বাস্তব সংখ্যা
Real Numbers

১

ভূমিকা
Introduction

সংখ্যার ধারণা অতি প্রাচীন। খ্রিষ্টপূর্ব ৬০০০ সাল থেকে বিভিন্ন সংখ্যা ব্যবহারের প্রমাণ পাওয়া যায়। প্রাচীনকাল থেকেই মানুষ বিভিন্ন ধরণের প্রতীক, বিভিন্ন চিত্র ইত্যাদির মাধ্যমে সংখ্যাগত মান পরস্পরকে বোঝাতো। সভ্যতা বিকাশের ধারাবাহিকতায় দৈনন্দিন কাজে এর ব্যপক ব্যবহার শুরু হয়। কালক্রমে গণিতশাস্ত্রের বিকাশের সাথে সাথে সংখ্যা আবিষ্কৃত হয় এবং গণনা কাজকে সহজতর করে তুলে। এভাবে মানুষের প্রয়োজনের তাগিদে গণনার কাজ করার জন্য স্বাভাবিক সংখ্যার সৃষ্টি হয়। স্বাভাবিক সংখ্যার সীমাবদ্ধতা থেকে ভগ্ন সংখ্যার সৃষ্টি। বিভিন্ন হিসাব করার জন্য ধনাত্মক সংখ্যা, ঋণাত্মক সংখ্যা, শূন্য, মৌলিক সংখ্যা, যৌগিক সংখ্যা, মূলদ সংখ্যা, অমূলদ সংখ্যারও আবির্ভাব ঘটে। খ্রিষ্টীয় ষষ্ঠদশ শতাব্দির মাঝামাঝি দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান হিসেবে গণিতে জটিল সংখ্যার আবির্ভাব ঘটে। বর্তমান ইউনিটে বাস্তব সংখ্যা, পরমমান, জটিল সংখ্যা, এককের ঘনমূল ইত্যাদি বিষয়গুলো নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৪ দিন

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-১.১ : বাস্তব সংখ্যার প্রাথমিক ধারণা
পাঠ-১.২ : সংখ্যারেখা এবং পরমমান
পাঠ-১.৩ : কাল্পনিক সংখ্যা এবং জটিল সংখ্যা
পাঠ-১.৪ : জটিল সংখ্যার বর্গমূল এবং এককের ঘনমূল

মূখ্য শব্দ	বাস্তব সংখ্যা, মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা, মৌলিক সংখ্যা, ব্যবধি, সংখ্যারেখা, স্বীকার্য, আবদ্ধতা ধর্ম, অভেদক উপাদানের অস্তিত্ব, বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব, সংযোগ বিধি, বন্টন বিধি, বিনিময় বিধি, অসমতা, অসমতা স্বীকার্য, সম্পূর্ণতা স্বীকার্য, পরমমান, জটিল সংখ্যা, বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ, ঘনমূল।

পাঠ-১.১ বাস্তব সংখ্যার প্রাথমিক ধারণা
The basic idea of real numbers

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন ধরণের সংখ্যা বর্ণনা করতে পারবেন;
- বাস্তব সংখ্যা কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- মূলদ সংখ্যার বৈশিষ্ট্য লিখতে পারবেন;
- মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার পার্থক্য করতে পারবেন।

স্বাভাবিক সংখ্যা
Natural Number

গণনা করার জন্য সাধারণত 1, 2, 3, 4,... ইত্যাদি সংখ্যা ব্যবহার করা হয়ে থাকে। সুতরাং, আমাদের গণনার কাজে ব্যবহৃত সকল পূর্ণসংখ্যাকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। তাই স্বাভাবিক সংখ্যাকে গণনাকারী সংখ্যাও (Counting Number) বলে। স্বাভাবিক সংখ্যা 1 থেকে শুরু হয়ে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। অর্থাৎ, এর কোনো শেষ নেই। স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল ও গুণফল একটি স্বাভবিক সংখ্যা হয় কিন্তু বিয়োগফল ও ভাগফল স্বাভবিক সংখ্যা নাও হতে পারে। সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে $\mathbb{N}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা **(Non-negative Integer) বা (Whole Number):** শূন্য (0) সহ সকল স্বাভাবিক সংখ্যা যা ভগ্নাংশ ভিন্ন তাদেরকে অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। সকল অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেটকে W দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $W=\{0, 1, 2, 3, ...\}$.

ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা **(Negative Integer):** শূন্য (0) থেকে ছোট সকল পূর্ণসংখ্যাকে ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার বর্গমূল করলে জটিল সংখ্যা পাওয়া যায়। যেমন: -1,-3,-100 ইত্যাদি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

পূর্ণ সংখ্যা **(Integer):** সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও শূন্য মিলে যে সংখ্যার সমাহার তাকে পুর্ণ সংখ্যার সেট (Set of Integers) বলা হয়। শূন্য (0) পূর্ণ সংখ্যা, এটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোনোটিই নয়। সংখ্যা রেখায় পূর্ণ সংখ্যা $-\infty$ থেকে 0 এবং 0 হতে $+\infty$ পর্যন্ত বিস্তৃত। পূর্ণ সংখ্যার সেটকে $\mathbb{Z}$ অথবা **I** দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $\mathbb{Z} = \{.........., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

মৌলিক সংখ্যা **(Prime Number):** যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা কেবলমাত্র ঐ সংখ্যা এবং 1 দ্বারা বিভাজ্য তাদেরকে মৌলিক সংখ্যা বলা হয়। 2 ব্যতীত সকল মৌলিক সংখ্যা বিজোড়। সকল মৌলিক সংখ্যার সেটকে **P** দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ **P** $=\{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$.

যৌগিক সংখ্যা **(Composit Number):** যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা শুধুমাত্র ঐ সংখ্যা এবং 1 ব্যতীত অন্য সংখ্যা দ্বারাও বিভাজ্য তাদেরকে যৌগিক সংখ্যা বলে। যেমন: 4,6,8,9,10, ...। যৌগিক সংখ্যাকে একাধিক মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। 1 সকল সংখ্যার উৎপাদক।

ধনাত্মক সংখ্যা **(Positive Number):** শূন্য (0) অপেক্ষা বড় সংখ্যাগুলোকে ধনাত্মক সংখ্যা বলা হয়। ভগ্নাংশও ধনাত্মক সংখ্যা হতে পারবে। যেমন: 0.214, $\frac{1}{2}$, 0.652, 1, 1.2 , 4, 5.5, 9.......... ইত্যাদি।

ঋণাত্মক সংখ্যা (Negative number): শূন্য (0) অপেক্ষা ছোট সংখ্যাগুলোকে ঋণাত্মক সংখ্যা বলা হয়। যেমনঃ $-0.5, -1, -3, -4.5,$............ ইত্যাদি।

মূলদ সংখ্যা (Rational number): যে সকল সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসেবে প্রকাশ করা যায় তাদেরকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়। অর্থাৎ, যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা বা ($p,q\in Z$) এবং $q\neq 0, q$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হতে পারবে। মূলদ সংখ্যার সেট **Q** দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ **Q** = { $\frac{p}{q}: p,q\in Z$ এবং $q\neq 0$}। প্রত্যেক পূর্ণসংখ্যাই মূলদ সংখ্যা কিন্তু সব মূলদ সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা নয়। অতএব, $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$.
উল্লেখ্য যে, মূলদ সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে তা সসীম দশমিক বা পৌণ:পুনিক হবে। যেমন, $\frac{3}{4} = 0.75, \frac{2}{3} = 0.6666666 = 0.\dot{6}$

মূলদ সংখ্যার বৈশিষ্ট্য (Properties of Rational Number):

