সেট, ফাংশন, লিমিটি এবং অবিচ্ছিন্নতা
Set, Function, Limit and Continuty

২

ভূমিকা
Introduction

সেট শব্দটি আমরা দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন প্রয়োজনে ব্যবহার করে থাকি। যেমন: একসেট বই, একসেট গহনা, ডিনার সেট, সোফাসেট ইত্যাদি। বস্তুর প্রকারভেদে বস্তুর সমষ্টি বোঝাতে সেট, গুচ্ছ, দল, পাল, সমষ্টি, সংগ্রহ ইত্যাদি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ ব্যবহার করা হয়। গণিতের সব শাখায় সেটের ব্যাপক ব্যবহার রয়েছে। রুশ-জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৪-১৯১৮) সেট সম্পর্কে সর্বপ্রথম ধারণা দেন। তিনি অসীম সেটের যে ধারণা প্রদান করেন তা গণিত শাস্ত্রে ব্যাপক আলোড়ন সৃষ্টি করে। তাঁর প্রদত্ত ব্যাখ্যা গণিত শাস্ত্রে যে নতুন শাখার জন্ম দেয় তা "সেট তত্ত্ব" (Set Theory) নামে পরিচিত। সেট বিভিন্ন ধরনের হতে পারে যেমন: সসীম সেট, অসীম সেট, ফাঁকা সেট, উপসেট ইত্যাদি। অনেক সময় আমরা বিভিন্ন সেটের উপাদানগুলোর মধ্যে বিভিন্ন সম্পর্ক বিবেচনা করি।

প্রাত্যাহিক জীবনের প্রায় সবক্ষেত্রেই আমরা ফাংশন ব্যবহার করে থাকি। ফাংশনের আভিধাণিক অর্থ হলো অপেক্ষক। দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে অধীন চলক যখন স্বাধীন চলকের উপর নির্ভরশীল হয় তখন এই প্রক্রিয়াকে ফাংশন বলা হয়। বর্তমান ইউনিটে সেট, ফাংশন, ফাংশনের লিমিট ও ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় **১** সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-২.১: সেট
পাঠ-২.২: ভেনচিত্র
পাঠ-২.৩: ফাংশন
পাঠ-২.৪: ফাংশনের লিমিট
পাঠ-২.৫: অবিচ্ছিন্ন ফাংশন

মূখ্য শব্দ	সেট, তালিকা পদ্ধতি, সেট গঠন পদ্ধতি, সার্বিক সেট, উপসেট, সংযোগ সেট, নিচ্ছেদ সেট, সসীম সেট, অসীম সেট, ফাঁকা সেট, ভেনচিত্র, দ্যা মরগ্যান সূত্র, কার্তেসীয় গুণজ, ফাংশন, লিমিট, অবিচ্ছিন্নতা ইত্যাদি।

পাঠ-২.১ সেট Set

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সেটের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার সেটের বর্ণনা করতে পারবেন;
- কার্তেসীয় গুণজ কী তা বর্ণনা করতে পারবেন;
- সেট সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

সেটের সংজ্ঞা
Definition of Set

সেটের ধারণা হলো গণিতের ধারণার সর্বাপেক্ষা মৌলিক ভিত্তি। সহজ কথায় সেট হলো কতগুলো সুনির্দিষ্ট বিষয়বস্তুর সমষ্টি। এ বিষয়গুলো কতগুলো সংখ্যার একটি গ্রুপ হতে পারে অথবা কতগুলো জিনিসের একটি গ্রুপ হতে পারে। **সুতরাং, দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন বস্তু সমূহের সুনির্ধারিত সংগ্রহ বা তালিকাকে সেট বলা হয়**। যেমন: একসেট বিবিএ প্রেগ্রামের প্রথম সিমেস্টারের বই, ডিনার সেট, সোফাসেট ইত্যাদি। ইংরেজি বর্ণমালার বড়হাতের অক্ষর A, B, C, D, X, Y, Z, ...ইত্যাদি দ্বারা সাধারণত সেট প্রকাশ করা হয় এবং সেটের উপাদানগুলো দ্বিতীয় { } বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ করা হয় এবং উপাদানগুলোর একটিকে আর একটি থেকে কমা (,) চিহ্ন দ্বারা পৃথক করা হয়।

সেটের অন্তর্ভূক্ত প্রত্যেকটি বস্তু বা সদস্যকে উক্ত সেটের উপাদান (Element) বলা হয়। যেমন: $A=\{a,b,c\}$ হলে, A সেটের উপাদান a, b এবং c। সেটের উপাদান বোঝার জন্য '$\in$' (গ্রীক অক্ষর 'Epsilon') চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। এর অর্থ হল 'belongs to'। $\therefore 4\in A$(4 belongs to A) এর অর্থ হল 4, A এর সদস্য. আবার, 2, A সেটের উপাদান না হলে '$\notin$' চিহ্নের দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ $\therefore 2\notin A$ (2 does not belong to A)

সেট প্রকাশের পদ্ধতি (Method of describing sets): সেটকে দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়।

যথা: (১) তালিকা পদ্ধতি (Roster Method বা Tabular Method) এবং (২) সেট গঠন পদ্ধতি (Set builder Method)

(১) তালিকা পদ্ধতি Roster Method or Tabular Method): এ পদ্ধতিতে সেটের সদস্য বা উপাদানগুলো সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ করে দ্বিতীয় বন্ধনীর ভিতরে আবদ্ধ করা হয় এবং একাধিক উপাদান থাকলে কমা (,) ব্যবহার করে উপাদানগুলোকে পৃথক করা হয়।

যেমন: একটি সেটের উপাদানগুলো হলো 1, 2, 3, 4। সেটটিকে A দ্বারা সূচিত করলে, $A=\{1,2,3,4\}$। তদ্রুপ $B=\{3,5,7,9\}$, $C=$ {নীলা, বহতা, তিশা, দীনা} ইত্যাদি।

(২) সেট গঠন পদ্ধতি (Set builder Method): এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ না করে উপাদানের সাধারণ ধর্মের উল্লেখ করে সংক্ষিপ্ত আকারে সেটকে লেখা হয়।

যেমন: $A=\{x : x$ স্বাভাবিক জোড়সংখ্যা$\}$, $B=\{x : x,\ 2$ এর গুণনীয়ক$\}$ এখানে ':' চিহ্নদ্বারা'এরূপ যেন 'বা' যেন'(such that) বোঝায়। অনেকসময় ':' চিহ্নের পরিবর্তে '|' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেহেতু এ পদ্ধতিতে সেটের উপাদান নির্ণয়ের নিয়ম বা Rule বলে দেয়া হয়, এজন্য এ পদ্ধতিকে Rule Method-ও বলা হয়।

বিভিন্ন প্রকার সেট

সমান সেট (Equal Set): যদি দুইটি সেট A ও B এর মধ্যে A সেটের সকল উপাদান B সেটে এবং B সেটের সকল উপাদান A সেটে থাকে তবে সেট দুইটিকে সমান সেট বলা হয় এবং লেখা হয় $A=B$ ।
যেমন: যদি $A=\{x,y,z\}$ এবং $B=\{y,z,x\}$ হয় তাহলে $A=B$ ।

সমতুল্য সেট (Equivalent Set): দুইটি সেটে যদি সমান সংখ্যক উপাদান থাকে এবং একটি সেটের উপাদানের সাথে অপর সেটের উপাদানের সংযোগ স্থাপন করে উপাদানসমূহের এক একটি প্রতিষঙ্গ দ্বারা জোড় স্থাপন করা সম্ভব হয় তখন সেট দুইটিকে সমতুল্য সেট বলা হয়। তখন এ সেটদ্বয়কে $A\equiv B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
যেমন: যদি $A=\{1,2,3\}$ এবং $B=\{x,y,z\}$ হয় তাহলে $A\equiv B$ । এখানে সেটদ্বয় পরস্পর সমতুল বা প্রত্যেকটি সেটের উপাদান সংখ্যা সমান কিন্তু তারা পরস্পর সমান নয়।

সসীম সেট (Finite Set): যে সেটের সদস্য সংখ্যা গুণে শেষ করা যায় অর্থাৎ যে সেটের সদস্য সংখ্যা নির্দিষ্ট সংখ্যক তাকে সসীম সেট বলা হয়। **যেমন:** $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

অসীম সেট (Infinite Set): যে সেটের সদস্য সংখ্যা গুণে শেষ করা যায় না অর্থাৎ যে সেটে অনির্দিষ্ট সংখ্যক সদস্য থাকে তাকে অসীম সেট বলা হয়। **যেমন:** $F_{\infty}=\{1,2,3,4,.....\}$

একক সেট (Unit Set): যে সেটে একটিমাত্র সদস্য বা উপাদান থাকে তাকে একক বা একপদী সেট বলা হয়। **যেমন:** $S=\{4\}$ অথবা $C=\{0\}$ ।

ফাঁকা সেট (Null Set): যে সেটে কোন বাস্তব উপাদান বা সদস্য নেই তাকে শূন্য সেট বা ফাঁকা সেট বলা হয়। ফাঁকা সেট ϕ অথবা $\{\}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উপসেট (Subset): যদি A সেটের সকল উপাদান B সেটের উপাদান হয় তবে A সেটকে B সেটের উপসেট বলা হয়।
মনে করুন, $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ এবং $C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
উপরের তিনটি সেট থেকে আমরা দেখতে পাই, A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান অর্থাৎ $x\in A\Rightarrow x\in B$ । A সেটটি B সেটের উপসেট এবং লিখা হয় $A\subset B$ দ্বারা।
আবার, C সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান। সুতরাং, C সেটকে B সেটের উপসেট বলা হয়, $C\subseteq B$ ।
এখানে A এবং C সেটের মধ্যে পার্থক্য রয়েছে। যেখানে B এবং C সেটের উপাদানগুলো এবং তার সংখ্যা একই কিন্তু A সেট এবং B সেটের উপাদানগুলোর সংখ্যা সমান নয়। সুতরাং A সেটটি হলো B সেটের প্রকৃত উপসেট এবং লেখা হয় $A\subset B$ ।

