদ্যের প্রমাণ:

$$(a+x)^1 = a + x = a^1 + {}^1C_1 a^{1-1}x$$

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + {}^2C_1 a^{2-1}x^1 + {}^2C_2 a^{2-2}x^2 \dots\dots\dots \text{(i)},\ \left[\because {}^2C_1 = 2, {}^2C_2 = 1\right]$$

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + {}^3C_1 a^{3-1}x^1 + {}^3C_2 a^{3-2}x^2 + {}^3C_3 a^{3-3}x^3 \dots\dots \text{(ii)}, [\because {}^3C_1 = 3, {}^3C_2 = 3, {}^3C_3 = 1]$$

সুতরাং, সূত্রটি $n = 2, n = 3$ এর জন্য সত্য। এখন মনে করুন, সূত্রটি $n = k$ এর জন্য সত্য।

$$\therefore (a+x)^k = a^k + {}^kC_1 a^{k-1}x^1 + {}^kC_2 a^{k-2}x^2 + \dots\dots + {}^kC_r a^{k-r}x^r + \dots\dots + {}^kC_k x^k \dots\dots\dots \text{(iii)}$$

(iii) এর উভয়দিকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করে আমরা পাই,

$$(a+x)^k(a+x) = (a+x)\left\{a^k + {}^kC_1 a^{k-1}x^1 + {}^kC_2 a^{k-2}x^2 + \dots\dots + {}^kC_r a^{k-r}x^r + \dots\dots + {}^kC_k x^k\right\}$$

$$\therefore (a+x)^{k+1} = a^{k+1} + {}^kC_1 a^k x^1 + {}^kC_2 a^{k-1}x^2 + \dots\dots + {}^kC_r a^{k-r+1}x^r + \dots\dots + {}^kC_k a x^k$$

$$+ a^k x + {}^kC_1 a^{k-1}x^2 + {}^kC_2 a^{k-2}x^3 + \dots\dots + {}^kC_{r-1} a^{k-r+1}x^r + {}^kC_r a^{k-r}x^{r+1} + \dots\dots + {}^kC_k x^{k+1}$$

$$= a^{k+1} + \left(1 + {}^kC_1\right)a^k x^1 + \left({}^kC_2 + {}^kC_1\right)a^{k-1}x^2 + \dots\dots + \left({}^kC_r + {}^kC_{r-1}\right)a^{k-r+1}x^r + \dots\dots + {}^kC_k x^{k+1} \text{-----(iv)}$$

যেহেতু, ${}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$,

অতএব, ${}^kC_1 + {}^kC_0 = {}^kC_1 + 1 = {}^{k+1}C_1$, ${}^kC_2 + {}^kC_1 = {}^{k+1}C_2$ ইত্যাদি।

$$\therefore (a+x)^{k+1} = a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k x + {}^{k+1}C_2 a^{k-1}x^2 + \dots\dots + {}^{k+1}C_r a^{k-r+1}x^r + \dots\dots + {}^{k+1}C_{k+1} x^{k+1} \text{----------- (v)}$$

(iv) নং হতে দেখা যায়, (iii) নং সূত্রটি $n = k+1$ এর জন্যও সত্য।

অতএব সূত্রটি যদি $n = 2$ এর জন্য সত্য হয়, তবে উহা $n = 2+1 = 3$ এর জন্যও সত্য। আবার $n = 3$ এর জন্য সত্য হলে, $n = 4$ এর জন্যও সত্য। সুতরাং n এর সকল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার জন্য উপপাদ্যটি সত্য।

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x^1 + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \dots\dots + {}^nC_nx^n$$

দ্বিপদী উপপাদ্যের বৈশিষ্ট্যঃ

(i) উপপাদ্যের বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ থাকে।

(ii) বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে a এবং x এর ঘাতের সমষ্টি সমান থাকে।

(i) বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ হতে সমদূরবর্তী পদগুলোর সহগ পরস্পর সমান থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত 1ঃ $(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x^1 + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \dots\dots + {}^nC_nx^n$ --------------- (1)