1. a, b দুইটি মূলদ সংখ্যা হলে এর যোগফল $a+b$ একটি মূলদ সংখ্যা হবে।
2. a ও b সংখ্যা দুইটি মূলদ সংখ্যার সেটের অন্তর্ভুক্ত হলে যোজনের ক্ষেত্রে, $a+b = b+a$ হবে।
3. a, b, c তিনটি মূলদ সংখ্যা হলে, $(a+b)+c = a+(b+c)$ হবে।
4. প্রতিটি মূলদ সংখ্যা a এর জন্য একটি ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা $-a$ আছে। যার জন্য $a + (-a) = (-a) + a = 0$ হবে। এখানে, $-a$ কে a এর যোগের বিপরীত (Additive Inverse) বলা হয়।
5. তিনিটি মূলদ সংখ্যা a,b,c এর মধ্যে সম্পর্ক এমন হয় যে, $a+c=b+c$ তবে $a=b$ হবে।
6. তিনটি মূলদ সংখ্যা a, b, c এর গুণনের ক্ষেত্রে $a.b=b.a$ এবং $(a.b).r=a.(b.r)$ হবে।
7. দুইটি মূলদ সংখ্যার গুণফল একটি মাত্র মূলদ সংখ্যা হবে।
8. যে কোন মূলদ সংখ্যা a, b, c এর জন্য (i) $a(b+c)=ab+ac$ (ii) $(b+c)a=ba+ca$
9. প্রতিটি মূলদ সংখ্যা a এর জন্য অপর একটিমাত্র a^{-1} বিদ্যমান এবং $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$। এখানে, a^{-1} কে a এর গুণনের বিপরীতক (Multiplicative Inverse) বলা হয়।
10. দুইটি মূলদ সংখ্যার গুণফল $ab=0$ হলে, $a=0$ অথবা $b=0$ অথবা a এবং b উভয়ই 0 হবে।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number): যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসেবে প্রকাশ করা যায় না তাকে অমূলদ সংখ্যা বলে। অর্থাৎ, যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে $p,q\in Z$ ও সহমৌলিক এবং $q \neq 0$, অমূলদ সংখ্যার সেট **Q′** বা $\mathbf{Q}^c$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $Q'=\{x: x\in \mathbf{R}$ এবং $x\notin Q\}$। যেমনঃ $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{7}\sqrt{13},\pi,e$........ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা।

উল্লেখ্য যে, অমূলদ সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে তা সসীম দশমিক বা পৌন:পুণিক কোনো আকারেই প্রকাশ করা যায় না। যেমন- $\sqrt{3}=1.73205080757.$

উদাহরণ 1: প্রমাণ করুন যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।
সমাধানঃ মনে করুন, $\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা p এবং q এর অনুপাত; যেখানে, $q\neq 0$ এবং q-এর 1 ছাড়া কোন সাধারণ উৎপাদক নেই, তাহলে, $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$

$\Rightarrow 3 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Rightarrow p^2 = 3.q^2$...........(i)

যেহেতু, ডানদিকে 3 এর গুণিতক, অতএব বামপক্ষে 3-এর গুণিতক হবে, অর্থাৎ p^2 সংখ্যাটি 3 এর গুণিতক।

সুতরাং p সংখ্যাটিও 3 এর গুণিতক।

অতএব, $p = 3m$..........(ii) যেখানে m একটি অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore p^2 = 9m^2$

বা, $3q^2 = 9m^2$ [(i)সমীকরণ থেকে পাই]

বা, $q^2 = 3m^2$

পূর্বের মত যুক্তি প্রয়োগ করে বলা যায় যে, q^2,3 এর গুণিতক হবে, সুতরাং q ও 3-এর গুণিতক।

অতএব, লেখা যায় যে, $q = 3n$.........(iii) যেখানে, একটি n অখণ্ড সংখ্যা।

(i), (ii) এবং (iii) নং থেকে পাই, p এবং q দুইটিই 3-এর গুণিতক সংখ্যা এবং যাদের সাধারণ উৎপাদক আছে এবং যা প্রথমে যে শর্ত ধরা হয়েছিল তার বিপরীত।

সুতরাং, $\sqrt{3}$ মূলদ সংখ্যা নয় এটি একটি অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ 2: প্রমাণ করুন যে, $\sqrt{15}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধানঃ $\sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$

মনে করুন, $\sqrt{5}$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা p এবং q এর অনুপাত; যেখানে, $q \neq 0$ এবং q-এর 1 ছাড়া কোন সাধারণ উৎপাদক নেই।

তাহলে, $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow 25 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Rightarrow p^2 = 25q^2$..........(i)

যেহেতু ডানদিকে 5 এর গুণিতক, অতএব বামপক্ষে 5-এর গুণিতক হবে, অর্থাৎ p^2 সংখ্যাটি5 এর গুণিতক।

সুতরাং p সংখ্যাটিও 5এর গুণিতক।

অতএব, $p = 5m$..........(ii) যেখানে m একটি অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore p^2 = 25m^2$

বা, $5q^2 = 25m^2$ [(i) সমীকরণ থেকে পাই]

বা, $q^2 = 5m^2$

পূর্বের মত যুক্তি প্রয়োগ করে বলা যায় যে, q^2,5 এর গুণিতক হবে, সুতরাং q ও 5-এর গুণিতক।

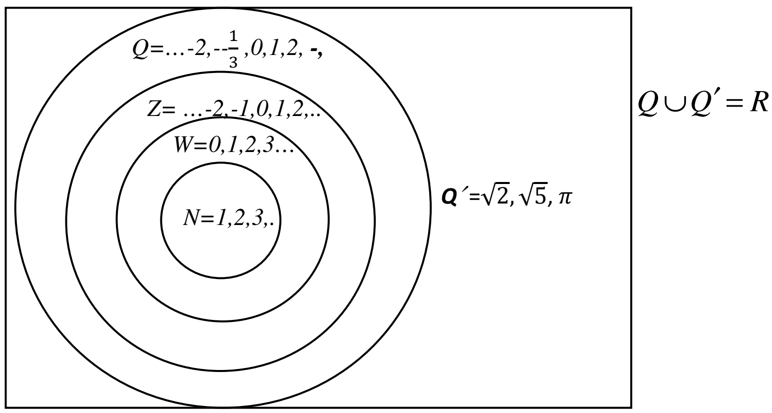
অতএব, লেখা যায় যে, $q = 5n$.........(iii) , যেখানে, n একটি অখণ্ড সংখ্যা।

(i), (ii) এবং (iii) নং থেকে পাই, p এবং q দুইটিই 5-এর গুণিতক সংখ্যা এবং যাদের সাধারণ উৎপাদক আছে এবং যা প্রথমে যে শর্ত ধরা হয়েছিল তার বিপরীত।

সুতরাং, $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা নয় এটি একটি অমূলদ সংখ্যা।

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\sqrt{3}$ মূলদ সংখ্যা নয়; এটিও একটি অমূলদ সংখ্যা।
সুতরাং, $\sqrt{15}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

বাস্তব সংখ্যা (Real number): ধনাত্মক সংখ্যা, ঋনাত্মক সংখ্যা এবং শূন্য নিয়ে একত্রে বাস্তব সংখ্যা গঠিত হয়। যেমন- 5, 1, 0, -8, $-\frac{3}{7}$, $\sqrt{3}$, π ....ইত্যাদি বাস্তব সংখ্যা। বাস্তব সংখ্যার সেটকে আবার অন্যভাবেও প্রকাশ করা যায় যেমন, সকল মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেটকে বাস্তব সংখ্যার সেট (Set of real number) বলা হয়। ১৮৭১ খ্রিষ্টাব্দে জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (George Cantor, 1845-1918) বাস্তব সংখ্যা নির্ণয়ে কৃতিত্ব অর্জন করেন। তিনি প্রমাণ করেন যে, বাস্তব সংখ্যা স্বাভাবিক সংখ্যা হতে অনেক বেশি। তিনি দেখান যে, মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা নিয়ে বাস্তব সংখ্যাগঠিত। প্রত্যেক মূলদ বা অমূলদ সংখ্যাই এক একটি বাস্তব সংখ্যা। বাস্তব সংখ্যার সেট **R** দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}'$; **Q** এবং **Q**$'$ সেটগুলো প্রত্যেকেই বাস্তব সংখ্যা সেটের উপসেট। বাস্তব সংখ্যা **R** এর সাথে উপসেট সমূহের সম্পর্ক নিম্নরূপ: $N \subset W \subset Z \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ এবং $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}'$এই পারস্পরিক সম্পর্কগুলো নিচের ভেনচিত্রে দেখানো হলো:



বাস্তবসংখ্যার বৈশিষ্ট্য(Properties of Real Number):

(a) যোগের স্বীকার্য (Addition of axioms)