যে কোনো সেট R এর জন্য

(i) $\phi\subseteq R$ (ফাঁকা সেট ϕ যেকোনো সেটের উপসেট)

(ii) $R\subseteq R$ (যে কোনো সেট ঐ সেটের উপসেট)

(iii) $n(P)$ বলতে P সেটের উপাদান সংখ্যা বোঝায়।

(iv) মনে করুন, P সেট Q সেটের উপাদান তখন $P\subseteq Q$ অর্থাৎ $n(P)\le n(Q)$

(v) মনে করুন, P সেট Q সেটের প্রকৃত উপসেট, অর্থাৎ $P\subset Q$ অর্থাৎ $n(P)<n(Q)$

শক্তি সেট (Power Set): যেকোনো সেট A এর সকল উপসেটের সেটকে A সেটের শক্তি সেট বা power সেট বলা হয়। A সেটের শক্তি সেটকে $P(A)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় ।
যেমন: $A=\{a,b,c\}$ হলে A এর শক্তি সেট, $P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}$
A সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে $P(A)$ এর উপাদান সংখ্যা হবে 2^n ।

এখানে সেট A এর উপাদান সংখ্যা 3, সুতরাং, $P(A)$ এর উপাদান সংখ্যা $=2^3=8$ যা $P(A)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে এবং $P(A)$ এর প্রত্যেকটি উপাদানই A সেটের উপসেট।

সার্বিক সেট (Universal Set): যে কোনো প্রসঙ্গে আলোচনাধীন সকল সেটই কোন নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এ ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট আলোচনাধীন সকল সেটের সেটকে সার্বিক সেট বলা হয়।

যেমন– $A=\{x:x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $3x\le 22\}$

$B=\{x:x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $x^2\le 50\}$ এবং $C=\{x:x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $\sqrt{x}\le 5\}$

এখন, $U=\{x:x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট$\}$ বিবেচনা করি।

তাহলে A, B, C হলো U এর উপসেট এবং U কে বলা হয় সার্বিক সেট।

সেটের কার্যবিধি: সেটের কার্যবিধি বলতে সেটের সংযোগ, সেটের ছেদ, অন্তর সেট, পূরক সেট ইত্যাদি কার্যকে বোঝায়। সেটের কার্যবিধি কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ নিয়ম বা সূত্র মেনে চলে। যেমন: একক সূত্র (Idempotent Law), সহযোজন নিয়ম (Associative law), বিনিময় নিয়ম (commutative law), বন্টন নিয়ম (Distributive law) ইত্যাদি।

সংযোগ সেট (Union of Sets): দুই বা তার অধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট বলা হয়। A ও B দুইটি সেট হলে তাদের সংযোগ সেট হবে $A\cup B$ এবং পড়তে হবে "*A Union B*"।

সংযোগ সেট গঠন পদ্ধতি: $A\cup B=\{x:x\in A$ অথবা $x\in B\}$।

যেমন: যদি $A=\{a,e,i,o,u\}$ এবং $B=\{a,b,d,e,i\}$ হয় তবে, $A\cup B$ এর মান নির্ণয় করুন।

এখানে, $A=\{a,e,i,o,u\}$ এবং $B=\{a,b,d,e,i\}$

$\therefore A\cup B=\{a,e,i,o,u\}\cup\{a,b,d,e,i\}=\{a,b,d,e,i,o,u\}$

ছেদ সেট (Intersection of Sets): দুই বা তার অধিক সেটের সাধারণ উপাদান (Common Element) নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট বলা হয়। ছেদ সেটকে $A\cap B$ দিয়ে প্রকাশ করা হয় এবং পড়তে হয় "*A* Intersection *B*"।

ছেদ সেট গঠন পদ্ধতি: $A\cap B=\{x:x\in A$ এবং $x\in B\}$

যেমন: যদি $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ এবং $B=\{2,3,4,5,6,8\}$ হয় তবে, $A\cap B$ এর মান নির্ণয় করুন।

এখানে, $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ এবং $B=\{2,3,4,5,6,8\}$

$\therefore A\cap B=\{1,2,4,5,6,7\}\cap\{2,3,4,5,6,8\}=\{2,4,6\}$

অন্তর সেট (Difference of Sets): A ও B দুইটি সেট। A সেট থেকে সেট B এর উপাদানগুলো বাদ দিলে যে সেট গঠিত হয় তাকে অন্তর সেট বলা হয় এবং তা লেখা হয় $A\backslash B$ বা $A-B$ দ্বারা।

সেট গঠন পদ্ধতিতে $A\setminus B=\{x:x\in A$ এবং $x\notin B\}$

যেমন: $A=\{1,2,3,4\}$ এবং $B=\{3,5,6\}\therefore A\setminus B=\{1,2,4\}$ এবং $B\setminus A=\{5,6\}$

পূরক সেট (Complementary Set): সার্বিক সেট U এর উপসেট A হলে, A সেটের সদস্য ব্যতীত U সেটের অন্যান্য সদস্যদের নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের পূরক সেট বলা হয় এবং প্রকাশ করা হয় A' বা A^c হিসেবে।

গাণিতিকভাবে, $A'=U\setminus A=\{x:x\in U;x\notin A\}$

যেকোনো সেট A এর জন্য –

$(i)\ U'=\phi$ $(ii)\ \phi'=U$ $(iii)\ A\cup A'=U$ (iv) $A\cap A'=\varphi$ $(v)\ (A')'=A$

যেমন: যদি $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ এবং $B=\{2,4,6\}$ হলে B' এর মান নির্ণয় করুন।

সুতরাং, $B'=U\setminus B=\{1,2,3,4,5,6\}\setminus\{2,4,6\}=\{1,3,5\}$

নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Sets): দুইটি সেটের মধ্যে যদি কোনো সাধারণ উপাদান (Common Element) না থাকে তাহলে সেই সেট দুইটিকে নিশ্ছেদ সেট বলা হয়। মনে করুন, A ও B দুইটি সেট। $A \cap C = \phi$ (ফাঁকা সেট) হলে তাকে নিশ্ছেদ সেট বলা হয়।

যেমন: $A = \{1,3,5,7\}$ এবং $B = \{2,4,6,8\}$ হয় তাহলে $A \cap B$ এর মান নির্ণয় করুন ।

এখানে, $A = \{1,3,5,7\}$ এবং $B = \{2,4,6,8\}$

$\therefore A \cap B = \{1,3,5,7\} \cap \{2,4,6,8\} = \varphi$

উদাহরণ 1: যদি $A = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ এবং $B = \{1,3,5,7,9\}$ হয়, তাহলে $A \cap B$ নির্ণয় করুন ।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ এবং $B = \{1,3,5,7,9\}$

$\therefore A \cap B = \{1,2,3,4,5,6,8\} \cap \{1,3,5,7,9\} = \{1,3,5\}$

উদাহরণ 2: দেওয়া আছে, $A = \{x : 19 < 5x \le 50\}$ এবং $B = \{x : 3x < 19\}$ এবং $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $0 < x \le 10\}$ সেট A ও B এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং A' ও B' নির্ণয় করুন।

সমাধান: সার্বিক সেট, $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $0 < x \le 10\}$

অর্থাৎ, $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A = \{x : 19 < 5x \le 50\}$ $\therefore A = \{4,5,6,7,8,9,10\}$

$B = \{x : 3x < 19\}$ $\therefore B = \{1,2,3,4,5,6\}$

অতএব, $A' = U \setminus A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3\}$

এবং $B' = U \setminus B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{1,2,3,4,5,6\} = \{7,8,9,10\}$

সংযোগ প্রক্রিয়ার বিনিময় বিধি: মনে করুন $A = \{x, y, z, t\}$ এবং $B = \{r, s, t, y\}$

$A \cup B = \{x, y, z, t\} \cup \{r, s, t, y\} = \{r, s, t, x, y, z\}$

আবার, $B \cup A = \{r, s, t, y\} \cup \{x, y, z, t\}$

$A \cup B$ এবং $B \cup A$ এ একই উপাদান রয়েছে।

$\therefore A \cup B = B \cup A$

সুতরাং, সেটের সংযোগ সেটের বিনিময় বিধি মেনে চলে।

সেটের ছেদ প্রক্রিয়ার বিনিময় বিধি: মনে করুন, $A = \{1,2,3\}$ এবং $B = \{2,3,4\}$

$\therefore A \cap B = \{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

আবার, $B \cap A = \{2,3,4\} \cap \{1,2,3\} = \{2,3\}$

$A \cap B$ এবং $B \cap A$ এ একই উপাদান রয়েছে।

$\therefore A \cap B = B \cap A$, সুতরাং, সেটের ছেদ সেটের বিনিময় বিধি মেনে চলে।

বন্টনবিধি (Distributive Law): যেকোনো সেট A, B এবং C হলে, দেখান যে

(ক) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (খ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

প্রমাণ: মনে করুন, $x \in A \cup (B \cap C)$

তাহলে, $x \in A$ অথবা $x \in (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in B$ এবং $x \in C$

$\Rightarrow (x \in A$ অথবা $x \in B)$ এবং $(x \in A$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ এবং $x \in (A \cup C)$

$\therefore x \in (A \cup B) \cap (A \cup B)$

সুতরাং, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .....(i)

আবার মনে করুন, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

তাহলে, $x \in (A \cup B)$ এবং $x \in (A \cup C)$

$\Rightarrow (x \in A$ অথবা $x \in B)$ এবং $(x \in A$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $(x \in B$ এবং $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in (B \cap C)$

$\therefore x \in A \cup (B \cap C)$

অতএব, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ .....(ii)

সুতরাং (i) ও (ii) হতে পাওয়া যায়, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করুন $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

দ্যা মরগ্যানের সূত্র (De Morgan's Law)

সার্বিক সেট U এর যে কোনো উপসেট A ও B এর জন্য

(ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ এবং (খ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

প্রমাণঃ (ক) মনে করুন, $x \in (A \cup B)'$

$\Rightarrow x \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cap B'$

সুতরাং, $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$.....(i)