(1)নং এ$a = 1$বসিয়ে পাই,

$$(1+x)^n = 1^n + {}^nC_1 1^{n-1}x^1 + {}^nC_2 1^{n-2}x^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_r 1^{n-r}x^r + \dots\dots + {}^nC_nx^n$$

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \dots\dots\dots + {}^nC_rx^r + \dots\dots + {}^nC_nx^n$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots\dots\dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots\dots + x^n$$

অনুসিদ্ধান্ত 2ঃ $(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x^1 + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \dots\dots + {}^nC_nx^n$ --------------- (1)

(1)নং এ$x = -x$ বসিয়ে পাই,

$$(a-x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}(-x)^1 + {}^nC_2a^{n-2}(-x)^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_ra^{n-r}(-x)^r + \dots\dots + {}^nC_n(-x)^n$$

$$= a^n + {}^nC_1a^{n-1}(-1)^1x + {}^nC_2a^{n-2}(-1)^2x^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_ra^{n-r}(-1)^rx^r + \dots\dots + (-1)^nx^n$$

$(a + x)^n$-এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ (General terms of the Expansion) নির্ণয়ঃ

যদি $(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x^1 + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \dots\dots + x^n$

ডানপক্ষের পদগুলোকে ধারাবাহিকভাবে $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{r+1}$ দ্বারা সূচিত করা হয় তাহলে,

প্রথম পদ, $T_1 = a^n = {}^nC_0a^{n-0}x^0 = a^n$

দ্বিতীয় পদ, $T_2 = {}^nC_1a^{n-1}x^1 = na^{n-1}x$

তৃতীয় পদ, $T_3 = {}^nC_2a^{n-2}x^2 = \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2$

চতুর্থ পদ, $T_4 = {}^nC_3a^{n-3}x^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3$

....

R তম পদ, $T_r = {}^nC_{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r-1}x^{r-1}$

$r + 1$ তম পদ, $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}x^r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r$

সুতরাং এই $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}x^r$ পদকে সাধারণ পদ বলে। সাধারণ পদের সাহায্যে আমরা দ্বিপদী রাশির বিভিন্ন পদের সহগ নির্ণয় করতে পারি।

অনুসিদ্ধান্ত 3ঃ $(a - x)^n$-এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ বা $r + 1$ তম পদ হলো $T_{r+1} = (-1)^n n_{C_r} a^{n-r} x^r$

উদাহরণ 1: $(3+x)^6$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $r+1$ তম পদ হচ্ছে সাধারণ পদ।

আবার, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ $r+1$ তম পদ নির্ণয়ের সূত্র, $T_{r+1}={}^nC_r a^{n-r}x^r$

এখানে, $(3+x)^6$ এর বিস্তৃতিতে যেখানে, $[a=3, n=6]$ এর সাধারণ পদ $r+1$ তম পদ, $T_{r+1}={}^6C_r 3^{6-r}x^r$

উদাহরণ 2: $\left(2x^5+\dfrac{1}{x^2}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $r+1$ তম পদ হচ্ছে সাধারণ পদ।

$\left(2x^5+\dfrac{1}{x^2}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ হলো, $T_{r+1}={}^9C_r(2x^5)^{9-r}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^r$

$$={}^9C_r 2^{9-r}x^{45-5r}x^{-2r}$$
$$={}^9C_r 2^{9-r}x^{45-5r-2r}$$
$$={}^9C_r 2^{9-r}x^{45-7r}$$

উদাহরণ 3: দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ কে বিস্তৃত করুন।

সমাধান: $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^7=x^7+{}^7C_1x^{7-1}\left(-\dfrac{1}{x}\right)+{}^7C_2x^{7-2}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2+{}^7C_3x^{7-3}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^3+{}^7C_4x^{7-4}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^4+{}^7C_5x^{7-5}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^5$

$+{}^7C_6x^{7-6}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^6+{}^7C_7x^{7-7}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^7$