1. **আবদ্ধতা ধর্ম (Closure):** দুইটি সংখ্যাa, $b \in \mathbf{R}$ হলে এর যোগফল $a+b$ একটি বাস্তবসংখ্যা হবে।
2. **বিনিময়বিধি (Commutative Law):** a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যার সেটের অন্তর্ভুক্ত হলে, $a+b = b+a$ হবে।
3. **সংযোগবিধি (Associative Law):** সকল $a, b, c \in \mathbf{R}$ হলে, $(a + b) + c = a + (b + c)$ হবে।
4. **যোগের বিপরীত উপাদানের অস্তিত্ব (Additive Inverse):** সকল $a \in \mathbf{R}$ এর জন্য একটি মাত্র $-a \in \mathbf{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $a + (-a) = (-a) + a = 0$ হবে। এখানে, $-a$ কে a এর যোগের বিপরীত (Additive Inverse) বলা হয়।
5. **বণ্টনবিধি (Distributive Law):** সকল $a, b, c \in \mathbf{R}$ এর জন্য $c(a + b) = ca + cb$।
6. **বিলোপসাধন (Cancellation):** যদি $a, b, c \in \mathbf{R}$ এর মধ্যে সম্পর্ক এমন হয় যে,
   $a + c = b + c$ তবে, $a = b$ হবে।

(b) গুণন স্বীকার্য (Multiple axioms)

1. **আবদ্ধতা ধর্ম (Closure)**: সকলa, $b \in \mathbf{R}$ এর জন্য $a \times b \in \mathbf{R}$.
2. **বিনিময়বিধি (Commutative Law):** সকলa, $b \in \mathbf{R}$ এর জন্য $a \times b = b \times a$
3. **সংযোগবিধি (Associative Law):** সকল a, b, $c \in \mathbf{R}$ এর জন্য $(ab)c = a(bc)$
4. **অভেদক (Identity):** R এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি সংখ্যা এক (1) আছে, সেখানে সকল$a \in \mathbf{R}$ এর জন্য $a \times 1 = 1 \times a = a$ হয়। ‘1’ কে গুণনের ক্ষেত্রে **R** এর অভেদক বলা হয়।

5. গুণনের বিপরীতকরণ (Multiplicative Inverse): সকল $a \in \mathbf{R}$ এবং $a \neq 0$ এর জন্য একটি মাত্র $a^{-1} \in \mathbf{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$ হয়। এখানে, a^{-1}কে aএর **গুণনের বিপরীতকরণ** (Multiplicative Inverse) বলা হয়।

6. বিলোপসাধন (Cancellation): তিনটি মূলদ সংখ্যা, $a, b, c \in \mathbf{R}$ এর মধ্যে যদি সম্পর্ক এমন হয় যে, $a \times c = b \times c$ তবে, $a = b$ হবে।

7. বন্টনবিধি (Distributive Law): সকল $a, b, c \in \mathbf{R}$ এর জন্য (i) $a(b + c) = ab + ac$, (ii) $(b + c)a = ba + ca$

8. দুইটি মূলদ সংখ্যার গুণফল $ab=0$ হলে, $a=0$ অথবা $b=0$ অথবা a এবং b উভয়ই 0 হবে।

সারসংক্ষেপ

- সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও শূন্য মিলে যে নতুন সংখ্যাগোষ্ঠী পাওয়া যায় তাকে পূর্ণসংখ্যার সেট বলা হয়।
- সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়।
- যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার ভাগফলরূপে প্রকাশ করা যায় তাকে মূলদ সংখ্যা বলে। যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার ভাগফল রূপে প্রকাশ করা যায় না তাকে অমূলদ সংখ্যা বলে।
- সকল মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা নিয়ে গঠিত সংখ্যার সেটকে বাস্তব সংখ্যার সেট বলা হয়।

পাঠ–১.২ সংখ্যারেখা এবং পরমমান
Number Line and Absolute Value

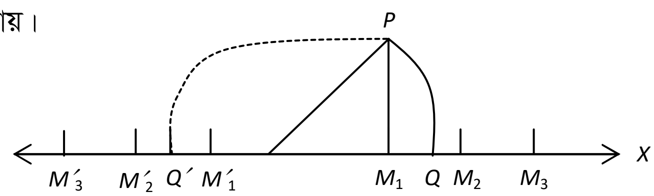
উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ বর্ণনা করতে পারবেন;
- বাস্তব সংখ্যাকে সংখ্যা রেখায় দেখাতে পারবেন;
- পরমমান কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- পরমমানের ধর্ম বর্ণনা করতে পারবেন;
- পরমমানের ধর্মসমূহ প্রমাণ করতে পারবেন।

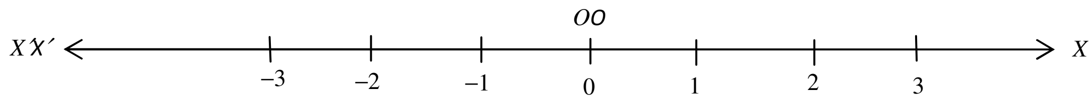
বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ
Geometrical interpretation of real number

বাস্তব সংখ্যা বলতে মূলদ ও অমূলদ দুই ধরনের সংখ্যাকে বোঝায়। এখানে মূলদ ও অমূলদ এ দুই প্রকার সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ দেখানো হলো। বাস্তব সংখ্যার একটি উল্লেখযোগ্য ধর্ম হচ্ছে, বাস্তব সংখ্যাসমূহ একটি সরল রেখার বিভিন্ন বিন্দু দিয়ে চিহ্নিত করা যায়।



মনে করুন, অসীম সরলরেখা $X'OX$ এর উপর একটি স্থির মূলবিন্দু O। মূলবিন্দুর ডানদিকে যেকোনো দূরত্বকে একক ধরে সমান সমান ঐ দূরত্ব নিয়ে 1, 2, 3, ...সূচিত করা হয়। আবার মূলবিন্দুর বামদিকে সমান সমান ঐ দূরত্ব নিয়ে -1, -2,-3, ...সূচিত করা হয়। এখন মনে করুন $\frac{p}{q}$ একটি স্থির মূলদ সংখ্যা। এ সরলরেখার প্রতি একক দৈর্ঘ্যকে q সংখ্যক সমান অংশে ভাগ করলে $\frac{p}{q}$ মূলদ সংখ্যাটিকে ঐ সরলরেখার উপর একটি বিন্দু P দ্বারা সূচিত করা যেতে পারে যদি $OP = p\times\frac{1}{q}$ হয় তাহলে এভাবে একটি সরলরেখার উপর সকল মূলদ একটি জ্যামিতিক প্রতিরূপ কল্পনা করা সম্ভব।
কিন্তু দৈর্ঘ্য মাপের এমন কিছু সংখ্যা আছে যারা মূলদ সংখ্যা নয়। মনে করুন, মূলদ সংখ্যা1, 2, 3, ...এবং -1, -2, -3, ...জ্যামিতিক প্রতিরূপ যথাক্রমে M_1, M_2, M_3 ------ এবং M'_1, M'_2, M'_3 --- বিন্দুগুলো চিহ্নিত করা হলো। PM_1= 1 একক ধরে $X'OX$ রেখা M_1 বিন্দুতে PM_1 লম্ব অংকন করা হলে OPM_1 একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত হয়। যার অতিভুজ $OP=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$। এখন O বিন্দুকে কেন্দ্র করে $OP=\sqrt{2}$ এর সমান ব্যসার্ধ নিয়ে M_1 এর ডান পার্শ্বে এবং M'_1 এর বামপার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অংকন করুন যা যথাক্রমে Q ও Q' বিন্দুতে সূচিত হয়। এ বিন্দু দুইটি যথাক্রমে $\sqrt{2}$ এবং $-\sqrt{2}$ এর প্রতিরূপ বিন্দু।
তাহলে বলা যায়, Q ও Q' বিন্দু দুইটি $\sqrt{2}$ এবং $-\sqrt{2}$ এর জ্যামিতিক প্রকাশ। কিন্তু আমরা জানি, $\sqrt{2}$ কোনো মূলদ সংখ্যা নয়। সুতরাং Q ও Q' বিন্দু দুইটি কোনো মূলদ সংখ্যার প্রতিরূপ বিন্দু নয়। এরা দুইটি অমূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ বলে বিন্দু দুইটিকে অমূলদ বিন্দু বলা হয়। একইভাবে, $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}$ বা $\sqrt{3}$ বা অন্যান্য অমূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ দেখানো যায়। সুতরাং $X'OX$ রেখাটির উপর অসংখ্যক মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার প্রতিরূপ বিন্দু অঙ্কন করা সম্ভব এবং এ সকল বিন্দু বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ।