আবার মনে করুন, $x \in A' \cap B'$

$\Rightarrow x \in A'$ অথবা $x \in B'$

$\Rightarrow x \notin A$ অথবা $x \notin B$

$\Rightarrow x \notin (A \cup B)$

$\therefore x \in (A \cup B)'$

সুতরাং, $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$.....(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাওয়া যায়, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (প্রমাণিত)

(খ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ -এ সূত্রটির প্রমাণ উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো হলো।

সমাধানঃ মনে করুন, $A = \{1,3,4,5,7,9\}$, $B = \{2,4,6,7,8,9,10\}$ এবং $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A \cap B = \{1,3,4,5,7,9\} \cap \{2,4,6,7,8,9,10\} = \{4,7,9\}$

$(A \cap B)' = \{1,2,3,5,6,8,10\}$

আবার, $A' = U \setminus A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{1,3,4,5,7,9\} = \{2,6,8,10\}$

এবং $B' = U \setminus B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{2,4,6,7,8,9,10\} = \{1,3,5\}$

$\therefore A' \cup B' = \{2,6,8,10\} \bigcup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5,6,10\}$

সুতরাং, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3: যদি $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,3,4,5,7,9\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$, এবং $C = \{1,3,5,7,8\}$ হয় তাহলে সমস্যাগুলোর সমাধান করুন: (i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (ii) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

সমাধান: দেওয়া আছে, $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,3,4,5,7,9\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$ এবং $C = \{1,3,5,7,8\}$

(i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

বামপক্ষ

$= A - (B \cup C) = \{1,3,4,5,7,9\} - [\{3,4,5,6,7\} \cup \{1,3,5,7,8\}] = \{1,3,4,5,7,9\} - \{1,3,4,5,6,7,8\} = \{9\}$

ডানপক্ষ

$= (A - B) \cap (A - C) = [\{1,3,4,5,7,9\} - \{3,4,5,6,7\}] \cap [\{1,3,4,5,7,9\} - \{1,3,5,7,8\} = \{1,9\} \bigcap \{4,9\} = \{9\}$

$\therefore A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(ii) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

বামপক্ষ $= (A \cup B \cup C)' = [\{1,3,4,5,7,9\} \cup \{3,4,5,6,7\} \cup \{1,3,5,7,8\}]' = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}' = \{2,10\}$

ডানপক্ষ $= A' \cap B' \cap C' = \{1,3,4,5,7,9\}' \cap \{3,4,5,6,7\}' \cap \{1,3,5,7,8\}'$

$= \{2,6,8,10\} \cap \{1,2,8,9,10\} \cap \{2,4,6,9,10\} = \{2,10\}$

$\therefore (A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$ (প্রমাণিত)

ক্রমজোড় (Ordered Pair): কোন পরীক্ষায় দেখা গেল সাজেদ ও আকরাম যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় হলো। পরীক্ষার ফলাফল অনুসারে তাদেরকে (সাজেদ, আকরাম) জোড়া আকারে লেখা যায়। এরূপ নির্দিষ্ট করে দেওয়া জোড়া একটি ক্রমজোড়। সুতরাং একজোড়া উপাদানের মধ্যে কোনটি প্রথম অবস্থানে আর কোনটি দ্বিতীয় অবস্থানে থাকবে, তা নির্দিষ্ট করে জোড়া আকারে প্রকাশকে ক্রমজোড় বলা হয়। যে কোনো উপাদান x, y নিয়ে x কে প্রথম এবং y কে দ্বিতীয় উপাদান বা পদ বিবেচনা করলে আমরা একটি ক্রমজোড় (x, y) পাই।

দুইটি ক্রমজোড় (x, y) এবং (a, b) সমান হবে অর্থাৎ $(x, y) = (a, b)$, যদি $x = a$ এবং $y = b$ হয়।

উদাহারণ 4: $(2x-y, 10) = (8, 3x-2y)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(2x-y, 10) = (8, 3x-2y)$

ক্রমজোড়ের শর্তানুসারে, $2x-y = 8$ …….. (i)

এবং $3x-2y = 10$ …. (ii)

সমীকরণ (i) নং হতে পাওয়া যায়, $2x-y = 8$

বা, $-y = 8 - 2x$

বা, $y = 2x - 8$.....(iii)

সমীকরণ (ii) এ y এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়, $3x - 2(2x - 8) = 10$

$$\text{বা, } 3x-4x-16=10$$
$$\text{বা, } -x=10-16$$
$$\text{বা, } x=6$$

সমীকরণ (iii) এ x-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়, $y=2\times6-8$

$$\text{বা, } y=12-8$$
$$\text{বা, } y=4$$
$$\therefore (x, y)=(6, 4)$$

কার্তেসীয় গুণজ (Cartesian Product): দুইটি সেটের সদস্য নিয়ে গঠিত সকল ক্রমজোড়ের সেটই হলো উক্ত সেট দুইটির কার্তেসীয় গুণজ। ক্রমজোড়ের প্রথম সদস্য অবশ্যই প্রথম সেট হতে এবং দ্বিতীয় সদস্য অবশ্যই দ্বিতীয় সেট হতে নিতে হবে। A ও B দুইটি সেট হলে A থেকে প্রথম উপাদান এবং B থেকে দ্বিতীয় উপাদান নিয়ে গঠিত সকল ক্রমজোড়ের সেটকে A ও B এর কার্তেসীয় গুণজ বলা হয়।

A ও B এর কার্তেসীয় গুণজ হবে $A\times B$

$A\times B$ কে পড়া হয় 'A ক্রস B' বা 'A cross B'.

সেট গঠন পদ্ধতিতে $A\times B=\{(x, y): x\in A \text{ এবং } y\in B\}$

উদাহারণ 5: $A=\{1,2\}$ এবং $B=\{2,3,5\}$ হলে এদের কার্তেসীয় গুণজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A=\{1,2\}$ এবং $B=\{2,3,5\}$

A ও B এর কার্তেসীয় গুণজ হবে $A\times B=\{(1,2),(1,3),(1,5),(2,2),(2,3),(2,5)\}$

সারসংক্ষেপ:

- দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন বস্তুসমূহের সুনির্ধারিত সংগ্রহ বা তালিকাকে **সেট** বলা হয়।
- যে কোনো প্রসঙ্গে আলোচনাধীন সকল সেটই কোন নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এ ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট আলোচনাধীন সকল সেটের সেটকে সার্বিক সেট বলা হয়।
- দ্যা মরগ্যানের সূত্র: সার্বিক সেট U এর যে কোনো উপসেট A ও B এর জন্য
  (ক) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ এবং (খ) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

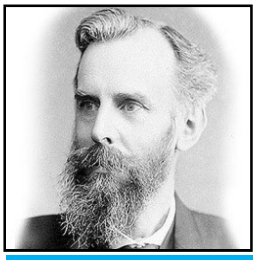
পাঠ-২.২ ভেনচিত্র
Venn Diagram

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

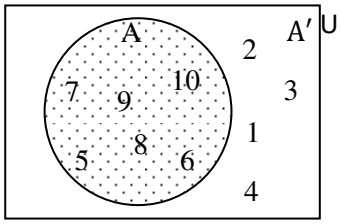
- ভেনচিত্র কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- ভেনচিত্রের মাধ্যমে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

ভেনচিত্র
Venn Diagram


Jhon Venn (1834-1923)

সেটের সংযোগ, ছেদ, উপসেট, অন্তর, পূরক ইত্যাদি প্রক্রিয়া বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র যেমন আয়তকার ক্ষেত্র, বৃত্তাকার ক্ষেত্র ও ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের সাহায্যে প্রকাশ করার মাধ্যমকে ভেনচিত্র বলা হয়। জনভেন (১৮৩৪-১৯২৩) সর্বপ্রথম সেটের কার্যবিধি জ্যামিতিক চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করেন। তাই তাঁর নাম অনুসারে এ পদ্ধতিটির নাম ভেনচিত্র। সাধারণত আয়তক্ষেত্র হিসেবে সার্বিক সেট, বৃত্তাকার বা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র হিসেবে উপসেট ব্যবহৃত হয়। ভেনচিত্রের মাধ্যমে সার্বিক সেট $U=\{x{:}x$ পূর্ণ সংখ্যা $0<x\le 10\}$

$A=\{x:13<3x\le 30\}$ এবং $A'=\{x:3x\le 13, x\,\text{Positive Number}\}$ সেটের চিত্ররূপ দেখানো হল।

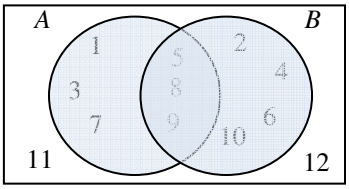


তালিকা পদ্ধতিতে সার্বিক সেট $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, সেট $A=\{5,6,7,8,9,10\}$ এবং $A'=\{1,2,3,4\}$।

যদি A যেকোনো সেট এবং U সার্বিক সেট হয় তখন লিখতে পারি $n(A)+n(A')=n(U)$ এখানে $n(A)$ দিয়ে ঐ সেটের সদস্য সংখ্যা বুঝায়।

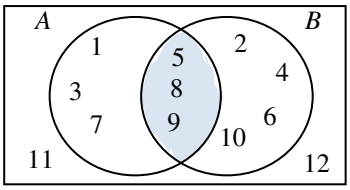
উদাহরণ 1: যদি $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, $A=\{1,3,5,7,8,9\}$, $B=\{2,4,5,6.8,9,10\}$ এবং $C=\{10,11,12\}$ হয় তবে (i) $A\cup B$ (ii) $A\cap B$ (iii) $A\setminus B$ (iv) $B\cap C$ ভেনচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

সমাধান: (i) $A\cup B$ =



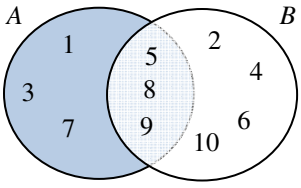
$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