$=x^7-7x^6\dfrac{1}{x}+21x^5\dfrac{1}{x^2}-35x^4\dfrac{1}{x^3}+35x^3\dfrac{1}{x^4}-21x^2\dfrac{1}{x^5}+7x\dfrac{1}{x^6}-\dfrac{1}{x^7}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$=x^7-7x^5+21x^3-35x+35\dfrac{1}{x}-21\dfrac{1}{x^3}+7\dfrac{1}{x^5}-\dfrac{1}{x^7}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

উদাহরণ 4: $(x^2-7x)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^{14} এর সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, T_{r+1} তম পদে x^{14} আছে।

$\therefore T_{r+1}={}^{12}C_r(x^2)^{12-r}(-7x)^r={}^{12}C_r x^{24-2r}(-7)^r x^r={}^{12}C_r x^{24-2r+r}(-7)^r={}^{12}C_r(-7)^r x^{24-r}$

এখন সাধারণ পদের x^{24-r} এর ঘাত এবং x^{14} এর ঘাত সমান হবে।

$\therefore 24-r=14$ বা $r=24-14=10$

$\therefore T_{10+1}={}^{12}C_{10}(-7)^{10}x^{24-10}={}^{12}C_{10}7^{10}x^{14}$

অতএব, x^{14} এর সহগ= ${}^{12}C_{10}7^{10}$

উদাহরণ 5: $\left(\dfrac{x}{2}-3y\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ এবং ৭ম পদ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, T_{r+1} তম পদ সাধারণ পদ।

দেওয়া আছে, $a=\dfrac{x}{2}, x=-3y$ এবং $n=6$ $\therefore T_{r+1}={}^6C_r\left(\dfrac{x}{2}\right)^{6-r}(-3y)^r$

সুতরাং, $T_7=T_{6+1}={}^6C_6\left(\dfrac{x}{2}\right)^{6-6}(-3y)^6=729y^6$

উদাহরণ 6: $\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: x বর্জিত পদ বলতে আমরা সেই পদকে বুঝি যে পদে x থাকে না অর্থাৎ x এর ঘাত শূন্য থাকে। [$x^0=1$].

মনে করুন, T_{r+1} তম পদে x^0 আছে।

$$\therefore T_{r+1} = {}^{18}C_r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{18-r}.(-x)^r = {}^{18}C_r\left(x^{-2}\right)^{18-r}.(-1)^r(x)^r = {}^{18}C_r x^{-36+3r}.(-1)^r$$

যেহেতু এ পদটি x বর্জিত, $-36+3r=0$

বা, $3r=36$

বা, $r=12$

$$\therefore \text{নির্ণেয় পদ} = T_{13} = T_{12+1} = {}^{18}C_{12}(-1)^{12}.x^0 = \frac{18!}{12!(18-12)!} = \frac{18!}{12!6!} = 18564$$

উদাহরণ 7: $\left(2x^2+\frac{b}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে b এর ধনাত্মক মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $\left(2x^2+\frac{b}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $r+1$ তম পদ সাধারণ পদ।

সুতরাং $r+1$ তম পদ $= {}^{10}C_r\left(2x^2\right)^{10-r}\left(\frac{b}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r(2)^{10-r}(b)^r x^{20-2r-3r} = {}^{10}C_r(2)^{10-r}(b)^r x^{20-5r}$

যদি $r+1$ তম পদে x^5 থাকে অর্থাৎ, $20-5r=5$ বা, $r=3$

আবার যদি $r+1$ তম পদে x^{15} থাকে তবে $20-5r=15$ অর্থাৎ $r=1$

এখন x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে, ${}^{10}C_3(2)^{10-3}(b)^3 = {}^{10}C_1(2)^{10-1}(b)^1$

বা, $\frac{10!\times 2^7}{3!\times 7!}b^3 = 10\times 2^9\times b$

বা, $\frac{10\times 9\times 8\times 7!\times 2^7}{3!\times 7!}b^3 = 10\times 2^9\times b$