সংখ্যারেখা (Number line): সকল বাস্তব সংখ্যাই অসীম দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত। এ নির্দিষ্ট রেখাটিকে সংখ্যারেখা বা বাস্তব রেখা (Real line) বলা হয়।

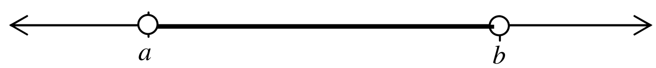


বাস্তব সংখ্যার ব্যবধি (Interval): বাস্তব সংখ্যার সেটের বিশেষ ধরণের উপসেটকে ব্যবধি বলা হয়। ব্যবধি প্রধানত দুই প্রকারের। যথা: (i) সসীম ব্যবধি (ii) অসীম ব্যবধি।

সসীম ব্যবধি: $a<b$ বাস্তব সংখ্যা হলে a ও b এর মধ্যবর্তী সকল সংখ্যার সেটকে সসীম ব্যবধি বলা হয়। প্রান্তবিন্দু a, b বিশিষ্ট চারটি সসীম ব্যবধি হতে পারে; যথা-

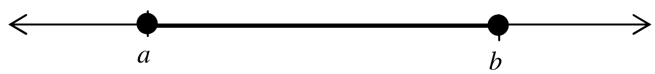
(i) $(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$, উন্মুক্ত ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:



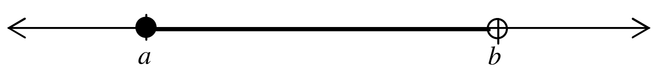
(ii) $[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$, বদ্ধ ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:



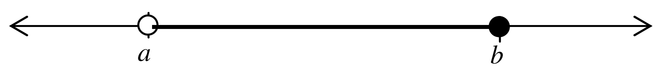
(iii) $[a,b)=\{x\in R: a\le x<b\}$, বদ্ধ-উন্মুক্ত ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:



(iv) $(a,b]=\{x\in R: a<x\le b\}$, উন্মুক্ত-বদ্ধ ব্যবধি

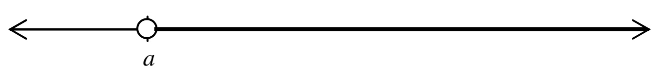
সংখ্যারেখায়:



অসীম ব্যবধি

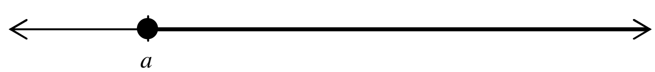
a যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে a এর চেয়ে বড়, কিংবা a এর চেয়ে ছোট, সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অসীম ব্যবধি বলা হয়। a সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত হতে পারে, আবার নাও হতে পারে। সুতরাং প্রান্তবিন্দু a বিশিষ্ট চারটি অসীম ব্যবধি হতে পারে। যথা: (i) $(a,\infty)=\{x\in R: x>a\}$, ডানে অসীম উন্মুক্ত ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:



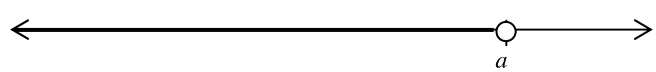
(ii) $[a,\infty)=\{x\in R: x\ge a\}$, ডানে অসীম বদ্ধ ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:



(iii) $(-\infty,a)=\{x\in R: x<a\}$, বামে অসীম উন্মুক্ত ব্যবধি

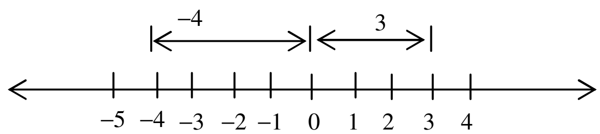
সংখ্যারেখায়:



(iv) $(-\infty,a]=\{x\in R: x\le a\}$, বামে অসীম বদ্ধ ব্যবধি

সংখ্যারেখায়:

পরমমান (Absolute Value): কোনো বাস্তব সংখ্যার পরমমান বলতে তার সংখ্যামানকে বোঝায়। অর্থাৎ সংখ্যারেখার মূলবিন্দু এবং সংখ্যানির্দেশক বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে সংখ্যাটির পরমমান বলা হয়। বাস্তবসংখ্যা a এর পরমমানকে $|a|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় একে Modulus 'a' বা মড 'a' বলা হয়। উদাহরণ স্বরূপ, সংখ্যারেখায় মূলবিন্দু থেকে -4 এর দূরত্ব 4 একক এবং 3 এর দূরত্ব 3 একক অর্থাৎ -4 এর পরমান 4 এবং -3 এর পরমান 3।



যে কোন বাস্তব সংখ্যা a এর পরমমান, $|a|$ নিম্ন লিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়-

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ যখন } a > 0 \\ a, \text{ যখন } a = 0 \\ -a, \text{ যখন } a < 0 \end{cases}$$

অর্থাৎ a ধনাত্মক বা শূন্য হলে a -এর মান a ; কিন্তু a ঋণাত্মক হলে এর মান $-a$ অতএব সকল $a \in R$ এর জন্য $|a| \geq 0$ জ্যামিতিকভাবে a এর পরমমান হচ্ছে বাস্তব সংখ্যা রেখায় 0 বিন্দু থেকে a বিন্দুর দূরত্ব। অতএব, $|a| < 4$ এর অর্থ মূলবিন্দু 0 থেকে a বিন্দুর দূরত্ব 4 -এর চেয়ে কম অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যা রেখার a এর অবস্থান -4 এবং 4 এর মধ্যে। সুতরাং, $|a| < 4$ এবং $-4 < a < 4$ একই অর্থ বহন করে।

পরমমানের ধর্মসমূহ (Properties of absolute value):

1. সকল $a \in \mathbf{R}$ এর জন্য $|a| \geq a$

প্রমাণ: যখন $a \geq 0$; $|a| = a$ -------- (i)

যখন $a < 0$; $|a| = -a$ অর্থাৎ $|a| > a$ ------- (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $|a| \geq a$

2. সকল $a, b \in R$ এর জন্য এবং $|ab| = |a||b|$

প্রমাণ: $|ab|^2 = (ab)^2 = a^2b^2 = |a|^2\,|b|^2 = (|a|\,|b|)^2$

অর্থাৎ $|ab|^2 = (|a|\,|b|)^2$

যেহেতু $|ab|$ এবং $|a|\,|b|$ উভয়েই ধনাত্মক, সুতরাং $|ab| = |a|\,|b|$

3.সকল $a, b \in \mathbf{R}$ এর জন্য (i) $|a + b| \leq |a| + |b|$, (ii) $|a - b| \leq |a| + |b|$

প্রমাণ: (i) $(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$ $[\therefore |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |a|\,|b| = |ab|]$

$\Rightarrow (|a|+|b|)^2 \geq a^2+2ab+b^2$ $[|ab| \geq ab]$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2$

$\Rightarrow (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$

$\Rightarrow |a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$\therefore |a + b| \leq |a| + |b|$

(ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ সম্পর্কে b এর পরিবর্তে $-b$ বসালে পাওয়া যায়

$|a+(-b)| \leq |a| + |b|$

$|a - b| \leq |a| + |b|$ $[\because |(-b)| = |b|]$

4. সকল $a, b \in \mathbf{R}$ এর জন্য $|a - b| \geq |a| - |b|$

প্রমাণ: $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$

$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

$\Rightarrow |a - b| \leq |a| - |b|$ ----------- (i)

আবার, $|b| = |(b-a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$ $[\because |b - a| = |-(a - b)| = |a - b|]$

$\Rightarrow |a - b| \geq |b| - |a|$

$\Rightarrow |a - b| \geq -(|a| - |b|)$

$\Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b|$ ------ (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই-

$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$

$\Rightarrow |\,|a| - |b|\,| \leq |a - b|$

$\Rightarrow |a - b| \geq |\,|a| - |b|\,|$

5. $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

6. $x - a| \leq b \Rightarrow a - b \leq x \leq a + b$

7. $x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ অথবা, $x \leq -a$

8. $a, b \in R$ **এবং** $b \neq 0$ **এর জন্য** $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