(ii) $A\cap B$ =



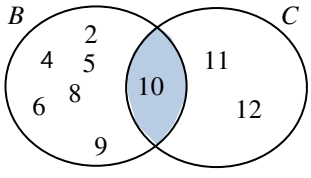
$A\cap B=\{5,8,9\}$

(iii) $A\setminus B$ =



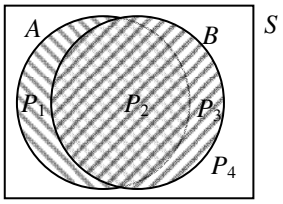
$A\setminus B=\{1,3,7\}$

(iv) $B\cap C$ =



$B\cap C=\{10\}$

উদাহরণ 2: কোনো পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 80% গণিতে এবং 75% ইংরেজিতে পাশ করল। উভয় বিষয়ে পাশ করেছে 70%। উভয় বিষয়ে শতকরা কতজন ফেল করেছে নির্ণয় করুন।



সমাধান: পাশের ভেন চিত্রটি লক্ষ্য করুন। এখানে আয়তক্ষেত্রটি 100 জন পরীক্ষার্থীর সেট S নির্দেশ করে। A ও B চিহ্নিত বৃত্তাকার ক্ষেত্র দুইটি যথাক্রমে গণিতে পাশ ও ইংরেজীতে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট নির্দেশ করে। ভেন চিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে যাদের P_1, P_2, P_3 ও P_4 দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

এখানে, $P_2 = A \cap B$ গণিত এবং ইংরেজি উভয় বিষয়ে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা =70

তাহলে, $P_1 = A \setminus P_2$ শুধু মাত্র গণিতে পাশ করেছে এমন পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 80– 70 = 10

এবং $P_3 = B \setminus P_2$ শুধুমাত্র ইংরেজীতে পাশ করেছে এমন পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 75 –70 = 5

$A \cup B = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ এক অথবা উভয় বিষয়ে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 10+70+5 = 85

$P_4 = S \setminus (A \cup B)$ উভয় বিষয়ে ফেল করেছে এমন পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 100–85= 15 অতএব, উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 15% পরীক্ষার্থী।

উদাহরণ 3: কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 70 জন বাংলা, 40 জন ইংরেজী এবং 20 জন বংলা ও ইংরেজী উভয় ভাষায় কথা বলতে পারে। দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষায় কথা বলতে পারে কত জন লোক তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষায় কথা বলতে পারে এমন লোকের সেট S। তাদের মধ্যে বাংলায় কথা বলতে পারে তাদের সেট A এবং ইংরেজীতে কথা বলতে পারে তাদের সেট B।

তাহলে প্রশ্নানুসারে, $n(A) = 70, n(B) = 40, n(A \cap B) = 20$

আমরা জানি, $n(S) = n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 40 - 20 = 110 - 20 = 90$

$\therefore$ দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষায় কথা বলতে পারে 90 জন।

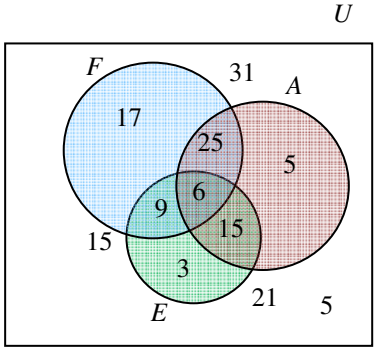
উদাহরণ 4: বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের বিবিএ প্রোগ্রামের 90 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 57 জন নিয়েছে ফিন্যান্স, 51 জন নিয়েছে হিসাবরক্ষণ, 33 জন নিয়েছে অর্থনীতি, 31 জন নিয়েছে ফিন্যান্স ও হিসাবরক্ষণ, 21 জন নিয়েছে হিসাবরক্ষণ ও অর্থনীতি, 15 জন নিয়েছে ফিন্যান্স ও অর্থনীতি এবং 6 জন নিয়েছে সবগুলো বিষয়।

(ক) তথ্যগুলো ভেনচিত্রের সাহায্যে প্রকাশকরুন।

(খ) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয় নি তা নির্ণয় করুন।

(গ) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি বিষয়ের কেবল দুইটি বিষয় নিয়েছে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: (ক) মনে করুন সকল শিক্ষার্থীর সেট U, ফিন্যান্স নেওয়া শিক্ষার্থীদের সেট F, হিসাবরক্ষণ নেওয়া শিক্ষার্থীদের সেট A এবং অর্থনীতি নেওয়া শিক্ষার্থীদের সেট E। তথ্যগুলোর ভেনচিত্র নিম্নে দেখানো হলো:



(খ) প্রশ্নমতে, $n(U)=90,\ n(F)=57,\ n(A)=51,\ n(E)=53,\ n(A\cap E)=21,\ n(F\cap E)=15,\ n(A\cap F)=31$ এবং $n(E\cap A\cap F)=6$

আমরা জানি, $n(E\cup A\cup F)=n(F)+n(A)+n(E)-n(F\cap A)-n(A\cap E)-n(E\cap F)+n(E\cap A\cap F)$

$=57+51+33-25-21-15+6=86$

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা $=n(U)-n(E\cup A\cup F)=90-86=4$ জন।

(গ) $n(A\cap E\cap F')+n(E\cap F\cap A')+n(F\cap A\cap E')$

$=n(A\cap E)-n(E\cap A\cap F)+n(E\cap F)-n(E\cap A\cap F)+n(F\cap A)-n(E\cap A\cap F)$

$=21+15+31-3\times6=67-18=49$ জন

উদাহরণ 5: কোন পরীক্ষার শতকরা 50 জন পরীক্ষার্থী ব্যবস্থাপনায়, শতকরা 48 জন হিসাববিজ্ঞানে এবং শতকরা 45 জন উভয় বিষয়ে পাস করে। যদি 30 জন উভয় বিষয়ে ফেল করে তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

সমাধান: মনে করুন, মোট পরীক্ষার্থী সংখ্যার সেট $=U$

ব্যবস্থাপনায় পাস করে পরীক্ষার্থী সংখ্যার সেট $=A$

হিসাববিজ্ঞানে পাস করে পরীক্ষার্থী সংখ্যার সেট $=B$

দেওয়া আছে, $n(A)=50\%,\ n(B)=48\%,\ n(A\cap B)=45\%$

আমরা জানি, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=50\%+48\%-45\%=98\%-45\%=53\%$

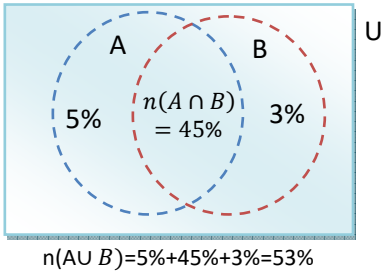
মোট পাসকৃত পরীক্ষার্থী $=53\%$

উভয় বিষয়ে মোট ফেলকৃত পরীক্ষার্থী $=100\%-53\%=47\%$

47% পরীক্ষার্থী সংখ্যা $=30$ জন

100% পরীক্ষার্থী সংখ্যা $=\dfrac{30\times100}{47}=63.88\approx64$

সুতরাং, মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 64 জন।



n(AU B)=5%+45%+3%=53%

সারসংক্ষেপ:

- সেটের সংযোগ, ছেদ, উপসেট, অন্তর, পূরক ইত্যাদি প্রক্রিয়া বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র যেমন আয়তকার ক্ষেত্র, বৃত্তাকার ক্ষেত্র ও ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের সাহায্যে প্রকাশ করার মাধ্যমকে **ভেনচিত্র** বলা হয়।

পাঠ-২.৩ ফাংশন Functions

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- চলক কী তা বলতে পারবেন;
- ফাংশন কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- বিভিন্ন পদ্ধতিতে ফাংশন লিখতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার ফাংশনের বর্ণনা করতে পারবেন।

ধ্রুবক Constant

ধ্রুবক একটি প্রতীক যা গাণিতিক ক্রিয়াকলাপগুলোর সেটের বা সমীকরণের উপরে কখনও পরিবর্তন হয় না। যেমন: 1,2,3,4,----এগুলো হচ্ছে ধ্রুবক। ইংরেজি বর্ণগুলোও যেমন- a,b,c, ...ইত্যাদি ধ্রুবক হতে পারে। a, b, c, ...বর্ণগুলোকে আবার ইচ্ছা (Arbitrary) ধ্রুবকও বলা হয়। Arbitrary ধ্রুবক একটি প্রতীক যার বিভিন্ন মান নির্ধারিত হতে পারে, তবে যা সমীকরণের চলকের মানগুলোর পরিবর্তন দ্বারা প্রভাবিত হয় না।

চলক (Variables): অজ্ঞাত কোনো সংখ্যা বা বস্তুকে কোনো প্রতীকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলে ঐ প্রতীককে চলক বলা হয়। চলক একটি প্রতীক। সেটের মাধ্যমে, যদি কোন সেট $S=\{x\in R:1\le x\le 25\}$ হয়, তবে $x\in R$ বলতে x এর মান 1 থেকে 25 পর্যন্ত যে কোন বাস্তব সংখ্যা বোঝায়। অর্থাৎ x এর বিচরণক্ষেত্র 1 থেকে 25 পর্যন্ত বিস্তৃত। এখানে x একটি চলক। অর্থাৎ চলক বলতে যে প্রতীক নির্দিষ্ট সেটের কোন সংখ্যাকে নির্দেশ করে তাকে বোঝায়। চলক যে সেট বা ক্ষেত্র থেকে মান গ্রহণ করে তাকে তার ডোমেন বলা হয়। সাধারণত বাস্তব সংখ্যার সেট R কে x চলকের ডোমেন ধরা হয়।

স্বাধীন এবং অধীন চলক (Independent and Dependent variables): যে চলক বা চলকসমূহের মান অন্য কোন চলকের উপর নির্ভরশীল না হয়ে ইচ্ছামত পরিবর্তিত হয় এবং অন্য চলকের মানের পরিবর্তন ঘটায়, তাকে স্বাধীন চলক (Independent variable) বলা হয় এবং পরিবর্তিত চলককে অধীন চলক (Dependent variable) বলা হয়। যেমন: দামের পরিবর্তন সাপেক্ষে চাহিদা পরিবর্তিত হয়, তাই **দাম** স্বাধীন চলক এবং **চাহিদা** অধীন চলক।