বা, $\frac{9\times 8}{3\times 2}b^3 = 2^2\times b$ বা, $12b^3=4b$ বা, $b^2=\frac{1}{3}$

$\therefore b=\frac{1}{\sqrt{3}}$, [ধনাত্মক মান নিয়ে]

উদাহরণ 8: $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর কোনো সহগ আছে কিনা তা যাচাই করুন।

সমাধান: মনে করুন, $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে $r+1$ তম পদে x^9 এর সহগ রয়েছে।

$$\therefore T_{r+1} = {}^{20}C_r(2x^2)^{20-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= {}^{20}C_r(2)^{20-r}x^{40-2r}(-1)^{-r}x^{-r}$$

$$={}^{20}C_r(2)^{20-r}x^{40-2r-r}(-1)^{-r}$$

$$={}^{20}C_r(2)^{20-r}x^{40-3r}(-1)^{-r}$$

প্রদত্ত পদে x^9 থাকবে যদি $x^{40-3r}=x^9$ হয়।

$$\Rightarrow 40-3r=9$$

$$\Rightarrow 3r=40-9 \Rightarrow r=\frac{31}{3}$$

এখানে r -এর মান ভগ্নাংশ, যা সম্ভব নয়। কারণ, r-এর মান ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হতে হবে।

$\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর কোনো সহগ নেই।

$(a+x)^n$ -এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ (Middle terms) নির্ণয়, যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাঃ আমরা জানি, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদ সংখ্যা $=n+1$ । এখন মনে করুন, উহার $(r+1)$ তম পদটি মধ্যপদ। সুতরাং উক্ত পদের অগ্রে ও পশ্চাতে সমান সংখ্যক পদ থাকবে। যেহেতু $(r+1)$ তম পদের পশ্চাতে r সংখ্যক পদ আছে, সেহেতু উহার অগ্রেও r সংখ্যক পদ থাকবে। তাহলে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদ সংখ্যা

$=(r+1)+r=2r+1$

$\therefore n+1=2r+1$

বা, $r=\frac{n}{2}$

(i) n ধনাত্মক **জোড় সংখ্যা** হলে, মধ্যপদ হবে $T_{\frac{n}{2}+1}$ বা $T_{\frac{n+2}{2}}$ তম পদ, $T_{\frac{n}{2}+1}={}^nC_{\frac{n}{2}}a^{n-\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}={}^nC_{\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}$

(ii) n ধনাত্মক বিজোড় সংখ্যা হলে, মধ্যপদ হবে $T_{\frac{n+1}{2}}$ এবং $T_{\frac{n+3}{2}}$ তম পদদ্বয়।

$$\therefore T_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n+1}{2}-1}a^{n-\left(\frac{n+1}{2}-1\right)}x^{\frac{n+1}{2}-1}={}^nC_{\frac{n-1}{2}}a^{\frac{n+1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\therefore T_{\frac{n+3}{2}}={}^nC_{\frac{n+3}{2}-1}a^{n-\left(\frac{n+3}{2}-1\right)}x^{\frac{n+3}{2}-1}={}^nC_{\frac{n+1}{2}}a^{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n+1}{2}}$$

উদাহরণ 9: $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ এখানে $n=6$, জোড় সংখ্যা

সুতরাং, মধ্যপদ $=T_{\frac{16+2}{2}}=T_9=T_{8+1}={}^{16}C_8\left(\frac{x}{y}\right)^8.\left(\frac{y}{x}\right)^8={}^{16}C_8=\frac{16!}{8!8!}=12870$

উদাহরণ 10: দেখান যে, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর দ্বিপদী বিস্তৃতিতে মধ্যপদ সমান $\frac{1.3.5.....(2n-1)}{n!}(-2)^n$