9. $a \in R$ **এর জন্য** $|-a^2| = |a|^2 = a^2$

10. $a \in R$ **এর জন্য** $|a| = |-a|$

উদাহরণ 1: পরমমান চিহ্ন ব্যবহার না করে অসমতা প্রকাশ করুন: (i) $|x - 4| < 10$ (ii) $|3x + 6| < 9$

সমাধান:

(i) $|x - 4| < 10$

$\Rightarrow -10 < x - 4 < 10$

$\Rightarrow -10 + 4 < x - 4 + 4 < 10 + 4$

$\Rightarrow -6 < x < 14$

(ii) $|3x + 6| < 9$

$\Rightarrow -9 < 3x + 6 < 9$

$\Rightarrow -9 - 6 < 3x + 6 - 6 < 9 - 6$

$\Rightarrow -15 < 3x < 3$

$\Rightarrow -5 < x < 1$

সারসংক্ষেপ:

- সকল বাস্তব সংখ্যাই অসীম দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত। এ নির্দিষ্ট রেখাটিকে সংখ্যারেখা বলা হয়।
- $a<b$ বাস্তব সংখ্যা হলে a এবং b এর মধ্যবর্তী সকল সংখ্যার সেটকে সসীম ব্যবধি বলা হয়।
- a যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে a এর চেয়ে বড়, কিংবা a এর চেয়ে ছোট, সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অসীম ব্যবধি বলা হয়।
- সকল $a \in \mathrm{R}$ এর জন্য, $-|a| \leq a \leq |a|$
- সকল $a \in \mathrm{R}$ এর জন্য, $|a| \geq a$
- সকল $a, b \in \mathrm{R}$ এর জন্য, (i) $|a + b| \leq |a| + |b|$, (ii) $|a - b| \leq |a| + |b|$

পাঠ-১.৩ কাল্পনিক সংখ্যা এবং জটিল সংখ্যা
Imaginary Numbers and Complex Numbers

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- কাল্পনিক সংখ্যা কী তা বর্ণনা করতে পারবেন;
- জটিল সংখ্যার সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন;
- জটিল সংখ্যার গুণাবলি বলতে পারবেন;
- আরগঁ চিত্রের সাহায্যে জটিল সংখ্যার ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

কাল্পনিক সংখ্যা
Imaginary Numbers

ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলকে কাল্পনিক সংখ্যা বলে। ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গ সব সময় ধনাত্মক হয়। কিন্তু কোন ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল কখনও বাস্তব সংখ্যা হতে পারে না। কতিপয় দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করলে কাল্পনিক সংখ্যার উদ্ভব হয়। যেমন: $x^2+4=0$

$\Rightarrow x^2=-4$

$\Rightarrow x=\sqrt{-4}$

$\Rightarrow x=\sqrt{-1}\times\sqrt{4}$

$\Rightarrow x=2i\ [\because \sqrt{-1}=i\,]$

কাল্পনিক সংখ্যার একক i দ্বারা সূচিত হয়। $i=\sqrt{-1}$, অথবা, $i^2=-1$ ।

কাল্পনিক সংখ্যা দুই শ্রেণির। যথা- (ক) বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা (খ) অবিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা

(ক) বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা (Pure imaginary numbers): ib আকারের সংখ্যাকে বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা বলা হয়। যেমন: $\pm i, \pm 3i, \pm 5i$ ইত্যাদি আকারের সংখ্যাকে বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা।

(খ) অবিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা (Impure Imaginary Numbers): $a+ib$ আকারের সংখ্যাকে অবিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা বলে। যেমন: $1\pm i, \sqrt{5}\pm 3i, -3\pm 5i$ ইত্যাদি আকারের সংখ্যাকে অবিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা বলা হয়।

জটিল সংখ্যা (Complex Numbers): a এবং b দুইটি বাস্তব সংখ্যা হলে $a\pm ib$ আকারের প্রকাশিত সংখ্যাকে জটিলসংখ্যা বলা হয়। জটিলসংখ্যা হলো বাস্তব ও কাল্পনিক সংখ্যার সমষ্টি। এখানে a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং i কাল্পনিক সংখ্যা। এখন-

(i) যদি জটিল সংখ্যা $a+ib$ তে $a=0$ হয়, তবে $0+ib$ হবে একটি বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা পাওয়া যাবে।

(ii) যদি জটিল সংখ্যা $a+ib$ তে $b=0$ হয়, তবে জটিল সংখ্যাটি বাস্তব সংখ্যায় পরিণত হবে।

(iii) দুইটি জটিল সংখ্যা $a+ib$ এবং $a-ib$ কে অনুবন্ধী (Complex conjugate) বলে। যেমন: $2+3i$ এবং $2-3i$ অনুবন্ধী।

জটিলসংখ্যার গুণাবলি (Properties of Complex Number):

1. যদি $a+ib=0$ হয়, যেখানে, $a,b\in R$ তবে $a=0$ এবং $b=0$ হবে।

প্রমাণ: $a+ib=0$

বা, $a=-ib$

বা, $a^2 = (-ib)^2$,

বা, $a^2 = (i)^2 \times (b)^2$, $[\because (i)^2 = -1]$

বা, $a^2 = -b^2$

$\therefore a^2 + b^2 = 0$

যেহেতু a^2 এবং b^2 প্রত্যেকে যোগবোধক। সুতরাং প্রত্যেকটি পৃথক পৃথকভাবে 0 না হলে $a^2 + b^2 = 0$ (শূন্য) হতে পারে না।

$\therefore a^2 = 0$ এবং $b^2 = 0$

$\therefore a = 0$ এবং $b = 0$

2. যদি দুইটি জটিল সংখ্যা পরস্পর সমান হয় তবে একটির বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশ যথাক্রমে অপরটির বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশের সমান হবে। অর্থাৎ, যদি $a + ib = c + id$ হয় তবে $a = c$ এবং $ib = id$ হবে বা $b = d$ হবে।

প্রমাণঃ যেহেতু, $a + ib = c + id$

$\Rightarrow a - c = id - ib$

$\Rightarrow a - c = i(d - b)$

$\Rightarrow (a - c)^2 = i^2(d - b)^2$

$\Rightarrow (a - c)^2 = -(d - b)^2 [\because (i)^2 = -1]$

$\Rightarrow (a - c)^2 + (d - b)^2 = 0$

যেহেতু,$(a - c)^2$এবং $(d - b)^2$ প্রত্যেকটি যোগবোধক।

সুতরাং, প্রত্যেকটি পৃথক পৃথক ভাবে 0 না হলে যোগফল 0 হতে পারে না।

$(a - c)^2 = 0$

$\Rightarrow a - c = 0, \therefore a = c$

আবার, $(d - b)^2 = 0$

$\Rightarrow d - b = 0$

$\Rightarrow d = b, \therefore b = d$

অতএব, $a = c$ এবং $b = d$

3. দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার সমষ্টি ও গুণফল সর্বদাই বাস্তব সংখ্যা হবে।

প্রমাণঃ মনে করুন, $z = a + ib$, অতএব$\bar{z} = a - ib$

সুতরাং, $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib)$

$= a + ib + a - ib$

$= 2a$একটি বাস্তব সংখ্যা।

আবার, $\mathrm{z}.\bar{\mathrm{z}} = (a + ib).(a - ib)$

$= a^2 - (ib)^2$

$= a^2 - (i)^2(b)^2$

$= a^2 - (-1)(b)^2 = a^2 + b^2$একটি বাস্তব সংখ্যা।

4. অনুবন্ধী নয় এরূপ দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল প্রতিটিই এক একটি জটিল সংখ্যা হবে।

প্রমাণঃ মনে করুন, $z_1 = a_1 + ib_1$এবং $z_2 = a_2 + ib_2$ দুইটি জটিল সংখ্যা। তাহলে,

যোগফলঃ $z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$, যা একটি জটিল সংখ্যা।

বিয়োগফল: $z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$, যা একটি জটিল সংখ্যা।

গুণফল: $z_1 \times z_2 = (a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2)$

$$= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2$$
$$= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + (-1)b_1b_2 [\because (i)^2 = -1]$$
$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$, যা একটি জটিল সংখ্যা নির্দেশ করে।