অন্বয় (Relations): দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে অথবা দুইটি সেটের মধ্যে যদি সম্পর্ক বোঝানো হয় তবে তাকে অন্বয় বলা হয়। যেমন: দুইটি অশূন্য সেট A ও B কার্তেসীয় গুণজ সেট $A\times B$-এর যে কোনো উপসেটকে A সেট হতে B সেটে একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়। এই অন্বয়কে $\mathbf{R}$ দ্বারা প্রকাশ করা হলে, $\mathbf{R}\subseteq A\times B$.
যদি $(a,b)\in R$ হয়, যেখানে $a\in R$ এবং $b\in R$ তবে $a\mathbf{R}b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় 'b','a' এর সাথে অন্বিত এবং 'a' is related to 'b' পড়া হয়।

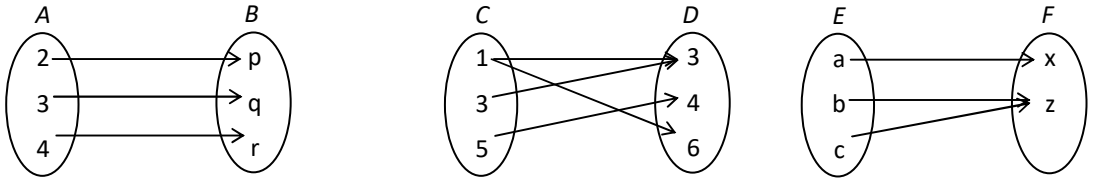
অন্বয়ের মাধ্যমে ফাংশনের সংজ্ঞা (Function): একটি বিশেষ ধরণের অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়। কোনো অন্বয়ে অবস্থিত ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানগুলো ভিন্ন হলে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়।
যেমন: $A=\{x,y\},B=\{p,q,r\}\therefore A\times B=\{(x,p),(x,q),(x,r),(y,p),(y,q),(y,r)\}.$
মনে করুন, $R_1=\{(x,p),(y,q)\}$ এবং $R_2=\{(x,p),(x,r),(y,p),(y,q)\}$

এখানে, R_1 একটি ফাংশন। কারণ, R_1-এর ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানগুলো ভিন্ন ভিন্ন অর্থাৎ x, y এবং উপাদানগুলো নিয়ে গঠিত সেট A-এর সমান।

R_2 ফাংশন নয়। কারণ, R_2-এর চারটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানগুলো অভিন্ন অর্থাৎ x, x এবং y, y.

সেটের সাহায্যে ফাংশনের সংজ্ঞা: মনে করুন, A ও B দুইটি সেট। যদি A সেট হতে B সেটে f একটি অন্বয় হয় এবং প্রত্যেক $a \in A$-এর জন্য একটি অনন্য উপাদান $b \in B$ থাকে, যেখানে $(a,b) \in f$, তবে f কে A সেট হতে B সেটে ফাংশন বলা হয়, যা $f : A \to B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন:



$f : A \to B$ সম্পর্কটি একটি ফাংশন। কারণ, A-সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের জন্য B সেটে অনন্য উপাদান রয়েছে।

$f : C \to D$ সম্পর্কটি ফাংশন নয়। কারণ, C সেটের উপাদান 1 জন্য D সেটে দুইটি উপাদান $3,6$ রয়েছে।

$f : E \to F$ সম্পর্কটি একটি ফাংশন। কারণ, A-সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের জন্য B সেটের একটি করে উপাদান রয়েছে।

চলকের সাহায্যে ফাংশনের সংজ্ঞা: যদি x একটি স্বাধীন চলক এবং y একটি অধীন চলক হয় এবং স্বাধীন চলক x-এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য অধীন চলক y এর যদি এবং কেবল যদি একটিমাত্র মান পাওয়া যায়, তবে স্বাধীন চলকবিশিষ্ট রাশিটিকে অধীন চলকের ফাংশন বলা হয়। অর্থাৎ, y কে x-এর ফাংশন বলা হয়। ফাংশনটিকে $y = f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে x-এর মানের উপর y নির্ভরশীল।

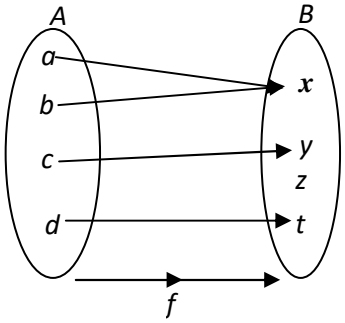
যেমন: $y = f(x) = 5x + 3,\ y = f(x) = \sqrt{3x^2 + 2},\ y = f(x) = |3x - 5|,\ y = f(x) = e^{\sin x},\ y = f(x) = x \log \frac{1}{x}$

প্রত্যকটি এক একটি ফাংশন। ফাংশনকে সাধারণত $y,\ f(x),\ g(x),\ F(x), \varphi(x),\ f_1(x), \ldots$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $y = 2x + 5$। এখানে, $x = 1$ হলে $y = 7$, $x = 0$ হলে $y = 5$ এবং $x = -1$ হলে $y = 3$। $f(x)$ ফাংশনের x এর মানের সেটকে ডোমেন এবং y এর মানের সেটকে রেঞ্জ বা কো-ডোমেন বলা হয়।

'a' যদি x এর একটি নির্দিষ্ট মান হয় তাহলে $f(x)$ ফাংশনটির মান $x = a$ এর জন্য $f(a)$ হিসেবে প্রকাশ করা হয়।

ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain, Co-domain and Range of Functions): কোন ফাংশন বর্ণনা করতে প্রথম সেটকে ডোমেন, দ্বিতীয় সেটকে কোডোমেন এবং কোডোমেনের যে সব উপাদান ডোমেনের উপাদানের সাথে যুক্ত হয় তাদের সেটকে রেঞ্জ বলা হয়।



যেমন : f ফাংশনের ডোমেন $= \{a, b, c, d\}$

f ফাংশনের কো-ডোমেন $= \{x, y, z, t\}$

f ফাংশনের রেঞ্জ $= \{x, y, t\}$

f ফাংশনের ডোমেন কে **ডোম** f দ্বারা সূচিত করা হয় এবং f ফাংশনের রেঞ্জ কে **রেঞ্জ** f দ্বারা সূচিত করা হয়।

ফাংশনের ডোমেন নির্ণয়ের নিয়মঃ

(i) ভগ্নাংশ আকারের ফাংশনের ক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যা x এর যে সকল মানের জন্য ভগ্নাংশের হর শুন্য হয় সেসব বাস্তব সংখ্যা x ডোমেন থেকে বাদ দিতে হবে।

(ii) কোন ফাংশন $\sqrt{f(x)}$ আকারের থাকলে, ঋণাত্মক হবে না অর্থাৎ $f(x) > 0$ হবে।

(iii) কোন ফাংশন $\frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$ আকারে থাকলে লবের $g(x) \geq 0$ এবং হরের $h(x) > 0$ হবে।

(iv) লগারিদমিক ফাংশনে ধনাত্মক মান বসাতে হবে।

ফাংশন প্রকাশ করার বিভিন্ন পদ্ধতি (Different methods of expressing functions)

(i) যদি x^2 এর মান সব সময় y হয়, তাহলে y, x এর একটি ফাংশন এবং লিখতে হয় $y = x^2$ বা $f(x) = x^2$

একই ভাবে, $\sin x, e^{3x}, \log x, (x+a)^n$ ইত্যাদি x এর ফাংশন।

(ii) y কে x এর ফাংশন হিসেবে এভাবে প্রকাশ করা যায়, $\begin{cases} y = x^2, \text{ যখন } x > 2 \\ y = x - 1, \text{ যখন } x \leq 2 \end{cases}$

এখানে, x এর মানকে অর্থাৎ ডোমেনকে দুইটি ভাগে ভাগ করা হয়েছে। প্রথম অংশ x এর মান 2 এর চেয়ে বড় $+\infty$ পর্যন্ত এবং দ্বিতীয় অংশ x এর মান 2 হতে শুরু করে 2 এর চেয়ে ছোট $-\infty$ পর্যন্ত। সুতরাং,এখানে ডোমেন হলো বাস্তব সংখ্যা।

(iii) x এবং y এর সম্পর্ককে সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়- $\begin{cases} y = x^2 \text{ যখন } x < 0 \\ y = x \text{ যখন, } 0 \leq x \leq 1 \\ y = \frac{1}{x} \text{ যখন } x > 1 \end{cases}$

এখানে, x এর মানকে অর্থাৎ ডোমেনকে তিনটি ভাগে ভাগ করা হয়েছে। প্রথম অংশে x এর মান 0 থেকে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা, দ্বিতীয় অংশে x এর মান 0 এবং 1 এবং এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যা এবং তৃতীয় অংশে x এর মান 1 হতে বড় সকল বাস্তব সংখ্যা।

(iv) মনে করুন, $y = |x|$। এখানে, y কে বলা হয় x এর ফাাংশন এবং x হলো বাস্তব সংখ্যার সম্পূর্ণ ক্ষেত্র।

আবার এটিকে অন্যভাবেও লেখা যায়। যেমন, $\begin{cases} y = x \text{ যখন, } x \geq 0 \\ y = -x \text{ যখন, } x < 0 \end{cases}$

ফাংশনের প্রকারভেদ (Types of functions): ফাংশন বিভিন্ন প্রকারের হয়ে থাকে। নিম্নে বিভিন্ন প্রকার ফাংশনের সংজ্ঞা ও ব্যাখ্যা দেওয়া হলো–

1. এক-এক ফাংশন (One-One function): যদি কোনো ফাংশনের ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন হয় তবে উক্ত ফাংশনকে এক-এক ফাংশন বলা হয়। অর্থাৎ, f কে এক-এক ফাংশন বলা হয়, যদি ডোম f এর সব সদস্য x_1, x_2 এর জন্য $f(x_1) \neq f(x_2)$ হয় যখন $x_1 \neq x_2$। অথবা, সব x_1, x_2 এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়। অর্থাৎ, ডোম f এর একটি সদস্য কো-ডোমেন সেটের শুধুমাত্র একটি সদস্যের সঙ্গে সম্পর্কিত হলে f একটি এক-এক ফাংশন।

যেমন: মনে করুন, $f : R \to R$ ফাংশনটি $y = f(x) = 3x - 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