সমাধান: এখানে বিস্তৃতিটির ঘাত জোড় সংখ্যা।

সুতরাং, মধ্যপদ হবে, $T_{\frac{2n+2}{2}}=T_{\frac{2(n+1)}{2}}=T_{n+1}$

এখন, $T_{n+1}={}^{2n}C_n(x)^{2n-n}\left(-\frac{1}{x}\right)^n={}^{2n}C_n(x)^n(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^n$

$$={}^{2n}C_nx^n(-1)^n\frac{1}{x^n}=\frac{2n!}{n!(2n-n)!}(-1)^n=\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)........4.3.2.1}{n!(2n-n)!}(-1)^n$$

$$=\frac{\{2n(2n-2)(2n-4).........6.4.2\}\{(2n-1)(2n-3)(2n-5).......5.3.1\}}{(n!)^2}(-1)^n$$

$$=\frac{[(2.n)\{2.(n-1)\}\{2.(n-2)\}.........(2.3).(2.2).(2.1)][(2n-1)(2n-3)(2n-5).......5.3.1\}}{(n!)^2}(-1)^n$$

$$=\frac{2^n n!\{1.3.5....(2n-5)(2n-3)(2n-1)\}}{(n!)^2}(-1)^n=\frac{2^n\{1.3.5....(2n-5)(2n-3)(2n-1)\}}{(n!)}(-1)^n$$

$$=\frac{\{1.3.5....(2n-3)(2n-1)\}}{n!}(-2)^n$$ [প্রমাণিত]

সারসংক্ষেপ:

- স্বাভাবিক সংখ্যা $n\in\mathrm{N}$ সম্বলিত কোন রাশি যদি $n=1$ এর জন্য সত্য হয় এবং রাশিটি $n\in\mathrm{N}$ এর জন্য সত্য ধরে যদি তা $n+1\in\mathrm{N}$ এর জন্য সত্য হয়, তবে উক্তিটি সকল $n\in\mathrm{N}$ এর জন্য সত্য হবে।
- $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির $T_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}x^r$ পদকে সাধারণ পদ বলা হয়।
- $(a+x)^n$ -এর বিস্তৃতিতে n ধনাত্মক জোড় সংখ্যা হলে মধ্যপদ হবে, $T_{\frac{n}{2}+1}={}^nC_{\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}$
- $(a+x)^n$ -এর বিস্তৃতিতে n ধনাত্মক বিজোড় সংখ্যা হলে মধ্যপদ হবে, $T_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n-1}{2}}\,a^{\frac{n+1}{2}}.x^{\frac{n-1}{2}}$ এবং

  $T_{\frac{n+3}{2}}={}^nC_{\frac{n+1}{2}}\,a^{\frac{n-1}{2}}.x^{\frac{n+1}{2}}$ তম পদদ্বয়।

ইউনিটমূল্যায়ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1 - 9):

▶নিচের প্যাসকেল ত্রিভুজটি লক্ষ্য করুন এবং প্রদত্ত উপাত্তের আলোকে (1 -5) নং প্রশ্নের উত্তর দিন

১ম সারি $\rightarrow n = 0$	1
২য় সারি $\rightarrow n = 1$	1 1
৩য় সারি $\rightarrow n = 2$	1 2 1
৪র্থ সারি $\rightarrow n = 3$	1 3 3 1
৫ম সারি $\rightarrow n = 4$	1 4 6 4 1
৬ষ্ঠসারি $\rightarrow n = 5$	1 5 10 10 5 1
৭ম সারি $\rightarrow n = 6$	1 6 15 20 15 6 1