ভাগফল: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)\times(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)\times(a_2-ib_2)}$, [লব ও হরকে $(a_2 - ib_2)$ দ্বারা গুণ করে পাই]

$$= \frac{(a_1+ib_1)\times(a_2-ib_2)}{{a_2}^2-i^2{b_2}^2}$$

$$= \frac{a_1a_2-ia_1b_2+ia_2b_1-i^2b_1b_2}{{a_2}^2-(-1){b_2}^2} \; [\because (i)^2 = -1]$$

$$= \frac{a_1a_2-ia_1b_2+ia_2b_1-(-1)b_1b_2}{{a_2}^2+{b_2}^2} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)-i(a_1b_2-a_2b_1)}{{a_2}^2+{b_2}^2}$$

$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{{a_2}^2+{b_2}^2} - i\,\frac{(a_1b_2-a_2b_1)}{{a_2}^2+{b_2}^2}$ যা একটি জটিল সংখ্যা।

5. কোনো জটিল সংখ্যার শক্তির সূচক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে সংখ্যাটির একটি জটিল সংখ্যা হবে।

প্রমাণ: মনে করুন, $z = a + ib$ একটি জটিল সংখ্যা। যেখানে, $a, b \in R$

$$z^2 = (a + ib)^2$$
$$= a^2 + 2abi + (ib)^2$$
$= a^2 + i^2b^2 + 2abi = (a^2 - b^2) + 2abi$ যা একটি জটিল সংখ্যা।

$$z^3 = (a + ib)^3$$
$$= a^3 + 3a^2bi + 3a(ib)^2 + (ib)^3g$$
$$= a^3 + 3a^2bi + 3ai^2b^2 + i^3b^3$$
$$= a^3 + 3a^2bi + (-1)3ab^2 + (-1)i\,b^3, [\because (i)^2 = -1]$$
$= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - i\,b^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$ যা একটি জটিল সংখ্যা।

একই ভাবে অগ্রসর হলে z^n একটি জটিল সংখ্যা হবে। যেখানে n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

6. কোন জটিল সংখ্যার মূল একটি জটিল সংখ্যা হবে। অর্থাৎ, $z = a + ib$ এর মূল একটি জটিল সংখ্যা হবে।

প্রমাণ: মনে করুন, $\sqrt[n]{a + ib} = z$

$$a + ib = z^n$$

এখানে, z যদি বাস্তব সংখ্যা হয় তবে z^nএকটি বাস্তব সংখ্যা হবে। সুতরাং দেখা যায় যে, একটি জটিল সংখ্যা একটি বাস্তব সংখ্যার সমান। কিন্তু এটি অসম্ভব। সুতরাং z একটি জটিল সংখ্যা হবে। একটি জটিল সংখ্যার n-তম মূল ও একটি জটিল সংখ্যা হবে।

7. কোন জটিল সংখ্যার অনুবন্ধীর অনুবন্ধী ঐ জটিল সংখ্যা হবে। অর্থাৎ, $\bar{\bar{z}} = z$।

প্রমাণ: $z = a + ib$ হলে $\bar{z} = a - ib$ অতএব, $\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib \therefore \bar{\bar{z}} = z$

উদাহরণ 1: $z_1 = 5 + 3i$ এবং $z_2 = 3 - 2i$ হলে (a) $z_1 + z_2$ (b) $z_1 - z_2$ (c) z_1z_2 (d) $\frac{z_1}{z_2}$ কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ করুন।

সমাধান: (a) $z_1 + z_2 = 5 + 3i + 3 - 2i = 5 + 3 + i(3 - 2) = 8 + i$

(b) $z_1 - z_2 = (5+3i) - (3-2i) = 5 - 3 + 3i + 2i = 2 + 5i$

(c) $z_1 z_2 = (5+3i)\ (3-2i) = 5\times 3 + i(3\times 3) + 5\times(-2)i - 6i = 15 + 9i - 10i - 6\,(-1) = 21 - i$

(d) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+3i}{3-2i} = \frac{(5+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$= \frac{15+10i+9i+6i^2}{9-4i^2}$$

$$= \frac{15+19i-6}{9-4(-1)},\ [\because i^2=-1]$$

$$= \frac{9+19i}{13} = \frac{9}{13} + i\,\frac{19}{13}$$

উদাহরণ 2: $(a)\frac{5+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{16}}$ $(b)\frac{(2+i)^3}{2+3i}$ কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ করুন।

সমাধান: $(a)\ \frac{5+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{16}} = \frac{5+\sqrt{(-1).3}}{3-\sqrt{4^2}} = \frac{5+\sqrt{i^2 3}}{3-4} = \frac{5+i\sqrt{3}}{-1} = -5+\{-i(\sqrt{3})\}$

যা $A+iB$ আকারে গঠিত।

(b) $\frac{(2+i)^3}{2+3i} = \frac{(2+i)^3(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$, [লব ও হরকে $(2-3i)$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{(2^3+3.2^2.i+3.2.i^2+i^3)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{(2^3+12i+6i^2+i^2.i)(2-3i)}{2^2-(3i)^2}\ [\because i^2=-1]$$

$$= \frac{\{2^3+12i+6(-1)+(-1).i\}(2-3i)}{4-9i^2} = \frac{(8+12i-6-i)(2-3i)}{4-9(-1)}$$

$$= \frac{(2+11i)(2-3i)}{4+9} = \frac{4-6i+22i-33i^2}{13} = \frac{4-6i+22i-33(-1)}{13}$$

$$= \frac{4+16i+33}{13} = \frac{37+16i}{13} = \frac{37}{13} + i\,\frac{16}{13}$$ যা $A+iB$ আকারে গঠিত।

সারসংক্ষেপ:

- কাল্পনিক সংখ্যাকে প্রতীক I দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $i^2 = -1$ অর্থাৎ $i = \sqrt{-1}$ । এই $i = \sqrt{-1}$ কে কাল্পনিক সংখ্যার একক মনে করা হয়।
- A এবং b বাস্তব সংখ্যা হলে $a+ib$ আকারের যে কোন সংখ্যাকে জটিল সংখ্যা বলা হয়।
- সকল বাস্তব সংখ্যাই জটিল সংখ্যা কিন্তু সকল জটিল সংখ্যাই বাস্তব সংখ্যা নয়।

$a+ib$ এবং $a-ib$ জটিল সংখ্যা দুটিকে অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বলা হয়। $a+ib$ কে $\mathbf{z}$ দ্বারা প্রকাশ করলে $a-ib$ কে $\bar{z}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়; $\bar{z}$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $\mathbf{z}$ নিজেই।

পাঠ-১.৪ জটিল সংখ্যার বর্গমূল এবং এককের ঘনমূল
Square root of complex numbers and cube roots of one

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- জটিল সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন;
- বর্গমূলের মাধ্যমে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন;
- এককের ঘনমূল কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- এককের ঘনমূলের বিভিন্ন ধর্ম ও বৈশিষ্ট্য লিখতে পারবেন;
- এককের ঘনমূলের ধর্ম ও বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

জটিল সংখ্যার বর্গমূল
Square root of complex number

মনে করুন $a + ib$ একটি জটিল সংখ্যা, এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে। যেহেতু আমরা জানি কোনো জটিল সংখ্যার বর্গমূল একটি জটিল সংখ্যা, সুতরাং মনে করুন, $\sqrt{a+ib} = x + i\ y$, যেখানে a, b, x, y বাস্তব সংখ্যা উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাওয়া যায় $a + ib = x^2 - y^2 + 2\,i\,xy$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমতা বিধান করে পাই, $x^2 - y^2 = a$ ....(i) এবং $2xy = b$ ....(ii)

আমরা জানি, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = a^2 + b^2$

$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ... (iii) (যেহেতু বর্গ সংখ্যার সমষ্টি কখনই ঋণাত্মক হয় না)।

এখন (i) ও (iii) যোগ করে, $2x^2 = \sqrt{a^2 + b^2} + a$

$$\therefore x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}$$

পুনরায় (iii) থেকে (i) বিয়োগ করে, $2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a$

$$\therefore y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$$

মন্তব্য: $2xy = b$ সমীকরণ হতে স্পষ্ট বুঝা যায় যে, b ধনাত্মক হলে x এবং y উভয়ই একই চিহ্ন বিশিষ্ট হবে। সুতরাং $b > 0$ হলে x এবং y উভয়ই হয় ধনাত্মক হবে, না হয় ঋণাত্মক হবে।