তাহলে, $f(a) = 3a - 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$f(b) = 3b - 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

তাহলে, $f(a) = f(b) \Rightarrow 3a - 2 = 3b - 2$, বা, $3a = 3b$ বা, $a = b$

সুতরাং, $f(x)$ একটি এক-এক ফাংশন।

2. ভিতর ফাংশন (In-to function): যদি কোনো ফাংশনের কোডোমেন, ডোমেনের প্রকৃত উপসেট হয় তবে তাকে ভিতর ফাংশন বলা হয়। অর্থাৎ, কোডোমেনের সকল উপাদান বা সদস্য যদি ডোমেনের ছবি না হয় তবে তাকে ভিতর ফাংশন বলে।

3. সার্বিক বা সর্বগ্রাহী ফাংশন (Onto function): যদি কোনো ফাংশনের কো-ডোমেনের সকল উপাদান বা সদস্য ডোমেনের সকল উপাদান বা সদস্যের ছবি হয় তবে তাকে সার্বিক বা সর্বগ্রাহী ফাংশন বলা হয়।

4. প্রতিষঙ্গ ফাংশন বা বাইজেকটিভ ফাংশন (Bijective function): কোন ফাংশন একই সাথে এক-এক এবং সার্বিক হলে তাকে প্রতিষঙ্গ ফাংশন বা বাইজেকটিভ ফাংশন বলা হয়।

5. ইনজেকটিভ ফাংশন (Injectivefunction): যদি কোনো ফাংশন একই সাথে এক-এক এবং ভিতর-ফাংশন হয় তবে তাকে ইনজেকটিভ ফাংশন বলা হয়।

6. স্থির বা ধ্রুব ফাংশন (Constant function): যদি কোনো ফাংশনের ডোমেন সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি কো-ডোমেন সেটের একটি মাত্র উপাদান হয় তবে তাকে স্থির ফাংশন বলা হয়। যেমন: $y = f(x) = 7$

7. অভেদ ফাংশন (Identity function): যদি কোন ফাংশন কোন সেটের উপাদানকে একই সেটের ঐ উপাদানের সাথেই সম্পর্কিত করে তবে ফাংশনটিকে অভেদ বলা হয়। মনে করুন, A একটি অশূন্য সেট, $f : A \to A$ ফাংশনটিকে যদি সকল $x \in A$-এর জন্য $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয় তবে তাকে অভেদ ফাংশন বলা হয়।

8. যুগ্ম ফাংশন (Even function): যদি কোন ফাংশন এমন হয় যে, $f(-x) = x$ হয়, তাহলে তাকে যুগ্ম ফাংশন বলা হয়।

9. অযুগ্ম ফাংশন (Odd function): যদি কোন ফাংশন এমন হয় যে, $f(-x) = -x$ হয় তাহলে তাকে অযুগ্ম ফাংশন বলা হয়।

10. সংযোজিত ফাংশন (Composite function): যদি একটি ফাংশনের রেঞ্জ অপর একটি ফাংশনের সাথে ডোমেন হিসেবে সংযোজিত হয়ে নতুন ফাংশনের সৃষ্টি করে তবে তাকে সংযোজিত ফাংশন বলা হয়। মনে করুন, $y = g(u)$ এবং $u = f(x)$ তাহলে, $y = g\{f(x)\}$ কে বলা হয় ফাংশনের ফাংশন বা সংযোজিত ফাংশন।

11. বিপরীত ফাংশন (Inverse function): মনে করুন $f : A \to B$ একটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন। যদি একটি ফাংশন $g : B \to A$ এমনভাবে বর্ণিত হয় যে প্রত্যেক $b \in B$-এর জন্য $g(b) = a$ পাওয়া যায়, যদি এবং কেবল যদি $f(a) = b$ হয়, তখন g ফাংশনকে f ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বলা হয় এবং একে $g = f^{-1} : B \to A$ আকাওে প্রকাশ করা হয়।

উল্লেখ্য যে,

(i) কোনো ফাংশনের বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করা সম্ভব হবে যদি ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হয়।

(ii) f এর বিপরীত ফাংশন দ্বারা সূচিত হয় যেখানে $f(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$

(iii) f-এর ডোমেন $= f^{-1}$-এর কো-ডোমেন এবং f-এর কো-ডোমেন $= f^{-1}$-এর ডোমেন।

যেমন: যদি $y = \dfrac{5x+3}{2x+9}$ হয় তাহলে, $x = \dfrac{3-9y}{2y-5}$ হলো y-এর বিপরীত ফাংশন।

12. ব্যক্ত ফাংশন(Explicit function): যে সমস্ত ফাংশনকে সরাসরি স্বাধীন চলকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় তাকে ব্যক্ত ফাংশন বলে। একে প্রকাশ্য ফাংশনও বলা হয়। যেমন: $y = \sin x$

13. অব্যক্ত ফাংশন (Implicit function): যে সমস্ত ফাংশনকে সরাসরি স্বাধীন চলকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় না, দুইটি চলকের মিশ্রণরূপে প্রকাশ করা হয় তাদের একটিকে অপরটির অব্যক্ত ফাংশন বলা হয়। একে অপ্রকাশ্য ফাংশনও বলা হয়। যেমন: $x^2 + y^2 = a^2$

14. পর্যায়ক্রমিক ফাংশন (Periodic function): একটি নির্দিষ্ট সময়কাল ফাংশন। একটি ফাংশন যে নিয়মিত অন্তর বা সময়ের মধ্যে তার মান পুনরাবৃত্তি করে তখন তা পর্যায়ক্রমিক ফাংশন। যদি $f(x+p) = f(x)$ হয় এবং x-এর যেকোনো মানের জন্য $f(x)$ এবং $f(x+p)$ এর মান অপরিবর্তিত থাকে তখন তা পর্যায়ক্রমিক ফাংশন, p হলো f এর পর্যায়ক্রম। যেমন: x-এর যেকোনো মানের জন্য $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

উদাহরণ 1: যদি $f(x) = x^2 + 7$ হয় তাহলে, $f(a) - f(a-x)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 7$

সুতরাং, $f(a) - f(a-x) = a^2 + 7 - \{(a-x)^2 + 7\}$

$$= a^2 + 7 - (a^2 - 2ax + x^2 + 7) = a^2 + 7 - a^2 + 2ax - x^2 - 7 = 2ax - x^2$$

উদাহরণ 2: যদি $g(x) = 3x^2 - 2$ হয় তাহলে, $g(x+a) - g(x)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $g(x) = 3x^2 - 2$

সুতরাং, $g(x+a) - g(x) = 3(x+a)^2 - 2 - (3x^2 - 2)$

$$= 3(x^2 + 2xa + a^2) - 2 - 3x^2 + 2$$
$$= 3x^2 + 6xa + 3a^2 - 2 - 3x^2 + 2$$
$$= 6xa + 3a^2 = 3a(2x + a)$$

উদাহরণ 3: যদি $f(x+4) = x^2 - 2x + 1$ হয় তাহলে $f(x)$ এবং $f(x-4)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x+4) = x^2 - 2x + 1$

বা, $f(x+4-4) = (x-4)^2 - 2(x-4) + 1$

বা, $f(x) = x^2 - 8x + 16 - 2x + 8 + 1$

$\therefore f(x) = x^2 - 10x + 25$

আবার, $f(x) = x^2 - 10x + 25$

সুতরাং, $f(x-4) = (x-4)^2 - 10(x-4) + 25$

বা, $f(x-4) = x^2 - 8x + 16 - 10x + 40 + 25$

$\therefore f(x-4) = x^2 - 18x + 81$

সুতরাং, $f(x) = x^2 - 10x + 25$ এবং $f(x-4) = x^2 - 18x + 81$.

উদাহরণ 4: যদি $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{bx+a}$ হয় করুন যে, $f(x).f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$ ।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{ax+b}{bx+a}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a.\frac{1}{x}+b}{b.\frac{1}{x}+a}\text{ ,[} x\text{ -এর পরিবর্তে } \frac{1}{x} \text{ বসিয়ে]}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a+bx}{b+ax}=\frac{bx+a}{ax+b}$$

$$\therefore \text{L.H.S.}=f(x).f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{ax+b}{bx+a}\times\frac{bx+a}{ax+b}=1=\text{R.H.S.}$$

সুতরাং $f(x).f\left(\frac{1}{x}\right)=1$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 5: যদি $e^{y}+e^{-y}=2x$ হয় তাহলে y কে x এর ব্যক্ত ফাংশন বা Explicit function হিসেবে প্রকাশ করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $e^{y}+e^{-y}=2x$, মনে করুন, $z=e^{y}$

সুতরাং, $z+z^{-1}=2x$

$$\Rightarrow z+\frac{1}{z}=2x$$

$$\Rightarrow z^{2}+1=2zx$$

$$\Rightarrow z^{2}-2zx+1=0$$

$$\therefore z=\frac{2x\pm\sqrt{4x^{2}-4.1.1}}{2.1}$$

$$\Rightarrow e^{y}=\frac{2x\pm2\sqrt{x^{2}-1}}{2}$$

$$\Rightarrow e^{y}=x\pm\sqrt{x^{2}-1}$$

$$\Rightarrow \log_{e}e^{y}=\log_{e}\left(x\pm\sqrt{x^{2}-1}\right)$$

সুতরাং, $y=\log_{e}\left(x\pm\sqrt{x^{2}-1}\right)$ যা ব্যক্ত ফাংশন বা Explicit function হিসেবে প্রকাশিত।

উদাহরণ 6: $\frac{x^{2}+x+5}{x^{2}-5x+6}$ ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=f(x)=\frac{x^{2}+x+5}{x^{2}-5x+6}$

$f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x^{2}-5x+6\neq 0$ হয়।

এখন, $x^{2}-5x+6=0$

$$\Rightarrow x^{2}-3x-2x+6=0$$

$$\Rightarrow x(x-3)-2(x-3)=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2)=0$$

$\Rightarrow x-3=0$ অথবা, $x-2=0$

$\Rightarrow x=3$ অথবা, $x=2$

যেহেতু $x^2-5x+6\neq 0$ সুতরাং, $x\neq 3$ এবং $x\neq 2$ ফাংশনটির ডোমেন হবে, সকল বাস্তব সংখ্যা কিন্তু $x\neq 3$ এবং $x\neq 2$ ব্যতিরেকে।