1. প্যাসকেল ত্রিভুজের আলোকে কোনো দ্বিপদী রাশির প্রথম পদ ও শেষ পদের সহগ দুটি হবে নিচের কোনটি?
   (ক) 1,1 (খ) 1,0 (গ) 0,1 (ঘ)2,2
2. প্যাসকেল ত্রিভুজের ৪র্থ সারির উপাদান সংখ্যা কয়টি?
   (ক) 2 (খ) 3 (গ) 4 (ঘ)5
3. প্যাসকেল ত্রিভুজ অনুযায়ী $n = 4$ হলে দ্বিপদী সহগগুলো নিচের কোনটি?
   (ক)1,3,6,5,1 (খ) 1,3,4,6,1 (গ) 1,6,4,3,1 (ঘ)1,4,6,4,1
4. প্যাসকেল ত্রিভুজ অনুযায়ী $(1 + x)^5$ এর বিস্তৃতি নিচের কোনটি?
   (ক) $1+5x+15x^2+10x^3+5x^4+x^5$ (খ) $1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$
   (গ) $1+5x+10x^2+20x^3+5x^4+x^5$ (ঘ) $1+5x+10x^2+20x^3+5x^4+x^5$
5. প্যাসকেল ত্রিভুজ থেকে $(1-2x)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ নিচের কোনটি?
   (ক) 240 (খ) –240 (গ) –192 (ঘ)192
6. $(1+2x)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ কোনটি?
   (ক)3360 (খ) 3460 (গ) 3380 (ঘ)3395

▶ $\left(\frac{a}{x}-bx\right)^{12}$ একটি দ্বিপদী রাশি হলে প্রদত্ত উপাত্তের আলোকে (7 -9) নং প্রশ্নের উত্তর দিন

7. রাশিটির বিস্তৃতিতে কত তম পদ মধ্যপদ?
   (ক) 5তম (খ) 6তম (গ) 7তম (ঘ)8তম
8. $a = \frac{1}{b}$ হলে x বর্জিত পদের মান কোনটি?
   (ক) ${}^{12}C_6$ (খ) ${}^{12}C_7$ (গ) ${}^{12}C_8$ (ঘ) ${}^{12}C_5$
9. $(1+x)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ কোনটি?
   (ক) -1 (খ) 1 (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $r + 1$
10. প্যাসকেল ত্রিভুজের সাহায্যে $(3-x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।
11. $\left(x^3-\frac{1}{2x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় করুন।

12. $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ বা ধ্রুব পদ বা x^0 যুক্ত পদ নির্ণয় করুন এবং এর মান নির্ণয় করুন।

13. $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21তম এবং 22তম পদ দুইটি সমান হলে x এর মান নির্ণয় করুন।

14. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় করুন।

15. $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^{6}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় করুন।

16. $\left(2x^2-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় করুন।

17. $\left(2x-\frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান নির্ণয় করুন।

18. $\left(\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^2}{2x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে y বর্জিত পদটি নির্ণয় করুন এবং এর মান নির্ণয় করুন।

19. $n\in\mathbf{N}$ হলে, $\left(3+\frac{x}{2}\right)^{n}$ এর বিস্তৃতিতে x^5তম এবং x^{15} তম পদ দুইটি সমান হলে n এর মান নির্ণয় করুন।

20. $\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় করুন।

21. $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় করুন।

22. $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় করুন।

23. $\left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x^{18} এর সহগ নির্ণয় করুন।

24. $(px^4+qx)^9$ এর বিস্তৃতিতে x^{18} এর সহগ নির্ণয় করুন।

25. $n\in\mathbf{N}$ হলে, $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{6}$ এবং $\left(x+\frac{1}{3x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ সমান হলে প্রমাণ করুন যে, $n=3$ ।

26. $n\in\mathbf{N}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(x^2+2x+2)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এবং x^3 এর সহগদ্বয় যথাক্রমে $2^{n-1}n^2$ এবং $\frac{2^{n-1}}{3}n(n^2-1)$

উত্তরমালা

1. ক 2. গ 3. ঘ 4. খ 5. ক 6. ক 7. গ 8. ঘ 9. ক 11. $243-405x+270x^2-90x^3+15x^4-x^5$

12. $-\frac{{}^{10}C_5}{2^r}$ 13. $\frac{28}{7}$ 14. $\frac{7}{8}$ 15. $(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 16. $(-1)^{12}C_6=924$ 17. 840 18. 495

19. 7তম পদ, $\frac{105x^{10}}{32}$ 20. 55 21. $2^{r+1}-1$ 22. 5^n-4^n 23. $2r^2+2r+1$ 24. $110565a^4$ 25. $84a^3b^6$