অতএব সেক্ষেত্রে নির্ণেয় বর্গমূল $\sqrt{a+ib} = \pm\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + i\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}-a\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$

পুনরায় $b < 0$ হলে x এবং y বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

অতএব সেক্ষেত্রে নির্ণেয় বর্গমূল $\sqrt{a+ib} = \pm\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\right\}^{\frac{1}{2}} - i\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}-a\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$

উদাহরণ 1: $2i$ সংখ্যাটির বর্গমূল নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $\sqrt{2i} = a + ib$

$\Rightarrow 2i = a^2 - b^2 + 2iab$

$\therefore a^2 - b^2 = 0$ ... ... (i)

$2ab = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(\text{ii})$

এখন, $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2$

$\Rightarrow (a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$

$\Rightarrow (a^2+b^2)^2 = 0 + 2^2$

$\Rightarrow a^2+b^2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{iii})$

এখন (i) ও (iii) যোগ করে পাই,

$a^2-b^2+a^2+b^2 = 0+2$

$\Rightarrow 2a^2 = 2$

$\Rightarrow a^2 = 1$

$\Rightarrow a = \pm 1$

(iii) নং থেকে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই-

$a^2 \pm b^2 - a^2 \pm b^2 = 2 - 0$

$\Rightarrow 2b^2 = 2$

$\Rightarrow b^2 = 1$

$\Rightarrow b = \pm 1$

(ii) নং সমীকরণ হতে, যেহেতু a ও b গুণফল ধনাত্মক। অতএব, a এবং b -এর চিহ্ন একই হবে।

$\therefore$নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm 1 \pm i1 = \pm(1 \pm i)$

উদাহরণ 2: $1+i$ সংখ্যাটির বর্গমূল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন, $\sqrt{1+i} = a + ib$

বা, $1+i = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$

বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই, $a^2 - b^2 = 1$ এবং $2ab = 1$

এখন, $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = 1^2 + 1 = 2$

$\therefore \quad a^2 + b^2 = \sqrt{2}$

এবং $\underline{a^2 - b^2 = 1}$

(+) $2a^2 = 1 + \sqrt{2}$

$\therefore a^2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$

$\therefore a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}$

আবার $a^2 + b^2 = \sqrt{2}$

$\underline{a^2 - b^2 = 1}$

$-\ 2b^2 = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow b^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$

$\therefore b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)}$

যেহেতু $2ab = 1$,সুতরাং a এবং b এর চিহ্ন একই হবে

$$\therefore \text{নির্ণেয় বর্গমূল} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]$$

উদাহরণ 3: $7 - 30\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন,$7 - 30\sqrt{-2} = a + ib$

বা, $7 - 30i\sqrt{2} = a + ib$

বা, $7 - i30\sqrt{2} = (a + i\,b)^2$

বা, $7 - i30\sqrt{2} = a^2 - b^2 + 2\,i\,ab$

বাস্তব এবং অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই

$a^2 - b^2 = 7$ ....(i) এবং $2ab = -30\sqrt{2}$ ....(ii)

এখন $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (7)^2 + (-30\sqrt{2})^2$

$= 49 + 900 \times 2 = 49 + 1800 = 1849 = (43)^2$

$\therefore a^2 + b^2 = 43$ দুইটি বর্গ রাশির যোগফল সর্বদাই ধনাত্মক।

$$\begin{array}{ll} a^2 + b^2 = 43 \\ \underline{a^2 - b^2 = 7} \\ (+)\ 2a^2 \quad = 50 \\ \therefore a^2 = 25 \\ \therefore a = \pm 5 \end{array}$$

আবার, $a^2 + b^2 = 43$

$$\begin{array}{l} \underline{a^2 - b^2 = 7} \\ -2b^2 = 36 \\ \therefore b^2 = 18 \\ b = \pm 3\sqrt{2} \end{array}$$

যেহেতু, $2ab = -30\sqrt{2}$

$\therefore ab = -15\sqrt{2}$ যা ঋণাত্মক

সুতরাং a এবং b বিপরীত চিহ্নের হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $\pm(5 - i\,3\sqrt{2})$

একেকের ঘনমূল (Cube Roots of one): মনে করুন, $\sqrt[3]{1} = x$

$$\therefore x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \qquad \therefore x - 1 = 0 \text{ অর্থাৎ, } x = 1$$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \qquad [\because i = \sqrt{-1}]$$

সুতরাং একক-এর ঘনমূল তিনটি যা, $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$। এদের একটি বাস্তব এবং অপর দুইটি জটিল সংখ্যা।

যদি $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \omega$ (ধরা হয়) তবে, $\omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ হবে। সুতরাং একক এর ঘন মূলত্রয় হলো $1, \omega, \omega^2$

একেকের ঘনমূলের ধর্ম ও বৈশিষ্ট্য:

(i) একেকের ঘনমূল তিনটি। যথা: $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$, তিনটি মূলের মধ্যে একটি বাস্তব অপর দুইটি কাল্পনিক। কাল্পনিক ঘনমূল দুইটি একটি অপরটির বর্গ

এখন, $\left\{\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right\}^2 = \frac{1}{4}(1 - 2i\sqrt{3} - 3) = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

আবার, $\left\{\frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right\}^2 = \frac{1}{4}(1 + 2i\sqrt{3} - 3) = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

জটিল মূলদ্বয়ের যেকোনো একটিকে ω (ওমেগা) ধরলে অপরটি ω^2 হবে। অতএব, একেকের তিনটি ঘনমূলকে $1, \omega, \omega^2$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

(ii) এককের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির গুণফল 1

প্রমাণঃ এখানে, এককের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটি, $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

সুতরাং, $\omega.\omega^2 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) \times \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$$= \frac{1}{4}\left\{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2\right\} = \frac{1}{4}\{1-(-3)\} = \frac{1}{4}(1+3) = \frac{1}{4}.4 = 1$$

$\therefore \omega.\omega^2 = 1$

বা $\omega^3 = 1$

(iii) এককের ঘনমূল তিনটির যোগফল 0 (শূন্য) হবে।

প্রমাণঃ এখানে, এককের কাল্পনিক ঘনমূল তিনটি, $1, \omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

সুতরাং, $1+\omega+\omega^2 = 1 + \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right) + \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3}\right)$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3} - 1 - \sqrt{-3})$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-2)$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

$$\therefore 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

(iv) একক-এর জটিল মূলদ্বয় একটি অপরটির বিপরীত।

প্রমাণঃ আমরা জানি, একক-এর জটিল মূলদ্বয়ের গুণফল$= 1$

বা, $\omega.\omega^2 = 1$

$\therefore \omega = \frac{1}{\omega^2}$ বা, $\omega^2 = \frac{1}{\omega}$

(v) কাল্পনিক ঘনমূল দুইটি পরস্পরের অনুবন্ধী

আমরা জানি, $A + iB$ এর অনুবন্ধী $A - iB$ এবং $A - iB$ এর অনুবন্ধী $A + iB$

এককের, জটিল মূলদ্বয় $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right)$ এবং $\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3}\right)$

$\therefore \frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ এর অনুবন্ধী $\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$

বা, $\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$ এর অনুবন্ধী $\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

(vi) ω এর ঘাতসমূহঃ $\omega^3 = 1, \omega^4 = \omega^3.\ \omega = 1.\ \omega = \omega$

$\omega^5 = \omega^3.\ \omega^2 = 1.\ \omega^2 = \omega^2, \omega^6 = \omega^3.\ \omega^3 = 1.1 = 1$ ইত্যাদি

এখন $\omega^{3n} = (\omega^3)^n = 1,\quad \omega^{3n+1} = \omega^{3n}.\ \omega = \omega,\quad \omega^{3n+2} = \omega^{3n}.\ \omega^2 = \omega^2$

এখন, $3n, 3n+1, 3n+2$ এ $n = 0, 1, 2$ ধরে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যাবে।

সাধারণভাবে, $\omega^n = 1, \omega, \omega^2$ হবে যদি n কে 3 দ্বারা ভাগ করলে যথাক্রমে 0, 1, 2 অবশিষ্ট থাকে।