উদাহরণ 7: $y=\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ ফাংশনটির কো-ডোমেন নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $y=\dfrac{x}{x^2-5x+9}$

$\Rightarrow y(x^2-5x+9)=x$

$\Rightarrow yx^2-5yx+9y=x$

$\Rightarrow yx^2-x(5y-1)+9y=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{(5y-1)\pm\sqrt{(5y-1)^2-4.y.9y}}{2.y}$

$\Rightarrow x=\dfrac{(5y-1)\pm\sqrt{25y^2-10y+1-36y^2}}{2y}$

$\Rightarrow x=\dfrac{(5y-1)\pm\sqrt{1-10y-11y^2}}{2y}$

যেহেতু x -এর মান সসীম এবং বাস্তব সংখ্যা সেহেতু $y\neq 0$ এবং $1-10y-11y^2\geq 0$ ।

বা, $1-10y-11y^2\geq 0$

বা, $1-11y+y-11y^2\geq 0$

বা, $1(1-11y)+y(1-11y)\geq 0$

বা, $(1-11y)(1+y)\geq 0$ $\therefore -\dfrac{1}{11}\leq y\leq 1$

সুতরাং, ফাংশনটির কো-ডোমেনহলো $y\neq 0$ এবং $-\dfrac{1}{11}\leq y\leq 1$ অথবা, $-\dfrac{1}{11}\leq y<0$ এবং $0<y\leq 1$

সারসংক্ষেপ:

- **ধ্রুবক** একটি প্রতীক যা গাণিতিক ক্রিয়াকলাপগুলোর সেটের বা সমীকরণের উপরে কখনও পরিবর্তন হয় না। যেমন: 1,2,3,4,----এগুলো হচ্ছে ধ্রুবক।
- অজ্ঞাত কোনো সংখ্যা বা বস্তুকে কোনো প্রতীকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলে ঐ প্রতীককে চলক বলা হয়।
- যে চলক বা চলকসমূহের মান অন্য কোন চলকের উপর নির্ভরশীল না হয়ে ইচ্ছামত পরিবর্তিত হয় এবং অন্য চলকের মানের পরিবর্তন ঘটায়, তাকে **স্বাধীন চলক (Independent variable)** বলা হয় এবং পরিবর্তিত চলককে **অধীন চলক (Dependent variable)** বলা হয়।
- যদি x একটি স্বাধীন চলক এবং y একটি অধীন চলক হয় এবং স্বাধীন চলক x -এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য অধীন চলক y এর যদি এবং কেবল যদি একটিমাত্র মান পাওয়া যায়, তবে স্বাধীন চলকবিশিষ্ট রাশিটিকে অধীন চলকের ফাংশন বলা হয়।

পাঠ-২.৪ ফাংশনের লিমিট
Limit of Functions

উদ্দেশ্য

এপাঠ শেষে আপনি-

- ফাংশনের লিমিট কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- লিমিটের ধর্ম বর্ণনা করতে পারবেন;
- লিমিটের ধর্ম ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

ফাংশনের লিমিট
Limit of functions

যদি একটি স্বাধীন চলক x এর মান a এর অতি নিকটবর্তী $(x \neq a)$ হওয়ায় $f(x)$ ফাংশনের মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা A এর অতি সন্নিকটবর্তী হয় $[f(x) \neq A]$, তখন A কে $f(x)$ ফাংশনের লিমিট বা সীমাস্থ মান বলা হয় এবং ইহাকে $\lim_{x \to a} f(x) = A$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। **উদাহরণ:** মনে করুন, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. তাহলে $f(2) = \frac{0}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত। অর্থাৎ $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর কোনো মান বিদ্যমান নাই। যদি ফাংশনটিকে সরল করা হয় তাহলে পাই $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = x+2$ এবং তখন $f(2)=4$ পাওয়া যায়, কিন্তু $x=2$ এর জন্য লব ও হর কে $x-2$ অর্থাৎ শূন্য দিয়ে ভাগ করা বুঝায় যা অসম্ভব। এই সমস্যা সমাধানের জন্য $x=2$ না ধরে 2 এর খুব কাছাকাছি মান নেওয়া হলে $x-2$ এর মান শূন্য না হয়ে অতিক্ষুদ্র বাস্তব সংখ্যা হয় যা বাস্তব সংখ্যার নিয়মের পরিপন্থি হয় না। যেমন: $x = 1.9,\ 1.99,\ 1.999,\ldots\ldots\ldots$ হলে $f(x) = 3.9,\ 3.999,\ 3.999\ldots\ldots\ldots\ldots$ পাওয়া যায়। আবার $x = 2.1,\ 2.01,\ 2.001,\ 2.0001,\ldots\ldots\ldots$ হলে $f(x) = 4.1,\ 4.01,\ 4.001,\ 4.0001,\ldots\ldots\ldots$ পাওয়া যায়। অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রেই চলরাশি x এর মান 2 এর কাছাকাছি হলে $f(x)$ এর মান 4 এর কাছাকাছি হয়। এক্ষেত্রে 4 কে প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর লিমিট বা সীমাস্থ মান বলা হয়।

লিমিটের $\varepsilon - \delta$ সংজ্ঞা: স্বাধীন চলক x এর মান ক্রমশ একটি ধ্রুবসংখ্যা a এর নিকটবর্তী হলে A কে ফাংশন $f(x)$ এর লিমিট বলা হবে যদি কোনো পূর্ব নির্ধারিত যথেষ্ট ক্ষুদ্র ধনাত্বক সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর জন্য ε এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্র ধনাত্বক সংখ্যা δ পাওয়া যায়, যেন $|f(x) - A| < \varepsilon$ যখন $0 < |x-a| < \delta$ হয়।

লিমিটের মৌলিক ধর্মাবলি

যদি $\lim_{x \to a} f(x) = A$ এবং $\lim_{x \to a} g(x) = B$ হয় যেখানে A এবং B হচ্ছে যেকোনো সসীম সংখ্যা, তখন

(i) $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

(ii) $\lim_{x \to a}[f(x) \times g(x)] = A \times B$

(iii) $\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{A}{B}$, যখন $B \neq 0$.

(iv) $\lim_{x \to a} k.f(x) = k.\lim_{x \to a} f(x) = k.A$

(v) $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to a}f(x)}=\frac{1}{A}$, যেখানে, $A\neq 0$ (vi) $\lim_{x\to a}\log f(x)=\log\lim_{x\to a}f(x)=\log A$

(vii) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$ এবং $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (viii) $\lim_{x\to\infty^{\pm}}\frac{1}{x^n}=0$ যদি n যে কোনো পূর্ণসংখ্যা হয়।

(ix) $\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ যদি n যে কোনো পূর্ণসংখ্যা (x) $\lim_{x\to 0}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ যদি n যে কোনো পূর্ণসংখ্যা

উদাহরণ 1: $\lim_{x\to 1}(2x^2-x+9)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\lim_{x\to 1}(2x^2-x+9)=\lim_{x\to 1}2x^2-\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}9=2.1^2-1+9=2+9-1=10$

উদাহরণ 2: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}\times\frac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}$ [লব ও হরকে $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}$ দ্বারা গুণ করেপাই]

$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5+x}\right)^2-\left(\sqrt{5-x}\right)^2}{x\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}\right)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{5+x-5+x}{x\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}\right)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}\right)}=\frac{2}{\left(\sqrt{5+0}+\sqrt{5-0}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

উদাহরণ 3: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: x=1 বসালে সীমা $\frac{0}{0}$ আকার ধারণ করে, যা অসংজ্ঞায়িত।

এখানে, $\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}=\frac{x^3-x-2x+2}{(x-1)^2}=\frac{x(x^2-1)-2(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)\{x(x+1)-2\}}{(x-1)^2}=\frac{x^2+x-2}{x-1}$

$=\frac{x^2+2x-x-2}{x-1}=\frac{x(x+2)-(x+2)}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$

সুতরাং, $\lim_{x\to 1}(x+2)=1+2=3$

উদাহরণ 4: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে $f(x)=\sin^2 x$.

সমাধান: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(x+h)-\sin^2 x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+h)\sinh}{h}=\lim_{h\to 0}\sin(2x+h)\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}=\sin 2x.1=\sin 2x$

উদাহরণ 5: প্রমাণ করুন যে, $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]=1$

সমাধান: বামপক্ষ $=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]$

$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-2x-x+2}\right]$

$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x(x-2)-1(x-2)}\right]$

$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)(x-1)}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x-1-1}{(x-2)(x-1)}\right]$

$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)}{(x-2)(x-1)}\right]$

$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-1}\right]=\frac{1}{2-1}=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]=1$ (প্রমাণিত)

বামপক্ষ এবং ডানপক্ষের লিমিটি

বামপক্ষের লিমিট নির্ণয় করতে হলে লিখতে হবে

L.H.L. $=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a-h)$ যেখানে, h সর্বদা ধনাত্মক।

ডানপক্ষের লিমিট নির্ণয় করতে হলে লিখতে হবে, R.H.L. $=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)$

উদাহরণ 6: $\lim_{x\to a} e^{\frac{1}{x-a}}$ এর বামপক্ষ এবং ডানপক্ষের লিমিটের ধরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\lim_{x\to a} e^{\frac{1}{x-a}}$

L.H.S $=\lim_{x\to a^-} e^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{a-h-a}}=\lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{-h}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{h}}}=0$ কারণ, $h\to 0$, সুতরাং $\frac{1}{h}\to\infty$

R.H.S $=\lim_{x\to a^+} e^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{a+h-a}}=\lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}}=\infty$

সারসংক্ষেপ

- যদি একটি স্বাধীন চলক x এর মান a এর অতি নিকটবর্তী $(x\neq a)$ হওয়ায় $f(x)$ ফাংশনের মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা A এর অতি সন্নিকটবর্তী হয় $[f(x)\neq A]$, তখন A কে $f(x)$ ফাংশনের লিমিট বা সীমাস্থ মান বলা হয় এবং ইহাকে $\lim_{x\to a} f(x)=A$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যদি $\lim_{x\to a} f(x)=A$ এবং $\lim_{x\to a} g(x)=B$ হয় যেখানে A এবং B হচ্ছে যেকোনো সসীম সংখ্যা, তখন
- $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$, $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)]=A\times B$ এবং $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{A}{B}, B\neq 0$

পাঠ-২.৫ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন
Continuity of Functions

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের সংজ্ঞা বলতে পারবেন;
- কোনো ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিনা তা যাচাই করতে পারবেন।

অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের সংজ্ঞা
Definition of continuity of a function

যেকোনো বিন্দু $x=a$ তে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ হয়। সুতরাং $x=a$ তে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি $f(a)$ সংজ্ঞায়িত হয় এবং $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ হয় অর্থাৎ $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ অথবা $\lim_{h\to 0} f(a-h)=\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$ হয়।

উদাহরণ 1: $x=2$ বিন্দুতে $f(x)=x^2+2$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্ন তা যাচাই করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+2$

এখানে, $f(2)=2^2+2=4+2=6$

এবং $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+2)=2^2+2=6$

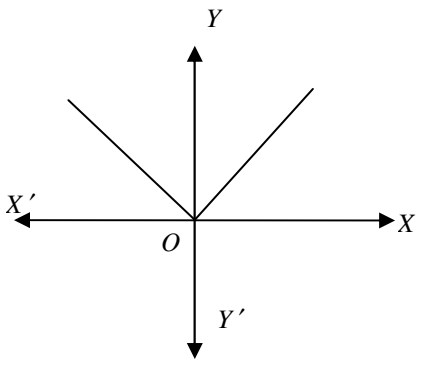
সুতরাং, $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+2)=2^2+2=6$

অর্থাৎ $x=2$ বিন্দুতে $f(x)=x^2+2$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 2: প্রমাণ করুন যে, $y=|x|$ ফাংশন সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

প্রমাণ: আমর াজানি, $|x|=\begin{cases} x, & \text{when } x>0 \\ -x & \text{when } x<0 \end{cases}$

$|x|$ এর লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $(-\infty,\infty)$ ব্যবধিতে $|x|$ সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।



$|x|$এর লেখচিত্র

তাহলে শুধু $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন তা যাচাই করলেই চলবে।

এখন, $x=0$ বিন্দুতে,

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$ এবং $f(0)=0$

সুতরাং $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

অর্থাৎ $x=0$ বিন্দুতে $|x|$ অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore |x|$ সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 3: নিম্নলিখিত ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন কিনা তা যাচাই করুন।

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{ যখন } x>2\\ 4, \quad \text{ যখন } x=2\end{cases}$$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(2)=4$

এখন, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4$

এবং $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)=4$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

$\therefore$ ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 4: দেখান যে, $x=0$ বিন্দুতে $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন, যেখানে $f(0)=0$ ।

সমাধানঃ এখানে, $f(0)=0$

$$\text{L.H.S.}=\lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{h\to 0}(-h)\sin\frac{1}{(-h)}=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}=0$$

$$\text{R.H.S.}=\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}=0$$

সুতরাং, $f(x)$ ফাংশনটি $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 5: $f(x)$ ফাংশনটি যদি এভাবে সংজ্ঞায়িত $f(x)=\begin{cases}3+2x \text{ যখন}, -\dfrac{3}{2}\le x<0\\ 3-2x \text{ যখন}, 0\le x<\dfrac{3}{2}\\ -3-2x \text{ যখন}, x\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}$

হয় তবে দেখান যে $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন এবং $x=\dfrac{3}{2}$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

সমাধানঃ এখানে, $f(x)=\begin{cases}3+2x \text{ যখন}, -\dfrac{3}{2}\le x<0\\ 3-2x \text{ যখন}, 0\le x<\dfrac{3}{2}\\ -3-2x \text{ যখন}, x\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}$

প্রথমক্ষেত্রে, $f(x)$ ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন তা যাচাই করা হবে।

সুতরাং, $f(0)=3-2\times 0=3$

বাম পক্ষের লিমিট $=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 3+2x=3$ এবং

ডান পক্ষের লিমিট $=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3-2x=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=3$

সুতরাং, $f(x)$ ফাংশনটি $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয়ক্ষেত্রে, $f(x)$ ফাংশনটির $x=\frac{3}{2}$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন তা যাচাই করা হবে।

সুতরাং, $f\left(\frac{3}{2}\right)=-3-2\times\frac{3}{2}=-6$

বাম পক্ষের লিমিট $=\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} 3-2x=0$ এবং

ডান পক্ষের লিমিট $=\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} -3-2x=-6$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x)\neq \lim_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)$$

সুতরাং, $f(x)$ ফাংশনটি $x=\frac{3}{2}$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

সারসংক্ষেপ

$f(x)$ ফাংশনটিকে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে কেবল যদি $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ হয়।

ইউনিট দুই মূল্যায়ন

1. বিবিএ প্রোগ্রামের দ্বিতীয় সিমেস্টার পরীক্ষায় অংশ গ্রহণ করেছে মোট 1500 জন শিক্ষার্থী। এর মধ্যে হিসাব বিজ্ঞানে ফেল করেছে 450 জন, ব্যবসায় গণিতে ফেল করেছে 500 জন এবং মূল্য নির্ধারণ বিষয়ে ফেল করেছে 475 জন। হিসাব বিজ্ঞান ও ব্যবসায় গণিত উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 300 জন, ব্যবসায় গণিতে ও মূল্য নির্ধারণ উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 320 জন এবং হিসাব বিজ্ঞান ও মূল্য নির্ধারণ উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 350 জন। হিসাব বিজ্ঞান, ব্যবসায় গণিত ও মূল্য নির্ধারণ এ তিনটি বিষয়েই ফেল করেছে 250 জন শিক্ষার্থী। সমাধান করুন-

(i) কমপক্ষে একটি বিষয়ে ফেল করেছে কতজন শিক্ষার্থী?

(ii) সকল বিষয়ে পাস করেছে কতজন শিক্ষার্থী?

(iii) কতজন শিক্ষার্থী একটিমাত্র বিষয়ে ফেল করেছে?

2. সিলেট শহরে মোট জনসংখ্যা 80,000 জন। তাদের মধ্যে 8000 জন ব্যবহার করে Samsung Mobile এবং Nokia Mobile ব্যবহার করে 20,000 জন এবং Samsung ও Nokia Mobile উভয়ই ব্যবহার করে 6000 জন।

(i) মোট কতজন Mobile ফোন ব্যবহার করে?

(ii) মোট কতজন Mobile ফোন ব্যবহার করে না?

(iii) কতজন শুধুমাত্র Samsung Mobile ব্যবহার করে?

(iv) কতজন শুধুমাত্র Nokia Mobile ফোন ব্যবহার করে?

3. যদি $f(x-2)=9x-7$ হয় তাহলে $f(x)$ এবং $f(x+2)$ এর মান নির্ণয় করুন।

4. যদি $f(x)=\log_e \frac{1+x}{1-x}$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=2f(x)$

5. যদি $f(x)=\frac{1}{x^2}$ হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে $f(x+h)-f(x-h)=-\frac{4xh}{\left(x^2-h^2\right)^2}$

6. $\frac{x^2+x+5}{x^2-6x+8}$ এর ডোমেন নির্ণয় করুন।

7. $\frac{x}{1+x^2}$ এর কো-ডোমেন বা রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

8. যদি $\log x+\log y=2x$ হয় তাহলে y কে x এর ব্যক্ত ফাংশন বা Explicit function হিসেবে প্রকাশ করুন।

9. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$ এর মান নির্ণয় করুন।

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{x}$ এর মান নির্ণয় করুন।

11. $\frac{4x^4+3x^2-1}{x^3+7}$ এর লিমিট এর মান নির্ণয় করুন, যখন $x\to 1$।

12. $\lim_{x\to 1}\left[2x^2(x+\sqrt{x})+3x^{\frac{1}{3}}-\frac{14}{x}\right]$ এর মান নির্ণয় করুন।

13. প্রমাণ করুন যে, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x^2}-\sqrt{a-x^2}}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}$।

14. প্রমাণ করুন যে, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}(n^2+5n+6)}{(n+4)(n+5)}=0$

15. প্রমাণ করুন যে, $\lim_{x\to 4}\log\left(2x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}-1\right)=2\log 3$

16. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ এর বামপক্ষ এবং ডানপক্ষের লিমিটের ধরণ নির্ণয় করুন।

17. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনটি $x=1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিনা তা যাচাই করুন।

18. $f(x)=3x^2+2x-1$ ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিনা তা যাচাই করুন।

19. $f(x)$ ফাংশনটি (0,3) ব্যবধিতে এভাবে সংজ্ঞায়িত হলে, $f(x)=\begin{cases}x^2 \text{ যখন}, 0<x<1\\ x \text{ যখন}, 1\le x<2\\ \frac{1}{4}x^3 \text{ যখন}, 2\le x<3\end{cases}$ দেখান যে $x=1$ এবং $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

20. $f(x)$ ফাংশনটি এভাবে সংজ্ঞায়িত হলে, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-x & \text{যখন, } 0<x<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{যখন, } x=\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}-x & \text{যখন, } \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$ দেখান যে $f(x)$ ফাংশনটি $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

উত্তরমালা

1. (i) 750 (ii) 795 (iii) 235 2. (i) 22,000 (ii) 58,000 (iii) 2000 (iv) 14000

3. $f(x)=9x+11$ এবং $f(x+2)=9x+29$ 6. ডোমেন $=-a<x<a, a\in R$ কিন্তু $x\neq 2$ এবং $x\neq 4$

7. কো-ডোমেন $=-\frac{1}{2}\le y<0$ এবং $0<y\le\frac{1}{2}$ 8. ব্যক্ত ফাংশন, $y=\frac{e^{2x}}{x}$ 9. $\frac{4}{3}$ 10. $\frac{1}{2}$

11. $\frac{3}{4}$ 12. -7 17. বিচ্ছিন্ন 18. অবিচ্ছিন্ন