উদাহরণ 4: -1 এর ঘনমূল নির্ণয় করুন।

সমাধান: -1 এর ঘনমূল $= \sqrt[3]{-1}$

মনে করুন, $\sqrt[3]{-1} = a$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{-1}\right)^3 = a^3$$
$$\Rightarrow -1 = a^3$$
$$\Rightarrow a^3 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (a+1)(a^2 - a.1 + 1^2) = 0$$
$$\Rightarrow (a+1)(a^2 - a + 1) = 0$$

হয়, $a + 1 = 0$, অথবা, $a^2 - a + 1 = 0$

এখন, $a = -1$, অথবা, $a^2 - a + 1 = 0$

আবার, $a^2 - a + 1 = 0$

$$\therefore a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2.1}$$
$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2.1}$$
$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$
$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore a = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

সুতরাং, -1 এর ঘনমূল তিনটি $-1, \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$

উদাহরণ 5: i এর ঘনমূল নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $i^{\frac{1}{3}} = a$

বা, $i = a^3$ বা, $a^3 = i = -i^3$

বা, $a^3 + i^3 = 0$ বা, $(a + i)(a^2 - ia + i^2) = 0$

বা, $(a + i)(a^2 - ia - 1) = 0$

হয়, $a + i = 0$ বা, $a = -i$

অথবা $a^2 - ia - 1 = 0$

$$\therefore a = \frac{i \pm \sqrt{(-i)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$
$$\therefore a = \frac{i \pm \sqrt{-1 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$
$$\therefore a = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$$

সুতরাং i এর ঘনমূল সমূহ $-i, \frac{1}{2}\left(i + \sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(i - \sqrt{3}\right)$

উদাহরণ 6: 27 এর ঘনমূল নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $\sqrt[3]{27} = x$

বা, $27 = x^3$

বা, $x^3 - 27 = 0$

বা, $x^3 - 3^3 = 0$

বা, $(x-3)(x^2 + x.3 + 3^2) = 0$

বা, $(x-3)(x^2 + 3x + 9) = 0$

হয়, $x - 3 = 0$ বা, $x = 3$

অথবা $x^2 + 3x + 9 = 0$

$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4.1.9}}{2.1}$

$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm i\sqrt{27}}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{27}), \frac{1}{2}(-3 - i\sqrt{27})$

সুতরাং, 27 এর ঘনমূলসমূহ: $3, \frac{1}{2}\left(-3 + i\sqrt{27}\right)$ এবং $\frac{1}{2}(-3 - i\sqrt{27})$

উদাহরণ 7: একক-এর একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, প্রমাণ করুন যে

$(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)(1 - \omega^8 + \omega^6) = 16$

সমাধান: আমরা জানি, একক -এর একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\omega^3 = 1$ এবং $1 + \omega + \omega^2 = 0$

এখন, $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)(1 - \omega^8 + \omega^{16})$

$= (1 + \omega^2 - \omega)(1 - \omega^2 + \omega^3.\ \omega)(1 - \omega^3.\ \omega + \omega^6\omega^2)(1 - \omega^6.\ \omega^2 + \omega^{15}.\ \omega)$

$= (1 + \omega^2 - \omega)(1 - \omega^2 + \omega)(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega)$

$= \{(1 + \omega^2 - \omega)(1 - \omega^2 + \omega)\}^2$

$= \{(1 + \omega + \omega^2 - 2\omega)(1 + \omega + \omega^2 - 2\omega^2)\}^2$

$= \{(0 - 2\omega)(0 - 2\omega^2)\}^2 = (4\omega^3)^2 = 16\omega^6 = 16$

সারসংক্ষেপ:

- $a + ib$ একটি জটিলসংখ্যা হলে এর বর্গমূল হবে, $\sqrt{a+ib} = \pm\left[\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + i\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} - a\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$
- একক এর ঘনমূলত্রয় হলো $1, \omega, \omega^2$ এগুলোর মান যথাক্রমে $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
- একক এর ঘনমূলত্রয়ের যোগফল এবং গুণফল যথাক্রমে $1 + \omega + \omega^2 = 0$ এবং 1

ইউনিটমূল্যায়ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1 - 8):

1. বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে সর্বপ্রথম ধারণা প্রদান করেন কে?

(ক) জন ওয়ালিস (খ) জর্জ ক্যান্টর (গ) জন ভেন (ঘ) রামানুজন

2. নিচের কোনটি সত্য?

(ক) $-5 \in N$ (খ) $\frac{2}{3} \in Z$ (গ) $\pi \in R$ (ঘ) $-\sqrt{2} \in Q$

3. নিচের কোনটি সত্য?

(ক) $P \subset N \subset Z \subset Q$ (খ) $N \subset P \subset Z \subset Q$ (গ) $Q \subset Z \subset N \subset P$ (ঘ) $Z \subset P \subset N \subset Q$

4. নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) সকল মূলদ সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা (খ) সকল স্বাভাবিক সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা

(গ) সকল পূর্ণ সংখ্যা স্বাভাবিক সংখ্যা (ঘ) সকল বাস্তব সংখ্যা মূলদ সংখ্যা

5. সংখ্যারেখায় চিহ্নিত করা যায়-

(i) ঋণাত্মক সংখ্যা (ii) মূলদ সংখ্যা (iii) অবাস্তব সংখ্যা

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

6. (a, b) ব্যবধি বলতে বোঝায়-

(ক) $\{x \in R: a \le x < b\}$ (খ) $\{x \in R: a < x < b\}$ (গ) $\{x \in R: a < x \le b\}$ (ঘ) $\{x \in R: a \le x \le b\}$

7. $[a, b)$ ব্যবধি বলতে বোঝায়-

(ক) $\{x \in R: a < x < b\}$ (খ) $\{x \in R: a < x \le b\}$ (গ) $\{x \in R: a \le x < b\}$ (ঘ) $\{x \in R: a \le x \le b\}$

8. ব্যবধি সম্পর্কিত উদাহরণ হলো-

(i) $x \in Z$ এবং $x \in [1, 3]$ হলে x এর মানের সেট $\{1, 2, 3\}$

(ii) $x \in Z$ এবং $x \in [1, 3]$ হলে x এর মানের সেট $\{2, 3\}$

(iii) $x \in Z$ এবং $x \in [1, 3)$ হলে x এর মানের সেট $\{1, 2\}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) iও iii (ঘ) i, ii ও iii

9. প্রমাণ করুন যে, $\sqrt{11}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

10. প্রমাণ করুন যে, $\sqrt{13}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

11. প্রমাণ করুন যে, $\sqrt{21}$ একটি অমূলদ সংখ্যা

12. বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ ব্যাখ্যা করুন।

13. ব্যবধি বলতে কী বোঝায়? সসীম ও অসীম ব্যবধি ব্যাখ্যা করুন।

14. সকল $a, b \in \mathbf{R}$ এর জন্য প্রমাণ করুন।

(a) $|a|^2 = a^2 = |-a|^2$ এবং $|ab| = |a|\,|b|$ (b) (i) $|a + b| \le |a| + |b|$ (ii) $|a - b| \le |a| + |b|$ (c) $|a - b| \ge |a| - |b|$

15. পরমমান নির্ণয় করুন: (a) $\left|6-5\sqrt{2}\right|$ (b) $|x-3|$ (c) $|3x-10|$ (d) $|-3-5|$

(e) $|x-3| + |-2-3| + |-3-5|$

১৬. $-i$ এর বর্গমূল নির্ণয় করুন।

১৭. 64 সংখ্যাটির ঘনমূল নির্ণয় করুন।

১৮. নিচের সমস্যাগুলোকে $A + iB$ আকারে প্রকাশ করুন

(a) $\frac{3+\sqrt{-7}}{8-\sqrt{49}}$ (b) $\frac{(1+i)^3}{4+3i}$ (c) $(7-4i)(2+3i)(1-2i)$

(d) $\frac{5-12i}{3+4i}$ (e) $\frac{3+2i}{2-5i} + \frac{3-2i}{2+5i}$

উত্তরমালা

---

1. (খ) 2. (গ) 3. (গ) 4. (খ) 5.(খ) 6. (ক) 7. (গ) 8.(গ)

16. $\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ 17. 4, $(-2+ 2i\sqrt{2})$, $(-2- 2i\sqrt{2})$

18. (a) $3+i\sqrt{7}$ (b) $\frac{-2}{25} + i\,\frac{14}{25}$ (c) $52-39i$ (d) $\frac{-33}{25} + i\,\frac{56}{25}$ (e) $\frac{-8}{29}$